MAURO PICONE

Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale lineare ordinaria del second'ordine

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 11 (1910), exp. nº 1, p. 1-144
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1910_1_11__A1_0>

MAURO PICONE

SUI VALORI ECCEZIONALI DI UN PARAMETRO

DA CUI DIPENDE

UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE ORDINARIA

DEL SECOND'ORDINE

TESI D'ABILITAZIONE ALL'INSEGNAMENTO

INTRODUZIONE

Max Mason, nella sua Memoria: *On the boundary value problems of linear ordinary differential equations of second order* [1]), considera l'equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+\left\{\lambda A(x)+B(x)\right\}y=0 \tag{1}$$

contenente il parametro arbitrario λ, dove $p(x)$, $A(x)$ e $B(x)$ sono, nel tratto finito (a, b), funzioni reali finite e continue della variabile reale x, e dimostra l'esistenza di infiniti valori reali di λ (i così detti *valori eccezionali* di λ) per ciascuno dei quali esiste un integrale della (1), non identicamente nullo [2]) (la *soluzione eccezionale corrispondente a quel valore eccezionale),* soddisfacente alle condizioni

$$\begin{cases} L_1 y \equiv a_1 y(a) + a_2 y(b) + a_3 y'(a) + a_4 y'(b) = 0 \\ L_2 y \equiv b_1 y(a) + b_2 y(b) + b_3 y'(a) + b_4 y'(b) = 0\,, \end{cases} \tag{2}$$

supposte le a_i e b_i quantità reali assegnate, nelle seguenti ulteriori ipotesi:

a) $B(x) \leq 0$ in (a, b),

b) posto

$$a_i\, b_k - a_k\, b_i = d_{ik}\ ,$$

---

[1]) Transactions of the American Matematical Society, vol. 7 (1906), pp. 337-369.

[2]) Tale integrale potrà anche dipendere (linearmente e omogeamente) da due costanti arbitrarie.

vale la relazione

$$d_{24} = e^{\int_a^b p\,dx} d_{13} ,$$

c) quelli fra i determinanti $d_{12}, d_{14}, d_{23}, d_{43}$ che non sono nulli hanno tutti lo stesso segno.

In questa memoria del Mason viene dunque, per la prima volta, abbandonata ogni ipotesi riguardante i cambiamenti di segno in (a, b) della funzione $A(x)$, ipotesi dalle quali, nelle questioni sull'argomento a cui appartiene il risultato su enunciato, non si era riusciti a liberarsi del tutto.

Nel metodo seguito dal Mason, l'esistenza di ciascun valore eccezionale e della corrispondente soluzione eccezionale viene provata dimostrando l'esistenza del minimo di una certa espressione composta di integrali in determinati campi funzionali. Questo metodo è analogo a quello classico seguito da H. Weber nell'equazione delle membrane vibranti.

Nella mia tesi di Laurea: *Su un problema al contorno nelle equazioni differenziali lineari ordinarie del second'ordine* [1]), vi è (cap. X) un primo accenno a considerare, nel caso $p(x) \equiv 0$ e $B(x) \equiv 0$, la funzione $A(x)$ di segno variabile in (a, b). E in una successiva Memoria, che porta lo stesso titolo della presente [2]), riuscii effettivamente a dimostrare, traendo solo profitto dai risultati ottenuti in (T), l'esistenza di infiniti valori eccezionali di λ (reali) nell'equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda A(x) y = 0 \tag{3}$$

e relativi ad una delle coppie di condizioni

$$y(a) = 0 , \left[\frac{dy}{dx}\right]_b = 0 ; \left[\frac{dy}{dx}\right]_a = 0 , y(b) = 0 ; y(a) = 0 , y(b) = 0 ;$$
$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_a = 0 , \left[\frac{dy}{dx}\right]_b = 0 ,$$

[1]) Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. X. Indicheremo questo lavoro con (T).

[2]) Litografia L. Battei, Parma, agosto 1908.

nell'ipotesi però che i punti di zero della funzione A (x) in cui essa cambia segno, costituiscano in (a, b) un insieme di prima specie.

Col metodo adottato in quella Memoria vengono stabiliti, di pari passo ai teoremi d'esistenza pei valori eccezionali, i *teoremi d'oscillazione* per le corrispondenti soluzioni eccezionali [1]).

In quella Memoria, sempre nella detta ipotesi per la funzione A (x), è fatto anche uno studio degli indicati valori eccezionali considerandoli come funzioni del tratto ed è applicato tale studio a quello di integrali della (3). Di più, infine, viene esposto un calcolo dei valori eccezionali e delle corrispondenti soluzioni eccezionali e vengon considerati i valori eccezionali come minimi, ottenendoli, come tali, per la stessa espressione di integrali considerata da Mason, ma in campi funzionali diversi [2]).

---

[1]) Il metodo di minimo del Mason non dà i teoremi d'oscillazione che nel caso A $(x) \geq 0$ in (a, b). Nel caso cioè in cui sono applicabili i ben noti teoremi di Sturm, v. il citato lavoro del Mason, p. 357.

[2]) Era già compiuta la redazione del presente lavoro, quando venni a conoscenza della Memoria di S. Sanielevici: *Sur les équations differentielles des cordes e des membranes vibrantes*. Annales de l'Ecole Normale Supèrieure de Paris, t. 25 (1909), pp. 19-91. I risultati del S. sulla equazione delle corde vibranti sono contenuti, in gran parte, come casi particolari, nella Memoria di cui parlo nel testo. Ad es., i teoremi di oscillazione sono stabiliti dal S. nel caso in cui la funzione A (x) cambia di segno un numero finito di volte in (a, b). La questione di minimo com'è trattata dal S. discende come caso particolare da quella trattata dal Mason e la trattazione del S. è assai meno semplice di quella del Mason. Osserviamo ancora che, tranne qualche dettaglio ed eccezion fatta della questione di minimo, i risultati del presente lavoro comprendono, come caso particolare, tutti quelli del S.

Sfugge, per es., al S. (n. 14, p. 56) che la funzione $y(x, \lambda)$, meromorfa in λ, integrale della

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda \mathrm{A}(x)\, y = 0,$$

soddisfacente alle condizioni

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_a = l_1 \ , \ \left[\frac{dy}{dx}\right]_b = l_2 \ ,$$

supposte le l_1 e l_2 affatto generiche, non può avere nell'origine un polo d'ordine maggiore di *due*. Cfr. i nn. 11 e 31 del presente lavoro.

Ma il mio amico prof. Eugenio Elia Levi osservò che i fondamenti da me posti alle mie ricerche in detta Memoria, considerati da un altro punto di vista, permettevano d'ottenere i risultati ivi contenuti non facendo altra ipotesi per la funzione $A(x)$ che quella d'essere finita e continua in (a, b).

Quest'osservazione del Levi fu l'origine del presente lavoro.

In queste pagine comincio collo stabilire (§ 3) l'esistenza dei valori eccezionali di λ nella (1) e relativi alle condizioni

$$(4) \qquad \begin{cases} a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \, , \end{cases}$$

nell'ipotesi $a)$ ed essendo, naturalmente, $a_1^2 + a_2^2 > 0$, $b_1^2 + b_2^2 > 0$ [1]).

I metodi seguiti perciò rappresentano la più naturale estensione dei classici metodi seguiti dallo Sturm nelle sue ben note ricerche sull'argomento che ci occupa, e nell'estensione ho anche notevolmente semplificato tali metodi.

Riesco nel mio intento per due vie ben distinte di pari semplicità. Una via (n. 6) è quella suggeritami dall'osservazione del Levi, convenientemente modificata per l'equazione e per le condizioni più generali che qui considero; l'altra via (n. 10) ha le sue origini da un ragionamento che viene spesso qui applicato per svariati scopi.

Questo stesso ragionamento offre anche (§ 2) una semplicissima dimostrazione dei più notevoli risultati di Sturm e dei risultati da me ottenuti nel cap. II di (T).

Nello stabilire l'esistenza dei valori eccezionali di λ nella (1) relativi alle (4), ottengo (nn. 9, 13, 14 e 15), nel modo più semplice e più diretto i teoremi d'oscillazione per le corrispondenti soluzioni eccezionali.

Considero poi al § 4, più particolarmente, i valori eccezionali di λ nella (1) e relativi ad una delle coppie di condizioni

$$(5) \qquad \begin{cases} a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \\ y(b) = 0 \end{cases} , \qquad \begin{cases} a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \\ y'(b) = 0 \, , \end{cases}$$

[1]) Per le condizioni (4) è soddisfatta l'ipotesi $b)$, ma, se non è $a_1 a_2 \leq 0$ e $b_1 b_2 \geq 0$, non è soddisfatta l'ipotesi $c)$.

nell'ipotesi $a_1 a_2 \leq 0$ e ne faccio uno studio considerandoli come funzioni del tratto a cui si riferiscono. Le nozioni tratte da tale studio vengon poi applicate (n. 17) allo studio di un integrale $y(x, \lambda)$ della (1) non negativo e non decrescente in a o ivi non positivo e non crescente. In questa analisi si riesce a determinare i punti di zero, i massimi e i minimi della funzione $y(x, \lambda)$ e a decidere se questa funzione è, in un dato punto, crescente o decrescente, per modo quindi che ne seguirà un'idea molto approssimata della forma della curva $y = y(x, \lambda)$ [1]).

Dò quindi, al n. 18, un enunciato molto circostanziato del teorema l'oscillazione relativo all'integrale generale della (1).

Al § 5 considero i valori eccezionali di λ nella (1) e relativi alle (4) come minimi e massimi di un'espressione composta di integrali. Tale espressione è differente da quella considerata da Mason e coincide con questa solo in casi particolari, ma i campi funzionali son sempre ben distinti [2]). La considerazione delle cir-

---

[1]) Un accenno a tale studio è già contenuto nel *Traité d'A.* del Picard, t. III (1896), p. 119, n. 12. Cfr. anche (T) n. 22. Questi risultati hanno anche un'importanza pratica tutte le volte che di un'equazione come la (1) in cui, come in questa, si introduce un parametro λ, senza poterne avere in termini finiti l'integrale generale, si riesce a conoscere i valori eccezionali di questo parametro relativi alle (5). I calcoli esposti ai nn. 30 e 31 del presente lavoro fanno presumere che questo sia il caso, per es., per l'equazione di Riccati $\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda x^n y = 0$.

[2]) Ad es. il Mason trova che, supposto che $A(x)$ prenda in (a, b) anche valori positivi, il più piccolo valore eccezionale positivo λ_0 di λ nella (1) e relativo alle condizioni $y'(a) = y'(b) = 0$, è il minimo della espressione

$$I(u) = \frac{1}{\int_a^b A u^2 dx} \int_a^b \left\{ \theta \left(\frac{du}{dx}\right)^2 - B u^2 \right\} dx$$

nell'aggregato la cui funzione qualunque $u(x)$ è in (a, b) finita e continua colle sue derivate dei due primi ordini, ha derivata nulla in a e in b e rende $\int_a^b A u^2 dx > 0$. Mentre, al n. 21, si ottiene che λ_0 è il minimo di $I(u)$ nell'agregato la cui funzione qualunque $u(x)$ è in (a, b) finita e costanze da me poste offre una trattazione invero assai semplice e rapida.

Nel finale § 6 comincio coll'esporre (n. 23) una trattazione della funzione di Green nelle equazioni differenziali lineari ordinarie del 2.° ordine e relativa alle condizioni lineari più generali. Le condizioni che considero sono l'una o l'altra delle seguenti coppie:

$$(6_1) \qquad \mathrm{L}_i y \equiv \sum_{k=1}^{k=2} \int_a^b a_{ik}(\tau)\, y^{(k-1)}(\tau)\, d\tau = l_i \qquad (i=1,2)\,,$$

$$(6_2) \qquad \mathrm{L}_i y \equiv \sum_{k=1}^{k=2} \sum_{l=1}^{l=m_{ik}} a_{ikl}\, y^{(k-1)}(\tau_{ikl}) = l_i \qquad (i=1,2)\,.$$

Dove, per le condizioni (6_1), le $a_{ik}(\tau)$ sono funzioni di τ reali finite e integrabili nel tratto finito (a, b), assegnate insieme alle quantità reali l_i e per le condizioni (6_2) i punti τ_{ikl} sono di (a, b) in numero fininto $\leq \sum_{i,k} m_{ik}$ assegnati insieme alle quantità reali a_{ikl} e l_i.

La trattazione testè menzionata comprende, in gran parte, come caso particolare quella escogitata dall'Hilbert nelle sue ricerche sulle equazioni differenziali lineari ordinarie del second'ordine [1]). Pervengo al mio scopo traendo considerevole profitto dai risultati del Volterra *sull'inversione degli integrali definiti,* risultati che mi permettono di dare una nuova espressione (formola (9) del n. 23) all'integrale generale dell'equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y + \varphi(x) = 0\,.$$

Tale espressione presta frequentemente importanti servigi in tutta la trattazione, ed è partendo da essa che riesco, *in ogni caso,*

---

continua colla sua derivata prima e rende $\int_a^b \mathrm{A} u^2 dx > 0$. È del resto, evidente *a priori,* come nell'aggregato considerato dal Mason si possa togliere, per la $u(x)$, la condizione d'avere derivata nulla in a e in b.

[1]) Hilbert. *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (2.e Mitteilung). Göttinger Nachrichten (1904), pp. 213-258.

a tradurre in un'equazione integrale lineare del tipo di FREDHOLM il problema della determinazione di un integrale dell'equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x,\lambda)\, y + \varphi(x,\lambda) = 0\,, \tag{7}$$

soddisfacenti alle condizioni (6), dove $q(x,\lambda)$ e $\varphi(x,\lambda)$ sono funzioni intiere in λ, nella sola ipetesi che esista la funzione $y(x,\lambda)$, mesomorfa in λ, integrale della (7) soddisfacente alla (6) con le l_i affatto generiche.

Dò contemporaneamente un criterio per decidere sull'esistenza dell'indicata funzione $y(x,\lambda)$ e, supposta esistente, un metodo di calcolo per approssimazioni successive di essa funzione, convergente in un interno del punto $\lambda = 0$. Costruito lo sviluppo di $y(x,\lambda)$ nell'intorno del punto $\lambda = 0$, mostro come da esso si possa dedurre l'esistenza dei valori eccezionali di λ nella (1) e relativi a particolari condizioni lineari. Pervengo così, p. es., (n. 30) a dimostrare l'esistenza di infiniti valori eccezionali di λ (reali) nella (1) e relativi alle condizioni (2) nella sola ipotesi *b)*, supposta la funzione $A(x)$ di segno costante in (a, b) e la $B(x)$ ivi solo finita e continua e ottengo un calcolo di quei valori insieme alle corrispondenti soluzioni eccezionali.

Ritrovo, per la stessa via, p. es., l'esistenza di infiniti valori eccezionali di λ (reali) nella (1) relativi alle condizioni (2) nelle stesse e sole ipotesi *a), b), c)* di MASON e ottengo altresì il calcolo di detti valori insieme alle corrispondenti soluzioni eccezionali.

§ 1.

Considerazioni preliminari

1. — Siano $p(x)$, $q_1(x)$ e $q_2(x)$ funzioni reali della variabile reale x finite e continue nel tratto finito (a, b) e consideriamo l'equazione:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+\left\{\lambda q_1(x)+q_2(x)\right\}y=0, \tag{1}$$

contenente il parametro arbitrario λ. Posto

$$\theta(x)=e^{\int_a^x p\,dx},$$

si avrà in (a, b): $M \geq \theta(x) \geq m > 0$, M e m indicando due numeri finiti e positivi. Poniamo

$$\theta(x)q_1(x)=A(x) \quad , \quad \theta(x)q_2(x)=B(x),$$

l'equazione (1) sarà equivalente all'altra

$$\frac{d}{dx}\left\{\theta(x)\frac{dy}{dx}\right\}+\left\{\lambda A(x)+B(x)\right\}y=0. \tag{2}$$

Noi considereremo l'equazione (1) nella forma (2).

Indichino a_1, a_2, b_1, b_2 quattro costanti reali assegnate, tali che non si abbia mai $a_1^2+a_2^2=0$ o $b_1^2+b_2^2=0$; è ovvio che:

Detto $y(x, \lambda)$ un integrale della (2) soddisfacente in a alla condizione

$$a_1 y(a)+a_2\left[\frac{dy}{dx}\right]_a=0, \tag{3_1}$$

la funzione intiera in λ:

$$D(\lambda) = b_1 y(b, \lambda) + b_2 \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_{x=b}$$

ha per punti di zero tutti e soli quei *valori eccezionali* di λ per ciascuno dei quali esistono soluzioni della (2) non identicamente nulle soddisfacenti alle condizioni ai limiti

$$(3) \qquad \begin{cases} a_1 y(a) + a_2 \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_a = 0 \\ b_1 y(b) + b_2 \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_b = 0 \,. \end{cases}$$

Sia

$$(4) \qquad \lambda_1 \,, \lambda_2 \,, \ldots$$

la successione di questi valori eccezionali.

Detto $\bar{y}(x, \lambda)$ un integrale della (2) soddisfacente in b alla condizione

$$(3_2) \qquad b_1 \bar{y}(b) + b_2 \left[\frac{d\bar{y}}{dx}\right]_b = 0$$

la funzione intiera in λ:

$$\bar{D}(\lambda) = a_1 \bar{y}(a, \lambda) + a_2 \left[\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}\right]_{x=a},$$

ha per zeri tutti e soli gli elementi della successione (4).

Le funzioni $y_i(x) = y(x, \lambda_i)$, $\bar{y}_i(x) = \bar{y}(x, \lambda_i)$ soddisfano alle (3) e all'equazione:

$$\frac{d}{dx}\left(\theta \frac{dy}{dx}\right) + (\lambda_i A + B) y = 0 \,,$$

esse differiranno dunque solo per un fattore costante, disponendo del quale potrà farsi $y_i(x) = \bar{y}_i(x)$. La $y_i(x)$ si dice *la soluzione eccezionale corrispondente al valore eccezionale* λ_i.

Si ha:

$$\int_a^b y_k \frac{d}{dx}\left(\theta \frac{dy_i}{dx}\right) dx = \left[\theta\, y_k \frac{dy_i}{dx}\right]_a^b - \int_a^b \theta \frac{dy_i}{dx} \frac{dy_k}{dx} dx \,,$$

e quindi, dall'eguaglianza:

$$\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{dy_i}{dx}\right)+(\lambda_i \mathrm{A}+\mathrm{B})\,y_i=0\,,$$

moltiplicandola per $y_k\,dx$ e integrando fra a e b, s'otterrà

$$\lambda_i\int_a^b \mathrm{A}\,y_i\,y_k\,dx=-\left[\theta\,y_k\frac{dy_i}{dx}\right]_a^b+\int_a^b\theta\frac{dy_i}{dx}\frac{dy_k}{dx}\,dx-\int_a^b \mathrm{B}\,y_i\,y_k\,dx\ ;$$

analogamente, scambiando y_i con y_k, si otterrà

$$\lambda_k\int_a^b \mathrm{A}\,y_i\,y_k\,dx=-\left[\theta\,y_i\frac{dy_k}{dx}\right]_a^b+\int_a^b\theta\frac{dy_i}{dx}\frac{dy_k}{dx}\,dx-\int_a^b \mathrm{B}\,y_i\,y_k\,dx\,.$$

Da questa e dalla precedente, supponendo $\lambda_i \neq \lambda_k$, si avrà

$$\int_a^b \mathrm{A}\,y_i\,y_k\,dx=0\ ; \tag{5}$$

e supponendo $\lambda_i=\lambda_k$,

$$\lambda_i\int_a^b \mathrm{A}\,y_i^2\,dx=-\left[\theta\,y_i\frac{dy_i}{dx}\right]_a^b+\int_a^b\theta\left(\frac{dy_i}{dx}\right)^2dx-\int_a^b \mathrm{B}\,y_i^2\,dx\,. \tag{6}$$

Stabiliamo ancora un'altra relazione che ci sarà molto utile. Indichi $y(x\,,\lambda)$, come sempre in seguito, una soluzione della (2) soddisfacente in a alla (3_1), si avrà:

$$(\lambda-\lambda_i)\int_a^b \mathrm{A}\,y\,y_i\,dx=\theta(b)\left[y\frac{dy_i}{dx}-y_i\frac{\partial y}{\partial x}\right]_{x=b}\,. \tag{7}$$

Posto $\lambda=\lambda_i+\varepsilon$, si ha

$$y(x\,,\lambda)=y_i+\varepsilon\left[\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=\lambda_i}+\cdots\,,\quad \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{dy_i}{dx}+\varepsilon\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial\lambda}\right]_{\lambda=\lambda_i}+\cdots\,.$$

Introduciamo questi sviluppi nella (7), dividiamo per ε e passiamo al limite per ε infinitesimo, si otterrà la relazione

$$\int_a^b \mathrm{A}\,y_i^2\,dx=\theta(b)\left[\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial\lambda}-y\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial\lambda}\right]_{\substack{x=b\\ \lambda=\lambda_i}}\,, \tag{8}$$

che è quella che volevamo stabilire. Analogamente si otterrà l'altra

$$(9)\qquad \int_a^b \mathrm{A}\, y_i^2\, dx = -\theta(a)\left[\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}\,\frac{\partial \bar{y}}{\partial \lambda} - \bar{y}\,\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x\, \partial \lambda}\right]_{\substack{x=a\\ \lambda=\lambda_i}}.$$

Dalla formola ben nota (5) segue che, se la funzione $\mathrm{A}(x)$, cioè la $q_1(x)$, è in (a, b) di segno costante, non esistono valori eccezionali complessi e dalle (8) e (9) che, nella stessa ipotesi per la $\mathrm{A}(x)$, gli zeri delle funzioni intiere $\mathrm{D}(\lambda)$ e $\overline{\mathrm{D}}(\lambda)$ sono semplici [1]).

2. — Facciamo ora le seguenti ipotesi che sottintenderemo sempre mantenute, in questo e nei successivi numeri, fino a quando non avvertiremo il contrario:

1.° *La funzione* $\mathrm{B}(x)$ *non prende in* (a, b) *valori positivi.*

2.° *Le costanti* a_1, a_2, b_1, b_2 *soddisfano alle diseguaglianze* $a_1 a_2 \leq 0$, $b_1 b_2 \geq 0$.

Per l'ipotesi 2.ª si avrà $\left[y_i \dfrac{dy_i}{dx}\right]_a \geq 0$ e $\left[y_i \dfrac{dy_i}{dx}\right]_b \leq 0$, posto che λ_i e quindi y_i siano reali. Ne segue che per ogni soluzione eccezionale reale si avrà $-\left[\theta\, y_i \dfrac{dy_i}{dx}\right]_a^b \geq 0$.

Dalla (6) si deduce, evidentemente, che se non è $\mathrm{B}(x) \equiv 0$ e contemporaneamente $a_1 = b_1 = 0$, fra i valori eccezionali λ_i non esisterà lo zero. Se è $\mathrm{B}(x) \equiv 0$ e $a_1 = b_1 = 0$ fra i valori eccezionali λ_i esiste lo zero, difatti una costante *c non nulla* soddisfa all'equazione

$$\frac{d}{dx}\left(\theta\,\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

e alle condizioni

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_a = 0\ ,\quad \left[\frac{dy}{dx}\right]_b = 0\ .$$

Dalla (6) si ottiene altresì che:

---

[1]) Cfr., per es., STURM, *Mémoire sur une classe d'équations à differènces partielles.* Journal de Liouville, tome 1er, 1836, pp. 373-444. In questa Memoria trovasi già stabilita la formola (8).

Per ogni valore eccezionale λ_i *reale non nullo è*

$$\lambda_i \int_a^b A\, y_i^2\, dx > 0 \,. \tag{10}$$

Ne segue, per le relazioni (8) e (9), che

Ogni zero reale non nullo delle funzioni intiere $D(\lambda)$ *e* $\bar{D}(\lambda)$ *è zero semplice.*

Dalla (10) segue anche che se è, in (a, b), $A(x) \geq 0$ non esisteranno che valori eccezionali positivi, se è, in (a, b), $A(x) \leq 0$ non esisteranno che valori eccezionali negativi. Invero, nell'un caso o nell'altro, non esistono (n. 1) valori eccezionali complessi.

Avranno per noi speciale importanza i valori eccezionali λ_i nei seguenti quattro casi particolari

$$b_2 = 0 \;,\; b_1 = 0 \;,\; a_2 = 0 \;,\; a_1 = 0 \,.$$

Poniamo

$$[D(\lambda)]_{b_2=0} = K(\lambda) \;,\; [D(\lambda)]_{b_1=0} = H(\lambda) \;,\; [\bar{D}(\lambda)]_{a_2=0} = \bar{K}(\lambda) \;,$$
$$[\bar{D}(\lambda)]_{a_1=0} = \bar{H}(\lambda) \,.$$

Diciamo k_i, h_i, $\bar{k}_i$, $\bar{h}_i$, rispettivamente, gli zeri delle funzioni intiere $K(\lambda)$, $H(\lambda)$, $\bar{K}(\lambda)$, $\bar{H}(\lambda)$.

Le eguaglianze (8) e (9) dànno luogo in questi quattro casi particolari alle seguenti:

$$\int_a^b A(x)\, y^2(x, k_i)\, dx = \theta(b) \left[\frac{\partial y}{\partial x}\, \frac{\partial y}{\partial \lambda}\right]_{\substack{\lambda=k_i \\ x=b}} , \tag{11}$$

$$\int_a^b A(x)\, y^2(x, h_i)\, dx = -\theta(b)\, y(b, h_i) \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x\, \partial \lambda}\right]_{\substack{\lambda=h_i \\ x=b}} , \tag{12}$$

$$\int_a^b A(x)\, \bar{y}^2(x, \bar{k}_i)\, dx = -\theta(a) \left[\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}\, \frac{\partial \bar{y}}{\partial \lambda}\right]_{\substack{\lambda=\bar{k}_i \\ x=a}} , \tag{13}$$

$$\int_a^b A(x)\, \bar{y}^2(x, \bar{h}_i)\, dx = \theta(a)\, \bar{y}(a, \bar{h}_i) \left[\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x\, \partial \lambda}\right]_{\substack{\lambda=\bar{h}_i \\ x=a}} . \tag{14}$$

Possiamo dimostrare che:

Le funzioni intiere $\mathrm{D}(\lambda)$ *e* $\overline{\mathrm{D}}(\lambda)$ *non hanno zeri complessi.*

Supposto che $\lambda = \lambda' + i\lambda''$, con $\lambda'' \neq 0$, sia uno zero di $\mathrm{D}(\lambda)$ e $y(x, \lambda) = y' + i y''$ la soluzione eccezionale corrispondente, $\lambda_0 = \lambda' - i\lambda''$ sarà anche uno zero di $\mathrm{D}(\lambda)$ e $y_0 = y(x, \lambda_0) = y' - i y''$ la soluzione eccezionale corrispondente. Nella relazione

$$-\left[\theta\, y_k \frac{dy_i}{dx}\right]_a^b + \int_a^b \theta \frac{dy_i}{dx}\frac{dy_k}{dx}\, dx - \int_a^b \mathrm{B}\, y_i\, y_k\, dx = 0\,,$$

che vale se è $\lambda_i \neq \lambda_k$, poniamo $\lambda_i = \lambda' + i\lambda''$, $\lambda_k = \lambda' - i\lambda''$, essa continuerà a valere essendo $\lambda'' \neq 0$ e quindi $\lambda \neq \lambda_0$ e si otterrà

$$(15) \qquad -\left[\theta\, y_0 \frac{dy}{dx}\right]_a^b + \int_a^b \theta \left\{\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy''}{dx}\right)^2\right\} dx - \int_a^b \mathrm{B} \left\{(y')^2 + (y'')^2\right\} dx = 0$$

Ora risulterà

$$-\left[\theta\, y_0 \frac{dy}{dx}\right]_a^b \geq 0\,,$$

invero, se è $a_2 = 0$ ($b_2 = 0$), si ha

$$\left[\theta\, y_0 \frac{dy}{dx}\right]_a = 0 \qquad \left(\left[\theta\, y_0 \frac{dy}{dx}\right]_b = 0\right),$$

se è $a_2 \neq 0$ ($b_2 \neq 0$), si ha

$$\left[\theta\, y_0 \frac{dy}{dx}\right]_a = -\frac{a_1}{a_2}\,\theta(a) \left[(y')^2 + (y'')^2\right]_a \geq 0$$

$$\left(-\left[\theta\, y_0 \frac{dy}{dx}\right]_b = \frac{b_1}{b_2}\,\theta(b) \left[(y')^2 + (y'')^2\right]_b \geq 0\right).$$

Per cui dalla (15) possiamo dedurre che, se non è $\mathrm{B}(x) \equiv 0$, dovrà essere $y' \equiv 0$, $y'' \equiv 0$, contrariamente all'ipotesi che $\lambda' + i\lambda''$ sia un valore eccezionale, se è $\mathrm{B}(x) \equiv 0$, y' e y'' dovranno essere costanti e quindi $\lambda' = \lambda'' = 0$, contrariamente all'ipotesi $\lambda'' \neq 0$.

Riassumendo, possiamo dunque dire che: *le funzioni intiere* $\mathrm{D}, \overline{\mathrm{D}}$ *hanno solo zeri reali e gli zeri non nulli (gli zeri nulli esistendo solo nel caso* $\mathrm{B}(x) \equiv 0$, $a_1 = b_1 = 0$) *sono zeri semplici.*

3. — Nel seguito ci occorrerà sovente di considerare l'equazione

$$\frac{d}{dx}\left(\theta\,\frac{dy}{dx}\right)+\mathrm{B}(x)\,y=0 \tag{16}$$

e ci sarà utile tener sempre presente la circostanza che la funzione $\theta\, y\, \dfrac{dy}{dx}$, y essendo l'integrale generale della (16), non è mai decrescente in (a, b), come segue dalle relazioni:

$$\frac{d}{dx}\left(\theta\, y\frac{dy}{dx}\right)=\theta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y\,\frac{d}{dx}\left(\theta\,\frac{dy}{dx}\right)=\theta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\mathrm{B}\,y^2\geq 0\ .$$

Da tale circostanza segue, per es., che se un integrale della (16) è in un punto positivo o nullo e crescente (negativo o nullo e decrescente) esso è positivo e crescente (negativo e decrescente) in ogni punto a destra, ecc.

Un integrale $y(x)$ della (16) sia in un punto c di (a, b) positivo (negativo) ed abbia ivi derivata nulla. Se c è tale che in un suo qualunque intorno vi sono punti in cui è $\mathrm{B}(x) \neq 0$, $y(x)$ sarà sempre positivo (negativo) in (a, b) costantemente crescente (decrescente) a destra di c, costantemente decrescente (crescente) a sinistra di c. Se il punto c non è tale e non è, in (a, b), $\mathrm{B}(x) \equiv 0$, diciamo c_1 e c_2 gli estremi dell'intorno di c in cui è $\mathrm{B}(x) \equiv 0$, la $y(x)$ si manterrà sempre positiva (negativa) in (a, b) e stazionaria $= y(c)$ in (c_1, c_2); a destra di c_2 sarà costantemente crescente (decrescente) e a sinistra di c_1 costantemente decrescente (crescente).

Se è in (a, b), $\mathrm{B}(x) \equiv 0$, la $y(x)$ si manterrà costante $= y(c)$ in (a, b).

---

§ 2.

Una nuova dimostrazione di un teorema di Sturm

4. — Noi ci fonderemo, per le ricerche del successivo paragrafo, su un teorema dimostrato da STURM nella sua classica Memoria sulle equazioni differenziali lineari ordinarie del second'ordine[1]. Non crediamo perciò inopportuno di dare qui una nuova semplicissima dimostrazione di tale teorema.

Enunciamo il teorema:

Le funzioni $\theta(x, \lambda)$, $\frac{\partial}{\partial x}\theta(x, \lambda)$, $q(x, \lambda)$, *finite e continue rispetto a* x, $a \leq x \leq b$, *soddisfino alle condizioni*

$$P_1(\lambda) \geq \theta(x, \lambda) \geq p_1(\lambda) > 0 \quad , \quad P_2(\lambda) \geq q(x, \lambda) \geq p_2(\lambda) > 0$$

e variino monotonamente con λ, *precisamente, con* λ *crescente e per un fissato ma arbitrario valore di* x, *la* $\theta(x, \lambda)$ *non cresca mai e la* $q(x, \lambda)$ *non decresca mai. Si abbia ancora*

$$\lim_{\lambda=\infty} P_1(\lambda) = \text{quantità finita o nulla} \quad , \quad \lim_{\lambda=\infty} p_2(\lambda) = \infty \ .$$

Allora, dato un numero intiero e positivo ν *arbitrario, esisterà un valore* λ_ν *di* λ *tale che per* $\lambda > \lambda_\nu$ *l'integrale generale* $y(x, \lambda)$

[1]) STURM. *Sur les équations differentielles linéaires du second ordre.* Journal de Liouville, tome 1^er^, 1836, pp. 106-186.

dell' equazione

$$\frac{d}{dx}\left\{\theta(x,\lambda)\frac{dy}{dx}\right\}+q(x,\lambda)y=0 \tag{1}$$

abbia in (a, b) *un numero di zeri non inferiore a* ν; *preso un segmento arbitrario* (a_1, b_1), *esisterà un valore* λ_{a_1,b_1} *di* λ *tale che per* $\lambda > \lambda_{a_1,b_1}$ *l'integrale generale* $y(x,\lambda)$ *della* (1) *abbia almeno uno zero in* (a_1, b_1).

Premettiamo le seguenti considerazioni nelle quali trovano la loro dimostrazione, oltre al teorema enunciato, altri teoremi parimente ottenuti da Sturm nella citata memoria.

Le equazioni

$$\frac{d}{dx}\left\{\theta(x)\frac{dy}{dx}\right\}+q(x)y=0 \tag{2}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\theta_1(x)\frac{dy}{dx}\right\}+q_1(x)y=0 \tag{3}$$

siano integrabili nel tratto (a, b) e ivi si abbia

$$\theta(x)\geq\theta_1(x)>0 \quad , \quad q(x)\leq q_1(x) \, .$$

Sia $u(x)$ un integrale della (2) per cui i punti x_1 e x_2 di (a, b), $x_2 > x_1$, siano zeri consecutivi. Dico che l'integrale generale $y(x)$ della (3) avrà almeno uno zero nell'interno di (x_1, x_2). Per dimostrarlo partiamo dall'eguaglianza

$$\int_{x_1}^{x_2}\theta\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx=\int_{x_1}^{x_2} qu^2\,dx \, . \tag{4}$$

Supponiamo che $y(x)$ non si annulli nell'interno di (x_1, x_2) pur potendosi annullare in x_1 o in x_2 o in x_1 e in x_2. Le funzioni

$$\frac{u}{y} \, , \, \frac{u^2}{y} \, ,$$

saranno allora finite e continue in tutto (x_1, x_2) e si avrà:

$$\left[\frac{u^2}{y}\right]_{x_1}=0 \quad , \quad \left[\frac{u^2}{y}\right]_{x_2}=0 \, . \tag{5}$$

È
$$q_1(x)\,u^2 = -\frac{u^2}{y}\frac{d}{dx}\left(\theta_1\frac{dy}{dx}\right)$$
e quindi
$$q(x)\,u^2 = -\frac{u^2}{y}\frac{d}{dx}\left(\theta_1\frac{dy}{dx}\right) - (q_1 - q)\,u^2\ .$$

Sostituendo in (4) si otterrà, per le (5),

$$\int_{x_1}^{x_2}\theta\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = -\int_{x_1}^{x_2}\frac{u^2}{y}\frac{d}{dx}\left(\theta_1\frac{dy}{dx}\right)dx - \int_{x_1}^{x_2}(q_1 - q)\,u^2\,dx =$$
$$= \int_{x_1}^{x_2}\theta_1\frac{dy}{dx}\frac{d}{dx}\frac{u^2}{y}\,dx - \int_{x_1}^{x_2}(q_1 - q)\,u^2\,dx\ ,$$

cioè

$$(6)\qquad \int_{x_1}^{x_2}\theta_1\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + \int_{x_1}^{x_2}(\theta - \theta_1)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx =$$
$$= \int_{x_1}^{x_2}\theta_1\frac{dy}{dx}\frac{d}{dx}\frac{u^2}{y}\,dx - \int_{x_1}^{x_2}(q_1 - q)\,u^2\,dx\ .$$

Ma si ha l'identità:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \frac{dy}{dx}\frac{d}{dx}\frac{u^2}{y} = \left(\frac{du}{dx} - \frac{dy}{dx}\frac{u}{y}\right)^2$$

e quindi la (6) potrà scriversi:

$$(7)\qquad \int_{x_1}^{x_2}(\theta - \theta_1)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + \int_{x_1}^{x_2}\theta_1\left(\frac{du}{dx} - \frac{dy}{dx}\frac{u}{y}\right)^2 dx + \int_{x_1}^{x_2}(q_1 - q)\,u^2\,dx = 0\ .$$

Ora se non è $\theta \equiv \theta_1$ e $q \equiv q_1$, segue dalla (7) $u(x) \equiv 0$, conclusione da rigettarsi (il parlare di zeri consecutivi della $u(x)$ presuppone appunto che la $u(x)$ non sia identicamente nulla in (a, b)). Se è $\theta \equiv \theta_1$ e $q \equiv q_1$, segue dalla stessa (7):

$$\frac{du}{dx} - \frac{dy}{dx}\frac{u}{y} = 0$$

e quindi che gli integrali y e u della (2) sono dipendenti.

Possiamo dunque affermare:

1.° Ogni integrale della (2) indipendente da u avrà uno zero nell'interno di (x_1, x_2).

2.° Ogni integrale della (3), supposta ora non coincidente con la (2), avrà uno zero nell'interno di (x_1, x_2).

Dalla prima affermazione segue che: *le coppie di zeri consecutivi di un integrale della* (2) *separano quelle di ogni altro integrale.*

Dalla seconda affermazione segue che: *se un integrale della* (2) *ha n zeri in (a, b): $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, l'integrale generale della* (3) *avrà almeno $n-1$ zeri nell'interno di (x_1, x_n); un integrale della* (3) *nullo in uno dei punti x_i avrà almeno n zeri in (x_1, x_n); e un integrale della* (3) *nullo in ν dei punti x_i, $2 \leq \nu \leq n$, supposto che un tale integrale esista, avrà almeno $n+\nu-1$ zeri in (x_1, x_n).*

Stabilito ciò, per dimostrare il teorema enunciato, confrontiamo, con Sturm, l'equazione (1) con l'equazione

$$\frac{d}{dx}\left\{P_1(\lambda)\frac{dy}{dx}\right\}+p_2(\lambda)\,y=0\,. \tag{8}$$

Sia a_1 un punto di (a, b) e $u(x)$ sia un integrale di quest'equazione nullo in a_1, esso si annullerà ulteriormente in (a, b) un numero di volte rappresentato dal massimo numero intiero contenuto in

$$\frac{a_1-a}{\pi\sqrt{\frac{P_1}{p_2}}}+\frac{b-a_1}{\pi\sqrt{\frac{P_1}{p_2}}}=\frac{(b-a)\sqrt{p_2}}{\pi\sqrt{P_1}}\,.$$

Sia ν un numero intiero e positivo arbitrario, esisterà un tal valore λ_ν che per $\lambda \geq \lambda_\nu$, risulti

$$\frac{(b-a)\sqrt{p_2}}{\pi\sqrt{P_1}} \geq \nu+1\,.$$

Allora per $\lambda \geq \lambda_\nu$ il numero degli zeri di $u(x)$ in (a, b) non sarà inferiore a $\nu+1$, ne segue che l'integrale generale $y(x, \lambda)$ della (1) per $\lambda > \lambda_\nu$ avrà un numero di zeri non inferiore a ν.

Sia (a_1, b_1) un tratto arbitrario in (a, b) e sia $u(x)$ un integrale delle (8) nullo in a_1; esso si annullerà ulteriormente nel punto $a_1 + \pi\sqrt{\frac{P_1}{p_2}}$. Esisterà un tale valore λ_{a_1, b_1} che per $\lambda \geq \lambda_{a_1, b_1}$ risulti

$$\pi\sqrt{\frac{P_1}{p_2}} \leq b_1 - a_1 .$$

L'integrale $u(x)$ s'annullerà, per $\lambda \geq \lambda_{a_1, b_1}$, due volte almeno in (a_1, b_1) quindi l'integrale generale $y(x, \lambda)$ della (1), per $\lambda > \lambda_{a_1, b_1}$, s'annullerà una volta almeno in (a_1, b_1). Il teorema enunciato di STURM è così completamente dimostrato.

5. — Ai teoremi ottenuti nel confronto delle equazioni (2) e (3) possiamo aggiungere i seguenti di analoga dimostrazione.

Sia x_1 *un punto in cui un integrale* $u(x)$ *della* (2) *non sia nullo e* x_2 *il punto di zero di* $u(x)$ *più prossimo a* x_1, *a destra o a sinistra di* x_1. *La* (3) *non coincida con la* (2), *dico che:*

Se è $x_2 > x_1$ *e* $\left[\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\right]_{x_1} \geq 0$, *ogni integrale* $y(x)$ *della* (3) *per cui sia:*

$$\left[\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\right]_{x_1} \leq \left[\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\right]_{x_1} \tag{9}$$

deve annullarsi nell' interno di (x_1, x_2).

Se è $x_2 < x_1$ *e* $\left[\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\right]_{x_1} \leq 0$, *ogni integrale* $y(x)$ *della* (3) *per cui sia:*

$$\left[\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\right]_{x_1} \geq \left[\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\right]_{x_1} \tag{10}$$

deve annullarsi nell' interno di (x_2, x_1).

Difatti, supposto, per es., $x_2 > x_1$, $\left[\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\right]_{x_1} \geq 0$, $\left[\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\right]_{x_1} \leq \left[\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\right]_{x_1}$ e che la $y(x)$ non si annulli nell'interno di (x_1, x_2) pur potendosi annullare in x_2, dalle relazioni

$$\int_{x_1}^{x_2} \theta \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left[\theta u \frac{du}{dx}\right]_{x_1} = \int_{x_1}^{x_2} q u^2 dx \ ,$$

$$q u^2 = -\frac{u^2}{y} \frac{d}{dx}\left(\theta_1 \frac{dy}{dx}\right) - (q_1 - q) u^2 \ ,$$

osservando che

$$-\int_{x_1}^{x_2} \frac{u^2}{y} \frac{d}{dx}\left(\theta_1 \frac{dy}{dx}\right) dx = \left[\theta_1 \frac{u^2}{y} \frac{dy}{dx}\right]_{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} \theta_1 \frac{dy}{dx} \frac{d}{dx} \frac{u^2}{y} dx \ ,$$

segue

$$\int_{x_1}^{x_2} (\theta - \theta_1) \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} \theta_1 \left(\frac{du}{dx} - \frac{dy}{dx} \frac{u}{y}\right)^2 dx +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} (q_1 - q) u^2 dx + \left[\theta u \frac{du}{dx} - \theta_1 \frac{u^2}{y} \frac{dy}{dx}\right]_{x_1} = 0 \, .$$

Eguaglianza assurda, per essere:

$$\left[\theta u \frac{du}{dx} - \theta_1 \frac{u^2}{y} \frac{dy}{dx}\right]_{x_1} \geq 0 \, .$$

Segue, dai due teoremi precedenti, che nell'interno del tratto limitato fra due zeri consecutivi ξ_1, ξ_2 di un integrale $u(x)$ della (2) cadono due zeri almeno di ogni integrale della (3) avente derivata nulla in un punto ξ, fra ξ_1 e ξ_2, in cui l'abbia $u(x)$.

Supposta sempre la (3) non coincidente con la (2), sia $\theta \equiv \theta_1$, allora, col ragionamento precedente, si potrà affermare che:

Se è $x_2 > x_1$, *ogni integrale* $y(x)$ *delle* (3) *per cui sia soddisfatta la* (9) *deve annullarsi nell'interno di* (x_1, x_2). *Se è* $x_2 < x_1$, *ogni integrale* $y(x)$ *della* (3) *per cui soddisfatta la* (10) *deve annullarsi nell'interno di* (x_2, x_1).

Ne segue che: Supposto $\theta \equiv \theta_1$ e $q_1 \geq q$, nell'interno del tratto limitato fra due zeri consecutivi ξ_1, ξ_2 di un integrale $u(x)$ della

(2) cadono due zeri almeno di ogni integrale $y(x)$ della (3), per cui si abbia, in un punto ξ fra ξ_1 e ξ_2, $\left[\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\right]_\xi = \left[\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\right]_\xi$.

Supponiamo, infine, $\theta \equiv \theta_1$ e $q \equiv q_1$, il ragionamento precedente ci prova che:

Se è $x_2 > x_1$, *ogni integrale* $y(x)$ *della* (2), *indipendente da* $u(x)$, *per cui sia soddisfatta la* (9) *deve annullarsi nell'interno di* (x_1, x_2). *Se è* $x_2 < x_1$, *ogni integrale* $y(x)$ *della* (2), *indipendente da* $u(x)$, *per cui sia soddisfatta la* (10), *deve annullarsi nell'interno di* (x_2, x_1).

Ne seguono, in particolare, tutti i teoremi ottenuti in (T), cap. II.

§ 3.

L'esistenza dei valori eccezionali

6. — Indichi $y\,(x, \lambda)$, come sempre in seguito, un integrale dell'equazione

$$\frac{d}{dx}\left(\theta\,\frac{dy}{dx}\right)+(\lambda\,\mathrm{A}+\mathrm{B})\,y=0, \tag{1}$$

soddisfacente in a alla condizione

$$a_1\,y\,(a)+a_2\left[\frac{dy}{dx}\right]_a=0.$$

Rammentiamo, n. 2, che noi supporremo sempre, fino a che non avvertiremo il contrario, $a_1\,a_2 \leq 0$, si potrà quindi pensare, per fissare le idee, che la $y\,(x, \lambda)$ sia in a non negativa e non decrescente.

LEMMA — *Sia ξ un punto di (a, b), $a < \xi \leq b$, e l una radice dell' equazione*

$$y\,(\xi, \lambda)=0,$$

necessariamente reale e non nulla. Se è $l > 0$ (< 0) l' equazione

$$y\,(x, \lambda)=0, \tag{2}$$

definisce una ben determinata funzione $x(\lambda)$ di λ finita e continua, costantemente decrescente (costantemente crescente) in un tratto $k \ldots \infty$ ($-\infty \ldots k$) che soddisfa identicamente alla (2) *e che si riduce* *a* ξ *per* $\lambda = l$, *verificandosi le relazioni*

$$\left.\begin{matrix} 0 < k \leq l \\ (0 > k \geq l) \end{matrix}\right\} \, , \quad x(k) = b \, , \quad a < x(\lambda) \leq b$$ [1].

Supponiamo, per es., $l > 0$ e $a < \xi < b$. È

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_{\substack{x=\xi \\ \lambda=l}} \neq 0 \, ,$$

ne segue l'esistenza di un intorno (l_1, l_2) di l, in tutti i punti del quale risulta definita una funzione finita e continua $x(\lambda)$ soddisfacente alla (2), alla $x(l) = \xi$ e alla limitazione

$$a < x(\lambda) \leq b.$$

Di tali intorni (l_1, l_2) ve ne sono infiniti. Essi sono, n. 2, tutti di numeri positivi, sarà pertanto sempre $l_1 > 0$. Diciamo k il limite inferiore dei valori l_1, sarà $k \geq 0$.

Sia $l'_1, l''_1, \dots, l_1^{(n)}, \dots$ una successione *costantemente decrescente* di valori l_1 avente per limite k. Nel tratto $(l_1^{(n)}, l_2)$ risulta definita l'indicata funzione $x(\lambda)$ di λ, allora la formula (11) del n. 2 ci permette di scrivere, per λ in $(l_1^{(n)}, l_2)$:

$$\int_a^{x(\lambda)} \mathrm{A}(s)\, y^2(s, \lambda)\, ds = \left[\theta(x) \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \lambda}\right]_{x=x(\lambda)}$$

$$\lambda \int_a^{x(\lambda)} \mathrm{A}(s)\, y^2(s, \lambda)\, ds > 0 \, .$$

Ne segue

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \lambda}\right]_{x=x(\lambda)} > 0 \, ,$$

e quindi la $x(\lambda)$ costantemente decrescente in $(l_1^{(n)}, l_2)$. La successione

$$x(l'_1) \, , \; x(l''_1), \dots, x(l_1^{(n)}), \dots$$

---

[1]) Questo lemma è dovuto all'osservazione del LEVI, menzionata nell'introduzione.

è pertanto costantemente crescente e poichè è $x(l_1^{(n)}) \leq b$, essa avrà un limite $b_1 \leq b$. Ne segue $k > 0$, invero è

$$y\{x(l_1^{(n)}), l_1^{(n)}\} = 0$$

e quindi

$$\lim_{n=\infty} y\{x(l_1^{(n)}), l_1^{(n)}\} = y(b_1, k) = 0.$$

Ora se fosse $k = 0$, esisterebbe una soluzione dell'equazione

$$\frac{d}{dx}\left(\theta \frac{dy}{dx}\right) + \mathrm{B}y = 0,$$

nulla in b_1, non negativa e non decrescente in a e non identicamente nulla in (a, b), il che, n. 3, è assurdo.

Attribuendo nel punto k alla funzione $x(\lambda)$ il valore b_1, risulterà definita la $x(\lambda)$ nell'intiero tratto (k, l_2) finita, continua, costantemente decrescente.

Deve essere $b_1 = b$. Difatti, ove fosse $b_1 < b$, i valori b_1 e k sarebbero nelle identiche condizioni di ξ e l e ne seguirebbe l'esistenza di un intorno sinistro di k in cui continua ad esistere la funzione $x(\lambda)$ e ad essere $a < x(\lambda) \leq b$, contro l'ipotesi che k sia il limite inferiore dei valori l_1.

La funzione $x(\lambda)$ risulta dunque definita nei tratti (k, l_2), è ivi finita, continua e costantemente decrescente ed è $x(k) = b$. Per dimostrare il lemma occorre perciò ancora provare che i valori l_2 non hanno limite superiore.

Esista un limite superiore finito K dei valori l_2. Sia $l'_2, l''_2, \ldots, l_2^{(n)}, \ldots$ una successione costantemente crescente di valori l_2 avente per limite K. Con un ragionamento del tutto simile al precedente si proverà essere

$$\lim_{n=\infty} x(l_2^{(n)}) = a.$$

Ne seguirà $y(a, \mathrm{K}) = 0$, il che è assurdo se non è $y(a, \lambda) = 0$, se non è, cioè, $a_2 = 0$. Se è $a_2 = 0$, si dovrà supporre $\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_{x=a} \neq 0$; poniamo, come sempre in seguito,

$$\frac{\partial}{\partial x} y(x, \lambda) = y'(x, \lambda).$$

La $y'(x, l_2^{(n)})$ s'annullerà almeno in un punto fra a e $x(l_2^{(n)})$, tale punto sarà funzione di λ, diciamola $\bar{x}(\lambda)$, si avrà

$$a < \bar{x}(l_2^{(n)}) < x(l_2^{(n)})$$

e quindi

$$\lim_{n=\infty} \bar{x}(l_2^{(n)}) = a.$$

Ora è

$$y'\{\bar{x}(l_2^{(n)}), l_2^{(n)}\} = 0$$

e quindi

$$\lim_{n=\infty} y'\{\bar{x}(l_2^{(n)}), l_2^{(n)}\} = y'(a, \mathrm{K}) = 0,$$

contro l'ipotesi.

Il lemma è così completamente dimostrato. Evidentemente, solo nel caso $\xi = b$, risulterà $k = l$.

Considerando l'integrale $\bar{y}(x, \lambda)$ della (1) soddisfacente in b alla condizione

$$b_1 \bar{y}(b) + b_2 \left[\frac{d\bar{y}}{dx}\right]_b = 0 \quad , \quad b_1 b_2 \geq 0 ,$$

facendo uso della formula (13) del n. 2 si avrà, in modo analogo, lo stesso lemma per la funzione $x(\lambda)$ di λ definita dall'equazione

$$\bar{y}(x, \lambda) = 0;$$

basterà per averne l'enunciato scambiare, nell'enunciato del lemma precedente, a con b e *decrescente* con *crescente*.

7. — Dai lemmi ora stabiliti segue facilmente il teorema:

Sia, in ξ, $y(\xi, \lambda)\, y'(\xi, \lambda) \geq 0 \; \{y(\xi, \lambda)\, y'(\xi, \lambda) \leq 0\}$ *e per un determinato valore reale* l *di* λ *esista in* (a, b) *l'* n^{mo} *zero* ξ_n *di* $y(x, l)$, *a destra di* ξ *(a sinistra di* ξ), *allora per ogni valore reale di* λ *del medesimo segno di* l, *esisterà o no, in* (ξ, ξ_n) $\{$*in* $(\xi_n, \xi)\}$, *l'*n^{mo} *zero di* $y(x, \lambda)$, *a destra di* ξ *(a sinistra di* ξ), *secondochè è*

$$|\lambda| \geq |l| \quad \text{o} \quad |\lambda| < |l| .$$

Supponiamo, per es., $y(\xi, \lambda)\, y'(\xi, \lambda) \geq 0$, che $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ siano, rispettivamente, il 1°, il 2°, ..., l'n^{mo} zero di $y(x, l)$, a destra di ξ, e che sia $l > 0$.

Si avrà

$$y(\xi_i, l) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

con $y(\xi, l)\, y'(\xi, l) \geq 0$. Si potrà quindi applicare, ad ogni tratto (ξ, ξ_i), il lemma precedente e dedurne che l'equazione $y(x, \lambda) = 0$, sarà identicamente verificata da n funzioni

$$x_1(\lambda), x_2(\lambda), \ldots, x_n(\lambda)$$

finite, continue, costantemente decrescenti, in tutto il tratto (l, ∞) che, rispettivamente, si riducono a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ per $\lambda = l$ e di più verificano le relazioni $\xi < x_i(\lambda) \leq \xi_i$. Sarà, per $\lambda > l$:

$$x_1(\lambda) < x_2(\lambda) < \ldots < x_n(\lambda).$$

Infatti, inizialmente è $x_i(l) = \xi_i$ e quindi

$$x_1(l) < x_2(l) < \ldots < x_n(l),$$

e siccome risulta, per $\lambda \geq l$:

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_{x=x_i(\lambda)} \neq 0,$$

non potrà, per quei valori di λ, mai divenire $x_i(\lambda) = x_j(\lambda)$, i e j indicando due fra gli indici $1, 2, \ldots, n$. L'integrale $y(x, \lambda)$ ha dunque, per $\lambda > l$, gli n zeri distinti in (a, b): $x_1(\lambda), \ldots, x_n(\lambda)$, ciò che, considerando le diseguaglianze $\xi < x_i(\lambda) < \xi_i$, dimostra il teorema.

8. — Possiamo, dopo quanto precede, facilmente dimostrare l'esistenza delle successioni di valori eccezionali $k_i, \bar{k}_i$.

Esista in (a, b) un tratto (a_1, b_1) in cui la funzione $A(x)$ si serba positiva, più precisamente, abbia un minimo $m > 0$. Diciamo $-M$, $M \geq 0$, il minimo di $B(x)$ in (a_1, b_1). Per valori di λ superiori a $\frac{M}{m}$, sarà in (a_1, b_1)

$$\lambda A(x) + B(x) > 0.$$

Consideriamo l'equazione (1) nel tratto (a_1, b_1) e per valori di λ nel tratto $\left(\frac{M}{m}, \infty\right)$. La funzione di λ, $\lambda A(x) + B(x)$, cresce sempre e infinitamente con λ. I risultati di Sturm (§ 2) ci permettono quindi d'affermare che, attribuendo a λ valori $> \frac{M}{m}$ e sufficientemente grandi si potrà fare acquistare ad ogni integrale della (1) un numero di zeri in (a_1, b_1) più grande d'ogni numero fissato.

L'integrale $y(x, \lambda)$ della (1), possiede dunque per valori di λ sufficientemente grandi, certamente degli zeri in (a_1, b_1). Viene così dimostrata l'esistenza di una coppia di valori l e ξ di λ e di x, $l > 0$ e $a < \xi \leq b$, soddisfacenti all'equazione $y(x, \lambda) = 0$. Il lemma del n. 6 ci permette allora di dedurne l'esistenza di un valore positivo $k \leq l$ per cui sarà $y(b, k) = 0$.

È provata con ciò l'esistenza di un valore eccezionale k_i positivo.

Ma si può dimostrare l'esistenza di infiniti valori eccezionali k_i positivi. Dico, infatti, che esistono valori eccezionali positivi k_i in numero maggiore del numero arbitrario ν. Abbia λ un valore $l > \frac{M}{m}$, talmente grande che l'integrale $y(x, \lambda)$ abbia in (a_1, b_1) un numero di zeri $n > \nu$. Siano $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ questi zeri e sia $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n$. Esistono allora n coppie ξ_i, l, $l > 0$ e $a < \xi_i \leq b$, soddisfacenti alla $y(x, \lambda) = 0$. A ciascuna di queste coppie corrisponderà un numero k_i, $0 < k_i \leq l$, per cui è

$$y(b, k_i) = 0.$$

Sarà $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$. Invero, le coppie ξ_i, l definiscono le funzioni $x_i(\lambda)$ di λ finite, continue e costantemente decrescenti che sodisfano identicamente alla (2); e i valori k_i son quei valori di λ che rendono $x_i(\lambda) = b$. Ora, poichè inizialmente è

$$x_1(l) < x_2(l) < \ldots < x_n(l),$$

sarà sempre (n. 7), supposto λ nel tratto comune d'esistenza delle x_i:

$$x_i(\lambda) < x_{i+1}(\lambda),$$

per cui, se fosse $k_{i+1} \leq k_i$, si avrebbe

$$x_{i+1}(k_{i+1}) \geq x_{i+1}(k_i) > x_i(k_i)$$

e non

$$x_{i+1}(k_{i+1}) = x_i(k_i) = b.$$

L'equazione $y(b, \lambda) = 0$ ha, dunque, supposta l'esistenza del tratto (a_1, b_1), infinite radici positive k_i e poichè la $y(b, \lambda)$ è una funzione intiera, si avrà

$$\lim_{\nu=\infty} k_n = \infty .$$

Esista in (a, b) un tratto (a_2, b_2) in cui la funzione $A(x)$ abbia un massimo negativo $-m$, $m > 0$, e diciamo $-M$, $M \geq 0$, il minimo di $B(x)$ in (a_2, b_2).

Per valori di λ superiori a $\frac{M}{m}$, la funzione $\lambda(-A) + B$ sarà positiva in (a_2, b_2) e crescerà sempre e infinitamente con λ. Consideriamo l'equazione

$$\frac{d}{dx}\left(\theta \frac{dy}{dx}\right) + \{\lambda(-A) + B\} y = 0, \tag{3}$$

nel tratto (a_2, b_2) e per valori di λ nel tratto $\left(\frac{M}{m}, \infty\right)$. Se ne dedurrà, come precedentememente, l'esistenza di infiniti valori positivi k'_i per cui l'integrale $y_1(x, \lambda)$ della (3), soddisfacente in a alla condizione

$$a_1 y_1(a, \lambda) + a_2 \left[\frac{\partial y_1}{\partial x}\right]_{x=a} = 0,$$

è nullo in b. Ma è

$$y_1(x, \lambda) = y(x, -\lambda),$$

ne segue

$$y(b - k'_i) = 0,$$

cioè l'esistenza di infiniti valori eccezionali negativi.

Si potrà dunque enunciare il teorema:

Esistono infiniti valori eccezionali k_i, aventi per unico punto limite il punto ∞; se $A(x)$ cambia segno in (a, b) ne esistono infiniti positivi e infiniti negativi; se $A(x)$ è in (a, b) non negativa ne esistono solo infiniti positivi; se $A(x)$ è in (a, b) non positiva ne esistono solo infiniti negativi.

È evidente che se invece di considerare l'integrale $y(x, \lambda)$ della (1) avessimo considerato l'integrale $\bar{y}(x, \lambda)$, avremmo ottenuto lo stesso teorema pei valori eccezionali $\bar{k}_i$.

9. — Indichiamo, come sempre in seguito, con

$$k_0\,,\; k_1\,,\;\ldots\,,\; k_n\,,\;\ldots$$

i valori eccezionali k_i *positivi*, ordinati in modo che la successione da essi formata sia costantemente crescente e con

$$\ldots\,,\; k_{-n}\,,\;\ldots\,,\; k_{-1}\,,\; k_{-0}$$

i valori eccezionali k_i *negativi*, ordinati nello stesso modo. Con n indicheremo sempre un numero intiero positivo o nullo.

La successione

$$\ldots\,,\; k_{-n}\,,\;\ldots\,,\; k_{-1}\,,\; k_{-0}\,,\; k_0\,,\; k_1\,,\;\ldots\,,\; k_n\,,\;\ldots$$

costantemente crescente e crescente da $-\infty$ a $+\infty$ conterrà tutti e soli i valori eccezionali k_i.

Ci proponiamo di dimostrare che la soluzione eccezionale $y(x, k_{\pm n})$ ha (oltre l'eventuale zero a, esistente solo se è $a_2 = 0$) $n+1$ zeri in (a, b) di cui lo $(n+1)^{mo}$ è in b, e che la soluzione $y(x, \lambda)$, per valori di λ soddisfacenti ad una delle limitazioni

$$k_n < \lambda < k_{n+1}\;,\quad k_{-n-1} < \lambda < k_{-n}\,,$$

ha, oltre l'eventuale zero a, $n+1$ zeri *nell'interno* di (a, b) e per i valori di λ soddisfacenti alla limitazione

$$k_{-0} < \lambda < k_0\,,$$

non ha, oltre l'eventuale zero a, alcun zero in (a, b).

Nel dimostrare quanto ci proponiamo riotterremo una dimostrazione dell'esistenza dei valori eccezionali k_i.

Consideriamo nella (1), per fissare le idee, valori di $\lambda \geq 0$. L'integrale $y(x, \lambda)$ della (1), non negativo e non decrescente in a, è, per $\lambda = 0$, sempre positivo e non decrescente in (a, b). Esisterà, pertanto, un intorno sinistro $(0, \varepsilon)$ dello zero per cui, supposto λ in tale intorno, l'integrale $y(x, \lambda)$ sarà positivo in (a, b) [1]).

---

[1]) Sottintendiamo, per brevità, la frase *escluso eventualmente il punto a;* come pure, nel seguito, dicendo che $y(x, \lambda)$ *ha n zeri in* (a, b) sottintenderemo la frase: *oltre l'eventuale zero a.*

Supponiamo l'esistenza di un tratto (a_1, b_1) in (a, b) in cui si mantiene $A(x) \geq 0$. Allora esisterà certamente un valore positivo l tale che per $\lambda \geq l$ l'integrale $y(x, \lambda)$ si annulla *nell'interno* di (a, b).

Dividiamo i punti del tratto $(0, l)$ in due classi C_1, C_2, nella classe C_1 mettiamo i valori di λ per cui l'integrale $y(x, \lambda)$ non si annulla in (a, b), nella classe C_2 quelli per cui l'integrale $y(x, \lambda)$ si annulla nell'interno di (a, b). La classe C_1 esiste, i valori di λ nel tratto $(0, \varepsilon)$ soddisfano infatti alla voluta condizione; la classe C_2 esiste, i valori di λ in un conveniente intorno sinistro di l soddisfano infatti (n. 6) alla voluta condizione. In virtù del teorema del n. 7 si ha di più che se un valore di λ appartiene alla classe C_1 vi appartiene qualunque valore minore e se un valore di λ appartiene alla classe C_2 vi appartiene qualunque valore maggiore. Esisterà pertanto un punto k_0 di $(0, l)$ per cui ogni valore di λ minore appartiene a C_1 e ogni valore maggiore a C_2.

Ne segue, necessariamente, che la $y(x, k_0)$ sarà nulla solo in b. Il valore k_0 è dunque un primo valore eccezionale positivo k_i.

Per ogni valore di λ maggiore di k_0 la $y(x, \lambda)$ si annulla nell'interno di (a, b). Vi è un'intorno destro $(k_0 + 0, k_0 + \varepsilon)$ di k_0 per cui, per valori di λ in quell'intorno, la $y(x, \lambda)$ si annulla una sola volta nell'interno di (a, b). Invero, ove per λ comunque prossimo a k_0, esistessero due o più zeri $x_1, x_2, \ldots$ di $y(x, \lambda)$, essendo questi zeri funzioni continue di λ, si avrebbe

$$0 = \lim_{\lambda = k_0} y \{x_i(\lambda), \lambda\} = y \{\lim_{\lambda = k_0} x_i(\lambda), k_0\},$$

e quindi

$$\lim_{\lambda = k_0} x_i(\lambda) = b,$$

esisterebbero allora due o più funzioni continue $x_1(\lambda), x_2(\lambda), \ldots$ soddisfacenti alla $y(x, \lambda) = 0$ e prendenti lo stesso valore b per $\lambda = k_0$, il che è assurdo, per essere $\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_{\substack{x=b \\ \lambda=k_0}} \neq 0$.

Vi è un valore positivo l tale che per $\lambda \geq l$, la $y(x, \lambda)$ si annulla nell'interno di (a, b) due volte almeno. Sarà $l > k_0$. Dividiamo i punti di (k_0, l) in due classi C_1 e C_2, ponendo nella prima i valori di λ per cui non esiste che uno zero di $y(x, \lambda)$ nell'interno di (a, b) e nella seconda i valori di λ per cui esistono due o più zeri di $y(x, \lambda)$ nell'interno di (a, b). Le due classi esistono. E per il teorema del n. 7, se un valore di λ appartiene alla C_1 vi appartiene qualunque valore di (k_0, l) minore e se un valore di λ appartiene alla C_2 vi appartiene qualunque valore maggiore.

Ne segue l'esistenza di un valore $k_1 > k_0$ per cui ogni valore $\lambda > k_0$ e $< k_1$ appartiene a C_1 e ogni valore $\lambda > k_1$ appartiene a C_2.

La soluzione $y(x, k_1)$ sarà nulla in b e ulteriormente una sola volta nell'interno di (a, b). Il valore k_1 è pertanto un secondo valore eccezionale k_i positivo.

Per ogni valore di λ maggiore di k_1, la $y(x, \lambda)$ si annulla due volte almeno nell'interno di (a, b). Come precedentemente si proverà l'esistenza di un intorno destro $(k_1+0, k_1+\varepsilon)$ di k_1 per cui, per valori di λ in quell'intorno, la $y(x, \lambda)$ si annulla due volte sole nell'interno di (a, b), osservando che, ove per valori di λ comunque prossimi a k_1 esistessero nell'interno di (a, b) tre o più zeri $x_1, x_2, x_3, \ldots$ di $y(x, \lambda)$, due almeno di quei zeri dovrebbero tendere, per λ tendente a k_1, ad un medesimo zero di $y(x, k_1)$. Ciò posto, detto l un valore $(> k_1)$ tale che, per $\lambda \geq l$, la $y(x, \lambda)$ si annulla tre volte almeno nell'interno di (a, b), ne seguirà l'esistenza di un valore $k_2 > k_1$ per cui la $y(x, k_2)$ è nulla in b e ulteriormente in due punti nell'interno di (a, b) e quindi l'esistenza di un terzo valore eccezionale k_i positivo. Ecc.

Analogamente, considerando l'integrale $\bar{y}(x, \lambda)$, si dimostrerà l'esistenza di una successione

$$\ldots \bar{k}_{-n}, \ldots, \bar{k}_{-1}, \bar{k}_{-0}, \bar{k}_0, \bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n, \ldots,$$

$$\ldots < \bar{k}_{-n} < \ldots \bar{k}_{-1} < \bar{k}_{-0} < 0 < \bar{k}_0 < \bar{k}_1 < \ldots < \bar{k}_n < \ldots,$$

costantemente crescente e crescente da $-\infty$ a $+\infty$, contenente tutti e soli i valori eccezionali $\bar{k}_i$; che la soluzione eccezionale $\bar{y}(x, \bar{k}_{\pm n})$ ha $n+1$ zeri in (a, b) (oltre l'eventuale zero b) di cui uno in a; che la soluzione $\bar{y}(x, \lambda)$, per valori di λ soddisfacenti ad una delle limitazioni

$$\bar{k}_n < \lambda < \bar{k}_{n+1} \quad , \quad \bar{k}_{-n-1} < \lambda < \bar{k}_{-n}$$

ha $n+1$ zeri nell'interno di (a, b) e che per valori di λ soddisfacenti alla limitazione

$$\bar{k}_{-0} < \lambda < \bar{k}_0 ,$$

non ha, oltre l'eventuale b, alcun zero in (a, b).

10. — Il teorema del n. 7 è suscettibile di una dimostrazione diretta molto analoga a quella data al § 2 per il teorema di Sturm, affatto indipendente dal lemma del n. 6.

Sia, in (a, b), $0 < \theta_1(x) \leq \theta(x)$ e siano λ e l due costanti reali del medesimo segno per le quali si abbia $|\lambda| > |l|$; consideriamo l'equazione

$$\frac{d}{dx}\left(\theta_1 \frac{dy}{dx}\right) + (\lambda \mathrm{A} + \mathrm{B})\, y = 0 . \tag{4}$$

Dimostriamo che fra due zeri consecutivi x_1 e x_2 di un integrale $u(x)$ dell'equazione

$$\frac{d}{dx}\left(\theta \frac{dy}{dx}\right) + (l \mathrm{A} + \mathrm{B})\, y = 0 , \tag{5}$$

cade almeno uno zero dell'integrale generale $y(x)$ della (4). Difatti, ove $y(x)$ non s'annullasse mai nell'interno di (x_1, x_2), pur potendosi annullare in x_1 o in x_2 o in x_1 e in x_2, si potrebbe porre in (x_1, x_2)

$$(l \mathrm{A} + \mathrm{B})\, u^2 = -\frac{u^2}{y}\frac{d}{dx}\left(\theta_1 \frac{dy}{dx}\right) - (\lambda - l)\, \mathrm{A} u^2 .$$

Dalla relazione

$$\int_{x_1}^{x_2} \theta \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = \int_{x_1}^{x_2} (l \mathrm{A} + \mathrm{B})\, u^2\, dx ,$$

seguirebbe allora

$$\int_{x_1}^{x_2} (\theta-\theta_1)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} \theta_1 \left(\frac{du}{dx} - \frac{dy}{dx}\frac{u}{y}\right)^2 dx + (\lambda - l)\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{A} u^2 dx = 0 ,$$

eguaglianza assurda, per essere, § 1 relazione (10),

$$(\lambda - l)\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{A} u^2\, dx > 0 . \tag{6}$$

Sia ora x_1 un punto in cui un integrale $u(x)$ della (5) non sia nullo e x_2 il punto di zero di $u(x)$ più prossimo a x_1, a destra o a sinistra di x_1.

Se è $x_2 > x_1$ e $\left[\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\right]_{x_1} \geq 0$, ogni integrale $y(x)$ della (4) per cui sia

$$\left[\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\right]_{x_1} \leq \left[\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\right]_{x_1},$$

deve annullarsi nell'interno di (x_1, x_2).

Se è $x_2 < x_1$ e $\left[\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\right]_{x_1} \leq 0$, ogni integrale $y(x)$ della (4) per cui sia

$$\left[\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\right]_{x_1} \geq \left[\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\right]_{x_1},$$

deve annullarsi sull'interno di (x_2, x_1).

Ciò si dimostrerà con processo analogo a quello tenuto al n. 5, osservando che, se è $x_2 > x_1$ e $\left[\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\right]_{x_1} \geq 0$, risulterà sempre valida la (6), se è $x_2 < x_1$ e $\left[\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\right]_{x_1} \leq 0$, risulterà

$$(\lambda - l)\int_{x_2}^{x_1} \mathrm{A} u^2\, dx > 0 .$$

I risultati ottenuti in questo numero permettono d'enunciare il teorema:

Sia, in ξ, $\left[u\frac{du}{dx}\right]_\xi > 0 \left\{\left[u\frac{du}{dx}\right]_\xi \leq 0\right\}$ *ed esista in* (a, b) *l'*n^{mo} *zero* ξ_n *di* $u(x)$, *a destra di* ξ *(a sinistra di* ξ*), allora, se è in* ξ:

$$\left[u\frac{du}{du}\right]_\xi \geq \left[\frac{u^2}{y}\frac{dy}{dx}\right]_\xi \qquad \left\{\left[u\frac{du}{dx}\right]_\xi \leq \left[\frac{u^2}{y}\frac{dy}{dx}\right]_\xi\right\}$$

esisterà, in (ξ, ξ_n) $\{$*in* $(\xi_n, \xi)\}$, *l'*u^{mo} *zero di* $y(x)$, *a destra di* ξ *(a sinistra di* ξ*).*

Da questo teorema, fatto $\theta \equiv \theta_1$, $u(\xi) = y(\xi)$ e $\left[\frac{du}{dx}\right]_\xi = \left[\frac{dy}{dx}\right]_\xi$, discende, evidentemente, come caso particolare, il teorema del n. 7.

S'osserverà che i ragionamenti del n. 9 si fondano solo sul teorema del n. 7 e sulla continuità degli zeri x_i di $y(x, \lambda)$ o di $\bar{y}(x, \lambda)$ considerati come funzioni di λ in un intorno di un valore k di λ per cui sia $y(x_i, k) = 0$ o $\bar{y}(x_i, k) = 0$, continuità che discende subito dalle ben note diseguaglianze $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{\substack{x=x_i\\ \lambda=k}} \neq 0$, $\left[\frac{d\bar{y}}{dx}\right]_{\substack{x=x_i\\ \lambda=k}} \neq 0$.

Per cui, poichè i ragionamenti di questo numero dimostrano il teorema del n. 7 indipendentemente dal lemma del n. 6, troviamo due vie diverse: il lemma del n. 6 e i teoremi di questo numero, per pervenire ai risultati fondamentali pei ragionamenti del n. 9.

11. — Passiamo a dimostrare l'esistenza dei valori eccezionali h_i, $\bar{h}_i$.

I valori eccezionali h_i sono tutti e soli gli zeri di $y'(b, \lambda)$. È facile dimostrare che in ciascuno dei tratti (k_n, k_{n+1}), (k_{-n-1}, k_{-n}) vi è uno ed un solo valore eccezionale h_i.

Invero, supposto, per es., che $y(x, \lambda)$ sia non negativa e non decrescente in a, risulterà $y(x, k_{\pm 0})$ nulla e decrescente in b, $y(x, k_{\pm 1})$ nulla e crescente in b, ecc. ..., cioè:

$$y(b, k_i) = 0 \ , \ (-1)^{|i|+1} y'(b, k_i) > 0 .$$

Pertanto, le derivate

$$y'(b, k_n) \ , \ y'(b, k_{n+1})$$

risulteranno di segno contrario, come pure le

$$y'(b, k_{-n-1}) \ , \ y'(b, k_{-n}) \ .$$

Ciò prova che in ciascuno dei tratti (k_n, k_{n+1}), (k_{-n-1}, k_{-n}) vi sono certo radici dell'equazione $y'(b, \lambda) = 0$. In ciascuno di questi tratti v'è una sola radice. Difatti, considerando, per es., il tratto (k_n, k_{n+1}), per ogni zero h_i di $y'(b, \lambda)$ in (k_n, k_{n+1}), si ha (formola (10), n. 2):

$$\int_a^b A\, y^2(x, h_i)\, dx > 0 \ . \tag{7}$$

Ma nell'interno di (k_n, k_{n+1}) la $y(b, \lambda)$ conserva segno costante e quindi, dalla relazione (12) del n. 2:

$$\int_a^b A(x)\, y^2(x, h_i)\, dx = -\theta(b)\, y(b, h_i) \left[\frac{d}{d\lambda}\, y'(b, \lambda)\right]_{\lambda = h_i}$$

e dalla (7), si deduce che in ogni zero h_i nell'interno di (k_n, k_{n+1}) la $y'(b, \lambda)$ è sempre crescente o sempre descrescente, da cui l'affermata unicità.

Diciamo h_{n+1} e h_{-n-1}, i valori eccezionali h_i esistenti, rispettivamente, nei tratti (k_n, k_{n+1}), (k_{-n-1}, k_{-n}).

Resta ancora da esaminare se nei tratti $(0, k_0)$, $(0, k_{-0})$ esistono volori eccezionali h_i. Distinguiamo perciò due casi.

1.° caso. — *Non è contemporaneamente* $B(x) \equiv 0$ e $a_1 = 0$. Abbiamo visto al n. 3 che in tal caso risulterà $y'(b, 0) > 0$ e quindi, essendo $y'(b, k_{\pm 0}) < 0$, nei tratti $(0, k_0)$ e $(0, k_{-0})$ esisteranno certamente valori h_i. Col ragionamento precedente si proverà poi che in ciascuno di quei tratti esiste un solo valore eccezionale h_i, diciamo h_0 quello esistente in $(0, k_0)$ è h_{-0} quello esistente in $(k_{-0}, 0)$.

La successione

$$\ldots, h_{-n}, \ldots, h_{-1}, h_{-0}, h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots,$$

$$\ldots < h_{-n} < \ldots < h_{-1} < h_{-0} < 0 < h_0 < h_1 < \ldots < h_n < \ldots,$$

costantemente crescente e crescente da $-\infty$ a $+\infty$ contiene tutti e soli i valori eccezionali h_i.

2.° caso. — *È contemporaneamente* $B(x) \equiv 0$ e $a_1 = 0$. Nell'attuale caso fra i valori eccezionali h_i esiste il valore zero. Fra 0 e $k_{\pm 0}$ esistono altri valori eccezionali h_i? Col solito ragionamento si proverà che fra 0 e $k_{\pm 0}$ non esisterà al più che un valore h_i.

Esista, per es., nel tratto $(0, k_0)$ un valore h_i e diciamolo h_0. Sarà h_0 una radice semplice di $y'(b, \lambda) = 0$, quindi $y'(b, \lambda)$ cambia segno nell'annullarsi in h_0, ma in k_0 è $y'(b, k_0) < 0$, ne segue che nell'interno del tratto $(0, h_0)$ dovrà essere $y'(b, \lambda) > 0$ e quindi, nell'intorno destro dello zero, $y'(b, \lambda) > 0$. Viceversa, se nell'intorno destro dello zero è $y'(b, \lambda) > 0$, ne segue, poichè è $y'(b, k_0) < 0$, l'esistenza di un valore h_0 in $(0, k_0)$.

Concludiamo: condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un valore eccezionale $h_{\pm 0}$ nel tratto $(0, k_{\pm 0})$ è che nell'intorno dello zero risulti $y'(b, \lambda) > 0$.

Noi andiamo ora a studiare il segno di $y'(b, \lambda)$ nell'intorno dello zero e a dimostrare quindi il teorema:

Esisterà il valore eccezionale h_0 *se è* $\int_a^b A(x)\,dx < 0$ e $A(x)$ *prende anche valori positivi in* (a, b). *Esisterà il valore eccezionale* h_{-0} *se è* $\int_a^b A(x)\,dx > 0$ *e* $A(x)$ *prende anche valori negativi in* (a, b).

Se è $\int_a^b A(x)\,dx = 0$, *i valori eccezionali* h_0 *e* h_{-0} *non esisteranno.*

Se è $\int_a^b A(x)\,dx > 0$ (< 0) *non esisterà il valore eccezionale* h_0 (h_{-0}).

Occorre perciò avere lo sviluppo di $y'(b, \lambda)$ in serie di potenze di λ. Esso si deduce dal teorema Picard-Dini [1]) secondo il quale

[1]) Picard. *Traité d'A.*, tome III, pp. 92-93. — Dini. *Studii sulle equazioni differenziali lineari.* Annali di Mat., tomo XII, serie III (1905), pp. 179-263. Nella citata Memoria del Dini il teorema è dimostrato per

l'integrale della (1), soddisfacente a determinate condizioni iniziali è una funzione intiera in λ e supposto che la rappresenti la serie

$$(8) \qquad \sum_0^{\infty}{}_n u_n(x)\lambda^n ,$$

questa, colle serie

$$(9) \qquad \sum_0^{\infty}{}_n \frac{du_n}{dx}\lambda^n , \quad \sum_0^{\infty}{}_n \frac{d^2u_n}{dx^2}\lambda^n ,$$

---

un'equazione differenziale lineare ordinaria:

$$(\alpha) \qquad \frac{d^ny}{dx^n} + p_1(x,\lambda)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + p_n(x,\lambda)\,y = f(x,\lambda) ,$$

supposto che i coefficienti $p_1, \dots, p_n$ e il termine noto f siano funzioni intiere in λ. Vogliamo dimostrare che tale teorema discende anche subito dalla mia Nota: *I teoremi d'esistenza per gl' integrali di un'equazione diff. lin. ord. soddisfacenti ad una nuova classe di condizioni* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XVII (1908), pp. 340 347) e dalla Nota del VOLTERRA: *Sull' inversione degli integrali definiti* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. V (1896), pp. 177-184). Enunciamo il teorema: Ogni integrale della (α) soddisfacente a determinate condizioni iniziali è una funzione intiera in λ e supposto che la rappresenti la serie $\sum_i u_i(x)\lambda^i$, questa, insieme alle serie $\sum_i \frac{d^\nu u_i}{dx^\nu}\lambda^i$ $(\nu = 1, 2, \dots, n)$, è, per ogni valore di λ, uniformemente convergente in (a, b), rispetto ad x. Nella mia Nota è dimostrato, in particolare, che un integrale della (α) soddisfacente a determinate condizioni iniziali, costituisce colle sue prime $n-1$ derivate la unica soluzione di un sistema di equazioni integrali lineari del tipo di VOLTERRA. I nuclei e i termini noti di un tal sistema risultano delle funzioni intiere in λ e quindi esso ammetterà, per ogni valore di λ, uno ed un unico sistema di soluzioni. Ogni soluzione, secondo lo sviluppo datone dal VOLTERRA, risulterà una serie di funzioni intiere in λ, convergente, rispetto ad x e per qualunque valore di λ, in egual grado in (a, b) e, rispetto a λ e per x in (a, b), in egual grado in un qualunque campo finito del piano di λ. La soluzione sarà dunque, essa stessa, una funzione intiera in λ. Si avrà pertanto, tenuto anche conto della (α):

$$\frac{d^\nu y}{dx^\nu} = \sum_0^{\infty}{}_i \, u_{\nu i}\,\lambda^i \qquad (\nu = 0, \dots, n) ,$$

e per la convergenza in egual grado rispetto ad x:

$$u_{\nu+1, i} = \frac{d}{dx} u_{\nu, i} \qquad (\nu = 0, 1, \dots, n-1) ,$$

che dimostra il teorema.

è, per ogni valore di λ, uniformemente convergente in (a, b) rispetto ad x. Introduciamo gli sviluppi (8) e (9) nella (1) che nell'attuale ipotesi diventa

$$\frac{d}{dx}\left(\theta \frac{dy}{dx}\right) + \lambda A y = 0 ,$$

ne seguiranno le relazioni

$$(10_1) \qquad \frac{d}{dx}\left(\theta \frac{du_0}{dx}\right) = 0 \ , \ \frac{d}{dx}\left(\theta \frac{du_n}{dx}\right) + A u_{n-1} = 0 .$$

Supponiamo, per semplicità, $y(a, \lambda) = 1$. Si avrà

$$(10_2) \qquad u_0(x) \equiv 1 \quad ; \quad u_n(a) = 0 \, , \ \left[\frac{du_n}{dx}\right]_a = 0 .$$

Per calcolare le $u_n(x)$, osserviamo che l'integrale generale $y(x)$ dell'equazione

$$\frac{d}{dx}\left(\theta \frac{dy}{dx}\right) + \varphi(x) = 0 ,$$

$\varphi(x)$ indicando una data funzione finita e continua in (a, b), è dato da

$$y(x) = -\int_a^x \frac{d\xi}{\theta(\xi)} \int_a^\xi \varphi(\eta)\, d\eta + c_1 \int_a^x \frac{d\xi}{\theta(\xi)} + c_2 ,$$

e applicando il principio di Dirichlet sull'inversione dell'ordine d'integrazione degli integrali doppi, si avrà

$$y(x) = -\int_a^x d\eta \int_\eta^x \frac{\varphi(\eta)}{\theta(\xi)}\, d\xi + c_1 \int_a^x \frac{d\xi}{\theta(\xi)} + c_2 =$$

$$= \int_a^x \varphi(\xi)\, d\xi \int_x^\xi \frac{d\eta}{\theta(\eta)} + c_1 \int_a^x \frac{d\xi}{\theta(\xi)} + c_2 .$$

Poniamo

$$\int_x^\xi \frac{d\eta}{\theta(\eta)} = t(x, \xi) .$$

L'integrale della (11) nullo in a con la sua derivata, sarà allora dato da:

$$y(x) = \int_a^x t(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi .$$

Le (10) hanno pertanto di conseguenza

$$u_0(x) = 1 \quad , \quad u_{n+1}(x) = \int_a^x t(x, \xi) \mathrm{A}(\xi) u_n(\xi) d\xi ,$$

e quindi

$$u_0(x) = 1 ,$$

$$u_n(x) = \int_a^x t(x, \xi_1) \mathrm{A}(\xi_1) d\xi_1 \int_a^{\xi_1} t(\xi_1, \xi_2) \mathrm{A}(\xi_2) d\xi_2 \ldots \int_a^{\xi_{n-1}} t(\xi_{n-1}, \xi_n) \mathrm{A}(\xi_n) d\xi_n .$$

Ne segue lo sviluppo di $y'(b, \lambda)$:

$$y'(b, \lambda) = -\frac{\lambda}{\theta(b)} \int_a^b \mathrm{A}(\xi_1) d\xi_1 - \tag{12}$$

$$-\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{\lambda^n}{\theta(b)} \int_a^b \mathrm{A}(\xi_1) d\xi_1 \int_a^{\xi_1} t(\xi_1, \xi_2) \mathrm{A}(\xi_2) d\xi_2 \ldots \int_a^{\xi_{n-1}} t(\xi_{n-1}, \xi_u) \mathrm{A}(\xi_u) d\xi_n .$$

Dallo sviluppo (12) di $y'(b, \lambda)$ segue evidentemente che: Se è $\int_a^b \mathrm{A}(x) dx < 0$, risulterà, nell'intorno destro dello zero, $y'(b, \lambda) > 0$ e quindi, posto che $\mathrm{A}(x)$ prenda anche valori positivi in (a, b), cioè che esista il valore eccezionale positivo k_0, esisterà il valore eccezionale h_0 [1]. Analogamente, se è $\int_a^b \mathrm{A}(x) dx > 0$ e $\mathrm{A}(x)$ prende

[1] Se è $\mathrm{A}(x) \geq 0$ in (a, b), risulterà $\int_a^b \mathrm{A}(x) dx > 0$ e il valore eccezionale h_0 non esisterà; cfr. (T) pp. 44-53.

anche valori negativi in (a, b), esisterà il valore eccezionale h_{-0}.

Sia $\int_a^b \mathrm{A}(x)\,dx = 0$. L'integrale $y(x)$ dell'equazione

$$\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{dy}{dx}\right) + \mathrm{A}(x) = 0\,,$$

nullo in a colla sua derivata è dato da

$$y(x) = \int_a^x t(x, \xi)\,\mathrm{A}(\xi)\,d\xi\,,$$

esso avrà derivata nulla in b. Invero è

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\theta(x)}\int_a^x \mathrm{A}(\xi)\,d\xi\,, \quad \left[\frac{dy}{dx}\right]_b = -\frac{1}{\theta(b)}\int_a^b \mathrm{A}(x)\,dx = 0\,.$$

Ne segue che il cofficiente della 2ª potenza di λ nello sviluppo (12) è negativo. Tale coefficiente è infatti

$$-\frac{1}{\theta(b)}\int_a^b \mathrm{A}(\xi_1)\,d\xi_1\int_a^{\xi_1} t(\xi_1, \xi_2)\,\mathrm{A}(\xi_2)\,d\xi_2 = -\frac{1}{\theta(b)}\int_a^b \mathrm{A}(x)\,y(x)\,dx$$

e si ha

$$\int_a^b \mathrm{A}(x)\,y(x)\,dx = -\int_a^b \frac{d}{dx}\left(\theta\frac{dy}{dx}\right)y(x)\,dx =$$

$$= -\left[\theta y\frac{dy}{dx}\right]_a^b + \int_a^b \theta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = \int_a^b \theta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx > 0\,.$$

Ne deriva che $y'(b, \lambda)$, nell'intorno dello zero, risulterà negativa, cioè, che, nell'ipotesi $\int_a^b \mathrm{A}(x)\,dx = 0$, non esistono i valori eccezionali h_0 e h_{-0}.

Troviamo dunque che, nel caso $\mathrm{B}(x) \equiv 0$ e $a_1 = 0$, i valori eccezionali h_0 e h_{-0} non esistono mai contemporaneamente e che la $y'(b, \lambda)$ ha nell'origine uno zero d'ordine ≤ 2, Ritroveremo i risultati dell'analisi testè fatta al § 5, in una questione di calcolo delle variazioni ivi trattata.

Non distinguendo più i due casi, si potrà dire, pel teorema del n. 7, che le soluzioni eccezionali $y\,(x, h_{\pm 0})$ non si annullano mai in (a, b), mentre che le soluzioni $y(x, h_{\pm n})$ hanno n zeri nell'interno di (a, b).

È ovvio notarlo, identiche considerazioni varranno pei valori eccezionali $\bar{h}_i$.

12. — Le successioni

$$\ldots, k_{-n}, h_{-n}, \ldots, k_{-1}, h_{-1}, k_{-0}, h_{-0}, h_0, k_0, h_1, k_1, \ldots, h_n, k_n, \ldots$$
$$\ldots, \bar{k}_{-n}, \bar{h}_{-n}, \ldots, \bar{k}_{-1}, \bar{h}_{-1}, \bar{k}_{-0}, \bar{h}_{-0}, \bar{h}_0, \bar{k}_0, \bar{h}_1, \bar{k}_1, \ldots, \bar{h}_n, \bar{k}_n, \ldots,$$

costantemente crescenti e crescenti da $-\infty$ a $+\infty$ contengono, rispettivamente, tutti e soli gli zeri delle funzioni

$$y(b, \lambda)\, y'(b, \lambda) \quad , \quad \bar{y}(a, \lambda)\, \bar{y}'(a, \lambda), \tag{13}$$

il valor zero eccettuato nel caso $\mathrm{B}\,(x) \equiv 0$ e $a_1 = 0$ $(\mathrm{B}\,(x) \equiv 0$ e $b_1 = 0)$.

Le funzioni (13) cambiano segno nell'annullarsi, per cui, poichè, nel caso che non sia contemporaneamente $\mathrm{B}(x) \equiv$ e $a_1 = 0$ $(\mathrm{B}\,(x) \equiv 0$ e $b_1 = 0)$, è

$$y(b, 0)\, y'(b, 0) > 0 \;\; (\bar{y}(a, 0)\, \bar{y}'(a, 0) < 0)$$

si potrà dire che

$$\text{per } h_{-0} < \lambda < h_0 \quad \text{è} \quad y(b, \lambda)\, y'(b, \lambda) > 0,$$
$$\text{per } \bar{h}_{-0} < \lambda < \bar{h}_0 \quad \text{è} \quad \bar{y}(a, \lambda)\, \bar{y}'(a, \lambda) < 0,$$

$$\text{per } h_n < \lambda < k_n \quad \text{o per } k_{-n} < \lambda < h_{-n} \quad \text{è} \quad y(b, \lambda)\, y'(b, \lambda) < 0 \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

$$\text{per } k_n < \lambda < h_{n+1} \quad \text{o per } h_{-n-1} < \lambda < k_{-n} \quad \text{è} \quad y(b, \lambda)\, y'(b, \lambda) > 0 \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

$$\text{per } \bar{h}_n < \lambda < \bar{k}_n \quad \text{o per } \bar{k}_{-n} < \lambda < \bar{h}_{-n} \quad \text{è} \quad \bar{y}(a, \lambda)\, \bar{y}'(a, \lambda) > 0 \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

$$\text{per } \bar{k}_n < \lambda < \bar{h}_{n+1} \quad \text{o per } \bar{h}_{-n-1} < \lambda < \bar{k}_{-n} \quad \text{è} \quad \bar{y}(a, \lambda)\, \bar{y}'(a, \lambda) < 0 \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Nel caso che sia contemporaneamente B $(x) \equiv 0$ e $a_1 = 0$ (B $(x) \equiv 0$ e $b_1 = 0$), potrà mancare qualcuno dei valori h_0 o h_{-0} ($\bar{h}_0$ o $\bar{h}_{-0}$). In tal caso dovrà considerarsi il valore h_0 o h_{-0} ($\bar{h}_0$ o $\bar{h}_{-0}$) come eventualmente coincidente collo zero; ma, poichè coincidendo o no h_0 o h_{-0} ($\bar{h}_0$ o $\bar{h}_{-0}$) collo zero, si ha sempre:

$$y(b, h_0 + \varepsilon)\, y'(b, h_0 + \varepsilon) < 0 \quad , \quad y(b, h_{-0} - \varepsilon)\, y'(b, h_{-0} - \varepsilon) < 0,$$
$$\bar{y}(a, \bar{h}_0 + \varepsilon)\, \bar{y}'(a, \bar{h}_0 + \varepsilon) > 0 \quad , \quad \bar{y}(a, \bar{h}_{-0} - \varepsilon)\, \bar{y}'(a, \bar{h}_{-0} - \varepsilon) > 0,$$

per valori di λ di valore assoluto maggiore di $|h_0|$ o $|h_{-0}|$ ($|\bar{h}_0|$ o $|\bar{h}_{-0}|$), varranno le stesse conclusioni del caso precedente riguardo al segno delle funzioni (13).

Si avrà invece che:

per $h_{-0} < \lambda < h_0$ è $y(b, \lambda)\, y'(b, \lambda) \geq 0$ ($= 0$ solo per $\lambda = 0$),
per $\bar{h}_{-0} < \lambda < \bar{h}_0$ è $\bar{y}(a, \lambda)\, \bar{y}'(a, \lambda) \leq 0$ ($= 0$ solo per $\lambda = 0$).

Tali considerazioni hanno anche la loro importanza nello studio di un integrale della (1). Si potrà per es. dire, dopo quanto abbiamo stabilito, che l'integrale $y(x, \lambda)$ della (1) non negativo e non decrescente in a, per valori di λ nell'interno del tratto (k_{-0}, k_0) è sempre positivo in (a, b) e risulterà crescente o decrescente in b secondochè λ è interno o esterno al tratto (h_{-0}, h_0).

Constateremo più largamente l'affermata importanza nel successivo paragrafo, per ora applichiamo le conclusioni di questo numero a dimostrare l'esistenza dei valori eccezionali del parametro λ nell'equazione (1) e relativi alle condizioni:

$$(14) \qquad \begin{cases} a_1 y(a, \lambda) + a_2 y'(a, \lambda) = 0 \\ b_1 y(b, \lambda) + b_2 y'(b, \lambda) = 0 \end{cases},$$

a_1, a_2, b_1, b_2 soddisfacendo alle sole condizioni $a_1^2 + a_2^2 > 0$, $b_1^2 + b_2^2 > 0$.

13. — Consideriamo per primo il caso in cui sia $a_1 a_2 \leq 0$ e $b_1 b_2 \geq 0$. Potremo suppore $b_2 \neq 0$. I valori eccezionali del parametro λ relativi alle condizioni (14) saranno dati da tutte e sole le radici dell'equazione

$$(15) \qquad \frac{y'(b, \lambda)}{y(b, \lambda)} = -\frac{b_1}{b_2}.$$

È $-\frac{b_1}{b_2} \leq 0$. La funzione $\frac{y'(b,\lambda)}{y(b,\lambda)}$ prende valori negativi e solo valori negativi nei tratti (h_n, k_n), (k_{-n}, h_{-n}) $(n=0,1,\ldots)$ ed in questi tratti soltanto. Per cui i valori eccezionali potranno solo esistere nei detti tratti. Ma considerando valori di λ in questi tratti è

$$\lim_{\lambda=h_{\pm n}} \frac{y'(b,\lambda)}{y(b,\lambda)} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\lambda=k_{\pm n}} \frac{y'(b,\lambda)}{y(b,\lambda)} = -\infty,$$

e quindi in ogni tratto (h_n, k_n), (k_{-n}, h_{-n}) esistono effettivamente valori di λ soddisfacenti alla (15). Si ha d'altra parte:

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{y'(b,h)}{y(b,\lambda)} = \frac{1}{y^2(b,\lambda)}\left\{y(b,\lambda)\frac{d}{d\lambda}y'(b,\lambda) - y'(b,\lambda)\frac{d}{d\lambda}y(b,\lambda)\right\}$$

$$-\int_a^b \mathrm{A}(x)y^2(x,\lambda)\,dx = y(b,\lambda)\frac{d}{d\lambda}y'(b,\lambda) - y'(b,\lambda)\frac{d}{d\lambda}y(b,\lambda)$$

e, per λ in (h_n, k_n) o in (k_{-n}, h_{-n}), n. 2 formola (10):

$$\lambda\int_a^b \mathrm{A}(x)\,y^2(x,\lambda)\,dx > 0\,.$$

Ne segue che $\frac{y'(b,\lambda)}{y(b,\lambda)}$ è sempre decrescente in (h_n, k_n) e sempre crescente in (k_{-n}, h_{-n}) e quindi che in ognuno di questi tratti vi è uno ed un solo valore eccezionale.

Diciamo λ_n il valore eccezionale in (h_n, k_n) e λ_{-n} quello in (k_{-n}, h_{-n}).

Le funzioni eccezionali $y(x,\lambda_0)$, $y(x,\lambda_{-0})$ non saranno mai nulle nell'interno di (a,b), potranno però annullarsi in a o in b o in a e in b. Le funzioni eccezionali $y(x,\lambda_n)$, $y(x,\lambda_{-n})$ hanno n zeri ed n soltanto nell'interno di (a,b), potranno però ulteriormente annullarsi in a o in b o in a e in b [1]). Ciò segue dal teo-

[1]) $y(x,\lambda_{\pm n})$ s'annullerà in a se è $a_2=0$, in b se è $b_2=0$, in a e in b se è $a_2=b_2=0$.

rema del n. 7, considerando che, essendo $h_n \leq \lambda_n \leq k_n$, sarà $k_{n-1} < \lambda_n \leq k_n$.

14. — Sia $a_1 a_2 \leq 0$ e $b_1 b_2 \leq 0$. Potremo supporre $b_2 \neq 0$. È $-\frac{b_1}{b_2} \geq 0$. La funzione $\frac{y'(b,\lambda)}{y(b,\lambda)}$ prende valori positivi e solo valori positivi nei tratti (h_{-0}, h_0), (k_n, h_{n+1}), (h_{-n-1}, k_{-n}) $(n = 0, 1, \ldots)$ e in questi tratti soltanto. Per cui i valori eccezionali potranno solo esistere nei tratti indicati. Di più, poichè è

$$\lim_{\lambda = k_{\pm n}} \frac{y'(b,\lambda)}{y(b,\lambda)} = +\infty \quad , \quad \lim_{\lambda = h_{\pm(n+1)}} \frac{y'(b,\lambda)}{y(b,\lambda)} = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

in ciascuno dei tratti (k_n, h_{n+1}), (h_{-n-1}, k_{-n}) esistono certamente valori eccezionali. Nel tratto (h_{-0}, h_0) potranno esistere come non potranno esistere valori eccezionali.

Sul numero dei valori eccezionali esistenti in ciascun tratto (k_n, h_{n+1}), (h_{-n-1}, k_{-n}), si potrà solo dire che è finito.

Diciamo $\lambda_{0,1}, \lambda_{0,2}, \ldots, \lambda_{0,\nu_0}$ i valori eccezionali esistenti in (h_{-0}, h_0). Diciamo $\lambda_{n+1,1}, \lambda_{n+1,2}, \ldots, \lambda_{n+1,\nu_{n+1}}$ i valori eccezionali esistenti in (k_n, h_{n+1}) e $\lambda_{-n-1,1}, \lambda_{-n-1,2}, \ldots, \lambda_{-n-1,\nu_{-n-1}}$ quelli esistenti in (h_{-n-1}, k_{-n}).

La funzione eccezionale $y(x, \lambda_{0,i})$ non s'annulla nell'interno di (a, b). La funzione eccezionale $y(x, \lambda_{\pm n, i})$ si annulla n volte ed n volte soltanto in (a, b), se non è $a_2 = 0$, se è $a_2 = 0$ vi si annulla $n+1$ volte.

Sia $a_1 a_2 \geq 0$ e $b_1 b_2 \geq 0$. Potremo supporre $a_2 \neq 0$. È $-\frac{a_1}{a_2} \leq 0$. La funzione $\frac{\bar{y}'(a,\lambda)}{\bar{y}(a,\lambda)}$ prende valori negativi e solo valori negativi nei tratti $(\bar{h}_{-0}, \bar{h}_0)$, $(\bar{k}_n, \bar{h}_{n+1})$, $(\bar{h}_{-n-1}, \bar{k}_{-n})$ ed in questi tratti soltanto. Per cui i valori eccezionali potranno solo esistere nei tratti indicati, ed in ciascuno dei tratti $(\bar{k}_n, \bar{h}_{n+1})$, $(\bar{h}_{-n-1}, \bar{k}_{-n})$ esistono effettivamente per essere

$$\lim_{\lambda = \bar{k}_{\pm n}} \frac{\bar{y}'(a,\lambda)}{\bar{y}(a,\lambda)} = -\infty \quad , \quad \lim_{\lambda = \bar{h}_{\pm(n+1)}} \frac{\bar{y}'(a,\lambda)}{\bar{y}(a,\lambda)} = 0 .$$

Ecc. Varranno identiche considerazioni che pel caso precedente.

Sia $a_1 a_2 \geq 0$ e $b_1 b_2 \leq 0$. Diciamo $y(x, \lambda)$ un integrale della (1) soddisfacente in a alla condizione

$$a_1 y(a, \lambda) + a_2 y'(a, \lambda) = 0,$$

potremo supporre, per non ricadere nei casi precedenti, $a_1 a_2 > 0$. L'integrale $y(x, \lambda)$ sarà, per fissare le idee, positivo e decrescente in a.

Rientrano nel caso precedente quei casi in cui è $a_1 a_2 > 0$ e $b_2 = 0$, $a_1 a_2 > 0$ e $b_1 = 0$. Poniamo

$$[\lambda_{\pm n,i}]_{b_2=0} = k_{\pm n,i}\ , \quad [\lambda_{\pm n,i}]_{b_1=0} = h_{\pm n,i}.$$

I valori eccezionali $k_{\pm n,i}$, $h_{\pm n,i}$ con $n \geq 1$, esistono certamente; la funzione eccezionale $y(x, k_{\pm n,i})$ ha n zeri nell'interno di (a, b) e un ulteriore in b, la funzione $y(x, h_{\pm n,i})$ ha n zeri nell' interno di (a, b).

I valori eccezionali relativi alle condizioni (14) nelle quali è supposto $a_1 a_2 > 0$ e $b_1 b_2 < 0$, sono tutte e sole le radici della equazione

$$\text{(10)} \qquad \frac{y'(b, \lambda)}{y(b, \lambda)} = -\frac{b_1}{b_2}.$$

È $-\dfrac{b_1}{b_2} > 0$. La soluzione $y(x, h_{1,\nu_1})$ ha un solo zero nell'interno di (a, b) e la soluzione $y(x, h_{2,1})$ ne ha due, risulterà quindi

$$y(b, h_{1,\nu_1}) < 0 \quad , \quad y(b, h_{2,1}) > 0 .$$

Nell'interno del tratto $(h_{1,\nu_1}, h_{2,1})$ cadrà pertanto uno zero almeno di $y(b, \lambda)$. Siano $k', k'', \ldots, k^{(\nu)}$ gli zeri di $y(b, \lambda)$ nel tratto indicato, si avrà

$$y(b, \lambda) < 0 \text{ per } h_{1,\nu_1} \leq \lambda < k' \ , \quad y(b, \lambda) > 0 \text{ per } k^{(\nu)} < \lambda \leq h_{2,1}.$$

D'altra parte, poichè h_{1,ν_1} e $h_{2,1}$ sono zeri consecutivi di $y'(b, \lambda)$ essa conserverà un segno costante in $(h_{1,\nu_1}, h_{2,1})$. Sia

$$y'(b, \lambda) < 0 \text{ per } h_{1,\nu_1} < \lambda < h_{2,1}.$$

Si avrà:

$$\frac{y'(b\,,\lambda)}{y\,(b\,,\lambda)}>0 \quad \text{per} \quad h_{1,\nu_1}<\lambda<k'$$

e

$$\lim_{\lambda=h_{1,\nu_1}} \frac{y'(b\,,\lambda)}{y\,(b\,,\lambda)}=0 \quad , \quad \lim_{\lambda=k'} \frac{y'(b\,,\lambda)}{y\,(b\,,\lambda)}=+\infty\,,$$

esisteranno dunque certamente in $(h_{1,\nu_1}\,, k')$ dei valori di λ soddisfacenti alla (16).

Se è

$$y'(b\,,\lambda)>0 \quad \text{per} \quad h_{1,\nu_1}<\lambda<h_{2,1}\,,$$

si avrà

$$\frac{y'(b\,,\lambda)}{y\,(b\,,\lambda)}>0 \quad \text{per} \quad k^{(\nu)}<\lambda<h_{2,1}\,,$$

e

$$\lim_{\lambda=k^{(\nu)}} \frac{y'(b\,,\lambda)}{y\,(b\,,\lambda)}=+\infty \quad , \quad \lim_{\lambda=h_{2,1}} \frac{y'(b\,,\lambda)}{y\,(b\,,\lambda)}=0\,,$$

e se ne dedurrà l'esistenza in $(k^{(\nu)}, h_{2,1})$ di valori di λ soddisfacenti alla (16).

Concludiamo dunque che esisteranno certamente nel tratto $(h_{1,\nu_1}\,, h_{2,1})$ valori di λ soddisfacenti alla (16). Analogamente si vedrà che in ogni tratto $(h_{n,\nu_n}\,, h_{n+1,1})$, $(h_{-n-1,1}\,, h_{-n,\nu_{-n}})$ esistono certamente valori eccezionali.

Diciamo $\lambda_{0,1}\,, \lambda_{0,2}\,,\ldots, \lambda_{0,\nu_0}$ gli eventuali valori eccezionali esistenti in $(h_{-1,\nu_{-1}}\,, h_{1,\nu_1})$. Diciamo $\lambda_{n,1}\,, \lambda_{n,2}\,,\ldots, \lambda_{n,\nu'_n}$ i valori eccezionali esistenti in $(h_{n,\nu_n}\,, h_{n+1,\nu_{n+1}})$ e $\lambda_{-n,1}\,, \lambda_{-n,2}\,,\ldots, \lambda_{-n,\nu'_{-n}}$ quelli esistenti in $(h_{-n-1,\nu_{-n-1}}\,, h_{-n,\nu_{-n}})$.

Per un teorema del n. 10 si potrà dire che il numero N degli zeri della soluzione $y(x\,,\lambda_{\pm n,i})$ non potrà superare $n+2$ e, per $n\geq 1$, non potrà essere inferiore a n [1]. Si avrà dunque che il nu-

[1] La diseguaglianza $N\geq n$ discende dal teorema finale del n. 10, suppostovi che il punto ξ sia in b e $y(x)=y(x,\lambda_{\pm n,i})$, $u(x)=y(x\,,h_{\pm n,\nu_{\pm n}})$.

mero N degli zeri in (a, b) della $y(x, \lambda_{\pm n,i})$ soddisfa alla limitazione

$$n \leq N \leq n+2,$$

e questo solo possiamo dire nell'attuale caso.

15. — In ogni caso, dunque, supposto che $A(x)$ cambii segno in (a, b), troviamo che esistono infiniti valori eccezionali positivi ed infiniti negativi, relativi alle condizioni (14). Nei casi considerati nel numero precedente, nulla abbiamo potuto dire sul numero $\nu_{\pm n}$ dei valori eccezionali $\lambda_{\pm n,i}$ e nell'ultimo caso non abbiamo potuto determinare che dei limiti fra cui è compreso il numero degli zeri in (a, b) della funzione eccezionale $y(x, \lambda_{\pm n,i})$.

Risultati più precisi si possono raggiungere, anche nei casi indicati, se la funzione $A(x)$ vi serba di segno costante in (a, b).

Supponiamo, per es., $A(x) \geq 0$ in (a, b). Non esistono allora, n. 2, valori eccezionali negativi relativi alle condizioni (14) nell'ipotesi che sia $a_1 a_2 \leq 0$, $b_1 b_2 \geq 0$. Riprendiamo l'analisi del numero precedente.

Sia $a_1 a_2 \leq 0$ e $b_1 b_2 \leq 0$. Supposto $b_2 \neq 0$, radici positive dell'equazione $\dfrac{y'(b, \lambda)}{y(b, \lambda)} = -\dfrac{b_1}{b_2}$ esistono solo nei tratti (k_n, h_{n+1}). Ed in ogni tratto (k_n, h_{n+1}), ne esiste effettivamente una. Di più, essendo, in (a, b), $A(x) \geq 0$, si avrà:

$$(17)\quad \frac{d}{d\lambda}\frac{y'(b, \lambda)}{y(b, \lambda)} = \frac{1}{y^2(b, \lambda)}\left\{y(b, \lambda)\frac{d}{d\lambda}y'(b, \lambda) - y'(b, \lambda)\frac{d}{d\lambda}y(b, \lambda)\right\} =$$

$$= \frac{-1}{y^2(b, \lambda)}\int_a^b A(x)\, y^2(x, \lambda)\, dx < 0,$$

e quindi nel tratto (k_n, h_{n+1}) non potrà esistere che un valore eccezionale.

Esistono valori eccezionali negativi? Poichè è $y(a,\lambda)\, y'(a,\lambda) \geq 0$, sarà, per $\lambda \leq 0$, $y(b,\lambda)\, y'(b,\lambda) > 0$ e quindi, per $\lambda \leq 0$, $\dfrac{y'(b,\lambda)}{y(b, \lambda)} > 0$. Per cui potrà anche esistere un valore eccezionale negativo, ma evidentemente per la (17), non potrà esisterne che uno.

Analoghe considerazioni varranno per il caso $a_1 a_2 \geq 0$, $b_1 b_2 \geq 0$.

Sia $a_1 a_2 \geq 0$ e $b_1 b_2 \leq 0$. Diciamo k'_n e h'_n i valori eccezionali relativi alle condizioni (14) rispettivamente nei casi: $a_1 a_2 > 0$ e $b_2 = 0$, $a_1 a_2 > 0$ e $b_1 = 0$. La prima delle (14) sia soddisfatta dall'integrale $y(x, \lambda)$ e sia esso positivo e decrescente in a. Fra h'_1 e h'_2 esiste uno zero k' di $y(b, \lambda)$ e, per la (11) del § 1, uno solo. La $y(x, k')$, nulla in b, ha per il 2.° teorema di confronto del n. 5, un solo zero nell'interno di (a, b), pertanto k' è il valore eccezionale k'_1.

Il segno di $y'(b, \lambda)$ in (h'_1, h'_2) sarà dunque il positivo e ne segue che $\dfrac{y'(b, \lambda)}{y(b, \lambda)}$ è sempre positiva in (k'_1, h'_2) e quindi che in (k'_1, h'_2) esiste un valore eccezionale relativo alle condizioni (14) con $a_1 a_2 > 0$ $b_1 b_2 < 0$. La relazione (17) ci dimostrerà poi che questo valore eccezionale è unico in (k'_1, h'_2).

Analogamente si vedrà che in ogni tratto (h'_n, h'_{n+1}) esiste uno ed un unico valore eccezionale e che, detto λ_n questo valore, si avrà:

$$h'_n < k'_n < h'_{n+1} \quad , \quad k'_n < \lambda_n < h'_{n+1}.$$

Ne segue, pel teorema di confronto del n. 5 testè citato, che la soluzione $y(x, \lambda_n)$ s'annulla precisamente $n+1$ volte in (a, b). Ecc.

§ 4.

I valori eccezionali h_i e k_i come funzioni del tratto e lo studio degli integrali

16. — Sia ξ un punto variabile nell'interno di (a, b) e diciamo $k_i(\xi)$, $h_i(\xi)$ i valori eccezionali k_i e h_i del perametro λ nell'equazione

$$\frac{d}{dx}\left(\theta \frac{dy}{dx}\right) + (\lambda A + B)\, y = 0 \tag{1}$$

relativi al tratto (a, ξ); vogliamo studiare le funzioni di ξ: $k_i(\xi)$, $h_i(\xi)$[1].

Diciamo $\bar{a}$ quel punto di (a, b), $\bar{a} \geq a$, tale che per valori di ξ maggiori di $\bar{a}$ si possa affermare l'esistenza in (a, ξ) di tratti in cui $A(x)$ si mantiene positiva (negativa).

Le funzioni $k_n(\xi)$, $h_{n+1}(\xi)$ $\{k_{-n}(\xi), h_{-n-1}(\xi)\}$ esistono nel tratto $(\bar{a}, b)$ ed ivi soltanto.

Le funzioni $k_n(\xi)$ $\{k_{-n}(\xi)\}$ *sono in* $(\bar{a} + 0, b)$ *funzioni di* ξ *sempre positive (negative), finite e continue, ovunque decrescenti (crescenti), che per* $\xi - \bar{a}$ *infinitesimo crescono verso* $+\infty$ *(decrescono verso* $-\infty$*).*

Non si ha evidentemente altro da dimostrare che le funzioni continue $k_i(\xi)$ sono crescenti all'infinito positivo per $i \geq 0$, decrescenti all'infinito negativo per $i \leq -0$, con $\xi - \bar{a}$ infinitesimo.

---

[1]) Detti $\bar{k}_i(\xi)$, $\bar{h}_i(\xi)$ i valori eccezionali $\bar{k}_i$, $\bar{h}_i$ relativi al tratto (ξ, b), si potrebbe, con considerazioni identiche a quelle che verranno fatte nel testo, studiare le funzioni $\bar{k}_i(\xi)$, $\bar{h}_i(\xi)$.

Limitiamoci, per brevità, a considerare la funzione $k_n(\xi)$. Indichiamo una dimostrazione della continuità di $k_n(\xi)$ che scaturisce immediatamente dal n. 10. Segue subito dai teoremi di quel numero che $k_n(\xi)$ è funzione sempre decrescente di ξ. Per cui se ξ_1 è un punto nell'interno di $(\bar{a}, b)$ e ξ un punto, per es., a sinistra di ξ_1 esiste il limite l_n di k_n per ξ tendente a ξ_1 e sarà $l_n \geq k_n(\xi_1)$. Ma dovrà essere $l_n = k_n(\xi_1)$, difatti ove fosse $l_n > k_n(\xi_1)$, esisterebbero, n. 10, $n+1$ zeri della funzione $y(x, l_n)$ nell'interno di (a, ξ_1), diciamo $\xi^{(n+1)}$ l' $(n+1)^{mo}$ di questi zeri, pei valori di ξ fra $\xi^{(n+1)}$ e ξ_1 si avrebbe l'assurdo $k_n(\xi) < l_n$. La funzione $k_n(\xi)$ è dunque continua.

Si avrà, cfr. n. 6, $\lim\limits_{\xi=\bar{a}} k_n(\xi) = \infty$. Difatti $k_n(\xi)$ cresce continuamente con $\xi - \bar{a}$ infinitesimo e, ove avesse il limite finito L_n, seguirebbe $y(\bar{a}, L_n) = 0$, il che (n. 3) è assurdo se non è contemporaneamente $a_2 = 0$ e $\bar{a} = a$, e se è $a_2 = 0$ e $\bar{a} = a$ si perviene parimente all'assurdo $y(a, L_n) = y'(a, L_n) = 0$.

Il teorema ora dimostrato è suscettibile di un' altra dimostrazione che non esponiamo perchè essa è analoga a quella che ora faremo per stabilire la continuità delle funzioni $h_i(\xi)$ e che è in fondo contenuta nei primi numeri del § precedente.

Le funzioni $h_n(\xi)$ $\{h_{-n}(\xi)\}$, $n \geq 1$, *e la funzione* $h_0(\xi)$ $\{h_{-0}(\xi)\}$ *per* $a_1 \neq 0$, *sono in* $(\bar{a}+0, b)$ *funzione di* ξ *sempre positive (negative) finite e continue.*

Sia ξ_1 un punto nell'interno di $(\bar{a}, b)$, l'equazione

$$y'(\xi_1, \lambda) = 0$$

è soddisfatta da tutti e soli i valori della successione

$$\ldots, h_{-0}(\xi_1), \; h_0(\xi_1), \ldots$$

soddisfacenti alle diseguaglianze

$$\ldots, < h_{-0}(\xi_1) < 0 < h_0(\xi_1) <, \ldots. \tag{2}$$

Ma è, formula (12) del n. 2:

$$\left[\frac{d}{d\lambda} y'(\xi_1, \lambda)\right]_{\lambda = h_i(\xi_1)} \neq 0,$$

per cui, in un interno σ di ξ_1, risultano definite le funzioni

$$\ldots, h^{(-0)}(\xi), h^{(0)}(\xi), \ldots$$

di ξ finite e continue, che, per ogni punto ξ in σ, rappresentano tutte e sole le radici dell'equazione

$$y'(\xi, \lambda) = 0, \tag{3}$$

e per le quali si ha $h^{(i)}(\xi_1) = h_i(\xi_1)$. Le funzioni $h^{(i)}(\xi)$, essendo radici di (3), non s'annullano mai (n. 2), per cui le funzioni $h^{(0)}(\xi)$, $h'(\xi), \ldots$ che sono positive in ξ_1 saranno sempre positive in σ e le funzioni $h^{(-0)}(\xi)$, $h^{(-1)}(\xi), \ldots$ che sono negative in ξ_1 saranno sempre negative in σ. Di più è sempre, in σ, $\left[\frac{d}{d\lambda} y'(\xi, \lambda)\right]_{\lambda = h^{(i)}(\xi)} \neq 0$ e quindi non potrà ivi mai verificarsi, per $i \neq j$, $h^{(i)}(\xi) = h^{(j)}(\xi)$. Ne deriva, poichè inizialmente valgono le (2) che sarà in σ:

$$\ldots < h^{(-0)}(\xi) < 0 < h^{(0)}(\xi) < \ldots,$$

cioè che $h^{(0)}(\xi)$ rappresenta il primo valore eccezionale positivo h_i relativo al tratto $(\bar{a}, \xi)$, $h^{(-0)}(\xi)$ il primo valore eccezionale negativo h_i relativo al tratto $(\bar{a}, \xi), \ldots$ ecc.

Si avrà pertanto in σ: $h^{(i)}(\xi) = h_i(\xi)$. Risulta con ciò provata la continuità delle $h_i(\xi)$ in tutto σ e quindi, poichè ξ_1 è un punto arbitrario di $(\bar{a} + 0, b)$, in tutto $(\bar{a} + 0, b)$.

Ne segue che le funzioni $h_{\pm n}(\xi)$, $n \geq 1$, e le funzioni $h_{\pm 0}(\xi)$ per $a_1 \neq 0$ sono derivabili e che si avrà:

$$\frac{dh_1}{d\xi} = -\frac{\left[\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}\right]_{\lambda = h_i(\xi)}}{\left[\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial \xi}\right]_{\lambda = h_i(\xi)}} = \frac{\frac{1}{\theta(\xi)} \{h_i(\xi) \mathrm{A}(\xi) + \mathrm{B}(\xi)\} \cdot y\{\xi, h_i(\xi)\}}{\left[\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial \xi}\right]_{\lambda = h_i(\xi)}} =$$

$$= -\frac{\{h_i^2(\xi) \mathrm{A}(\xi) + h_i(\xi) \mathrm{B}(\xi)\} \cdot y^2\{\xi, h_i(\xi)\}}{h_i(\xi) \int_a^\xi \mathrm{A}(x) y^2\{x, h_i(\xi)\}\, dx}.$$

Ma per la (10) del n. 1 è

$$h_i(\xi)\int_a^\xi A(x)\, y^2\{x, h_i(\xi)\}\, dx > 0\,,$$

per cui le funzioni $h_{\pm n}(\xi)$ [1]) sono in $(\bar{a}+0, b)$ funzioni decrescenti di ξ nei punti in cui è $h^2_{\pm n}(\xi)\,A(\xi) + h_{\pm n}(\xi)\,B(\xi) > 0$, funzioni crescenti nei punti in cui è $h^2_{\pm n}(\xi)\,A(\xi) + h_{\pm n}(\xi)\,B(\xi) < 0$.

Le funzioni $h_n(\xi)$, nei tratti in cui è $A(\xi) < 0$, sono dunque crescenti e le funzioni $h_{-n}(\xi)$, nei tratti in cui è $A(\xi) > 0$, sono decrescenti. Se è in (a, b) $B(\xi) \equiv 0$, si potrà dire che le funzioni $h_{\pm n}(\xi)$, crescono nei tratti in cui $A(\xi)$ si mantiene non positiva, decrescono nei tratti in cui $A(\xi)$ si mantiene non negativa [2]). Le funzioni $h_i(\xi)$ sono pertanto funzioni continue e derivabili e, nel caso $B(\xi) \equiv 0$, infinitamente oscillanti nei punti limiti dei punti di zero di $A(x)$ in cui essa cambia segno.

Per essere

$$|h_{\pm(n+1)}| > |k_{\pm n}|\,,$$

le funzioni $h_n(\xi)\,\{h_{-n}(\xi)\}$, $n \geq 1$, crescono verso $+\infty$ (decrescono verso $-\infty$) per $\xi - \bar{a}$ infinitesimo.

Qual'è il comportamento delle funzioni $h_{\pm 0}(\xi)$ per $\xi - \bar{a}$ infinitesimo? [3]). Limitiamoci a considerare la funzione $h_0(\xi)$. Osserviamo subito che $h_0(\xi)$ non può avere un limite finito H per $\xi - \bar{a}$ infinitesimo. Difatti, nell'ipotesi che un tale limite esistesse, si avrebbe $y'(\bar{a}, H) = 0$, conclusione assurda, n. 3, essendo $a_1 \neq 0$ e $a_1 a_2 \leq 0$. Ne segue che $h_0(\xi)$, per $\xi - \bar{a}$ infinitesimo, o non ha limite o cresce all'infinito. Nel caso che in un intorno destro σ di $\bar{a}$ sia $B(x) \equiv 0$ e $A(x) \geq 0$, la $h_0(\xi)$ non decresce mai per $\xi - \bar{a}$ infinitesimo e minore di σ, e quindi essa tenderà all'infinito.

In ogni caso la $h_0(\xi)$ prende, nell'intorno destro di $\bar{a}$, anche

[1]) Sottintendiamo l'ipotesi $a_1 \neq 0$ per $n = 0$.

[2]) Se è in $(a, b)\,A(\xi) \geq 0$, $B(\xi) \equiv 0$, le h_n sono dunque funzioni sempre decrescenti, cfr. (T) pp. 44-53.

[3]) Sottintendiamo l'ipotesi $a_1 \neq 0$.

valori grandi quanto si vuole. Difatti, qualunque sia il numero positivo $K(>k_0(b))$, esiste un primo punto ξ_1, a destra di $\bar{a}$, per cui è $k_0(\xi_1)=K$, allora la soluzione $y(x, K)$, non negativa e crescente in a è nulla in ξ_1 ed è positiva nell'interno di (a, ξ_1). La $y(x, K)$ risulterà pertanto decrescente in ξ_1 ed esisterà quindi un punto $\bar{\xi}$, fra a e ξ_1, in cui è $y'(\bar{\xi}, K)=0$. Un tale punto non potendo esistere, n. 3, in $(a, \bar{a})$ cadrà nell'interno di $(\bar{a}, \xi_1)$. Ne segue l'esistenza di un punto $\bar{\xi}$, fra $\bar{a}$ e ξ_1, per cui è $y'(\bar{\xi}, K)=0$; ed essendo $y(x, K)$ sempre positiva in (a, ξ_1) si avrà $h_0(\bar{\xi})=K$.

Ci resta da esaminare le funzioni $h_0(\xi)$ e $h_{-0}(\xi)$ nell'ipotesi $a_1=0$. Tale ipotesi facciamo fino alla fine di questo numero.

Come precedentemente si dimostrerà che queste funzioni sono, nell'interno dei rispettivi tratti d'esistenza, funzioni finite e continue della ξ, la prima sempre positiva, la seconda sempre negativa, decrescenti nei punti in cui le funzioni $h^2_{\pm 0}(\xi)A(\xi)+h_{\pm 0}(\xi)B(\xi)$ sono positive, crescenti nei punti in cui le medesime funzioni sono negative e che stabilita l'esistenza di un valore eccezionale $h_0(\xi), h_{-0}(\xi)$ in un punto particolare ξ, per il quale nel tratto (a, ξ) non sia identicamente $A(x)\equiv 0$, ne segue l'esistenza in tutto un intorno di ξ.

Diciamo t_1 quel punto di (a, b), $a \leq t_1 \leq b$, tale che per valori $\xi > t_1$ esistono in (a, ξ) punti in cui non è $B(x)=0$. Consideriamo, per fissare le idee, la funzione $h_0(\xi)$. Distinguiamo tre casi.

1.º caso: Sia $t_1 < \bar{a}$. Nel tratto $(\bar{a}+0, b)$ esiste la funzione $h_0(\xi)$ ed è ivi positiva finita e continua. Per $\xi - \bar{a}$ infinitesimo, $h_0(\xi)$ o non ha un limite o cresce all'infinito, difatti ove un limite finito H esistesse, esso sarebbe ≥ 0 e se ne dedurrebbe l'esistenza di una soluzione dell'equazione

$$\frac{d}{dx}\left(\theta \frac{dy}{dx}\right)+(HA+B)\,y=0,$$

di derivata nulla in a e in $\bar{a}$, il che (n. 3) è assurdo, poichè, non essendo, in $(a, \bar{a})$, $B(x)\equiv 0$ risulterà ivi $HA+B \leq 0$ e non $HA+B\equiv 0$.

In $(t_1+0, \bar{a})$, la $h_0(\xi)$ non esiste. Sia t_2 quel punto in $(a, \bar{a})$,

$a \leq t_2 \leq \bar{a}$, tale che per $\xi > t_2$ esistono in (a, ξ) punti in cui non è $A(x) = 0$. Se è $t_2 < t_1$, la $h_0(\xi)$ non esisterà nemmeno in $(t_2 + 0, t_1)$. In ogni caso, nel minore dei tratti (a, t_1), (a, t_2) la $h_0(\xi)$ è affatto indeterminata.

2.° caso: Sia $t_1 = \bar{a}$. Nel tratto $(\bar{a} + 0, b)$ esiste la funzione $h_0(\xi)$ ed è ivi positiva, finita e continua. Se è $t_2 < \bar{a}$, per $\xi - \bar{a}$ infinitesimo, o non esiste il limite di $h_0(\xi)$ ovvero essa cresce verso $+\infty$ o decresce verso zero. La $h_0(\xi)$ non esiste in $(t_2 + 0, \bar{a})$ mentre nel tratto (a, t_2) essa è affatto indeterminata. Se è $t_2 = \bar{a}$ o $a = \bar{a}$, la $h_0(\xi)$ è indeterminata in $(a, \bar{a})$ e il limite di $h_0(\xi)$, per $\xi - \bar{a}$ infinitesimo può essere anche determinato e finito.

3.° caso: Sia $t_1 > \bar{a}$, potrà essere $t_1 \leq b$. Per ξ in $(t_1 + 0, b)$, la funzione $h_0(\xi)$ esiste ed è positiva, finita e continua. Poniamo (v. n. 11):

$$P(\xi) = -\int_a^\xi A(\xi_1)\, d\xi_1 .$$

Ovunque sia ξ in $(\bar{a} + 0, t_1)$ risulti $P(\xi) > 0$. La funzione $h_0(\xi)$ esisterà allora in tutto $(\bar{a} + 0, b)$ e sarà quindi ivi positiva, finita e continua. Supponiamo che esista un intorno σ di $\bar{a}$ in cui si mantenga $A(x) \geq 0$; allora, poichè in σ è $h_0^2(\xi)\, A(\xi) + h_0(\xi)\, B(\xi) = h_0^2(\xi) A(\xi) \geq 0$, $h_0(\xi)$ non decrescerà mai con $\xi - \bar{a}$ infinitesimo, per cui o avrà un limite finito > 0 o crescerà all'infinito. La prima circostanza potrà solo verificarsi quando t_2 coincida con $\bar{a}$ o $\bar{a}$ con a. Ove l'intorno σ non esista, la funzione $h_0(\xi)$ subirà infinite oscillazioni nell'intorno destro di $\bar{a}$ e quindi essa, per $\xi - \bar{a}$ infinitesimo, potrà non avere un limite o essere infinita o infinitesima, e se di più è $\bar{a} = t_2$ o $\bar{a} = a$, potrà anche avere un limite finito.

Esistano punti in $(\bar{a} + 0, t_1)$ in cui la funzione $P(\xi)$ è negativa o nulla. Si osservi che se in ξ_1 esiste $h_0(\xi)$, si avrà $P(\xi) > 0$ e l'intorno σ di ξ_1 in cui continua ad esitere $h_0(\xi)$ sarà ben determinato, esso sarà quello in cui si mantiene $P(\xi) > 0$.

O $P(\xi)$ risulta negativa o nulla in un qualunque punto di $(\bar{a} + 0, t_1)$ (il che ha di conseguenza necessariamente o $\bar{a} = a$ o $t_2 = a$) e allora la funzione $h_0(\xi)$ non esisterà in tutto $(\bar{a} + 0, t_1)$;

o il tratto $(\bar{a}+0, t_1)$ si dividerà in intervalli (in numero finito o infinito) in ciascuno dei quali si mantiene $P(\xi)$ positivo. Tali intervalli sono limitati da punti in cui $P(\xi)$ è nullo e potranno avere un estremo comune, in cui si annullerà $P(\xi)$, o potranno essere separati da intervalli in cui sarà $P(\xi) \leq 0$.

Sia (a', a'') un intervallo di $(\bar{a}+0, t_1)$ per il quale è $P(a') = P(a'') = 0$ e $P(\xi) > 0$ per $a' < \xi < a''$. $P(\xi)$ sarà non decrescente in a' e non crescente in a'', dovranno quindi esistere un intorno destro di a' in cui è $A(x) \geq 0$ e un intorno sinistro di a'' in cui è $A(x) \leq 0$. La funzione $h_0(\xi)$ esisterà nell'interno di (a', a'') e sarà quindi ivi positiva, finita e continua e, per $\xi - a'$ o per $a'' - \xi$ infinitesimo, $h_0(\xi)$ crescerà all'infinito.

17. — Vogliamo ora mostrare come la conoscenza delle funzioni $k_n(\xi)$, $h_n(\xi)$ possa servire allo studio delle soluzioni della (1) non negative e non decrescenti in a o ivi non positive e non crescenti.

Si consideri, per es., un integrale $y(x, \lambda)$ della (1) non negativo e non decrescente in a. Il valore di λ che consideriamo soddisfi alle diseguaglianze

$$k_{n-1}(b) < \lambda < k_n(b).$$

L'integrale $y(x, \lambda)$ s'annullerà n volte in (a, b) e n volte soltanto. I punti $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ in cui s'annulla $y(x, \lambda)$ possono ben determinarsi, essi sono i punti in cui si ha:

$$k_0(\xi_1) = \lambda, \quad k_1(\xi_2) = \lambda, \ldots, k_{n-1}(\xi_n) = \lambda.$$

I punti di zero di $y'(x, \lambda)$ possono altresì determinarsi: i punti di zero di $y'(x, \lambda)$ fra a e ξ_1 sono quelli in cui è $h_0(\xi) = \lambda$, i punti di zero di $y'(x, \lambda)$ fra ξ_1 e ξ_2 sono quelli in cui è $h_1(\xi) = \lambda, \ldots,$ i punti di zero di $y'(x, \lambda)$ fra ξ_n e b sono quelli in cui è $h_n(\xi) = \lambda$. Le relazioni

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \left[\theta \frac{dy}{dx}\right]_x - \left[\theta \frac{dy}{dx}\right]_{\bar{x}} &= -\int_{\bar{x}}^{x} (\lambda A + B)\, y\, dx \\ \left[\theta \frac{dy}{dx}\right]_{\bar{x}} - \left[\theta \frac{dy}{dx}\right]_x &= -\int_{x}^{\bar{x}} (\lambda A + B)\, y\, dx, \end{aligned} \right.$$

mostrano che in un punto di zero $\bar{x}$ di $y'(x,\lambda)$ si ha un massimo o un minimo secondochè, in un intorno di $\bar{x}$ in cui y si mantiene positiva (negativa) si ha $\lambda A + B \geq 0$ o $\lambda A + B \leq 0$ ($\lambda A + B \leq 0$ o $\lambda A + B \geq 0$), si ha un flesso orizzontale se in un intorno destro di $\bar{x}$ si ha $\lambda A + B \geq 0$ o ≤ 0 e in un intorno sinistro $\lambda A + B \leq 0$ o ≥ 0. Per cui, nei tratti di (a,b) in cui si mantiene $A(x) \leq 0$, i punti di zero di $y'(x,\lambda)$ son punti di minimo o di massimo secondochè y è in quel punto positiva o negativa, ne segue, come del resto già sapevamo (v. n. 3), che nei tratti di (a,b) in cui è $A(x) \leq 0$ non può cadere più di uno zero di $y'(x,\lambda)$ e che un tal zero non vi cadrà se vi cade uno zero di $y(x,\lambda)$.

Sia ξ un punto fra ξ_ν e $\xi_{\nu+1}$, si ha

$$k_{\nu-1}(\xi) < \lambda \quad , \quad k_\nu(\xi) > \lambda$$

e quindi, secondochè è $h_\nu(\xi) > \lambda$ o $< \lambda$, si avrà

$$k_{\nu-1}(\xi) < \lambda < h_\nu(\xi) \quad , \quad h_\nu(\xi) < \lambda < k_\nu(\xi) \,.$$

Pertanto, se, per es., supponiamo che la $y(x,\lambda)$ si mantenga positiva fra ξ_ν e $\xi_{\nu+1}$, essa sarà (v. n. 12) crescente nei punti in cui è $h_\nu(\xi) > \lambda$, decrescente nei punti in cui è $h_\nu(\xi) < \lambda$.

Ne segue che $y(x,\lambda)$ nei punti $\bar{x}$ pei quali è $h_\nu(\bar{x}) = \lambda$ avrà un massimo o un minimo secondochè $h_\nu(\xi)$ è ivi decrescente o crescente; nei punti $\bar{x}$ in cui λ è un minimo o un massimo di $h_\nu(\xi)$, la $y(x,\lambda)$ avrà un flesso orizzontale. Se infine nell'intorno di un punto $\bar{x}$, $h_\nu(\xi)$ è infinitamente oscillante ripassando infinite volte pel valore λ, la $y(x,\lambda)$, essendo crescente nei punti in cui è $h_\nu(\xi) > \lambda$ e decrescente nei punti in cui è $h_\nu(\xi) < \lambda$, sarà anche infinitamente oscillante in quell'intorno di $\bar{x}$.

Queste considerazioni permettono, nei singoli casi, d'avere una idea molto approssimata della forma della curva $y = y(x,\lambda)$.

Prendiamo a considerare un caso particolare. Sia, in (a,b), $B(x) \equiv 0$, $\theta(x) \equiv 1$. Le (3) dicono allora che la curva $y = y(x,\lambda)$, in un punto di (a,b) presenterà all'asse delle x la sua convessità o concavità secondochè, in un intorno di quel punto, è $A(x) \leq 0$ o

$A(x) \geq 0$. Si supponga, per fissare le idee, che, c e d essendo due punti nell' interno di (a, b), si abbia:

$$A(x) \geq 0 \text{ per } a \leq x \leq c,$$
$$A(x) \leq 0 \text{ per } c \leq x \leq d,$$
$$A(x) \geq 0 \text{ per } d \leq x \leq b.$$

Sarà $h_0(c) < h_0(d) > h_0(b)$, per cui potranno presentarsi i seguenti tre casi

$$h_0(b) < h_0(c) < h_0(d)\ ,\ h_0(b) = h_0(c) < h_0(d)\ ,\ h_0(c) < h_0(b) < h_0(d).$$

Corrispondentemente a questi tre casi la curva $y = y\{x, h_0(b)\}$ rappresentativa della funzione eccezionale $y\{x, h_0(b)\}$ avrà tre forme differenti.

Insieme alle precedenti diseguaglianze valgono le altre, in ogni caso,

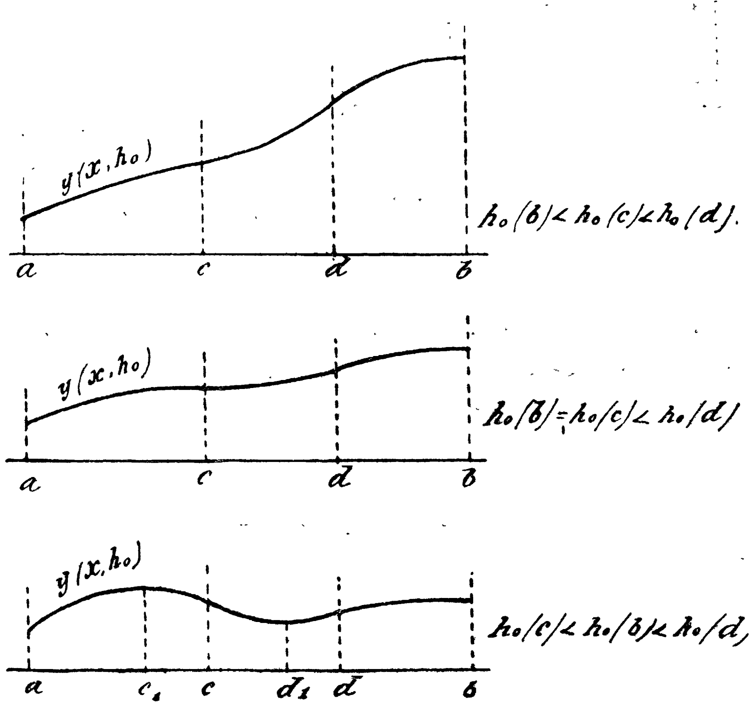
$$h_0(b) < k_0(b) < k_0(d) < k_0(c).$$

Nel primo caso, qualunque sia il punto ξ di (a, b), si avrà $0 < h_0(b) < h_0(\xi)$ e quindi, n. 12, la soluzione $y\{x, h_0(b)\}$ ha derivata nulla solo in b e supposta positiva e crescente in a è sempre positiva e crescente in (a, b). Si sarà in questo caso se, per es., per ξ in (c, d), si ha $-\int_\xi^b A(x)\,dx < 0$, v. n. 11.

Nel secondo caso, qualunque sia il punto ξ di (a, b), escluso il punto c per cui è $h(c) = h(b)$, si avrà $0 < h_0(b) < h_0(\xi)$ e quindi la $y\{x, h_0(b)\}$ non è mai decrescente in (a, b), ma ha derivata nulla in c e in b. La curva $y = y\{x, h_0(b)\}$ avrà un flesso orizzontale nel punto c.

Nel terzo caso si avrà $h_0(c) < h_0(b) < k_0(c)$, $0 < h_0(b) < h_0(d)$. Per la prima diseguaglianza la soluzione $y\{x, h_0(b)\}$ sarà sempre positiva in (a, c) e decrescente in c, per la seconda essa sarà crescente in d. Ne segue l'esistenza di uno zero c_1 della derivata $y'\{x, h_0(b)\}$ nell' interno di (a, c) e di uno zero d_1 nell' interno di (c, d). I punti c_1 e d_1 sono quei punti di (a, b) in cui $h_0(\xi)$ prende il valore $h_0(b)$ e quindi, poichè, in (a, c), $h_0(\xi)$ è sempre decrescente e in (c, d) è sempre crescente, vi è un sol puuto c_1 in (a, c) e un sol punto d_1 in (c, d). La $y\{x, h_0(b)\}$ avrà un massimo in c_1 e un minimo in d_1. Infine,.poichè è, in (d, b), $0 < h_0(b) < h_0(\xi)$, $y\{x, h_0(b)\}$ sarà sempre crescente in (d, b).

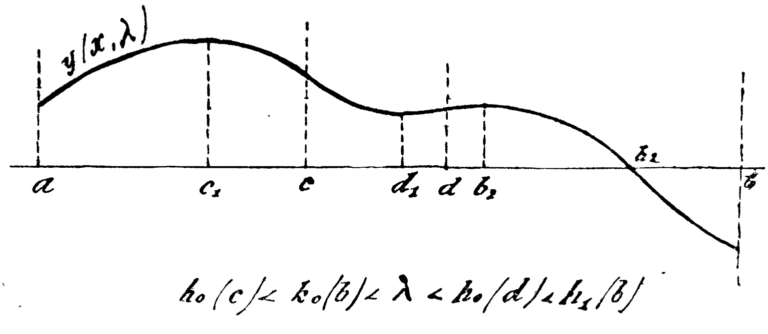
Le forme della curva $y = y\{x, h_0(b)\}$, nei tre casi, sono qui presso raffigurate.



Così la soluzione $y(x, \lambda)$, anche per un valore di λ che non sia fra i valori eccezionali, potrà essere studiata. Supponiamo, ad es., che sia

$$h_0(c) < k_0(b) < h_0(d) < h_1(b)$$

e che λ sia compreso fra $k_0(b)$ e $h_0(d)$. Si avrà $k_0(b) < \lambda < h_1(b)$ e perciò, n. 12, la $y(x, \lambda)$ avrà uno ed un solo punto di zero in (a, b) e in b risulterà negativa e decrescente. Poichè λ è minore di $h_0(d)$ sarà $y(x, \lambda)$ positiva in tutto (a, d) e in d crescente ed essendo $\lambda > h_0(c)$ la $y(x, \lambda)$ sarà decrescente in c. Lo zero di $y(x, \lambda)$ sarà dunque nell'interno di (d, b) e la curva $y = y(x, \lambda)$ avrà la forma qui presso riprodotta



I punti c_1, d_1, b_1 di zero di $y'(x, \lambda)$ sono quelli in cui la funzione $h_0(\xi)$ prende il valore λ ed il punto b_2 di zero di $y(x, \lambda)$ è quello in cui la funzione $k_0(\xi)$ prende il valore λ.

Ecc.

18. — Il teorema d'oscillazione. Indichi k_i il valore eccezionale k_i relativo al tratto (a, b), per $a_2 = 0$. La funzione eccezionale $y(x, k_i)$ s'annullerà in a, in b e ulteriormente $|i|$ volte nell'interno di (a, b). Un teorema di Sturm, dimostrato al n. 4, secondo il quale fra due consecutivi zeri di un integrale di una equazione differenziale, lineare, omogenea, ordinaria del 2° ordine cade uno ed un solo zero dell'integrale generale della stessa equazione ci permette di dedurre che per $\lambda = k_i$ l'integrale generale della (1) ha precisamente $|i| + 1$ zeri nell'interno di (a, b).

Indichi y_i l'integrale generale della (1) fattovi $\lambda = k_i$. Al tendere di i a $+\infty$, i punti di zero di y_i invadono qualunque segmento (a', b') in cui $A(x)$ prende anche valori positivi mentre nei tratti in cui $A(x)$ si mantiene nen positiva la y_i s'annullerà al più una volta. Difatti, se nel segmento (a', b') la $A(x)$ prende anche valori positivi, esisterà un valore $k > 0$ di λ per cui un integrale dell'equazione

$$\frac{d}{dx}\left(\theta \frac{dy}{dx}\right) + (k\mathrm{A} + \mathrm{B})\, y = 0$$

nullo in a' è nullo anche in b'. Comunque sia k esisterà un numero intiero e positivo ν tale che per $i > \nu$ si abbia $k_i > k$, ne segue, v. n. 10, che per $i > \nu$ la soluzione y_i s'annullerà almeno una volta nell'interno di (a', b').

Analogamente si proverà che al tendere di i a $-\infty$ i punti di zero di y_i invadono qualunque segmento (a', b') in cui $\mathrm{A}(x)$ prende anche valori negativi, mentre nei tratti in cui $\mathrm{A}(x)$ si mantiene non negativa la y_i s'annullerà al più una volta.

Possiamo dunque enunciare il teorema d'oscillazione

Data un' equazione (1), *esiste una successione*

$$\ldots, k_{-n}, \ldots, k_{-0}\,,\; k_0\,, \ldots, k_n\,, \ldots$$

$$\ldots < k_{-n} < \ldots < k_{-0} < 0 < k_0 < \ldots < k_n < \ldots$$

infinita, costantemente crescente, crescente da $-\infty$ *a* $+\infty$ *se* $\mathrm{A}(x)$ *cambia segno in* (a, b), *da* k_0 *a* $+\infty$ *se* $\mathrm{A}(x)$ *è non negativa in* (a, b), *da* $-\infty$ *a* k_{-0} *se* $\mathrm{A}(x)$ *è non positiva in* (a, b), *tale che per* $\lambda = k_i$ *l' integrale generale* y_i *della* (1) *abbia* $|i|+1$ *zeri nell' interno di* (a, b), *subisca cioè in* (a, b) $|i| + 1$ *oscillazioni. Per i crescente verso* $+\infty$ *(decrescente verso* $-\infty$*) l' ampiezza di ciascuna oscillazione di* y_i, *non contenuta, nemmeno in parte, in un tratto in cui è* $\mathrm{A}(x) \leq 0$ (≥ 0), *decresce verso zero.*

§ 5.

Sopra una questione di calcolo delle variazioni

19. — Possiamo molto semplicemente trattare una questione di calcolo delle variazioni in cui si presentano, come massimi o minimi di una certa espressione composta di integrali, i valori eccezionali reali λ_i del parametro λ nell'equazione

$$\frac{d}{dx}\left(\theta \frac{dy}{dx}\right) + (\lambda \mathrm{A} + \mathrm{B})\, y = 0 \tag{1}$$

relativi al tratto (a, b) e alle condizioni

$$\begin{aligned} a_1 y(a, \lambda) + a_2 y'(a, \lambda) &= 0 \\ b_1 y(b, \lambda) + b_2 y'(b, \lambda) &= 0 \end{aligned}$$ [1].

Poniamo

$$\tau(x) = \frac{(b_1 - a_1)\, x + a_1 b - b_1 a}{(x-a)(x-b) + (b_2 - a_2)\, x + a_2 b - b_2 a}.$$

La funzione $\tau(x)$ è identicamente nulla se è $a_1 = b_1 = 0$, se è $a_2 = 0$ $(b_2 = 0)$ essa ha un infinito del prim'ordine in a (in b), supposto $a_2 \neq 0$ $(b_2 \neq 0)$, si ha:

$$\tau(a) = \frac{a_1}{a_2} \quad \left(\tau(b) = \frac{b_1}{b_2}\right).$$

[1]) Cfr. il lavoro del Mason citato nell'introduzione.

L'espressione di cui i valori λ_i sono i massimi o minimi è la seguente

$$\mathrm{I}(u) = \frac{\left[\tau\theta u^2\right]_a^b + \int_a^b \left\{\theta\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \mathrm{B}u^2\right\} dx}{\int_a^b \mathrm{A}u^2\, dx}.$$

Diciamo y_i la funzione eccezionale corrispondente al valore eccezionale λ_i.

Teorema fondamentale. — *Designamo con* $\{u\}_i$ *l'aggregato di funzioni reali* $u(x)$, *la cui funzione qualunque è in* (a, b) *finita e continua con la sua derivata prima e che* **è nulla nei punti di** (a, b) **in cui si annulla** y_i. *Supposta* $u(x)$ *dell'aggregato* $\{u\}_i$ *varrà la diseguaglianza:*

$$\left[\tau\theta u^2\right]_a^b + \int_a^b \theta\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - \int_a^b (\lambda_i \mathrm{A} + \mathrm{B})\, u^2\, dx \geq 0. \tag{2}$$

Difatti, osserviamo che, avendo $u(x)$ la derivata prima sempre finita e continua, essa sarà, nei suoi punti di zero, infinitesima almeno del prim'ordine. Pertanto le funzioni

$$\frac{u}{y_i}, \frac{u^2}{y_i}$$

saranno finite e continue in (a, b), le costanti $[\tau u^2]_a$, $[\tau u^2]_b$ saranno finite e si potrà porre:

$$\frac{d}{dx}\frac{u^2}{y_i} = 2\frac{u}{y_i}\frac{du}{dx} - \frac{u^2}{y_i^2}\frac{dy_i}{dx}.$$

Poichè la y_i soddisfa alla (1), per $\lambda = \lambda_i$, si avrà

$$-\int_a^b (\lambda_i \mathrm{A} + \mathrm{B})\, u^2\, dx = \int_a^b \frac{u^2}{y_i}\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{dy_i}{dx}\right) dx$$

e integrando per parti:

$$-\int_a^b (\lambda_i \mathrm{A}+\mathrm{B}) u^2 dx = \left[\theta \frac{u^2}{y_i}\frac{dy_i}{dx}\right]_a^b - 2\int_a^b \theta \frac{u}{y_i}\frac{du}{dx}\frac{dy_i}{dx}\, dx + \int_a^b \theta\left(\frac{u}{y_i}\frac{dy_i}{dx}\right)^2 dx .$$

Il primo membro della (2) potrà quindi scriversi

$$\left[\theta\left(\tau u^2 + \frac{u}{y_i}\frac{dy_i}{dx}\right)\right]_a^b + \int_a^b \theta\left(\frac{du}{dx} - \frac{u}{y_i}\frac{dy_i}{dx}\right)^2 dx .$$

Ora è

$$\left[\tau u^2 + \frac{u^2}{y_i}\frac{dy_i}{dx}\right]_a = 0\ , \quad \left[\tau u^2 + \frac{u^2}{y_i}\frac{dy_i}{dx}\right]_b = 0\ .$$

Invero, se è $a_2 \neq 0$ ($b_2 \neq 0$), si ha

$$\left[\tau u^2 + \frac{u^2}{y_i}\frac{dy_i}{dx}\right]_a = u^2(a)\left(\frac{a_1}{a_2} - \frac{a_1}{a_2}\right) = 0$$

$$\left(\left[\tau u^2 + \frac{u^2}{y_i}\frac{dy_i}{dx}\right]_b = u^2(b)\left(\frac{b_1}{b_2} - \frac{b_1}{b_2}\right) = 0\right).$$

se è $a_2 = 0$ ($b_2 = 0$), y_i si annulla in a (in b) e quindi vi si annulla u, per cui si avrà

$$[\tau u^2]_a = 0\ , \quad \left[\frac{u^2}{y_i}\frac{dy_i}{dx}\right]_a = 0 \quad \left([\tau u^2]_b = 0\ , \quad \left[\frac{u^2}{y_i}\frac{dy_i}{dx}\right]_b = 0\right).$$

Ne segue la (2) e, di più, che in essa varrà il segno $=$ per $u = y_i$ e soltanto per $u = y_i$.

20. — La (2) può scriversi

$$\left[\tau\theta u^2\right]_a^b + \int_a^b \left\{\theta\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \mathrm{B}\, u^2\right\} dx \geq \lambda_i \int_a^b \mathrm{A} u^2 dx . \tag{3}$$

Ne seguono evidentemente i teoremi

I. — *Se per la funzione eccezionale* y_i *si ha*

$$\int_a^b \mathrm{A}\, y_i^2\, dx > 0\ ,$$

il valore eccezionale λ_i *è il minimo di* $I(u)$ *per le funzioni di* $\{u\}_i$ *che soddisfano alla diseguaglianza*

$$\int_a^b A u^2 \, dx > 0 .$$

La funzione eccezionale y_i *è la funzione minimizzante.*

II. — *Se per la funzione eccezionale* y_i *si ha*

$$\int_a^b A y_i^2 \, dx < 0 ,$$

il valore eccezionale λ_i *è il massimo di* $I(u)$ *per le funzioni di* $\{u\}_i$ *che soddisfano alla diseguaglianza*

$$\int_a^b A u^2 \, dx < 0 .$$

La funzione eccezionale y_i *è la funzione massimizzante.*

Se per la funzione eccezionale y_i si ha

$$\int_a^b A y_i^2 \, dx = 0 , \tag{4}$$

sarà anche

$$\Big[\tau\theta y_i^2\Big]_a^b + \int_a^b \left\{\theta\left(\frac{dy_i}{dx}\right)^2 - B y_i^2\right\} dx = 0 ,$$

e l'espressione $I(u)$, per $u = y_i$, si presenterà sotto la forma $\frac{0}{0}$. Per cui, quando valga la (4), dalla (3) ci sarà solo permesso di dedurre che $I(u)$ si manterrà maggiore di λ_i per le funzioni di $\{u\}_i$ per le quali è $\int_a^b A u^2 \, dx > 0$ e minore di λ_i per le funzioni di $\{u\}_i$ per le quali è $\int_a^b A u^2 \, dx < 0$. Ma noi vogliamo dimostrare il teorema:

III. — *Se per la funzione eccezionale* y_i *si ha*

$$\int_a^b \mathrm{A}\, y_i^2\, dx = 0\,,$$

il valore λ_i *è il limite inferiore dei valori che prende* $\mathrm{I}(u)$ *per le funzioni di* $\{u\}_i$ *per cui è* $\int_a^b \mathrm{A} u^2\, dx > 0$ *e il limite superiore per le funzioni di* $\{u\}_i$ *per cui è* $\int_a^b \mathrm{A} u^2\, dx < 0$.

Se la funzione v è di $\{u\}_i$ ed ε è una costante, la funzione $u = y_i + \varepsilon v$ sarà anche di $\{u\}_i$, determiniamo v per modo che, per es., risulti

$$\int_a^b \mathrm{A}\, y_i\, v\, dx > 0 \quad , \quad \int_a^b \mathrm{A}\, v^2\, dx > 0\,,$$

ciò che, evidentemente, si potrà fare ed in infiniti modi [1]). Allora per $\varepsilon > 0$, si avrà

$$\int_a^b \mathrm{A}\,(y_i + \varepsilon v)^2\, dx > 0\,,$$

cioè $y_i + \varepsilon v$ sarà fra le funzioni di $\{u\}_i$ per le quali è $\int_a^b \mathrm{A} u^2 dx > 0$.

---

[1]) Poichè è $\int_a^b \mathrm{A}\, y_i^2\, dx = 0$, $\mathrm{A}(x)$ dovrà cambiar segno in (a, b). Esisterà pertanto un tratto (a', b') di (a, b) in cui si manterrà $\mathrm{A}(x) > 0$; impiccolendo convenientemente (a', b') si potrà fare in modo che in esso non cadano zeri di y_i. Dopo ciò sarà, in (a', b'), $\mathrm{A}(x) > 0$ e $\mathrm{A} y_i$ di segno costante. Una funzione $v(x)$ finita e continua con la sua derivata che in (a', b') mantenga il segno di $\mathrm{A} y_i$ e che sia identicamente nulla in (a, a') e (b', b) apparterrà a $\{u\}_i$ e per essa sarà

$$\int_a^b \mathrm{A}\, y_i\, v\, dx = \int_{a'}^{b'} \mathrm{A}\, y_i\, v\, dx > 0 \quad , \quad \int_a^b \mathrm{A}\, v^2\, dx = \int_{a'}^{b'} \mathrm{A}\, v^2\, dx > 0\,.$$

Consideriamo valori di $\varepsilon > 0$, se dimostrerò che

$$\lim_{\varepsilon=+0} \mathrm{I}(y_i + \varepsilon v) = \lambda_i \,,$$

avrò dimostrato che λ_i è il limite inferiore dei valori di $\mathrm{I}(u)$ per le funzioni di $\{u\}_i$ per le quali è $\int_a^b \mathrm{A} u^2\, dx > 0$.

Si ha:

$$(y_i+\varepsilon v)=\frac{2\varepsilon\Big[\tau\theta\, y_i\, v\Big]_a^b + 2\varepsilon\int_a^b\left(\theta\frac{dy_i}{dx}\frac{dv}{dx}-\mathrm{B}y_i\, v\right)dx+\varepsilon^2\Big[\tau\theta\, v^2\Big]_a^b+\varepsilon^2\int_a^b\left\{\theta\left(\frac{dv}{dx}\right)^2-\mathrm{B}v^2\right\}dx}{2\varepsilon\int_b^b \mathrm{A}\, y_i\, v\, dx + \varepsilon^2\int_a^b \mathrm{A}\, v^2\, dx}$$

e quindi

$$\lim_{\varepsilon=+0}\mathrm{I}(y_i+\varepsilon v)=\frac{\Big[\tau\theta\, y_i\, v\Big]_a^b+\int_a^b\left(\theta\frac{dy_i}{dx}\frac{dv}{dx}-\mathrm{B}\, y_i\, v\right)dx}{\int_a^b \mathrm{A}\, y_i\, v\, dx}=\lambda_i \,.$$

Difatti è

$$\Big[\tau\theta\, y_i\, v\Big]_a^b+\int_a^b\left(\theta\frac{dy_i}{dx}\frac{dv}{dx}-\mathrm{B}y_i\, v\right)dx-\lambda_i\int_a^b \mathrm{A}y_i\, v\, dx=$$

$$=\Big[\tau\theta\, y_i\, v\Big]_a^b+\int_a^b\theta\frac{dy_i}{dx}\frac{dv}{dx}dx+\int_a^b\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{dy_i}{dx}\right)v\,dx=\left[\tau\theta\, y_i\, v+\theta\, v\frac{dy_i}{dx}\right]_a^b=0.$$

E risulta così dimostrato quanto si voleva.

Non esiste il massimo di $\mathrm{I}(u)$ *per le funzioni di* $\{u\}_i$ *per le quali è* $\int_a \mathrm{A}u^2\, dx > 0$ *e non esiste il minimo di* $\mathrm{I}(u)$ *per le funzioni di* $\{u\}_i$ *per le quali è* $\int_a^b \mathrm{A}u^2\, dx < 0$.

Difatti, supponiamo, per es., che la $u_n(x)$ abbia gli zeri di y_i e di y_n e che per essa sia $\int_a^b A u_n^2\, dx > 0$, la (3) darà $I(u_n) \geq \lambda_n$. Le funzioni $u_n(x)$, al variare di n, daranno tante funzioni di $\{u\}_i$ soddisfacenti alla $\int_a^b A u^2\, dx > 0$ e, poichè è $\lim_{n=\infty} \lambda_n = +\infty$, sarà

$$\lim_{n=\infty} I(u_n) = +\infty,$$

ciò che dimostra l'asserto.

21. — Abbiamo introdotto la funzione $\tau(x)$ solo per comodità di esposizione, per trattare contemporaneamente tutti i casi che offrirebbero le varie ipotesi che si possono fare sui valori delle costanti a_1, a_2, b_1, b_2. Supposto che tutte e quattro le indicate costanti siano diverse da zero, si avrà:

$$I(u) = \frac{\frac{b_1}{b_2}[\theta u^2]_b - \frac{a_1}{a_2}[\theta u^2]_a + \int_a^b \left\{\theta\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - B u^2\right\} dx}{\int_a^b A u^2\, dx};$$

supposto che sia nulla la a_1 o la a_2 (la b_1 o la b_2), si avrà:

$$I(u) = \frac{\frac{b_1}{b_2}[\theta u^2]_b + \int_a^b \left\{\theta\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - B u^2\right\} dx}{\int_a^b A u^2\, dx}$$

$$\left(I(u) = \frac{-\frac{a_1}{a_2}[\theta u^2]_a + \int_a^b \left\{\theta\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - B u^2\right\} dx}{\int_a^b A u^2\, dx} \right);$$

supposto che, sempre colla condizione $a_1^2 + a_2^2 > 0$ e $b_1^2 + b_2^2 > 0$, due delle costanti a_1, a_2, b_1, b_2 siano nulle, si avrà

$$I(u) = \frac{\int_a^b \left\{ \theta \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - B u^2 \right\} dx}{\int_a^b A u^2 \, dx} \, .$$

Se si verificano le relazioni $a_1 a_2 \leq 0$ e $b_1 b_2 \geq 0$, per le funzioni eccezionali y_n corrispondenti ai valori eccezionali positivi λ_n, è $\int_a^b A y_n^2 \, dx > 0$ e per quelle y_{-n} corrispondenti ai valori eccezionali negativi λ_{-n} è $\int_a^b A y_{-n}^2 \, dx < 0$. Per cui, in questo caso, i valori eccezionali positivi λ_n sono tutti minimi di $I(u)$ per le funzioni di $\{u\}_n$ per cui è $\int_a^b A u^2 \, dx > 0$ e i valori eccezionali negativi λ_{-n} sono tutti massimi di $I(u)$ per le funzioni di $\{u\}_{-n}$ per cui è $\int_a^b A u^2 \, dx < 0$.

Se non è contemporaneamente $B(x) \equiv 0$ e $a_1 = b_1 = 0$, esistono, nell'ipotesi $a_1 a_2 \leq 0$, $b_1 b_2 \geq 0$, in cui intendiamo di restare fino alla fine del presente numero, due valori eccezionali λ_0 (> 0) e λ_{-0} (< 0) per i quali le funzioni eccezionali corrispondenti non hanno zeri nell'interno di (a, b). Se è di più $a_2 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$, le funzioni y_0 e y_{-0} non hanno zeri in nessun punto di (a, b).

I teoremi da noi ottenuti dànno, quindi, in particolare:

Se è $a_2 b_2 \neq 0$, il minimo (massimo) di $I(u)$ nel campo delle funzioni finite e continue in (a, b) colla loro derivata, soddisfacenti alla $\int_a^b A u^2 dx > 0$ $\left(\int_a^b A u^2 \, dx < 0 \right)$ è λ_0 (λ_{-0}).

In altri termini: *I valori che prende* $I(u)$, *nel caso che sia* $a_2 b_2 \neq 0$, *per un'arbitraria funzione finita e continua in* (a, b) *colla sua derivata, che non gli faccia perdere di significato, non sono interni al tratto* $(\lambda_{-0}, \lambda_0)$.

Se è $a_2 = 0$ ($b_2 = 0$), il teorema ora enunciato varrà aggiungendo che la funzione sia nulla in a (in b).

Supponiamo infine che sia $\mathrm{B}(x) \equiv 0$ e $a_1 = b_1 = 0$. L'espressione $\mathrm{I}(u)$ diventa

$$\frac{\int_a^b \theta \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx}{\int_a^b \mathrm{A} u^2 dx}.$$

Abbiamo visto che: Se esiste il valore eccezionale h_0 (h_{-0}) il minimo (massimo) di $\mathrm{I}(u)$ nell'aggregato $\{u\}$ la cui funzione qualunque è, in (a, b), finita e continua colla sua derivata prima e soddisfa alla $\int_a^b \mathrm{A} u^2 dx > 0 \left(\int_a^b \mathrm{A} u^2 dx < 0\right)$, è h_0 (h_{-0}).

Per cui il valore eccezionale h_0 (h_{-0}) non esisterà se il limite inferiore (superiore) di $\mathrm{I}(u)$ in $\{u\}$ è lo zero.

Se è $\int_a^b \mathrm{A}(x) dx \geq 0 \left(\int_a^b \mathrm{A}(x) dx \leq 0\right)$ il limite inferiore (superiore) di $\mathrm{I}(u)$ in $\{u\}$ è lo zero. Infatti, nel caso attuale in cui è $\mathrm{B}(x) \equiv 0$ e $a_1 = b_1 = 0$, fra i valori eccezionali v'è lo zero e la corrispondente soluzione eccezionale sarà una costante reale c. Se dunque, per es., è $\int_a^b \mathrm{A}(x) dx > 0$, si avrà $\left[\int_a^b \mathrm{A}(x) u^2 dx\right]_{u=c} > 0$ e quindi lo zero sarà il minimo di $\mathrm{I}(u)$ in $\{u\}$; se è $\int_a^b \mathrm{A}(x) dx = 0$, sarà $\left[\int_a^b \mathrm{A}(x) u^2 dx\right]_{u=c} = 0$ e quindi (n. 20, III) lo zero sarà il limite inferiore di $\mathrm{I}(u)$ in $\{u\}$.

Ritroviamo, pertanto, che se è $\int_a^b \mathrm{A}(x) dx \geq 0 \left(\int_a^b \mathrm{A}(x) dx \leq 0\right)$ non esiste il valore eccezionale h_0 (h_{-0}). Cfr. la fine del n. 11.

§ 6.

Del metodo delle approssimazioni successive

22. — In questo paragrafo finale mostreremo come col metodo delle approssimazioni successive SCHWARZ-PICARD, convenientemente modificato, si possa effettuare il calcolo dei valori eccezionali del parametro λ nell'equazione

$$(1) \qquad \frac{d}{dx}\left(\theta \frac{dy}{dx}\right) + (\lambda A + B) y = 0 \text{ [1]}$$

relativi a condizioni lineari che ammettono come casi particolari quelle considerate precedentemente e il calcolo delle funzioni eccezionali corrispondenti. Di più vedremo che il detto metodo può anche servire a dimostrare l'effettiva esistenza di valori eccezionali.

Premettiamo perciò una trattazione completa della cosiddetta *funzione di Green* nelle equazioni differenziali lineari ordinarie del 2.° ordine, trattazione che ci permetterà altresì di dare un calcolo per approssimazioni successive della funzione $y(x, \lambda)$, meromorfa in λ, integrale della

$$(2) \qquad \frac{d}{dx}\left(\theta \frac{dy}{dx}\right) + q(x, \lambda) y = f(x, \lambda),$$

soddisfacente alle più generali condizioni lineari, supposte $q(x, \lambda)$

[1]) La funzione $B(x)$ può ora supporsi solo finita e continua in (a, b).

e $f(x, \lambda)$, per ogni valore di λ, funzioni finite e continue della x nel tratto (a, b) e, per ogni valore di x in (a, b), funzioni intiere di λ; calcolo valido per ogni valore di λ in un conveniente intorno del punto $\lambda = 0$.

23. — Noi imponiamo ad un integrale della (2) una delle seguenti coppie di condizioni

$$(3_1) \qquad L_i\, y \equiv \sum_{k=1}^{k=2} \int_a^b a_{ik}(\tau)\, y^{(k-1)}(\tau)\, d\tau = l_i \qquad (i = 1, 2),$$

$$(3_2) \qquad L_i\, y \equiv \sum_{k=1}^{k=2} \sum_{l=1}^{l=m_{ik}} a_{ikl}\, y^{(k-l)}(\tau_{ikl}) = l_i \qquad (i = 1, 2),$$

e potremo, in generale, nella nostra analisi considerare indifferentemente una o l'altra di tali coppie. Per le condizioni (3_1) le $a_{ik}(\tau)$ sono funzioni di τ finite e integrabili nel tratto (a, b), assegnate insieme alle quantità l_i e per le condizioni (3_2) i punti τ_{ikl} sono di (a, b) in numero finito $\leq \sum_{i\,k} m_{ik}$ assegnati insieme alle quantità a_{ikl} e l_i. Supponiamo *reali* le funzioni $a_{ik}(\tau)$ e le quantità a_{ikl}, l_i [1].

Definiamo come funzione di Green relativa all'espressione differenziale

$$Dy \equiv \frac{d}{dx}\left(\theta \frac{dy}{dx}\right) + By$$

e alle condizioni

$$(4) \qquad L_1 y = 0 \ , \ L_2 y = 0,$$

una funzione $G(x, \xi)$ *delle due variabili* x *e* ξ, *finita e integrabile rispetto a* ξ, *finita e continua rispetto a* x, *tale che, supposta* $\varphi(x)$ *un'arbitraria funzione finita e continua in* (a, b) *si abbia, per ogni integrale dell'equazione*

$$(5) \qquad \frac{d}{dx}\left(\theta \frac{dy}{dx}\right) + By + \varphi(x) = 0,$$

[1]) Si sottintende l'ipotesi che le due condizioni (3_1) o le (3_2) non siano l'una conseguenza dell'altra.

soddisfacente alle condizioni (4), *l'eguaglianza*

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi, \tag{6}$$

e viceversa, quest'eguaglianza abbia di conseguenza la (5) *e le* (4).

Dimostriamo il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè l'espressione differenziale Dy *ammetta una funzione di Green relativa alle condizioni* (4), *è che esista uno ed un solo integrale dell'equazione* $\mathrm{D}y = 0$ *soddisfacente alle* (3) *qualunque siano le* l_i, *o cioè, che l'integrale della* $\mathrm{D}y = 0$ *soddisfacente alle* (4), *sia necessariamente nullo.*

La condizione è evidentemente necessaria, difatti, supposte valide le (4), (5) e (6), qualunque sia $\varphi(x)$, si avrà $y(x) \equiv 0$ per $\varphi(x) \equiv 0$. Dimostriamo dunque che la condizione è sufficiente. Perverremo a ciò costruendo effettivamente la funzione di Green relativa all'espressione Dy e alle condizioni (4), nell'ipotesi che esista uno ed un solo integrale dall'equazione $\mathrm{D}y = 0$ soddisfacente alle (3), qualunque siano le l_i.

Diamo anzitutto una nuova espressione dell'integrale generale della (5).

Designamo con $y(x)$ l'integrale generale della (5), posto

$$c_1 \int_a^x \frac{d\xi}{\theta(\xi)} + c_2 = t(x) \;,\quad \int_x^\xi \frac{d\eta}{\theta(\eta)} = t(x, \xi),$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti arbitrarie, si avrà, n. 11:

$$y(x) = t(x) + \int_a^x t(x, \xi)\, \mathrm{B}(\xi)\, y(\xi)\, d\xi + \int_a^x t(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi, \tag{7}$$

e viceversa, da quest'eguaglianza, qualunque siano c_1 e c_2, segue la (5).

Poniamo

$$-t(x, \xi)\, \mathrm{B}(\xi) = f(x, \xi) \;,\quad t(x) + \int_a^x t(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi = \Phi(x),$$

la (7) si scriverà

$$(7_1) \qquad y(x) + \int_a^x f(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = \Phi(x)$$

Poniamo

$$f_0(x, \xi) = f(x, \xi) \;,\; f_i(x, \xi) = \int_x^\xi f_{i-j}(x, s)\, f_{j-1}(s, \xi)\, ds \,,$$

l'indice j può avere indifferentemente uno dei valori $1, 2, \ldots, i$ e la $f_i(x\,\xi)$ non dipende dall'indice j. La serie

$$F(x, \xi) = \sum_0^\infty f_i(x, \xi)$$

è convergente in egual grado nel quadrato di vertici $a, a;\ a, b;\ b, a;\ b, b$. In virtù del teorema sull'inversione degli integrali definiti, dato dal Volterra [1]), dalla (7_1) discende

$$(8) \qquad y(x) = \Phi(x) - \int_a^x F(x, \xi)\, \Phi(\xi)\, d\xi \,,$$

e viceversa, da questa discende la (7_1) e quindi la (5). Nel secondo membro della (8) sono contenute linearmente le due costanti arbitrarie c_1 e c_2. La (8) dà:

$$y(x) = t(x) - \int_a^x F(x,\xi) t(\xi) d\xi + \int_a^x t(x,\xi) \varphi(\xi) d\xi - \int_a^x d\xi \int_a^\xi F(x,\xi) t(\xi,s) \varphi(s)\, ds.$$

Ora applicando il principio di Dirichlet sull'inversione dell'ordine di integrazione degli integrali doppi, si ha

$$-\int_a^x d\xi \int_a^\xi F(x, \xi)\, t(\xi, s)\, \varphi(s)\, ds = \int_a^x \varphi(\xi)\, d\xi \int_x^\xi F(x, s)\, t(s, \xi)\, ds \,,$$

[1]) Volterra. *Sull'inversione degli integrali definiti.* Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. V (1896), pp. 177-184.

ne segue

$$y(x) = t(x) - \int_a^x \mathrm{F}(x, \xi)\, t(\xi)\, d\xi + \int_a^x \varphi(\xi) \left\{ t(x, \xi) + \int_x^\xi \mathrm{F}(x, s)\, t(s, \xi)\, ds \right\} d\xi .$$

Ponendo

$$t(x, \xi) + \int_x^\xi \mathrm{F}(x, s)\, t(s, \xi)\, ds = \mathrm{H}(x, \xi)\,, \quad t(x) - \int_a^x \mathrm{F}(x, \xi)\, t(\xi)\, d\xi = g(x),$$

si avrà

$$y(x) = g(x) + \int_a^x \mathrm{H}(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi . \tag{9}$$

che è l'espressione che volevamo dare all'integrale generale della (5). Si osservi che le costanti arbitrarie c_1 e c_2 sono contenute solo in $g(x)$, linearmente e omogeneamente. Per $\varphi(x) \equiv 0$, la (9) dà $y(x) \equiv g(x)$, $g(x)$ quindi rappresenta l'integrale generale della $\mathrm{D}y = 0$. Ne segue che

$$\int_a^x \mathrm{H}(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

è un integregrale particolare della $\mathrm{D}y + \varphi(x) = 0$; precisamente, poichè è $\mathrm{H}(x, x) = 0$, esso è l'integrale nullo in a con la sua derivata.

La funzione $\mathrm{H}(x, \xi)$, sia considerata rispetto a x che rispetto a ξ, soddisfa alla $\mathrm{D}y = 0$. Difatti (v. il citato teorema del VOLTERRA) è

$$t(x, \xi) = \mathrm{H}(x, \xi) + \int_\xi^x f(x, s)\, \mathrm{H}(s, \xi)\, ds = \mathrm{H}(x, \xi) - \int_\xi^x t(x, s)\, \mathrm{B}(s)\, \mathrm{H}(s, \xi)\, ds.$$

Deriviamo rispetto a x, avremo

$$-\frac{1}{\theta(x)} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} + \int_\xi^x \frac{1}{\theta(x)} \mathrm{B}(s)\, \mathrm{H}(s, \xi)\, ds\,,$$

moltiplichiamo per $\theta(x)$ e deriviamo ancora rispetto a x, avremo

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\theta \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}\right) + \mathrm{B}(x)\, \mathrm{H}(x, \xi) = 0 .$$

Derivando rispetto a ξ la

$$H(x, \xi) = t(x, \xi) + \int_x^\xi F(x, s)\, t(s, \xi)\, ds,$$

avremo

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = \frac{1}{\theta(\xi)} + \frac{1}{\theta(\xi)} \int_x^\xi F(x, s)\, ds,$$

da cui

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\theta \frac{\partial H}{\partial \xi}\right) = F(x, \xi) = f(x, \xi) + \sum_0^\infty \int_x^\xi f_i(x, s)\, f(s, \xi)\, ds =$$

$$= - B(\xi) \left\{ t(x, \xi) + \int_x^\xi t(s, \xi) \sum_0^\infty f_i(x, s)\, ds \right\} = - B(\xi)\, H(x, \xi)\ ^{1)}.$$

Gioverà osservare che da ciò segue che $\frac{\partial H}{\partial \xi}$, considerata come funzione di x, e $\frac{\partial H}{\partial x}$ considerata come funzione di ξ, soddisfano all'equazione $Dy = 0$.

Definiamo la funzione $g(x, \xi)$ col porre:

$$\begin{aligned} g(x, \xi) &= 0 \qquad \text{per } x \leq \xi \\ &= H(x, \xi) \ \text{per } x \geq \xi. \end{aligned}$$

La $g(x, \xi)$ considerata come funzione di x (di ξ) è finita e continua, la sua derivata è finita e continua in $(a, \xi - 0)$ e in $(\xi + 0, b)$ $\{$in $(a, x - 0)$ e in $(x + 0, b)\}$, mentre nel punto ξ (nel punto x) ha una discontinuità, è

$$\left[\frac{\partial g}{\partial x}\right]_{x=\xi+0} - \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_{x=\xi-0} = - \frac{1}{\theta(\xi)} \left(\left[\frac{\partial g}{\partial \xi}\right]_{\xi=x+0} - \left[\frac{\partial g}{\partial \xi}\right]_{\xi=x-0} = - \frac{1}{\theta(x)} \right).$$

Con la nuova posizione, l'integrale generale $y(x)$ della (5) sarà

---

[1]) Si noti la relazione $F(x, \xi) + B(\xi)\, H(x, \xi) = 0$, esistente fra $F(x, \xi)$ e $H(x, \xi)$.

espresso da

$$y(x) = g(x) + \int_a^b g(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi .$$

Imponiamo all'integrale $y(x)$ le condizioni $L_i\, y = 0$. Si osservi che si ha

$$L_i \int_a^b g(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi = \int_a^b \varphi(\xi) \{ L_i g(x, \xi) \}\, d\xi$$

Poniamo $L_i g(x, \xi) = l_i(\xi)$. La funzione $l_i(\xi)$ risulterà, quando l'operazione L_i è quella espressa dal primo membro della (3_1), funzione finita e continua della ξ, quando invece questa operazione è quella espressa dal primo membro della (3_2), la $l_i(\xi)$ risulterà una funzione finita della ξ e continua in tutti i punti di (a, b), eccezion fatta dei punti τ_{i2l}, in cui si ha:

$$\Big[l_i(\xi) \Big]_{\xi = \tau_{i2l} + 0} - \Big[l_i(\xi) \Big]_{\xi = \tau_{i2l} - 0} = \frac{a_{i2l}}{\theta(\tau_{i2l})} .$$

Indichino $\gamma_1(x)$, $\gamma_2(x)$ due integrali indipendenti della $Dy = 0$ e poniamo $L_i \gamma_k = l_{ik}$, le condizioni (4) daranno luogo alle seguenti equazioni nelle c_1 e c_2:

$$(10) \qquad \begin{cases} c_1 l_{11} + c_2 l_{12} + \displaystyle\int_a^b \varphi(\xi)\, l_1(\xi)\, d\xi = 0 \\[2ex] c_1 l_{21} + c_2 l_{22} + \displaystyle\int_a^b \varphi(\xi)\, l_2(\xi)\, d\xi = 0 . \end{cases}$$

L'ipotesi fatta dell'esistenza e dell'unicità di un integrale della $Dy = 0$ soddisfacente alle (3), porta all'esistenza e all'unicità di un sistema di valori delle c_1 e c_2 soddisfacenti alle (10). Posto

$$g_1(\xi) = \frac{l_{12}\, l_2(\xi) - l_{22}\, l_1(\xi)}{l_{22}\, l_{11} - l_{12}\, l_{21}} \quad , \quad g_2(\xi) = \frac{l_{21}\, l_1(\xi) - l_{11}\, l_2(\xi)}{l_{22}\, l_{11} - l_{12}\, l_{21}} ,$$

si ricaverà dal sistema (10):

$$c_1 = \int_a^b \varphi(\xi)\, g_1(\xi)\, d\xi \;, \quad c_2 = \int_a^b \varphi(\xi)\, g_2(\xi)\, d\xi \,.$$

Per cui l'integrale $y(x)$ della (5) soddisfacente alle (4) sarà definito dall'eguaglianza.

$$y(x) = \gamma_1(x) \int_a^b \varphi(\xi) g_1(\xi)\, d\xi + \gamma_2(x) \int_a^b \varphi(\xi) g_2(\xi)\, d\xi + \int_a^b \varphi(\xi) g(x, \xi) d\xi \,.$$

Poniamo

$$G(x, \xi) = \gamma_1(x)\, g_1(\xi) + \gamma_2(x) g_2(\xi) + g(x, \xi) \,,$$

ne segue che, qualunque sia $\varphi(x)$, la funzione $y(x)$, definita dall'eguaglianza

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi \,,$$

è l'integrale della (5) soddisfacente alle (4). La funzione $G(x, \xi)$, finita e continua in x, finita e integrabile in ξ, è dunque la funzione di Green relativa all'espressione differenziale Dy e alle condizioni (4). E il teorema enunciato è dimostrato.

La funzione di Green da noi costruita gode delle seguenti proprietà.

La $G(x, \xi)$, considerata come funzione di x, è finita e continua, la sua derivata è finita e continua in $(a, \xi - 0)$ e in $(\xi + 0, b)$, mentre nel punto ξ ha una discontinuità, è:

$$\left[\frac{\partial G}{\partial x}\right]_{x=\xi+0} - \left[\frac{\partial G}{\partial x}\right]_{x=\xi-0} = -\frac{1}{\theta(\xi)} \,.$$

La $G(x, \xi)$, considerata sempre come funzione di x, soddisfa per ogni valore di ξ, i valori di ξ di discontinuità delle $g_1(\xi)$, $g_2(\xi)$ tutt'al più eccettuati [1]), alle $L_i\, y = 0$, come può verificarsi imme-

[1]) I valori di ξ di discontinuità delle $g_1(\xi)$, $g_2(\xi)$ potranno solo presentarsi nel caso che le operazioni $L_i y$ siano quelle espresse dai primi membri delle (3_2) e solo nei punti τ_{i2l}.

diatamente; soddisfa alla $Dy=0$, difatti è

$$G(x\,,\xi)=\gamma_1(x)\,g_1(\xi)+\gamma_2(x)\,g_2(\xi) \qquad \text{per} \quad x\leq\xi,$$

$$=\gamma_1(x)\,g_1(\xi)+\gamma_2(x)\,g_2(\xi)+H(x\,,\xi) \qquad \text{per} \quad x\geq\xi.$$

Le $G(x\,,\xi)$ e $\dfrac{\partial}{\partial x}G(x\,,\xi)$ considerate come funzioni di ξ, sono, per ogni valore di x, finite e continue in $(a\,,b)$, tranne tutt'al più in un numero finito di punti non dipendenti da x, in cui, restando sempre finite, presentano delle discontinuità di prima specie [1]).

Nell'ipotesi che esista la funzione di Green relativa all'espressione differenziale Dy e alle condizioni (4), esisterà uno ed un solo integrale della (5) soddisfacente alle (3), esso sarà definito dall'egua-

---

[1]) L'HILBERT, nel luogo citato nell'introduzione, pone queste proprietà a definizione della funzione di Green e la costruisce in alcuni esempî particolari. Osserviamo, d'altronde, che se esiste una funzione $G(x,\xi)$ godente delle indicate proprietà, la funzione $y(x)$ definita dalla eguaglianza

$$(\alpha) \qquad y(x)=\int_a^b G(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

soddisfa alla $Dy+\varphi(x)=0$ e alle $L_i y=0$. Difatti, si potrà evidentemente scrivere

$$\theta(x)\frac{dy}{dx}=\int_a^b \theta(x)\frac{\partial G}{\partial x}\varphi(\xi)\,d\xi\ ,\quad L_i y=\int_a^b (L_i G)\,\varphi(\xi)\,d\xi=0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\int_a^x \theta(x)\frac{\partial G}{\partial x}\varphi(\xi)\,d\xi+\int_x^b \theta(x)\frac{\partial G}{\partial x}\varphi(\xi)\,d\xi\right)=-\varphi(x)+$$

$$+\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\left\{\theta(x)\frac{\partial G}{\partial x}\right\}\varphi(\xi)\,d\xi=-\varphi(x)-B(x)\,y\,.$$

Ne segue che, qualunque sia $\varphi(x)$, esiste un integrale della $Dy+\varphi(x)=0$ soddisfacente alle $L_i y=0$ e quindi che *ogni* integrale della $Dy+\varphi(x)=0$ soddisfacente alle $L_i y=0$, sarà dato dalla (α). Troviamo dunque che una tale funzione $G(x,\xi)$ risponde alla definizione da noi data di funzione di Green. È ovvio del resto che se esiste una funzione di Green, essa è unica.

glianza:

$$y(x) = G(x) + \int_a^b G(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi ,$$

dove $G(x)$ esprime l'integrale della $Dy = 0$ soddisfacente alle (3).

24. — Se le condizioni $L_i y = 0$ son tali che per due funzioni $u(x)$ e $v(x)$ che vi soddisfano, si ha

$$\left[\theta\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right)\right]_a^b = 0 , \tag{11}$$

si avrà $G(x_1, x_2) = G(x_2, x_1)$, supposto che x_1 e x_2 non siano fra i punti τ_{i2l}. Difatti, $G(x, x_1)$ e $G(x, x_2)$, x_1 e x_2 non essendo fra i punti τ_{i2l}, soddisfano alle $L_i y = 0$, ponendo $G(x, x_1) = G_1(x)$, $G(x, x_2) = G_2(x)$, si avrà perciò

$$\left[\theta\left(G_5\frac{dG_1}{dx} - G_1\frac{dG_2}{dx}\right)\right]_a^b = 0 . \tag{12}$$

Nella relazione

$$\int_a^b (vDu - uDv)\, dx = \left[\theta\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right)\right]_a^b ,$$

cfr. Hilbert loc. cit., poniamo $u = G_1(x)$, $v = G_2(x)$ e supponiamo, per es., $x_1 < x_2$, si avrà

$$0 = \left[\theta\left(G_2\frac{dG_1}{dx} - G_1\frac{dG_2}{dx}\right)\right]_a^{x_1-\varepsilon} + \left[\theta\left(G_2\frac{dG_1}{dx} - G_1\frac{dG_2}{dx}\right)\right]_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} +$$
$$+ \left[\theta\left(G_2\frac{dG_1}{dx} - G_1\frac{dG_2}{dx}\right)\right]_{x_2+\varepsilon}^b ,$$

e quindi, passando al limite per ε infinitesimo e tenendo conto della (12),

$$G(x_1, x_2) = G(x_2, x_1) .$$

Sia x_1 un punto τ_{i2l} e σ un suo intorno nel quale non cadano altri punti τ_{i2l}. Supposto sempre che x_2 non sia un punto τ_{i2l} e che x sia in σ ma sia diverso da x_1, si avrà $G(x, x_2) = G(x_2, x)$, e quindi

$$\lim_{x=x_1+0} G(x, x_2) = \lim_{x=x_1-0} G(x_2, x) = G(x_1, x_2),$$

cioè la $G(x, \xi)$ risulterà continua anche rispetto a ξ in tutto (a, b). Ne segue che, nell'ipotesi in cui siamo per le condizioni $L_i y = 0$, o le operazioni $L_i y$ sono quelle espresse dai primi membri delle (3_1), o, nell'altro caso, i punti τ_{i2l} sono solo agli estremi del tratto (a, b). E possiamo enunciare il teorema:

Se le condizioni $L_i y = 0$ *son tali che per due funzioni* $u(x)$ *e* $v(x)$ *che vi soddisfano si verifica la* (11), *la funzione di Green corrispondente è una funzione simmetrica delle due variabili* x *e* ξ.

È perciò che, nel seguito, quando le condizioni $L_i y = 0$ godono della proprietà ora indicata, le diremo, brevemente, *simmetriche.*

Applichiamo il nostro metodo a costruire, in alcuni casi particolari, la funzione di Green, anche allo scopo di verificare le nostre conclusioni.

Si voglia costruire la funzione di Green relativa all'espressione differenziale

$$\frac{d}{dx}\left(\theta \frac{dy}{dx}\right) \tag{13}$$

e alle condizioni $y(a) = 0$, $y(b) = 0$. La condizione d'esistenza della funzione di Green è soddisfatta. Per essere $B(x) \equiv 0$, sarà anche $F(x, \xi) \equiv 0$ e quindi $H(x, \xi) = t(x, \xi)$. Ne segue, con un facile calcolo

$$G(x, \xi) = \frac{t(x, a)\, t(b, \xi)}{t(b, a)} \quad \text{per } x \leq \xi$$

$$= \frac{t(a, \xi)\, t(x, b)}{t(b, a)} \quad \text{per } x \geq \xi.$$

Dalla forma della $G(x, \xi)$ appare manifesta la sua simmetria, come vuole un teorema testè dimostrato. Per $\theta(x) \equiv 1$, si ha la funzione di Burkhardt:

$$G(x, \xi) = \frac{(x-a)(b-\xi)}{b-a} \quad \text{per } x \leq \xi$$

$$= \frac{(\xi-a)(b-x)}{b-a} \quad \text{per } x \geq \xi.$$

Così, esistono le funzioni di Green relative alla (13) e, rispettivamente, alle condizioni $y(a)=0$, $\left[\frac{dy}{dx}\right]_b=0$; $\left[\frac{dy}{dx}\right]_a=0$, $y(b)=0$ e, rispettivamente, si ha

$$\left.\begin{aligned} G(x,\xi) &= -t(x,a) \\ &= -t(b,\xi) \end{aligned}\right\} \text{per } x \leq \xi, \qquad \left.\begin{aligned} G(x,\xi) &= t(a,\xi) \\ &= t(x,b) \end{aligned}\right\} \text{per } x \geq \xi,$$

Non esiste la funzione di Green relativa alla (13) e alle condizioni $\left[\frac{dy}{dx}\right]_a=0$, $\left[\frac{dy}{dx}\right]_b=0$.

Esistono le funzioni di Green relative all'espressione differenziale

$$\frac{d^2y}{dx^2}-y$$

e, rispettivamente, alle condizioni $y(a)=0$, $y(b)=0$; $y(a)=0$, $\left[\frac{dy}{dx}\right]_b=0$; $\left[\frac{dy}{dx}\right]_a=0$, $y(b)=0$; $\left[\frac{dy}{dx}\right]_a=0$, $\left[\frac{dy}{dx}\right]_b=0$, e, rispettivamente, si ha

$$\left.\begin{aligned} G(x,\xi) &= \frac{\operatorname{senh}(x-a)\operatorname{senh}(b-\xi)}{\operatorname{senh}(b-a)} \\ &= \frac{\operatorname{senh}(x-a)\cosh(b-\xi)}{\cosh(b-a)} \\ &= \frac{\cosh(x-a)\operatorname{senh}(b-\xi)}{\cosh(b-a)} \\ &= \frac{\cosh(x-a)\cosh(b-\xi)}{\operatorname{senh}(b-a} \end{aligned}\right\} \text{per } x \leq \xi,$$

$$\left.\begin{aligned} G(x,\xi) &= \frac{\operatorname{senh}(\xi-a)\operatorname{senh}(b-x)}{\operatorname{senh}(b-a)} \\ &= \frac{\operatorname{senh}(\xi-a)\cosh(b-x)}{\cosh(b-a)} \\ &= \frac{\cosh(\xi-a)\operatorname{senh}(b-x)}{\cosh(b-a)} \\ &= \frac{\cosh(\xi-a)\cosh(b-x)}{\operatorname{senh}(b-a)} \end{aligned}\right\} \text{per } x \geq \xi.$$

Si trova, infatti

$$f_i(x,\xi) = \frac{1}{(2i+1)!}(\xi - x)^{2i+1}$$

e quindi

$$F(x,\xi) = \operatorname{senh}(\xi - x),$$

e, per essere $B(x) \equiv -1$, $H(x,\xi) = F(x,\xi) = \operatorname{senh}(\xi - x)$, come segue anche da

$$[(x,\xi) = t(x,\xi) + \int_x^\xi F(x,s)\, t(s,\xi)\, ds = \xi - x + \int_x^\xi (\xi - s)\operatorname{senh}(s-x)\, ds = \operatorname{senh}(\xi - x).$$

È manifesta la simmetria della $G(x,\xi)$. Per la prima non esistono, nelle condizioni corrispondenti, punti τ_{i2l} e $G(x,\xi)$, dovunque sia ξ, soddisferà a queste condizioni. Mentre per es., per la seconda, v'è il punto b fra i punti τ_{i2l} e la $G(x,b)$ non soddisfa alle condizioni corrispondenti.

25. — Se l'espressione differenziale Dy non ammette una funzione di Green relativa alle condizioni $L_i y = 0$, non esisterà un integrale della (5) soddisfacente alle (3), quando la $\varphi(x)$ sia affatto generica. Facciamo in questo numero l'ipotesi che la Dy non ammetta una funzione di Green relativa alle condizioni $L_i y = 0$. Vogliamo ricercare a quali condizioni deve soddisfare $\varphi(x)$, affinchè, nell'attuale ipotesi, esista un integrale della (5) soddisfacente alle (3) e trovare, ove esista, l'espressione di tale integrale.

All'integrale generale $y(x)$ della (5) abbiamo dato (n. 23) la espressione

$$y(x) = c_1\gamma_1(x) + c_2\gamma_2(x) + \int_a^b g(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi,$$

$\gamma_1(x)$ e $\gamma_2(x)$ essendo due integrali indipendenti della $Dy = 0$. Conservando le notazioni usate, l'ipotesi della non esistenza della funzione di Green relativa alla Dy e alle condizioni $L_i y = 0$, porta all'eguaglianza

$$\begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

e viceversa. Per cui, con una $\varphi(x)$ generica non si potranno determinare le c_1 e c_2 in modo che siano soddisfatte le equazioni

$$(14)\qquad \begin{cases} c_1 l_{11} + c_2 l_{12} + \int_a^b l_1(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi = l_1 \\ c_1 l_{21} + c_2 l_{22} + \int_a^b l_2(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi = l_2 . \end{cases}$$

1.° caso: Il determinante $[l_{ik}]$ *è di caratteristica* 1. Esisterà allora un integrale della $\mathrm{D}y = 0$, solo indeterminato per una costante moltiplicativa, soddisfacente alle $\mathrm{L}_i y = 0$. Sia γ_1 questo integrale e γ_2 un altro integrale da esso indipendente, sarà $l_{11} = l_{21} = 0$ e, ponendo $l_{12} = h$, $l_{22} = k$, $h^2 + k^2 > 0$. Perchè le equazioni (14) siano compatibili è necessario e sufficiente che $\varphi(x)$ soddisfi alla relazione

$$(15)\qquad \int_a^b \{k l_1(\xi) - h l_2(\xi)\}\,\varphi(\xi)\,d\xi = k l_1 - h l_2 .$$

Soddisfatta questa relazione, le (14) lascieranno la c_1 affatto arbitraria e daranno per la c_2

$$c_2 = \frac{h l_1 + k l_2}{h^2 + k^2} - \int_a^b \frac{h l_1(\xi) + k l_2(\xi)}{h^2 + k^2}\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

Concluderemo che: *Condizione necessaria e sufficiente perchè esista un integrale della* (5) *soddisfacente alle* (3) *è che la* $\varphi(x)$ *verifichi la* (15), *dopo di che questo integrale conterrà linearmente una costante arbitraria c e sarà definito dall'eguaglianza*

$$y(x) = c\gamma_1(x) + \frac{l_1 h + l_2 k}{h^2 + k^2}\gamma_2(x) + \int_a^b \left\{ g(x,\xi) - \frac{h l_1(\xi) + k l_2(\xi)}{h^2 + k^2}\gamma_2(x) \right\} \varphi(\xi)\,d\xi .$$

Ponendo:

$$c\gamma_1(x) + \frac{l_1 h + l_2 k}{h^2 + k^2}\gamma_2(x) = \Gamma(x)\ ,\ g(x,\xi) - \frac{h l_1(\xi) + k l_2(\xi)}{h^2 + k^2}\gamma_2(x) = \Gamma(x,\xi),$$

si avrà

$$y(x) = \Gamma(x) + \int_a^b \Gamma(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi . \tag{16}$$

2.° caso: Il delerminante $[l_{ik}]$ *è di caratteristica* 0. Gli integrali $\gamma_1(x)$ e $\gamma_2(x)$ soddisfarranno allora alle $L_i y = 0$ e *condizione necessaria e sufficiente perchè le* (14) *siano compatibili è che la* $\varphi(x)$ *soddisfi alle due relazioni*

$$\int_a^b l_1(\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi = l_1 \quad , \quad \int_a^b l_2(\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi = l_2 . \tag{17}$$

Soddisfatte le (17), *esisterà l'integrale* $y(x)$ *della* (5) *soddisfacente alle* (3), *esso conterrà linearmente due costanti arbitrarie* c_1 *e* c_2 *e sarà definito dall'eguaglianza*

$$y(x) = \Gamma(x) + \int_a^b \Gamma(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi , \tag{18}$$

dove è

$$\Gamma(x) = c_1 \gamma_1(x) + c_2 \gamma_2(x) \ , \ \ \Gamma(x, \xi) = g(x, \xi) .$$

Per $l_1 = l_2 = 0$, la (16) darà

$$y(x) = c\gamma_1(x) + \int_a^b \Gamma(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi ,$$

se è verificata la relazione

$$\int_a^b \{k\, l_1(\xi) - h\, l_2(\xi)\}\, \varphi(\xi)\, d\xi = 0 ,$$

e la (18)

$$y(x) = \Gamma(x) + \int_a^b \Gamma(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi ,$$

se son verificate le relazioni

$$\int_a^b l_1(\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi = 0 \ , \quad \int_a^b l_2(\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi = 0 .$$

Così, ad es., si trova che condizione necessaria e sufficiente perchè esista un integrale della

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \varphi(x) = 0$$

soddisfacente alle condizioni

$$y(b) - y(a) = l_1 \ , \ y'(b) - y'(a) = l_2 \, ,$$

è che sia

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx + l_2 = 0 \text{ [1]}.$$

Soddisfatta questa relazione, tale integrale sarà dato dalla (16) dove è

$$\Gamma(x) = c + l_1 \frac{x-a}{b-a} \ , \ \Gamma(x,\xi) = -\frac{(x-a)(b-\xi)}{b-a} \qquad \text{per } x \leq \xi$$

$$= \xi - x - \frac{(x-a)(b-\xi)}{b-a} \qquad \text{per } x \geq \xi \, .$$

26. — Consideriamo l'equazione

$$\text{(2)} \qquad \frac{d}{dx}\left(\theta \frac{dy}{dx}\right) + q(x,\lambda)\,y = f(x,\lambda)$$

e sia

$$q(x,\lambda) = \mathrm{B}(x) + \sum_1^\infty \mathrm{A}_n(x)\,\lambda^n = \mathrm{B}(x) + \lambda\,\mathrm{A}(x,\lambda) \ , \ f(x,\lambda) = \sum_0^\infty f_n(x)\,\lambda^n \, .$$

Le funzioni intiere in λ: $\eta_1(x,\lambda)$, $\eta_2(x,\lambda)$ rappresentino due in-

---

[1]) Che la relazione $\int_a^b \varphi(x)\,dx + l_2 = 0$ sia necessaria per l'esistenza di un integrale $y(x)$ della $\frac{d^2y}{dx^2} + \varphi(x) = 0$ soddisfacente alla condizione $y'(b) - y'(a) = l_2$ lo si deduce subito anche così: supposto che $y(x)$ sia un tale integrale, dall'eguaglianza $\frac{d^2y}{dx^2} + \varphi(x) = 0$, moltiplicandola per dx e integrando fra a e b, si ha $\int_a^b \varphi(x)\,dx + l_2 = 0$.

tegrali indipendenti dell'equazione omogenea

$$\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{dy}{dx}\right)+q(x,\lambda)\,y=0\,, \tag{19}$$

e la funzione intiera $\eta(x,\lambda)$ un integrale particolare della (2). Per ogni fissato valore di λ, l' integrale generale $y(x,\lambda)$ della (2) sarà dato da

$$y(x,\lambda)=\eta(x,\lambda)+c_1\eta_1(x,\lambda)+c_2\eta_2(x,\lambda)\,, \tag{20}$$

c_1 e c_2 essendo due costanti arbitrarie. Poniamo

$$L_i\,\eta(x,\lambda)=L_i(\lambda)\quad,\quad L_i\,\eta_k(x,\lambda)=L_{ik}(\lambda)\qquad(i,k=1,2)\,.$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè, per il considerato valore di λ, esista un integrale della (2) soddisfacente alle (3) è che le seguenti equazioni nelle incognite c_1 e c_2,

$$\begin{aligned} c_1L_{11}(\lambda)+c_2L_{12}(\lambda)&=l_1-L_1(\lambda)\\ c_1L_{21}(\lambda)+c_2L_{22}(\lambda)&=l_2-L_2(\lambda)\,, \end{aligned}$$

siano compatibili.

Supponiamo, in primo luogo, che la funzione intiera in λ:

$$L(\lambda)=\begin{vmatrix} L_{11}(\lambda) & L_{12}(\lambda)\\ L_{21}(\lambda) & L_{22}(\lambda)\end{vmatrix}$$

non sia identicamente nulla. In tale ipotesi, per ogni valore di λ per cui sia $L(\lambda)\neq 0$, esisterà uno ed un solo integrale della (2) soddisfacente alle (3) e sarà rappresentato dalla (20) dove sia

$$c_1=\frac{L_{22}(\lambda)\,\{l_1-L_1(\lambda)\}-L_{12}(\lambda)\,\{l_2-L_2(\lambda)\}}{L(\lambda)}\,,$$

$$c_2=\frac{L_{11}(\lambda)\,\{l_2-L_2(\lambda)\}-L_{21}(\lambda)\,\{l_1-L_1(\lambda)\}}{L(\lambda)}\,.$$

Per qualunque valore di λ, eccezion fatta per quelli appartenenti all'insieme numerabile degli zeri di $L(\lambda)$, esisterà pertanto l'integrale $y(x,\lambda)$ della (2) soddisfacente alle (3), qualunque siano le l_i. Esso sarà una funzione meromorfa in λ i cui poli potranno evidentemente solo trovarsi fra gli zeri di $L(\lambda)$.

Supposte le l_i e la x affatto generiche, la $y(x, \lambda)$ avrà un polo in uno zero di $L(\lambda)$, il cui ordine non dipenderà dalla l_i e dalla x. Difatti, se λ_n è uno zero d'ordine ν_n di $L(\lambda)$, non potranno, tutte le L_{ik}, avere in λ_n uno zero d'ordine $\geq \nu_n$, fra le L_{ik}, ne esisterà cioè una che ha in λ_n uno zero d'ordine $< \nu_n$. Sia questa, per es., la L_{11}, allora supposte le l_i affatto generiche e che la x non sia fra gli zeri di $\eta_2(x, \lambda_n)$, la

$$\frac{l_2 L_{11}(\lambda) - l_1 L_{21}(\lambda)}{L(\lambda)} \eta_2(x, \lambda)$$

e quindi la $y(x, \lambda)$ avrà certamente un polo in λ_n, il cui ordine non dipenderà dalle l_i e dalla x. Questo ordine, per valori particolari delle l_i e della x, potrà solo abbassarsi.

Per ogni zero λ_n di $L(\lambda)$ e solo per questi valori di λ, non esiste un integrale della (2) soddisfacente alle (3), con le l_i affatto generiche. I valori λ_n si dicono *i valori eccezionali di* λ. Per ogni valore eccezionale λ_n di λ esiste un integrale, non identicamente nullo, dell'equazione omogenea

$$\frac{d}{dx}\left(\theta \frac{dy}{dx}\right) + q(x, \lambda_n)\, y = 0 \tag{21}$$

soddisfacente alle $L_i y = 0$; e viceversa, un valore λ_n di λ per cui esista un integrale della (21), non identicamente nullo, soddisfacente alle $L_i y = 0$, è un valore eccezionale. Una soluzione della (21) soddisfacente alle $L_i y = 0$, si dice *una soluzione eccezionale corrispondente al valore eccezionale* λ_n.

Un valore eccezionale si dice *semplice* o *doppio* secondochè ad esso corrispondono *una* o *due* soluzioni eccezionali linearmente indipendenti.

In un valore eccezionale doppio la $L(\lambda)$ deve avere un infinitesimo del second'ordine almeno, infatti in un tale valore eccezionale devono annullarsi tutte le $L_{ik}(\lambda)$.

Si sarà nell'ipotesi testè fatta della $L(\lambda)$ non identicamente nulla, tutte le volte che esiste la funzione di Green relativa all'espressione differenziale

$$\mathrm{D}y \equiv \frac{d}{dx}\left(\theta \frac{dy}{dx}\right) + \mathrm{B}(x)\, y$$

e alle condizioni $\mathrm{L}_i\, y = 0$. Difatti, se esiste la indicata funzione di Green, sarà $\mathrm{L}(0) \neq 0$, diversamente esisterebbe una soluzione, non identicamente nulla, della $\mathrm{D}y = 0$, soddisfacente alle $\mathrm{L}_i y = 0$.

Se non esiste la funzione di Green relativa alla $\mathrm{D}y$ e alle condizioni $\mathrm{L}_i\, y = 0$, e la $\mathrm{L}(\lambda)$ non è identicamente nulla, la $y(x, \lambda)$ avrà un polo nel punto $\lambda = 0$.

Supponiamo, in secondo luogo, che sia $\mathrm{L}(\lambda) \equiv 0$. Allora per qualunque valore di λ, non esisterà, supposte le l_i affatto generiche, un integrale della (2) soddisfacente alle (3). *Ogni valore di λ sarà cioè un valore eccezionale.*

Se non tutte le $\mathrm{L}_{ik}(\lambda)$ sono identicamente nulle, esisterà una funzione intiera in λ, non identicamente nulla, integrale della (19), soddisfacente alle $\mathrm{L}_i\, y = 0$, solo indeterminata per un fattore indipendente dalla x. Difatti le funzioni intiere in λ

$$\mathrm{L}_{22}(\lambda)\, \eta_1(x, \lambda) - \mathrm{L}_{21}(\lambda)\, \eta_2(x, \lambda) \quad , \quad \mathrm{L}_{11}(\lambda)\, \eta_2(x, \lambda) - \mathrm{L}_{12}(\lambda)\, \eta_1(x, \lambda)\ ,$$

sono integrali della (19) soddisfacenti alle $\mathrm{L}_i\, y = 0$ e non sono entrambe identicamente nulle; se sono entrambe diverse da zero, differiscono per un fattore dipendente solo da λ.

Se tutte le $\mathrm{L}_{ik}(\lambda)$ sono identicamente nulle, l'equazione (19), qualunque sia λ, avrà di conseguenza le $\mathrm{L}_i\, y = 0$.

27. — Supponiamo che esista la funzione di Green relativa all'espressione differenziale $\mathrm{D}y$ e alle condizioni $\mathrm{L}_i\, y = 0$, allora, come segue del n. 23, la funzione $y(x, \lambda)$, meromorfa in λ, soddisfacente all'equazione (2) e alle condizioni (3), pei valori di λ che non sono suoi poli, soddisfa all'equazione integrale lineare

$$(22) \quad y(x, \lambda) - \lambda \int_a^b \mathrm{G}(x, \xi)\, \mathrm{A}(\xi, \lambda)\, y(\xi, \lambda)\, d\xi = \mathrm{G}(x) - \int_a^b \mathrm{G}(x, \xi)\, f(\xi, \lambda)\, d\xi$$

$\mathrm{G}(x)$ designando l'integrale della $\mathrm{D}y = 0$ soddisfacente alle (3). E viceversa, ogni soluzione dell'equazione (22) è integrale della (2) soddisfacente alle (3). Per una soluzione eccezionale $y_n(x)$, corrispondente al valore eccezionale λ_n, si ha

$$(23) \qquad y_u(x) - \lambda_n \int_a^b \mathrm{G}(x, \xi)\, \mathrm{A}(\xi, \lambda_n)\, y_n(\xi)\, d\xi = 0 .$$

Viceversa, se una funzione $y_n(x)$ soddisfa alla (23) essa è una soluzione eccezionale corrispondente al valore eccezionale λ_n.

L'equazione integrale (22) *traduce*, pertanto, il problema della determinazione di un integrale della (2) soddisfacente alle (3). Diremo che un'equazione integrale lineare è del tipo di FREDHOLM quando il suo determinante è *uno* per $\lambda = 0$: L'equazione integrale (22) è del tipo di FREDHOLM.

Nell'attuale ipotesi la $y(x, \lambda)$ avrà un punto ordinario nel punto $\lambda = 0$, pertanto, in un intorno di questo punto, essa ammetterà uno sviluppo procedente secondo le potenze intiere positive e crescenti di λ. Sia

$$(24) \qquad y(x, \lambda) = \sum_0^\infty u_n(x)\, \lambda^n ,$$

si avranno, per le $u_n(x)$, le relazioni [1]

$$\mathrm{D}u_0 = f_0 \quad , \quad \mathrm{L}_i\, u_0 = l_i$$

$$\mathrm{D}u_n + \sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{A}_i\, u_{n-i} = f_n \quad , \quad \mathrm{L}_i\, u_n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots) .$$

Ne segue il calcolo ricorrente per le u_n:

$$(25) \qquad \begin{cases} u_0(x) = \mathrm{G}(x) - \displaystyle\int_a^b \mathrm{G}(x, \xi)\, f_0(\xi)\, d\xi , \\ u_n(x) = \displaystyle\int_a^b \mathrm{G}(x, \xi) \left\{ \sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{A}_i(\xi)\, u_{n-i}(\xi) - f_n(\xi) \right\} d\xi . \end{cases}$$

[1] Cfr. la mia Nota: *Del legame fra l'equazione di Fredholm e le equazioni differenziali lineari ordinarie*. Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XVII (1908), pp. 458-464.

Troviamo dunque, nell'ipotesi che esista la funzione di Green relativa all'espressione $\mathrm{D}y$ e alle condizioni $\mathrm{L}_i y = 0$, un metodo di calcolo per approssimazioni successive dell'integrale della (2) soddisfacente alle (3), calcolo valido in un intorno del punto $\lambda = 0$ [1].

Supponiamo ora che non esista l'indicata funzione di Green. Potranno presentarsi due casi: il determinante $[l_{ik}]$ è di caratteristica 1 o di caratteristica zero. Condizione necessaria e sufficiente perchè esista la funzione, meromorfa in λ, $y(x, \lambda)$, con le l_i affatto generiche, è che la $\mathrm{L}(\lambda)$, nulla, nell'attuale ipotesi, nell'origine, non sia identicamente nulla. Sottintenderemo sempre, perciò, l'ipotesi $\mathrm{L}(\lambda)$ *non identicamente nulla.* La $y(x, \lambda)$ esisterà e avrà nell'origine un polo d'ordine finito.

Ci proponiamo di calcolare lo sviluppo di $y(x, \lambda)$ nell'intorno dell'origine. Noi esporremo questo calcolo nel caso particolare che sia $\lambda\, \mathrm{A}(x, \lambda) = \lambda\, \mathrm{A}(x)$; ciò perchè, nel caso generale, esso calcolo è alquanto più complicato e, d'altra parte, noi, nel seguito lo applicheremo solo in quel caso particolare, mentre nell'estensione al caso generale non si devono superare che difficoltà puramente di calcolo.

Consideriamo dapprima il caso in cui il determinante $[l_{ik}]$ è di caratteristica 1. Sussisterà allora un metodo di calcolo per approssimazioni successive della funzione meromorfa $y(x, \lambda)$ molto analogo al precedente.

Diciamo $\gamma(x)$ un integrale della $\mathrm{D}y = 0$ soddisfacente alle $\mathrm{L}_i y = 0$ e $\bar{\gamma}(x)$ un integrale della stessa equazione indipendente da $\gamma(x)$, si abbia $\mathrm{L}_1 \bar{\gamma} = h$, $\mathrm{L}_2 \bar{\gamma} = k$, sarà $h^2 + k^2 > 0$. Sia ν l'ordine del polo di $y(x, \lambda)$ nell'origine [2], si avrà, nell'intorno di questo punto, lo sviluppo di $y(x, \lambda)$:

$$y(x, \lambda) = \sum_{j=-\nu}^{j=\infty} u_j(x)\, \lambda^j .$$

---

[1]) Così dicendo intendiamo sempre le l_i e la x affatto generiche.

[2]) Lo sviluppo così ottenuto per $y(x, \lambda)$ non è altro che lo sviluppo di Neumann della soluzione della (22) nell'intorno del punto $\lambda = 0$. Si osservi invero che introducendo lo sviluppo (24) nella (22), si ottengono, per le $u_n(x)$, le relazioni (25).

Per le $u_j(x)$ varranno quindi le relazioni [1]):

$$(26)\quad \begin{cases} \mathrm{D}u_{-\nu}=0\ , & \mathrm{L}_i u_{-\nu}=0 \\ \mathrm{D}u_j+\mathrm{A}u_{j-1}=0\ , & \mathrm{L}_i u_j\ =0\quad (j=-\nu+1,\ldots,-1)\,, \\ \mathrm{D}u_0+\mathrm{A}u_{-1}\ =f_0\ , & \mathrm{L}_i u_0\ =l_i \\ \mathrm{D}u_n+\mathrm{A}u_{n-1}=f_n\ , & \mathrm{L}_i u_n\ =0\quad (n=1\,,2\,,\ldots)\,. \end{cases}$$

Si ponga (n. 25):

$$k\,l_1(\xi)-h\,l_2(\xi)=l(\xi)\ ,\ \ k\,l_1-h\,l_2=l\ ,\ \ \frac{h\,l_1+k\,l_2}{h^2+k^2}=\beta\,.$$

Indichino $c_{-\nu},\,c_{-\nu+1},\ldots,c_{-1},\,c_0,\,c_1,\ldots$ delle costanti. Dalle (26) seguono (n. 25) le relazioni

$$(27)\quad \begin{cases} u_{-\nu}(x)=c_{-\nu}\,\gamma\,(x) \\ u_j\,(x)=c_j\,\gamma(x)+\displaystyle\int_a^b\Gamma\,(x,\,\xi)\;\mathrm{A}\,(\xi)\;u_{j-1}(\xi)\,d\xi \qquad (j=-\nu+1,\ldots,-1) \\ u_0\,(x)=c_0\gamma\,(x)+\beta\bar{\gamma}\,(x)+\displaystyle\int_a^b\Gamma\,(x,\xi)\,\mathrm{A}\,(\xi)\,u_{-1}(\xi)\,d\xi-\int_a^b\Gamma\,(x,\xi)\,f_0(\xi)\,d\xi \\ u_n(x)=c_n\gamma\,(x)+\displaystyle\int_a^b\Gamma\,(x,\xi)\,\mathrm{A}\,(\xi)\,u_{n-1}(\xi)\,d\xi-\int_a^b\Gamma\,(x,\xi)\,f_n\,(\xi)\,d\xi \\ \qquad\qquad (n=1\,,2\,,\ldots)\,. \end{cases}$$

Il calcolo delle $u\,(x)$ sarà perciò effettuato se verranno determinate le costanti c. A ciò si perverrà tenendo conto delle seguenti relazioni che devono valere (n. 25) insieme alle (27):

$$(28)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_a^b l(\xi)\;\mathrm{A}\,(\xi)\;u_j\,(\xi)\,d\xi=0 \qquad (j=-\nu,\ldots,-2) \\ \displaystyle\int_a^b l\,(\xi)\;\mathrm{A}\,(\xi)\;u_{-1}(\xi)\,d\xi=l+\int_a^b l\,(\xi)\,f_0\,(\xi)\,d\xi \\ \displaystyle\int_a^b l\,(\xi\,\mathrm{A}\,(\xi)\,u_{n-1}(\xi)\,d\xi=\int_a^b l(\xi)\,f_n(\xi)\,d\xi \quad (n=1\,,2\,,\ldots)\,. \end{cases}$$

---

[1]) Cfr. la citata mia Nota: *Del legame*... ecc.

Poniamo

$$\Gamma^{(1)} = \int_a^b l(\xi)\,A(\xi)\,\gamma(\xi)\,d\xi, \ldots,$$

$$\Gamma^{(n)} = \int_a^b l(\xi)\,A(\xi)\,d\xi \int_a^b \Gamma(\xi,\xi_1)\,A(\xi_1)\,d\xi_1 \ldots \int_a^b \Gamma(\xi_{n-2},\xi_{n-1})\,A(\xi_{n-1})\,\gamma(\xi_{n-1})\,d\xi_{n-1},$$

$$\overline{\Gamma}^{(1)} = \int_a^b l(\xi)\,A(\xi)\,\overline{\gamma}(\xi)\,d\xi, \ldots,$$

$$\overline{\Gamma}^{(n)} = \int_a^b l(\xi)\,A(\xi)\,d\xi \int_a^b \Gamma(\xi,\xi_1)\,A(\xi_1)\,d\xi_1 \ldots \int_a^b \Gamma(\xi_{n-2},\xi_{n-1})\,A(\xi_{n-1})\,\overline{\gamma}(\xi_{n-1})\,d\xi_{n-1},$$

$$F_m^{(1)} = \int_a^b l(\xi)\,f_m(\xi)\,d\xi, \ldots,$$

$$F_m^{(n)} = \int_a^b l(\xi)\,A(\xi)\,d\xi \int_a^b \Gamma(\xi,\xi_1)\,A(\xi_1)\,d\xi_1 \ldots \int_a^b \Gamma(\xi_{n-2},\xi_{n-1})\,f_m(\xi_{n-1})\,d\xi_{n-1}.$$

Le prime $\nu - 2$ equazioni (28) daranno le equazioni nelle $c_{-\nu}, c_{-\nu+1}, \ldots c_{-2}$:

$$c_{-\nu}\,\Gamma^{(1)} = 0$$

$$c_{-\nu+1}\,\Gamma^{(1)} + c_{-\nu}\,\Gamma^{(2)} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$c_{-2}\,\Gamma^{(1)} + c_{-3}\,\Gamma^{(2)} + \ldots + c_{-\nu}\,\Gamma^{(\nu-1)} = 0.$$

Abbiamo supposto nell'origine un polo d'ordine ν, non potrà dunque essere $c_{-\nu} = 0$, ne seguirà

$$\Gamma^{(1)} = \Gamma^{(2)} = \ldots = \Gamma^{(\nu-1)} = 0.$$

Le relazioni (28) daranno dunque luogo alle seguenti equazioni nelle costanti c:

$$c_{-\nu}\,\Gamma^{(\nu)} = l + F_0^{(1)}$$

$$c_{n-\nu}\,\Gamma^{(\nu)} + c_{n-\nu-1}\,\Gamma^{(\nu+1)} + \ldots + c_{-\nu}\,\Gamma^{(\nu+n)} = -\beta\,\overline{\Gamma}^{(n)} + \sum_{i=0}^{i=n} F_{n-i}^{(i+1)}$$

$$\cdots\cdots \quad (n=1,2\ldots).$$

Che dovranno potere essere soddisfatte qualunque siano le quantità l_1, l_2. Ne seguirà $\Gamma^{(\nu)} \neq 0$ e un calcolo ricorrente per le c.

Abbiamo così effettuato il menzionato calcolo della $y(x, \lambda)$, valido nell'intorno del punto $\lambda = 0$, e abbiamo anche ottenuto il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il polo di $y(x, \lambda)$ nell'origine sia d'ordine ν è che si abbia

$$\Gamma^{(1)} = \Gamma^{(2)} = \ldots = \Gamma^{(\nu-1)} = 0 \quad , \quad \Gamma^{(\nu)} \neq 0 . \tag{29}$$

Costruite le quantità $\Gamma^{(n)}$, si ha un criterio per decidere se la $L(\lambda)$ è o non è identicamente nulla. Si può infatti facilmente dimostrare che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la $L(\lambda)$ sia identicamente nulla è che si abbia $\Gamma^{(n)} = 0$, qualunque sia n. Invero, se $L(\lambda)$ non è identicamente nulla, esisterà la $y(x, \lambda)$ ed essa avrà un polo d'ordine finito nel punto $\lambda = 0$, vi sarà quindi un tal valore ν di n per il quale varranno le (29). Se è $L(\lambda) \equiv 0$, esiste (n. 26) una funzione $\varphi(x, \lambda)$, intiera in λ, non identicamente nulla, soddisfacente all'equazione (19) e alle condizioni $L_i y = 0$. Si abbia

$$\varphi(x, \lambda) = \sum_0^\infty u_n(x) \lambda^n ,$$

seguirà

$$D u_0 = 0 \ , \ L_i u_0 = 0 \ ; \ D u_n + A u_{n-1} = 0 \ , \ L_i u_n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

e quindi, dette $c_0, c_1, \ldots$ delle costanti,

$$u_0(x) = c_0 \gamma(x) \ , \ u_n(x) = c_n \gamma(x) + \int_a^b \Gamma(x, \xi) A(\xi) u_{n-1}(\xi) d\xi$$
$$(n = 1, 2, \ldots) ,$$

con le relazioni

$$\begin{aligned} & c_0 \Gamma^{(1)} = 0 \\ & c_1 \Gamma^{(1)} + c_0 \Gamma^{(2)} = 0 \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & c_n \Gamma^{(1)} + c_{n-1} \Gamma^{(2)} + \ldots + c_0 \Gamma^{(n+1)} = 0 , \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

e poichè abbiamo supposto la $\varphi(x, \lambda)$ non identicamente nulla, ne seguirà necessariamente $\Gamma^{(n)} = 0$, qualunque sia n.

Supposte verificate le (29), ciò che è necessario e sufficiente per l'esistenza della funzione meromorfa $y(x, \lambda)$, possiamo costruire un'equazione integrale lineare del tipo di FREDHOLM a cui soddisfa $y(x, \lambda)$ e che mette in vista l'esistenza nell'origine del polo d'ordine ν di $y(x, \lambda)$.

Dalle equazioni

$$(30) \qquad \mathrm{D}y(x, \lambda) + \lambda \mathrm{A} y(x, \lambda) = f(x, \lambda) \quad , \quad \mathrm{L}_i y(x, \lambda) = l_i \; ,$$

si trae (n. 25):

$$(31) \quad \begin{cases} y(x,\lambda) = c\gamma(x) + \beta\bar{\gamma}(x) + \lambda \displaystyle\int_a^b \Gamma(x, \xi) \mathrm{A}(\xi) y(\xi, \lambda)\, d\xi - \int_a^b \Gamma(x, \xi) f(\xi, \lambda)\, d\xi, \\ \lambda \displaystyle\int_a^b l(\xi) \mathrm{A}(\xi) y(\xi, \lambda)\, d\xi = l + \int_a^b l(\xi) f(\xi, \lambda)\, d\xi. \end{cases}$$

Per determinare $y(x, \lambda)$ si avrà così un sistema di equazioni integrali lineari, nella costante incognita c e nella $y(x, \lambda)$. Ma l'ipotesi (29) ci permetterà di eliminare la costante c e di dedurre una risultante equazione integrale lineare a cui soddisfa la $y(x, \lambda)$. Dalla seconda delle (31), introducendovi l'espressione di $y(x, \lambda)$ com'è data dalla prima, si ha infatti

$$(32) \quad c\lambda\Gamma^{(1)} + \beta\lambda\bar{\Gamma}^{(1)} + \lambda^2 \int_a^b l(\xi) \mathrm{A}(\xi)\, d\xi \int_a^b \Gamma(\xi, \xi_1) \mathrm{A}(\xi_1) y(\xi_1, \lambda)\, d\xi_1 =$$

$$= l + \int_a^b l(\xi) f(\xi, \lambda)\, d\xi + \lambda \int_a^b l(\xi) \mathrm{A}(\xi)\, d\xi \int_a^b \Gamma(\xi, \xi_1) f(\xi_1, \lambda)\, d\xi_1 .$$

Poniamo

$$\mathrm{Y}^{(n)} = \int_a^b l(\xi) \mathrm{A}(\xi)\, d\xi \int_a^b \Gamma(\xi, \xi_1) \mathrm{A}(\xi_1)\, d\xi_1 \ldots \int_a^b \Gamma(\xi_{n-2}, \xi_{n-1}) \mathrm{A}(\xi_{n-1}) y(\xi_{n-1}, \lambda)\, d\xi_{n-1} \, ,$$

$$\mathrm{F}^{(n)} = \int_a^b l(\xi) \mathrm{A}(\xi)\, d\xi \int_a^b \Gamma(\xi, \xi_1) \mathrm{A}(\xi_1)\, d\xi_1 \ldots \int_a^b \Gamma(\xi_{n-2}, \xi_{n-1}) f(\xi_{n-1}, \lambda)\, d\xi_{n-1} .$$

Ripetendo nella (32) la sostituzione di $y(x, \lambda)$ come è espressa dalla prima delle (31), si otterrà:

$$c\lambda\,\Gamma^{(1)} + c\lambda^2\,\Gamma^{(2)} + \beta\,(\lambda\,\overline{\Gamma}^{(1)} + \lambda^2\,\overline{\Gamma}^{(2)}) + \lambda^3\,\mathrm{Y}^{(3)} = l + \mathrm{F}^{(1)} + \lambda\,\mathrm{F}^{(2)} + \lambda^2\,\mathrm{F}^{(3)}.$$

Ripetendo quest'operazione altre $\nu-2$ volte e tenendo conto delle (29) si otterrà l'equazione:

$$c\lambda^\nu\,\Gamma^{(\nu)} + \beta \sum_{i=1}^{i=\nu} \lambda^i\,\overline{\Gamma}^{(i)} + \lambda^{\nu+1}\,\mathrm{Y}^{(\nu+1)} = l + \sum_{i=1}^{i=\nu+1} \lambda^{i-1}\,\mathrm{F}^{(i)},$$

che, per essere $\Gamma^{(\nu)} \neq 0$, si potrà risolvere rispetto a c. Ponendo

$$\frac{1}{\Gamma^{(\nu)}}\left(l + \sum_{i=1}^{i=\nu+1} \lambda^{i-1}\,\mathrm{F}^{(i)} - \beta \sum_{i=1}^{i=\nu} \lambda^i\,\overline{\Gamma}^{(i)}\right) = \sum_0^\infty a_n\,\lambda^n = \alpha(\lambda)\,,$$

$$\Gamma_\nu(\xi) = \frac{1}{\Gamma^{(\nu)}} \int_a^b \cdots \int_a^b l(\xi_1)\,\Gamma(\xi_1, \xi_2) \ldots \Gamma(\xi_\nu, \xi)\,\mathrm{A}(\xi_1) \ldots \mathrm{A}(\xi_\nu)\,d\xi_1 \ldots d\xi_\nu\,,$$

si avrà

$$c = \frac{\alpha(\lambda)}{\lambda^\nu} - \lambda \int_a^b \mathrm{A}(\xi)\,\Gamma_\nu(\xi)\,y(\xi, \lambda)\,d\xi.$$

Sostituendo questo valore di c nella prima delle (31), si avrà l'equazione integrale lineare nella $y(x, \lambda)$:

$$(33)\quad y(x,\lambda) - \lambda \int_a^b \{\Gamma(x,\xi) - \gamma(x)\,\Gamma_\nu(\xi)\}\,\mathrm{A}(\xi)\,y(\xi,\lambda)\,d\xi = \frac{\alpha(\lambda)}{\lambda^\nu}\gamma(x) + $$
$$+ \beta\,\overline{\gamma}(x) - \int_a^b \Gamma(x,\xi)\,f(\xi,\lambda)\,d\xi\,,$$

che è un'equazione del tipo di FREDHOLM.

Ogni funzione $y(x, \lambda)$ soddisfacente alle (30) è soluzione dell'equazione (33), e viceversa, ogni soluzione della (33) soddisfa alle (30). Per ogni soluzione eccezionale $y_n(x)$ corrispondente al valore eccezionale λ_n si ha l'uguaglianza

$$(34)\qquad y_n(x) - \lambda_n \int_a^b \{\Gamma(x,\xi) - \gamma(x)\,\Gamma_\nu(\xi)\}\,\mathrm{A}(\xi)\,y_n(\xi)\,d\xi = 0.$$

Viceversa, se una funzione $y_n(x)$ soddisfa alla (34), essa è una soluzione eccezionale corrispondente al valore eccezionale λ_n. Ci si può convincere di ciò con un' effettiva verifica od anche osservando che il secondo membro della (33) può identicamente annullarsi, solo quando è $l_1 = l_2 = 0$ e $f(x, \lambda) \equiv 0$.

Nell'equazione (33) troviamo, pertanto, l'equazione integrale lineare del tipo di Fredholm che *traduce* il problema della determinazione di un integrale della $\mathrm{D}y + \lambda\,\mathrm{A}y = f(x, \lambda)$, soddisfacente alle (3).

Il termine noto dell'equazione (33) è una funzione meromorfa in λ che ha un polo nell'origine e ivi soltanto. L'ordine di questo polo, per valori generici della x e delle l_i è ν; ciò riconferma, secondo la formola di Fredholm, che la $y(x, \lambda)$ ha nell'origine un polo d'ordine ν per valori generici della x e delle l_i [1]).

Consideriamo infine il caso in cui il determinante $[l_{ik}]$ è di caratteristica zero.

Dicendo allora $\gamma_1(x)$, $\gamma_2(x)$, due integrali indipendenti della $\mathrm{D}y = 0$, si avrà $\mathrm{L}_i\gamma_k = 0$.

Supponendo sempre che la $\mathrm{L}(\lambda)$ non sia identicamente nulla, esisterà una funzione $y(x, \lambda)$, meromorfa in λ, che per valori di λ diversi dai suoi poli, soddisfarrà alle (30).

Il calcolo dello sviluppo di $y(x, \lambda)$, nell' intorno dell' origine, non è in questo caso facilmente accessibile direttamente, ma lo si

---

[1]) Per valori particolari della x e delle l_i quest'ordine può abbassarsi, così, per es., se è soddisfatta la relazione

$$l + \int_a^b l(\xi)\, f_0(\xi)\, d\xi = 0,$$

l'ordine del polo di $y(x, \lambda)$ nell'origine sarà $\leq \nu - 1$. Costruita l'equazione integrale (33) se ne trarrà immediatamente il metodo di calcolo per approssimazioni successive della $y(x, \lambda)$, per valori di λ nell' intorno del punto $\lambda = 0$. Se, infatti, $\sum_{j=-\nu}^{j=\infty} u_j(x)\,\lambda^j$ è lo sviluppo di $y(x, \lambda)$ nell'intorno dell'origine, introducendo questo sviluppo nella (33) ed eguagliando i coefficienti, nei due membri, delle medesime potenze di λ, si otterrà il calcolo ricorrente per le $u_j(x)$.

dedurrà agevolmente (come anche avveniva nei casi precedenti) dall'equazione integrale lineare del tipo di Fredholm a cui soddisfa la $y(x, \lambda)$. Per il calcolo dello sviluppo di $y(x, \lambda)$, nell'intorno dell'origine, si potrebbe, e ciò vale in generale, calcolare gli sviluppi di due integrali indipendenti $\eta_1(x, \lambda)$, $\eta_2(x, \lambda)$ della $Dy + \lambda Ay = 0$ e di un integrale particolare $\eta(x, \lambda)$ della $Dy + \lambda Ay = f(x, \lambda)$, indi calcolare le funzioni intiere $L_{ik}(\lambda)$, $L_i(\lambda)$, $L(\lambda)$, e dalla

$$y(x, \lambda) = \eta(x, \lambda) + \frac{L_{22}(l_1 - L_1) - L_{12}(l_2 - L_2)}{L} \eta_1(x, \lambda) + \\ + \frac{L_{11}(l_2 - L_2) - L_{21}(l_1 - L_1)}{L} \eta_2(x, \lambda)$$

seguirebbe lo sviluppo voluto della $y(x, \lambda)$, nell'intorno dell'origine.

Noi non condurremo a termine il calcolo di $y(x, \lambda)$ per questa via, ci accontenteremo solo di dedurne l'ordine del polo di $y(x, \lambda)$ nel punto $\lambda = 0$ e lo sviluppo di $L(\lambda)$, nozioni necessarie per costruire la indicata equazione integrale a cui soddisfa $y(x, \lambda)$.

Per il calcolo delle funzioni $\eta_i(x, \lambda)$, $\eta(x, \lambda)$, intiere in λ, si potrà seguire un metodo di calcolo per approssimazioni successive. Sia

$$\eta_i(a, \lambda) = \gamma_i(a) \ , \quad \left[\frac{\partial \eta_i}{\partial x}\right]_{x=a} = \left[\frac{d\gamma_i}{dx}\right]_a \quad (i = 1, 2) \ ,$$

$$\eta(a, \lambda) = 0 \ , \quad \left[\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]_{x=a} = 0 \ ,$$

$$\eta(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \eta_n(x) \lambda^n \ , \quad \eta_i(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \eta_{in}(x) \lambda^n \quad (i = 1, 2).$$

Poichè nell'ipotesi attuale è $\Gamma(x, \xi) = g(x, \xi)$, si avrà il calcolo ricorrente per le η_n e η_{in}:

$$\eta_0(x) = -\int_a^b \Gamma(x, \xi) f_0(\xi) d\xi \ ,$$

$$\eta_n(x) = \int_a^b \Gamma(x, \xi) A(\xi) \eta_{n-1}(\xi) d\xi - \int_a^b \Gamma(x, \xi) f_n(\xi) d\xi$$

$$\eta_{i0}(x) = \gamma_i(x) \ , \quad \eta_{i.n}(x) = \int_a^b \Gamma(x, \xi) A(\xi) \eta_{i,n-1}(\xi) d\xi \quad (i = 1, 2) .$$

Ne seguirà subito il calcolo delle $L_{ik}(\lambda)$, $L_i(\lambda)$, $L(\lambda)$. Ponendo

$$\Gamma_{ik}^{(n)} = \int_a^b l_i(\xi)\,A(\xi)\,d\xi \int_a^b \Gamma(\xi,\xi_1)\,A(\xi_1)\,d\xi_1 \ldots \int_a^b \Gamma(\xi_{n-2},\xi_{n-1})\,A(\xi_{n-1})\,\gamma_k(\xi_{n-1})\,d\xi_{n-1}$$

$$(i,k=1,2),$$

$$\Gamma^{(n)} = \sum_{i=0}^{i=n-1} \begin{vmatrix} \Gamma_{11}^{(i+1)} & \Gamma_{12}^{(n-i)} \\ \Gamma_{21}^{(i+1)} & \Gamma_{22}^{(n-i)} \end{vmatrix},$$

si avrà:

$$L_{ik}(\lambda) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \Gamma_{ik}^{(n)} \lambda^n \quad , \quad L(\lambda) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \Gamma^{(n)} \lambda^{n+1}.$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè la $L(\lambda)$ *non sia identicamente nulla è che non si abbia* $\Gamma^{(n)}=0$, *qualunque sia* n.

Si abbia

(35) $$\Gamma^{(1)}=\Gamma^{(2)}=\ldots=\Gamma^{(n-1)}=0 \quad , \quad \Gamma^{(n)} \neq 0.$$

Non potranno allora, qualunque siano i e k, se n è pari, valere le eguaglianze

$$\Gamma_{ik}^{(1)}=0 \quad , \quad \Gamma_{ik}^{(2)}=0 \quad ,\ldots, \quad \Gamma_{ik}^{\left(\frac{n}{2}\right)}=0,$$

e se n è dispari, valere le altre

$$\Gamma_{ik}^{(1)}=0 \quad , \quad \Gamma_{ik}^{(2)}=0 \quad ,\ldots, \quad \Gamma_{ik}^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}=0.$$

Si abbia, insieme alle (35), qualunque siano i e k:

(36) $$\Gamma_{ik}^{(1)}=0 \;,\; \Gamma_{ik}^{(2)}=0 \;,\ldots,\; \Gamma_{ik}^{(j-1)}=0 \quad , \quad \sum_{i,k} |\Gamma_{ik}^{(j)}| > 0 \begin{cases} 1 \leq j \leq \dfrac{n}{2} \\ 1 \leq j \leq \dfrac{n+1}{2} \end{cases},$$

allora la $y(x,\lambda)$ avrà nel punto $\lambda=0$ un polo d'ordine $n+1-j$, supposte le l_i e la x affatto generiche. In ogni caso, verificate le (35), si avrà per l'ordine ν di $y(x,\lambda)$ nell'origine, la limitazione

$$n \geq \nu \geq \left[\frac{n}{2}\right] + 1.$$

Ciò posto, andiamo a costruire l'equazione integrale del tipo di Fredholm che *traduce* il problema della determinazione di un integrale della $Dy + \lambda Ay = f(x, \lambda)$, soddisfacente alle (3).

Supposte verificate le (35), la funzione $y(x, \lambda)$, meromorfa in λ, esiste e dalle (30) seguiranno (n. 25) le relazioni

$$
(37) \quad \begin{cases}
y(x,\lambda) = c_1\gamma_1(x) + c_2\gamma_2(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x,\xi) A(\xi) y(\xi,\lambda)\, d\xi - \int_a^b \Gamma(x,\xi) f(\xi,\lambda)\, d\xi, \\
\lambda \int_a^b l_1(\xi) A(\xi) y(\xi,\lambda)\, d\xi = l_1 + \int_a^b l_1(\xi) f(\xi,\lambda)\, d\xi, \\
\lambda \int_a^b l_2(\xi) A(\xi) y(\xi,\lambda) = l_2 + \int_a^b l_2(\xi) f(\xi,\lambda)\, d\xi.
\end{cases}
$$

Poniamo

$$
Y_i^{(n)} = \int_a^b l_i(\xi) A(\xi)\, d\xi \int_a^b \Gamma(\xi,\xi_1) A(\xi_1)\, d\xi_1 \ldots \int_a^b \Gamma(\xi_{n-2},\xi_{n-1}) A(\xi_{n-1}) y(\xi_{n-1},\lambda)\, d\xi_{n-1}
$$

$$
F_i^{(1)} = \int_a^b l_i(\xi) f(\xi,\lambda)\, d\xi,
$$

$$
F_i^{(n)} = \int_a^b l_i(\xi) A(\xi)\, d\xi \int_a^b \Gamma(\xi,\xi_1) A(\xi_1)\, d\xi_1 \ldots \int_a^b \Gamma(\xi_{n-2},\xi_{n-1}) f(\xi_{n-1},\lambda)\, d\xi_{n-1}
$$

$$
(i = 1, 2).
$$

Introducendo la prima delle (37) nelle seconde, avremo

$$
c_1 \lambda \Gamma_{i1}^{(1)} + c_2 \lambda \Gamma_{i2}^{(1)} + \lambda Y_i^{(2)} = l_i + F_i^{(1)} + \lambda F_i^{(2)} \qquad (i = 1, 2),
$$

introducendo di nuovo la prima delle (37) in queste relazioni e ripetendo altre $n - 2$ volte questa operazione, avremo le equazioni nelle c_1 e c_2:

$$
(40) \quad c_1 \sum_{j=1}^{j=n} \lambda^j \Gamma_{i1}^{(j)} + c_2 \sum_{j=1}^{j=n} \lambda^j \Gamma_{i2}^{(j)} + \lambda^{n+1} Y_i^{(n+1)} = l_i + \sum_{j=1}^{j=n+1} \lambda^{j-1} F_i^{(j)}
$$

$$
(i = 1, 2).
$$

Queste equazioni, per valori di λ in un intorno del punto $\lambda = 0$, sono risolubili rispetto alle c_1, c_2, invero, il determinante dei coefficienti delle c_1, c_2, è

$$\lambda^{n+1}\Gamma^{(n)} + \sum_{i=2}^{i=n} \lambda^{n+i} \sum_{j=0}^{j=n-i} \begin{vmatrix} \Gamma_{11}^{(i+j)} & \Gamma_{12}^{(n-j)} \\ \Gamma_{21}^{(i+j)} & \Gamma_{22}^{(n-j)} \end{vmatrix}, \tag{41}$$

ed è, in un intorno del punto $\lambda = 0$, diverso da zero, per essere $\Gamma^{(n)} \neq 0$. Risolvendo le (40) rispetto alle c_1, c_2 e introducendo i valori così ottenuti delle c_1, c_2 nella prima delle (37) si otterrà un'equazione integrale lineare del tipo di Fredholm, nella $y(x, \lambda)$. Il termine noto di quest'equazione, supposto che con le (35) si verifichino le (36), è una funzione meromorfa in λ che nel punto $\lambda = 0$ avrà un polo d'ordine $n+1-j$, se la x e le l_i sono affatto generiche.

Dobbiamo però osservare che l'equazione integrale così ottenuta non sussiste per qualunque valore di λ non nullo ma solo pei valori di λ diversi dagli $n-1$ (non nulli) che annullano il determinante (41). Ma a noi basta che quest'equazione, come appunto avviene, sussista in un intorno del punto $\lambda = 0$, che, essendo essa del tipo di Fredholm, ci permetterà immediatamente un calcolo ricorrente delle $u_i(x)$, posto che lo sviluppo $\sum_{i=j-n-1}^{i=\infty} u_i(x)\lambda^i$ rappresenti la $y(x, \lambda)$ nell'intorno dell'origine.

28. — In tutti i casi, dunque, siamo in grado, con un effettivo calcolo, di vedere se esiste la funzione $y(x, \lambda)$, meromorfa in λ, integrale della (2) soddisfacente alle (3), e, ove esista, di calcolarne lo sviluppo nell'intorno del punto $\lambda = 0$. Sia $\nu\,(\nu \geq 0)$ l'ordine del polo di $y(x, \lambda)$ nel punto $\lambda = 0$. Si abbia

$$\lambda^\nu y(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n(x)\lambda^n. \tag{42}$$

Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un valore eccezionale non nullo è che il raggio di convergenza della serie (42) sia finito. Riuscendo dunque a dimostrare, come accade nei casi che prenderemo in esame, che la serie (42) ha un raggio di convergenza finito r_0, sarà dimostrata l'esistenza di valori eccezionali di

λ aventi per modulo r_0. Di tali valori eccezionali ve ne sarà un numero finito, siano essi $\lambda_{01}, \lambda_{02}, \ldots, \lambda_{0,n_0}$, e siano $\nu_{01}, \nu_{02}, \ldots, \nu_{0,n_0}$ gli ordini di questi poli di $y(x, \lambda)$.

Come si deduce, per es. dal n. 26, ciascuna delle espressioni

$$\lambda^\nu (\lambda - \lambda_{0i})^{\nu_{0i}}\, y(x, \lambda)\,,\; \lambda^\nu (\lambda - \lambda_{0i})^{\nu_{0i}} \frac{\partial}{\partial x} y(x, \lambda)\,,\; \lambda^\nu (\lambda - \lambda_{0i})^{\nu_{0i}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x, \lambda)\,,$$

avrà un limite determinato e finito per $\lambda = \lambda_{0i}$, a cui tenderà in egual grado per x in (a, b). Poniamo

$$\lim_{\lambda = \lambda_{0i}} \lambda^\nu (\lambda - \lambda_{0i})^{\nu_{0i}}\, y(x, \lambda) = y_{0i}(x)\,,$$

si avrà

$$\lim_{\lambda = \lambda_{0i}} \lambda^\nu (\lambda - \lambda_{0i})^{\nu_{0i}} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dy_{0i}}{dx}\,,\quad \lim_{\lambda = \lambda_{0i}} \lambda^\nu (\lambda - \lambda_{0i})^{\nu_{0i}} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 y_{0i}}{dx^2}\,.$$

Dalle eguaglianze

$$\mathrm{D}y(x, \lambda) + \lambda \mathrm{A}(x, \lambda)\, y(x, \lambda) = f(x, \lambda)\,,\quad \mathrm{L}_1 y(x, \lambda) = l_1\,,\quad \mathrm{L}_2 y(x, \lambda) = l_2\,,$$

moltiplicando ambo i membri di ciascuna per $\lambda^\nu (\lambda - \lambda_{0i})^{\nu_{0i}}$ e passando al limite per $\lambda = \lambda_{0i}$, si ricaverà

$$\mathrm{D}y_{0i} + \lambda_{0i} \mathrm{A}(x, \lambda_{0i})\, y_{0i} = 0\,,\quad \mathrm{L}_1 y_{0i} = 0\,,\quad \mathrm{L}_2 y_{0i} = 0\,.$$

Ne segue che il limite $y_{0i}(x)$ è la funzione eccezionale corrispondente al valore eccezionale λ_{0i}. La $y_{0i}(x)$ potrà dipendere al più da due costanti arbitrarie, dipenderà da una o da due secondochè λ_{0i} è valore eccezionale semplice o doppio.

Si ponga

$$\Lambda_0(\lambda) = \prod_1^{n_0}{}_i (\lambda - \lambda_{0i})^{\nu_{0i}},$$

$\Lambda_0(\lambda)$ sarà un polinomio di grado $\nu_0 = \sum_1^{n_0}{}_i \nu_{0i}$. La funzione $\lambda^\nu \Lambda_0(\lambda)\, y(x, \lambda)$ sarà, in λ, monodroma, finita e continua in un cerchio di raggio maggiore di r_0. Ora nell'interno del cerchio di raggio r_0 si ha

$$\lambda^\nu \Lambda_0(\lambda)\, y(x, \lambda) = \Lambda_0(\lambda) \sum_0^\infty{}_n u_n(x) \lambda^n\,,$$

suppongasi che ordinando rispetto a λ si ottenga

$$\Lambda_0(\lambda) \sum_0^\infty {}_n\, u_n(x)\lambda^n = \sum_0^\infty {}_n\, v_n(x)\lambda^n . \tag{43}$$

La serie $\sum v_n(x)\lambda^n$ che rappresenta la funzione $\lambda^\nu \Lambda_0(\lambda)\, y(x,\lambda)$ nell'interno del cerchio di raggio r_0, continuerà a rappresentarla nell'interno del cerchio di centro nell'origine e passante per un polo di quella funzione più prossimo all'origine, che è un valore eccezionale di modulo maggiore di r_0 e più prossimo a r_0.

Si avrà

$$\lambda_{0i}^\nu(\lambda_{0i}-\lambda_{01})^{\nu_{01}} \dots (\lambda_{0i}-\lambda_{0,i-1})^{\nu_{0,i-1}}(\lambda_{0i}-\lambda_{0,i+1})^{\nu_{0,i+1}} \dots (\lambda_{0i}-\lambda_{0,n_0})^{\nu_{0n_0}} y_{0i}(x) =$$
$$= \sum_0^\infty {}_n\, v_n(x)\lambda_{0i}^n ,$$

cioè che la serie (43), per $\lambda = \lambda_{0i}$, rappresenta la soluzione eccezionale corrispondente al valore eccezionale λ_{0i}.

Ove la serie (43) convergesse per qualunque valore di λ, non esisterebbero ulteriori valori eccezionali; condizione necessaria e sufficiente affinchè esistano altri valori eccezionali di modulo $> r_0$, è che il raggio di convergenza della serie (43) sia finito, se questa circostanza si presenta, detto r_1 questo raggio, sarà provata l'esistenza di valori eccezionali $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1n_1}$, in numero necessariamente finito n_1, aventi per modulo r_1. E operando sulla serie (43) come si è operato sulla (42), si potrà procedere alla ricerca di ulteriori valori eccezionali.

29. — Applichiamo la teoria precedente alla ricerca dei valori eccezionali del parametro λ nell'equazione

$$\mathrm{D}y + \lambda \mathrm{A}(x)y = 0 \tag{1}$$ [1]

e relativi alle condizioni

$$\mathrm{L}_i y = 0 \qquad (i = 1, 2), \tag{4}$$

che supporremo, d'ora in avanti, simmetriche (v. n. 24).

---

[1]) I valori eccezionali di λ nella (1) sono (n. 26 o 27) quelli nella $\mathrm{D}y + \lambda \mathrm{A}y = f(x, \lambda)$.

Se esiste la funzione di Green $G(x, \xi)$ relativa all'espressione differenziale Dy e alle condizioni (4), essa (n. 24) sarà simmetrica nei suoi due argomenti. I valori eccezionali di λ nell'equazione (1) e relativi alle condizioni (4), coincideranno (n. 27) coi valori eccezionali di λ nell'equazione integrale del tipo di FREDHOLM

$$y(x) - \lambda \int_a^b G(x, \xi)\, A(\xi)\, y(\xi)\, d\xi = \varphi(x), \tag{44}$$

il cui nucleo è costituito dal prodotto di una funzione simmetrica $G(x, \xi)$ per una funzione $A(\xi)$ della variabile d'integrazione.

I risultati di HILBERT sulle equazioni integrali *polari* assicurano pertanto, l'esistenza di infiniti valori eccezionali reali, tutte le volte che la funzione $A(x)$, finita e continua in (a, b), abbia ivi un numero finito di cambiamenti di segno [1]).

Se le condizioni (4) sono le seguenti

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 y(a) + a_2 y(b) + a_3 y'(a) + a_4 y'(b) = 0 \\ b_1 y(a) + b_2 y(b) + b_3 y'(a) + b_4 y'(b) = 0, \end{array} \right. \tag{45}$$

ed è soddisfatta la relazione

$$\theta(a)(a_2 b_4 - a_4 b_2) = \theta(b)(a_1 b_3 - a_3 b_1), \tag{45$_1$}$$

cioè, per essere $\theta(a) = 1$, la

$$a_2 b_4 - a_4 b_2 = \theta(b)(a_1 b_3 - a_3 b_1),$$

esse condizioni sono simmetriche, v. a pag. 349 del lavoro del MASON citato nell'introduzione [2]).

---

[1]) HILBERT. *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (5.te Mitteilung), Göttinger Nechrichten (1906), p. 435-480. Se la funzione $A(x)$ è in (a, b) di segno costante, l'esistenza di almeno un valore eccezionale di λ nell'equazione (44) è molto semplicemente dimostrata nella Memoria di E. SCHMIDT. *Zur Thearie der linearen und nieht linearen Integralgleichungen* (I. Teil). Math. Annalen, Bd. 63 (1907). pp. 433-476.

[2]) Indicheremo in seguito con (M) questo lavoro. Le condizioni che impone HILBERT ad un integrale della (1), nelle sue ricerche sull'argomento che ci sta occupando (loc. cit. nell'Introduzione), sono un caso particolare delle (45) nell'ipotesi (45_1); così pure le condizioni da noi considerate nei §§ precedenti.

Notiamo due relazioni che avranno frequente applicazione in seguito. Siano y_i, y_k due soluzioni eccezionali corrispondenti, rispettivamente, ai valori eccezionali λ_i, λ_k. Si avrà:

$$(46)\quad \begin{cases} \lambda_i \displaystyle\int_a^b \mathrm{A} y_i y_k \, dx = -\left[\theta y_k \frac{dy_i}{dx}\right]_a^b + \int_a^b \theta \frac{dy_i}{dx}\frac{dy_k}{dx} dx - \int_a^b \mathrm{B} y_i y_k \, dx \\ \lambda_k \displaystyle\int_a^b \mathrm{A} y_i y_k \, dx = -\left[\theta y_i \frac{dy_k}{dx}\right]_a^b + \int_a^b \theta \frac{dy_i}{dx}\frac{dy_k}{dx} dx - \int_a^b \mathrm{B} y_i y_k \, dx \end{cases}$$

e quindi, se è $\lambda_i \neq \lambda_k$,

$$(47)\qquad \int_a^b \mathrm{A} y_i y_k \, dx = 0 .$$

30. — Facciamo in questo numero l'ipotesi che *la funzione* $\mathrm{A}(x)$ *serbi segno costante in* (a, b), per fissare le idee supponiamo in (a, b):

$$\mathrm{A}(x) \geq 0 .$$

Comunque sia $\mathrm{B}(x)$ in (a, b), purchè finita e continua, dimostreremo l'esistenza della funzione $y(x, \lambda)$, meromorfa in λ, integrale della (1) soddisfacente alle condizioni

$$(3)\qquad \mathrm{L}_i y = l_i \qquad (i = 1, 2),$$

e, col metodo del n. 28, l'esistenza di infiniti poli di $y(x, \lambda)$.

Non esistono valori eccezionali complessi. Ciò si deduce, nel modo solito, dalla considerazione che se esistesse un valore eccezionale complesso $\lambda' + i\lambda''$, per la realità supposta nelle quantità e nelle funzioni comparenti in $\mathrm{L}_i y$, il valore coniugato $\lambda' - i\lambda''$ sarebbe anche un valore eccezionale. Se $y' + iy''$ fosse una funzione eccezionale corrispondente a $\lambda' + i\lambda''$, $y' - iy''$ sarebbe una funzione eccezionale corrispondente a $\lambda' - i\lambda''$ e dalla (47) seguirebbe

$$\int_a^b \mathrm{A}\{(y')^2 + (y'')^2\} \, dx = 0 .$$

Ne segue che la $L(\lambda)$ (n. 26) non è mai nulla per valori complessi di λ e quindi che esiste la funzione $y(x, \lambda)$, meromorfa in λ, integrale della (1) soddisfacente alle (3).

La $y(x, \lambda)$ non ha dunque poli complessi, dico di più che i poli di $y(x, \lambda)$ saranno semplici. Difatti, in un intorno di un polo $\lambda_i \left(\lambda_i \lesseqqgtr 0\right)$ [1]) d'ordine ν, si avrà

$$y(x,\lambda)=\sum_{n=-\nu}^{n=\infty} y_n(x)(\lambda-\lambda_i)^n, \quad \frac{\partial y}{\partial x}=\sum_{n=-\nu}^{n=\infty}\frac{dy_n}{dx}(\lambda-\lambda_i)^n, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\sum_{n=-\nu}^{n=\infty}\frac{d^2y_n}{dx^2}(\lambda-\lambda_i)^n, \tag{48}$$

con $y_{-\nu}(x)$ non identicamente nulla. Poniamo

$$D_i y = \frac{d}{dx}\left(\theta\frac{dy}{dx}\right) + (\lambda_i A + B)\, y\,,$$

la (1) potrà scriversi

$$D_i y + (\lambda - \lambda_i)\, Ay = 0 \tag{49}$$

Introduciamo gli sviluppi (48) nella (49) e nelle $L_i y = l_i$, ne seguiranno le relazioni

$$\begin{array}{llll}
D_i y_{-\nu} = 0 & , \quad L_1 y_{-\nu} = 0 & , \quad L_2 y_{-\nu} = 0 & \\
D_i y_{-\nu+1} + A y_{-\nu} = 0 & , \quad L_1 y_{-\nu+1} = 0 & , \quad L_2 y_{-\nu+1} = 0 & \\
\ldots\ldots\ldots & & & \\
D_i y_0 + A y_{-1} = 0 & , \quad L_1 y_0 = l_1 & , \quad L_2 y_0 = l_2 & \\
D_i y_n + A y_{n-1} = 0 & , \quad L_1 y_n = 0 & , \quad L_2 y_n = 0 & (n \geq 1)\,.
\end{array}$$

Se fosse $\nu \geq 2$, le due prime relazioni ora scritte darebbero

---

[1]) Fra i poli di $y(x, \lambda)$ vi sarà lo zero quando non esiste la funzione di Green relativa alle Dy e alle condizioni $L_i y = 0$ e solo allora. Se esiste la indicata funzione di Green, la realità e la semplicità dei poli di $y(x, \lambda)$, essendo $y(x, \lambda)$ soluzione dell'equazione integrale (44) a nucleo costituito dal prodotto di una funzione simmetrica per una funzione della variabile d'integrazione e di segno costante, risultano dimostrate nella Nota di BOGGIO. *Un théorème sur les équations integrales.* Comptes Rendus, tome CXLVI, octobre 1907.

$$\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{dy_{-\nu}}{dx}\right)+(\lambda_i\,\mathrm{A}+\mathrm{B})\,y_{-\nu}=0\quad,\quad \mathrm{L}_i\,y_{-\nu}\quad=0\,,$$

$$\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{dy_{-\nu+1}}{dx}\right)+(\lambda_i\,\mathrm{A}+\mathrm{B})\,y_{-\nu+1}+\mathrm{A}y_{-\nu}=0\quad,\quad \mathrm{L}_i\,y_{-\nu+1}=0\,,$$

e quindi

$$y_{-\nu}\,\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{dy_{-\nu+1}}{dx}\right)-y_{-\nu+1}\,\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{dy_{-\nu}}{dx}\right)+\mathrm{A}\,y_{-\nu}^2=0\,,$$

$$\mathrm{L}_i\,y_{-\nu}=0\,,\ \mathrm{L}_i\,y_{-\nu+1}=0\,,$$

dalle quali eguaglianze, moltiplicando la prima per dx e integrando fra a e b e tenendo conto delle ultime, si avrebbe

$$\left[\theta\left(y_{-\nu}\frac{dy_{-\nu+1}}{dx}-y_{-\nu+1}\frac{dy_{-\nu}}{dx}\right)\right]_a^b+\int_a^b\mathrm{A}\,y_{-\nu}^2\,dx=\int_a^b\mathrm{A}\,y_{-\nu}^2\,dx=0\,,$$

il che è assurdo.

Costruiamo (n. 28) la serie (42). Si avrà

$$(42_1)\qquad \lambda y(x,\lambda)=\sum_{n=0}^{n=\infty}u_n(x)\,\lambda^n\,,$$

$$\mathrm{D}u_0=0\quad,\quad \mathrm{L}_i\,u_0=0\,,\text{[1]}$$

$$\mathrm{D}u_1+\mathrm{A}u_0=0\quad,\quad \mathrm{L}_i\,u_1=l_i\,,$$

$$\mathrm{D}u_n+\mathrm{A}u_{n-1}=0\quad,\quad \mathrm{L}_i\,u_n=0\qquad (u\geq 2)\,.$$

Dimostriamo che la serie (42_1) ha un raggio di convergenza finito. Poniamo

$$\mathrm{U}_{n+1}=\int_a^b\mathrm{A}\,u_n\,u_1\,dx\qquad (n\geq 1)\,,$$

e consideriamo la serie

$$(50)\qquad \sum_0^\infty{}_n\,\mathrm{U}_n\,\lambda^n\,,$$

il cui raggio di convergenza non sarà inferiore a quello della (42_1).

---

[1]) Se esiste la funzione di Green relativa alla $\mathrm{D}y$ e alle $\mathrm{L}_i y=0$ sarà $u_0(x)\equiv 0$.

Se si dimostrerà che la serie (50) ha un raggio di convergenza finito, altrettanto potrà dirsi della serie (42_1). È:

$$U_{n+1}=\int_a^b A u_n u_1\, dx = -\int_a^b u_n D u_2\, dx = -\int_a^b u_n \frac{d}{dx}\left(\theta\frac{du_2}{dx}\right)dx - \int_a^b B u_2 u_n\, dx =$$

$$= -\left[\theta u_n \frac{du_2}{dx}\right]_a^b + \int_a^b \theta\frac{du_2}{dx}\frac{du_n}{dx}dx - \int_a^b B u_2 u_n\, dx =$$

$$= \left[\theta\left(u_2\frac{du_n}{dx} - u_n\frac{du_2}{dx}\right)\right]_a^b - \int_a^b u_2\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{du_n}{dx}\right)dx - \int_a^b B u_2 u_n\, dx =$$

$$= \int_a^b u_2(Bu_n + Au_{n-1})\, dx - \int_a^b B u_2 u_n\, dx = \int_a^b A u_2 u_{n-1}\, dx \qquad (n \geq 2).$$

Ne segue

$$U_{m+n} = \int_a^b A u_m u_n\, dx \qquad (m+n \geq 2\ ,\ mn \neq 0)\,,$$

e quindi

$$U_{2n} = \int_a^b A u_{n-1} u_{n+1} dx \quad (n\geq 2)\ ,\quad U_{2n} = \int_a^b A u_n^2\, dx > 0 \quad (n \geq 1).$$

Il raggio di convergenza della serie

$$(51) \qquad \sum_1^\infty {}_n U_{2n}\lambda^{2n}$$

non è minore di quello della serie (50), ma le quantità U_{2n} son tutte positive e la relazione di SCHWARZ applicata alle funzioni $\sqrt{A}u_{n-1}$, $\sqrt{A}u_{n+1}$, dà

$$\frac{U_4}{U_2} \leq \frac{U_6}{U_4} \leq \dots \leq \frac{U_{2n}}{U_{2n-2}} \leq \dots,$$

per cui il $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{U_{2n}}{U_{2n-2}}$ non è lo zero, cioè il raggio di convergenza della serie (51) è finito.

Risulta con ciò provato che il raggio di convergenza della serie (42_1) è finito, diciamo r_0 questo raggio. Esistono, pertanto, valori eccezionali di modulo r_0 e non ne esistendo di complessi, essi dovranno ricercarsi fra r_0 e $-r_0$.

La funzione

$$\left(1-\frac{\lambda^2}{r_0^2}\right)\lambda y(x,\lambda),$$

sarà, in λ, monodroma, finita e continua in un cerchio di raggio maggiore di r_0. Poniamo

$$u_0(x)=v_0(x)\quad,\quad u_1(x)=v_1(x)$$

$$u_n-\frac{u_{n-2}}{r_0^2}=v_n(x)\qquad\qquad (n\geq 2),$$

si avrà

$$\sum_0^\infty{}_n\, v_n(x)\lambda^n=\left(1-\frac{\lambda^2}{r_0^2}\right)\sum_0^\infty{}_n\, u_n(x)\lambda^n. \tag{43_1}$$

La serie (43_1) converge in un cerchio di raggio maggiore di r_0 e, per $\lambda=r_0$, rappresenta la soluzione eccezionale $y_0(x)$ corrispondente a r_0, per $\lambda=-r_0$, rappresenta la soluzione eccezionale $y_{-0}(x)$ corrispondente a $-r_0$. Se non tutti e due i valori r_0 e $-r_0$ sono eccezionali, una delle due funzioni $y_0(x)$, $y_{-0}(x)$ sarà identicamente nulla. È

$$\sum_{i=0}^{i=n} v_i(x)r_0^i=r_0^n u_n+r_0^{n-1}u_{n-1}$$

$$\sum_{i=0}^{i=n} v_i(x)(-r_0)^i=(-r_0)^n u_n+(-r_0)^{n-1}u_{n-1},$$

si avrà quindi

$$\lim_{n=\infty}(r_0^n u_n+r_0^{n-1}u_{n-1})=\lim_{n=\infty}(r_0^{2n}u_n+r_0^{2u-1}u_{2n-1})=y_0(x)$$

$$\lim_{n=\infty}\{(-r_0)^n u_n+(-r_0)^{n-1}u_{n-1}\}=\lim_{n=\infty}(r_0^{2n}u_{2u}-r_0^{2n-1}u_{2n-1})=y_{-0}(x).$$

Ne segue

$$\lim_{n=\infty} r_0^{2n}u_{2n}=\frac{1}{2}\{y_0(x)+y_{-0}(x)\}.$$

Le funzioni $y_0(x)$ e $y_{-0}(x)$ non sono entrambe identicamente nulle e quindi non potrà essere $-y_0(x) \equiv y_{-0}(x)$, poichè in tale ipotesi dalle

$$Dy_0 + r_0 Ay_0 = 0 \qquad Dy_{-0} - r_0 Ay_{-0} = 0$$

seguirebbe $Ay_0 \equiv 0$, cioè le funzioni y_0 e y_{-0} identicamente nulle.

Il $\lim_{n=\infty} u_{2n}(x)\, r_0^{2n}$ sarà dunque, per un generico valore di x, diverso da zero. Ne segue che: Esiste il $\lim_{n=\infty} \frac{u_{2n}}{u_{2n-2}}$, ed è

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{2n}(x)}{u_{2n-2}(x)} = \frac{1}{r_0^2}. \tag{52}$$

La (52) fornisce il calcolo del valore assoluto del valore eccezionale di minimo valore assoluto. Calcolato r_0, si calcoleranno i limiti $\lim_{n=\infty} \{(\pm r_0)^n u_n + (\pm r_0)^{n-1} u_{n-1}\}$ e si otterranno così le soluzioni eccezionali $y_0(x)$ e $y_{-0}(x)$ corrispondenti a r_0 e $-r_0$. Se si trova $y_{-0}(x) \equiv 0$ $(y_0(x) \equiv 0)$ esisterà un solo valore eccezionale di valore assoluto r_0 e sarà positivo (negativo). Se si trovano entrambe le funzioni $y_0(x)$ e $y_{-0}(x)$ non identicamente nulle esisteranno i due valori eccezionali r_0 e $-r_0$ di valore assoluto r_0.

Oss. « La $u_{2n}(x)\, r_0^{2n}$ tende, per n crescente all'infinito, in egual grado in (a, b), al suo limite. Per cui, essendo

$$\lim_{n=\infty} (r_0^{2n} u_{2n} - r_0^{2n-2} u_{2n-2}) = 0,$$

segue

$$\lim_{n=\infty}\left(r_0^{2n}\int_a^b A\, u_{2n} u_2\, dx - r_0^{2n-2}\int_a^b A u_{2n-2} u_2\, dx\right) = \lim_{n=\infty} (U_{2n+2} r_0^{2n} - U_{2n} r_0^{2n-2}) = 0$$

e quindi

$$\lim_{n=\infty} \frac{U_{2n+2}}{U_{2n}} = \frac{1}{r_0^2}. \tag{52$_1$}$$

Ci si potrebbe, dunque, anche valere della (52_1) per il calcolo di r_0. Dalla (52_1) segue che il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \left(U_{2n}\lambda^{2n} + \left|\sqrt{U_{2n} U_{2n+2}}\right| \lambda^{2n+1} + U_{2n+2}\lambda^{2n+2}\right) \tag{51$_1$}$$

è r_0. Ora è

$$U_{2n+1}^2 \leq U_{2n} U_{2n+2} ,$$

per cui il raggio di convergenza della serie (50) non è maggiore di quello della serie (51_1), cioè anche il raggio di convergenza della serie (50) è r_0 [1])».

Dimostrando che la serie (43_1) ha un raggio di convergenza finito, sarà dimostrata l'esistenza di un secondo valore eccezionale di valore assoluto maggiore di r_0.

È

$$D v_n + A v_{n-1} = 0 \quad , \quad L_i v_n = 0 \quad (n \geq 4) .$$

Per cui, ponendo

$$V_{n+3} = \int_a^b A v_n v_3 \, dx ,$$

si avrà

$$V_{m+n} = \int_a^b A v_m v_n \, dx \qquad (m, n \geq 3) ,$$

e quindi

$$V_{2n} = \int_a^b A v_{n-1} v_{n+1} \, dx \quad (n \geq 4) \quad , \quad V_{2n} = \int_a^b A v_n^2 \, dx > 0 \quad (n \geq 3).$$

Si potrà pertanto dimostrare, come precedentemente, che il raggio di convergenza della serie $\sum_0^{\infty}{}_n V_{2n} \lambda^{2n}$ è finito. Ne seguirà altrettanto per la serie (43_1), diciamo r_1 il raggio di convergenza di questa serie. Ponendo

$$v_0(x) = w_0(x) \quad , \quad v_1(x) = w_1(x)$$

$$v_n - \frac{v_{n-2}}{r_1^2} = w_n(x) \qquad (n \geq 2) ,$$

si avrà

$$\left(1 - \frac{\lambda^2}{r_1^2}\right)\left(1 - \frac{\lambda^2}{r_0^2}\right) \lambda y(x, \lambda) = \sum_0^{\infty}{}_n w_n(x) \lambda^n ,$$

---

[1]) Cfr. PICARD. *Traité d'A.*, t. III, pp. 108-115 e pp. 125-129, e (T), Cap. IV e IX. Ivi, gli stessi risultati, in condizioni molto più particolari, sono ottenuti in modo molto meno semplice.

e quindi che la serie $\sum w_n \lambda^n$ converge in un cerchio di raggio maggiore di r_1. Ne segue, come precedentemente

$$\lim_{n=\infty} \frac{v_{2n}(x)}{v_{2n-2}(x)} = \frac{1}{r_1^2} = \lim_{n=\infty} \frac{V_{2n}}{V_{2n-2}}$$

e quindi il calcolo di r_1 e che la serie $\sum V_n \lambda^n$ ha r_1 per raggio di convergenza. Calcolato r_1 si calcoleranno i limiti $\lim\limits_{n=\infty} \{(\pm r_1)^n v_n + (\pm r_1)^{n-1} v_{n-1}\}$, e si otterranno in questi limiti le funzioni eccezionali corrispondenti ai valori eccezionali r_1 e $-r_1$. Dopo di che si sarà, come precedentemente, in grado di determinare il segno del valore eccezionale di valore assoluto r_1. Si ha

$$Dw_n + Aw_{n-1} = 0 \quad , \quad L_i w_n = 0 \qquad (n \geq 6),$$

ne segue, analogamente, l'esistenza di valori eccezionali di valore assoluto $r_2 > r_1$ e il calcolo di r_2:

$$\lim_{n=\infty} \frac{w_{2n}(x)}{w_{2n-2}(x)} = \frac{1}{r_2^2} \,. \text{ Ecc.}$$

Troviamo dunque, nel caso presente, che, costruita, secondo i metodi del n. 27, la serie (42_1), si potrà poi procedere, col metodo del n. 28, a dimostrare l'esistenza dei valori eccezionali e a calcolarli insieme alle corrispondenti soluzioni eccezionali. Questi valori sono in numero infinito ed avranno, pertanto, il punto ∞ per unico punto limite.

31. — Facciamo in questo numero le seguenti ipotesi:

Le funzioni $A(x)$ e $B(x)$ sono in (a, b) finite e continue, *è in* (a, b):

$$B(x) \leq 0$$

e le condizioni $L_i y = 0$, *oltre ad essere simmetriche son tali che, per una funzione* $y(x)$ *che vi soddisfi, si ha:*

$$-\left[\theta\, y \frac{dy}{dx}\right]_a^b \geq 0 \,.$$

Le condizioni $L_i y = 0$ godranno di questa proprietà, per es., se esse coincidono colle (45) nell'ipotesi (45_1) e se, posto

$$a_i\, b_k - a_k\, b_i = d_{ik}\,,$$

tutti i determinanti $d_{12}, d_{14}, d_{23}, d_{43}$ che non sono nulli hanno egual segno (v. (M) pag. 344-345).

Le condizioni (45) nell'ipotesi (45_1) con tutti quei determinanti, fra i $d_{12}, d_{14}, d_{23}, d_{43}$, che non sono nulli, di egual segno, le chiameremo *le condizioni di Mason* [1]).

Non esistono valori eccezionali complessi. Difatti, se esiste un valore eccezionale complesso $\lambda'+i\lambda''$, esisterà il coniugato $\lambda'-i\lambda''$ e se $y'+iy''$ è una soluzione eccezionale corrispondente a $\lambda'+i\lambda''$, $y'-iy''$ sarà una soluzione eccezionale corrispondente a $\lambda'-i\lambda''$. Si avrà

$$\mathrm{L}_i y' = 0 \quad , \quad \mathrm{L}_i y'' = 0$$

e quindi

$$-\left[\theta y' \frac{dy'}{dx}\right]_a^b \geq 0 \ , \ -\left[\theta y'' \frac{dy''}{dx}\right]_a^b \geq 0 \ , \ \left[\theta \left(y' \frac{dy''}{dx} - y'' \frac{dy'}{dx}\right)\right]_a^b = 0 .$$

Poniamo, nella prima delle (46), $\lambda_i = \lambda' + i\lambda''$, $\lambda_k = \lambda' - i\lambda''$, $y_i = y' + iy''$, $y_k = y' - iy''$, poichè è $\lambda'' \neq 0$, sarà $\lambda' + i\lambda'' \neq \lambda' - i\lambda''$, si avrà quindi

$$-\left[\theta y' \frac{dy'}{dx}\right]_a^b - \left[\theta y'' \frac{dy''}{dx}\right]_a^b + \int_a^b \theta \left\{\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy''}{dx}\right)^2\right\} dx - \int_a^b \mathrm{B}\left\{(y')^2 + (y'')^2\right\} dx = 0 .$$

Se non è, in (a, b), $\mathrm{B}(x) \equiv 0$, ne seguirà $y' \equiv y'' \equiv 0$, contro l'ipotesi che $\lambda'+i\lambda''$ sia un valore eccezionale, se è $\mathrm{B}(x) \equiv 0$, ne seguirà che $y'+iy''$ è una costante e quindi $\lambda' = \lambda'' = 0$, contro l'ipotesi $\lambda'' \neq 0$.

Ne segue che $\mathrm{L}(\lambda)$ non è mai nulla per valori complessi di λ, e quindi che esiste la funzione $y(x, \lambda)$, meromorfa in λ, integrale della (1) soddisfacente alle $\mathrm{L}_i y = l_i$.

Sia λ_i un valore eccezionale (necessariamente reale) e y_i una

---

[1]) Le condizioni $a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0$, $b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0$ con $a_1 a_2 \leq 0$ e $b_1 b_2 \geq 0$, da noi considerate nei primi numeri del § 3 sono un caso particolare delle condizioni di Mason, mentre non è così per le condizioni considerate nei nn. 14 e 15.

soluzione eccezionale ad esso corrispondente. Si avrà, dalle (46)

$$(53)\quad \lambda_i \int_a^b \mathrm{A} y_i^2\, dx = -\left[\theta y_i \frac{dy_i}{dx}\right]_a^b + \int_a^b \theta \left(\frac{dy_i}{dx}\right)^2 dx - \int_a^b \mathrm{B} y_i^2\, dx.$$

Ne segue che, se non è, in (a, b), $\mathrm{B}(x) \equiv 0$, si ha

$$(54)\qquad \lambda_i \int_a^b \mathrm{A} y_i^2\, dx > 0.$$

Se non è $\mathrm{B}(x) \equiv 0$, lo zero non è dunque un valore eccezionale. Se non è $\mathrm{B}(x) \equiv 0$, esisterà pertanto la funzione di Green relativa alla $\mathrm{D}y$ e alle $\mathrm{L}_i y = 0$ e la $y(x, \lambda)$ ha un punto ordinario nel punto $\lambda = 0$.

Sia $\mathrm{B}(x) \equiv 0$. Perchè lo zero sia un valore eccezionale, sarà necessario, come si deduce dalla (53), che una costante non nulla sia una soluzione eccezionale ad esso corrispondente. Ora una costante soddisfa alla $\mathrm{D}y \equiv \frac{d}{dx}\left(\theta \frac{dy}{dx}\right) = 0$. Per cui, condizione necessaria e sufficiente affinchè, nell'ipotesi $\mathrm{B}(x) \equiv 0$, lo zero sia un valore eccezionale è che, c indicando una costante non nulla, si abbia $\mathrm{L}_i c = 0$.

Possiamo cioè dire che, condizione necessaria e sufficiente affinchè lo zero sia un valore eccezionale cioè non esista la funzione di Green relativa alla $\mathrm{D}y$ e alle $\mathrm{L}_i y = 0$, è che sia $\mathrm{B}(x) \equiv 0$ e $\mathrm{L}_i 1 = 0$.

Si osservi d'altra parte, che una soluzione $\eta(x)$ della $\frac{d}{dx}\left(\theta \frac{dy}{dx}\right) = 0$ soddisfacente alle $\mathrm{L}_i y = 0$, non può essere, nelle ipotesi attuali, che una costante. Difatti, dalla $\frac{d}{dx}\left(\theta \frac{d\eta}{dx}\right) = 0$ si ricava

$$-\left[\theta \eta \frac{d\eta}{dx}\right]_a^b + \int_a^b \theta \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 dx = 0$$

e quindi, per essere $-\left[\theta \eta \frac{d\eta}{dx}\right]_a^b \geq 0$, $\frac{d\eta}{dx} = 0$.

Ne segue che se lo zero è un valore eccezionale, esso è un valore eccezionale semplice. Questa considerazione, nel caso che non esista la funzione di Green relativa alla $\mathrm{D}y$ e alle $\mathrm{L}_i y = 0$, ci permette, nel calcolare l'ordine del polo di $y(x, \lambda)$ in $\lambda = 0$ e nel calcolarne lo sviluppo nell'intorno di quel punto, di seguire il metodo dato al n. 27 nel caso che, non esistendo la detta funzione di Green, il determinante $[l_{ik}]$ è di caratteristica *uno*.

Dalla (54) si trae che se è, in (a, b), $\mathrm{A}(x) \geq 0$ (≤ 0) non esistono valori eccezionali negativi (positivi).

Un valore eccezionale non nullo è polo semplice di $y(x, \lambda)$. Difatti se $y(x, \lambda)$ ha un polo d'ordine ν nel valore eccezionale λ_i, il coefficiente $y_{-\nu}(x)$ della potenza $(\lambda - \lambda_i)^{-\nu}$ nello sviluppo di $y(x, \lambda)$ nell'intorno di λ_i è una funzione eccezionale corrispondente al valore eccezionale λ_i, perciò, supponendo $\lambda_i \neq 0$, si avrà, per la (54), $\int_a^b \mathrm{A} y_{-\nu}^2 \, dx \neq 0$. Ora l'ipotesi $\nu \geq 2$ porterebbe, collo stesso ragionamento fatto al numero precedente in analoga occasione, alla $\int_a^b \mathrm{A} y_{-\nu}^2 \, dx = 0$.

Supponiamo che $y(x, \lambda)$ abbia un polo nel punto $\lambda = 0$, cioè che sia $\mathrm{B}(x) \equiv 0$ e $\mathrm{L}_i 1 = 0$, vogliamo determinare l'ordine di questo polo. Se $y(x)$ è una funzione che soddisfa alle $\mathrm{L}_i y = 0$, poichè vi soddisfa anche la costante *uno*, si avrà

$$\left[\theta \left(1 \frac{dy}{dx} - y \frac{d1}{dx}\right)\right]_a^b = \left[\theta \frac{dy}{dx}\right]_a^b = 0 .$$

Ne segue subito che se è $\int_a^b \mathrm{A}(x) \, dx \neq 0$, l'ordine del polo di $y(x, \lambda)$ in $\lambda = 0$ è *uno*. Difatti, detto ν quest'ordine, si ha nello intorno dello zero, $y(x, \lambda) = c \lambda^{-\nu} + \sum_{-\nu+1}^{\infty} {}_n \, u_n(x) \lambda^n$, dove c è una costante non nulla. Se fosse $\nu \geq 2$, si avrebbe per la $u_{-\nu+1}(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left(\theta \frac{du_{-\nu+1}}{dx}\right) + c \, \mathrm{A}(x) = 0 \quad , \quad \mathrm{L}_i \, u_{-\nu+1} = 0 \; ,$$

e quindi, moltiplicando per dx e integrando fra a e b

$$\left[\theta\,\frac{du_{-\nu+1}}{dx}\right]_a^b + c\int_a^b \mathrm{A}(x)\,dx = 0\,,$$

cioè $\int_a^b \mathrm{A}(x)\,dx = 0$, in contradizione coll'ipotesi $\int_a^b \mathrm{A}(x)\,dx \neq 0$.

Per il calcolo dell'ordine del polo di $y(x,\lambda)$ in $\lambda = 0$, bisogna, n. 27, calcolare le quantità

$$\Gamma^{(1)} = \int_a^b l(\xi)\,\mathrm{A}(\xi)\,\gamma(\xi)\,d\xi\ ,\quad \Gamma^{(2)} = \int_a^b l(\xi)\,\mathrm{A}(\xi)\,d\xi \int_a^b \Gamma(\xi,\xi_1)\,\mathrm{A}(\xi_1)\,\gamma(\xi_1)\,d\xi_1 \ldots ;$$

se ν è l'apice della prima di queste quantità che è diversa da zero, ν sarà l'ordine di detto polo. Ora, nell'attuale caso, $\gamma(x)$ è una costante che si può supporre $= 1$.

Dico che anche $l(\xi)$ è una costante, naturalmente non nulla [1]. Difatti, abbiamo or ora visto che se è $\int_a^b \mathrm{A}(x)\,dx \neq 0$, sarà $\nu = 1$; ne segue che, se è $\int_a^b \mathrm{A}(x)\,dx \neq 0$, sarà anche $\int_a^b l(x)\,\mathrm{A}(x)\,dx \neq 0$. Si presenta dunque la circostanza che se la funzione finita e continua $\mathrm{A}(x)$ rende $\int_a^b \mathrm{A}(x)\,dx \neq 0$, renderà anche $\int_a^b l(x)\,\mathrm{A}(x)\,dx \neq 0$. Ora se $l(x)$ non è una costante io dico che esisterà una funzione $\mathrm{A}(x)$ finita e continua per la quale si ha

$$\int_a^b l(x)\,\mathrm{A}(x)\,dx = 0 \quad , \quad \int_a^b \mathrm{A}(x)\,dx \neq 0\,.$$

Invero, qualunque sia la funzione finita e continua $\varphi(x)$, posto

$$\mathrm{A}(x) = \varphi(x) - \frac{l(x)}{\int_a^b l^2(x)\,dx}\int_a^b l(x)\,\varphi(x)\,dx\,,$$

[1]) Se fosse $l(x) \equiv 0$, sarebbe $\Gamma^{(n)} = 0$, qualunque sia n e la $y(x,\lambda)$ non esisterebbe (n. 27).

si ha $\int_a^b l(x)\,A(x)\,dx = 0$, e se, qualunque fosse $\varphi(x)$, si avesse

$$\int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left(1 - l(x) \frac{\int_a^b l(x)\,dx}{\int_a^b l^2(x)\,dx} \right) \varphi(x)\,dx = 0,$$

ne seguirebbe [1])

$$1 - \frac{\int_a^b l(x)\,dx}{\int_a^b l^2(x)\,dx}\, l(x) = 0,$$

cioè $l(x)$ costante.

Indichiamo con c la costante $l(x)$. Si avrà

$$\Gamma^{(1)} = c \int_a^b A(x)\,dx\,,\quad \Gamma^{(2)} = c \int_a^b A(x)\,dx \int_a^b \Gamma(x,\xi)\,A(\xi)\,d\xi\,, \ldots .$$

Poichè, nel caso presente, è $\gamma(x) \equiv 1$, $l(x) \equiv c$, ne deduciamo (n. 25) che condizione necessaria e sufficiente perchè esista un integrale della

$$\frac{d}{dx}\left(\theta \frac{dy}{dx}\right) + \varphi(x) = 0,$$

soddisfacente alle $L_i y = 0$ è che sia $\int_a^b \varphi(x)\,dx = 0$, soddisfatta questa condizione, la funzione $y(x)$ definita dall'eguaglianza

$$y(x) = \int_a^b \Gamma(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

è un tale integrale.

Ne segue che $y(x,\lambda)$ non potrà avere, nel punto $\lambda = 0$, un polo d'ordine maggiore di 2. Difatti, perchè $y(x,\lambda)$ abbia, in $\lambda = 0$, un

---

[1]) Le condizioni $L_i y = 0$ essendo simmetriche, la $l(x)$ è finita e continua in (a,b) (n. 24).

polo d'ordine >1, è necessario e sufficiente che sia $\Gamma^{(1)}=0$, cioè $\int_a^b A(x)\,dx=0$, ma se è $\int_a^b A(x)\,dx=0$, io dico che sarà $\Gamma^{(2)}\neq 0$. Invero, nell'ipotesi $\Gamma^{(1)}=0$, la funzione $y(x)$ definita da

$$y(x)=\int_a^b \Gamma(x,\xi)\,A(\xi)\,d\xi\,,$$

soddisfa alle

$$\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{dy}{dx}\right)+A(x)=0\quad,\quad L_i y=0\,,$$

per cui è

$$\int_a^b A(x)\,y(x)\,dx=-\left[\theta y\frac{dy}{dx}\right]_a^b+\int_a^b\theta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx>0\,.$$

Ma abbiamo $\Gamma^{(2)}=c\int_a^b A(x)\,y(x)\,dx$. Troviamo dunque che:

Nelle ipotesi $B(x)\equiv 0$, $L_i 1=0$, *e solo in queste ipotesi,* $y(x,\lambda)$ *ha un polo nel punto* $\lambda=0$, *che sarà semplice se è* $\int_a^b A(x)\,dx\neq 0$, *doppio se è* $\int_a^b A(x)\,dx=0$ [1]).

Andiamo ora più particolarmente a considerare le condizioni di Mason e a dimostrare, col metodo del n. 28, l'effettiva esistenza di infiniti valori eccezionali di λ nella (1) relativi a queste condizioni, nonchè a darne un calcolo insieme alle corrispondenti soluzioni eccezionali.

Premettiamo il seguente lemma:

Se u e v son due funzioni che soddisfano alle condizioni di Mason, si ha

$$\left\{\left[\theta u\frac{dv}{dx}\right]_a^b\right\}^2=\left\{\left[\theta v\frac{du}{dx}\right]_a^b\right\}^2=\left[\theta u\frac{dv}{dx}\right]_a^b\cdot\left[\theta v\frac{du}{dx}\right]_a^b\leq\left[\theta u\frac{du}{dx}\right]_a^b\cdot\left[\theta v\frac{dv}{dx}\right]_a^b\,.$$

---

1) Cfr. la fine del n. 11 (§ 3).

Supponiamo dapprima $d_{24} \neq 0$. Se una funzione $y(x)$ soddisfa alle (45), si ha

$$(55)\quad y(b) = \frac{1}{d_{42}}\{d_{14}y(a) + d_{34}y'(a)\}\ ,\ y'(b) = \frac{1}{d_{24}}\{d_{12}y(a) + d_{32}y'(a)\}.$$

Nella differenza

$$\Delta = \left[\theta u \frac{dv}{dx}\right]_a^b \cdot \left[\theta v \frac{du}{dx}\right]_a^b - \left[\theta u \frac{du}{dx}\right]_a^b \cdot \left[\theta v \frac{dv}{dx}\right]_a^b,$$

sostituiamo ai valori delle $u, \frac{du}{dx}, v, \frac{dv}{dx}$ in b, quelli dati dalle (55), si trova, con un facile calcolo:

$$\Delta = \theta(b)\, d_{34}\, d_{12}\, \{u(a)\, v'(a) - v(a)\, u'(a)\}^2,$$

e quindi, per essere $d_{34} . d_{12} \leq 0$, $\Delta \leq 0$.

Se è $d_{24} = 0$ sarà anche $d_{13} = 0$ e quindi non potrà essere $d_{12} = 0$, $d_{14} = 0$, $d_{23} = 0$, $d_{34} = 0$, poichè, nell'ipotesi $d_{24} = d_{13} = d_{12} = d_{14} = d_{23} = d_{34} = 0$, le condizioni (45) sarebbero l'una conseguenza dell'altra. Sia $d_{34} \neq 0$, per una funzione $y(x)$ che soddisfa alle (45) si avrà

$$(56)\qquad y'(a) = \frac{d_{14}}{d_{43}}\, y(a)\ ,\ y'(b) = \frac{d_{23}}{d_{34}}\, y(b).$$

Sostituendo in Δ ai valori di $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}$ in a e in b quelli dati dalle (56) si troverà

$$\Delta = -\,\theta(b)\,\frac{d_{23}\, d_{14}}{d_{34}^2}\{u(a)\, v(b) - u(b)\, v(a)\}^2,$$

e quindi, per essere $d_{23}\, d_{14} \geq 0$, $\Delta \leq 0$. Ecc.

Ciò premesso, costruiamo (n. 27) lo sviluppo di $\lambda^2 y(x, \lambda)$ nell'intorno dell'origine. Si ottenga

$$(42_2)\qquad \lambda^2 y(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n(x)\, \lambda^n\ ^{1)}.$$

---

[1]) Sarà $u_0 = 0$ se $y(x, \lambda)$ ha un polo semplice in $\lambda = 0$; sarà $u_0 \equiv u_1 \equiv 0$ se $y(x, \lambda)$ ha un punto ordinario in $\lambda = 0$, per es., se non è $B(x) \equiv 0$. Condizione necessaria e sufficiente affinchè $y(x, \lambda)$ abbia un polo in $\lambda = 0$ è che sia $B(x) \equiv 0$, $a_1 + a_2 = 0$, $b_1 + b_2 = 0$.

Sussisteranno le relazioni

$$\begin{aligned} \mathrm{D}u_0 = 0 \;,\; \mathrm{D}u_1 + \mathrm{A}u_0 &= 0 \;,\; \mathrm{L}_i u_0 = 0 \;,\; \mathrm{L}_i u_1 = 0 \\ \mathrm{D}u_2 + \mathrm{A}u_1 &= 0 \;,\; \mathrm{L}_i u_2 = l_i \\ \mathrm{D}u_n + \mathrm{A}u_{n-1} &= 0 \;,\; \mathrm{L}_i u_n = 0 \qquad (n \geq 3)\,. \end{aligned}$$

Poniamo

$$\mathrm{U}_{n+2} = \int_a^b \mathrm{A} u_n u_2\, dx$$

e consideriamo la serie

$$(50_1) \qquad \sum_0^{\infty}{}_n \mathrm{U}_n \lambda^n$$

il cui raggio di convergenza non è inferiore a quello della (42_2). Si ha

$$\mathrm{U}_{m+n} = \int_a^b \mathrm{A} u_m u_n\, dx \qquad (m\,, n \geq 2)\,,$$

e quindi, ponendo $-\mathrm{B}(x) = \mathrm{P}(x)$,

$$(57) \qquad \mathrm{U}_{m+n} = -\left[\theta u_u \frac{du_{m+1}}{dx}\right]_a^b + \int_a^b \theta \frac{du_n}{dx}\frac{du_{m+1}}{dx}\, dx + \int_a^b \mathrm{P}\, u_n u_{m+1}\, dx.$$

Per cui, fatto in questa relazione $m = n-1$, si ha

$$\mathrm{U}_{2n-1} = -\left[\theta u_n \frac{du_n}{dx}\right]_a^b + \int_a^b \theta\left(\frac{du_n}{dx}\right)^2 dx + \int_a^b \mathrm{P}\, u_n^2\, dx \qquad (n \geq 3)\,.$$

Ne segue

$$\mathrm{U}_{2n-1} > 0 \qquad (n \geq 3\,).$$

Poniamo, nella (57), n e $n-1$ al posto di m e di n, poi $n-2$ e $n-1$ al posto di m e di n e infine n e $n+1$ al posto di m e di n, ciò sarà lecito purchè sia $n \geq 4$. Si avrà

$$\mathrm{U}_{2n-1} = -\left[\theta u_{n-1} \frac{du_{n+1}}{dx}\right]_a^b + \int_a^b \theta \frac{du_{n-1}}{dx}\frac{du_{n+1}}{dx}\, dx + \int_a^b \mathrm{P}\, u_{n-1} u_{n+1}\, dx\,,$$

$$U_{2n-3} = -\left[\theta u_{n-1}\frac{du_{n-1}}{dx}\right]_a^b + \int_a^b \theta\left(\frac{du_{n-1}}{dx}\right)^2 dx + \int_a^b P u_{n-1}^2\, dx\,, \quad (n \geq 4)$$

$$U_{2n+1} = -\left[\theta u_{n+1}\frac{du_{n+1}}{dx}\right]_a^b + \int_a^b \theta\left(\frac{du_{n+1}}{dx}\right)^2 dx + \int_a^b P u_{n+1}^2\, dx\,.$$

Consideriamo valori di $n \geq 4$, poichè, per tali valori di n, u_{n-1} e u_{n+1} soddisfano alle condizioni di MASON, si ha, in virtù del lemma premesso

$$\left\{\left[\theta u_{n-1}\frac{du_{n+1}}{dx}\right]_a^b\right\}^2 \leq \left[\theta u_{n-1}\frac{du_{n-1}}{dx}\right]_a^b \cdot \left[\theta u_{n+1}\frac{du_{n+1}}{dx}\right]_a^b .$$

Per la relazione di SCHWARZ, applicata, una volta, alle funzioni $\sqrt{\theta}\,\frac{du_{n-1}}{dx}$, $\sqrt{\theta}\,\frac{du_{n+1}}{dx}$ e, un'altra, alle funzioni $\sqrt{P}\,u_{n-1}$, $\sqrt{P}\,u_{n+1}$, si ha

$$\left(\int_a^b \theta\frac{du_{n-1}}{dx}\frac{du_{n+1}}{dx}\,dx\right)^2 \leq \int_a^b \theta\left(\frac{du_{n-1}}{dx}\right)^2 dx \int_a^b \theta\left(\frac{du_{n+1}}{dx}\right)^2 dx\,,$$

$$\left(\int_a^b P u_{n-1} u_{n+1}\,dx\right)^2 \leq \int_a^b P u_{n-1}^2\,dx \int_a^b P u_{n+1}^2\,dx\,.$$

Ne segue

$$U_{2n-1}^2 \leq U_{2n-3}\,U_{2n+1} \qquad (n \geq 4)$$ [1].

La serie

$$\sum_1^\infty {}_n\, U_{2n-1}\lambda^{2n-1}$$

ha, pertanto, un raggio di convergenza finito e altrettanto potrà dirsi della serie (50_1) e quindi della (42_2).

---

[1]) Se le $2n$ quantità $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$; $a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}$ sono positive e per le n quantità $a_{01}, a_{02}, \ldots, a_{0n}$, valgono le relazioni

$$a_{0i}^2 \leq a_{1i}\,a_{2i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

si avrà

$$\left(\sum_{i=1}^{i=n} a_{0i}\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{i=n} a_{1i} \sum_{i=1}^{i=n} a_{2i}\,.$$

Risulta così provata l'esistenza di un valore eccezionale non nullo. Sia r_0 il raggio di convergenza della serie (42_2), r_0 o $-r_0$ o r_0 e $-r_0$ saranno i valori eccezionali di minimo valore assoluto. Per il calcolo di r_0 e per determinare il segno del valore eccezionale di valore assoluto r_0 (data la semplicità dei poli di $\lambda^2 y(x,\lambda)$) si procederà in modo affatto identico a quello tenuto nel n. precedente. Si otterrà

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{2n+1}(x)}{u_{2n-1}(x)} = \frac{1}{r_0^2} = \lim_{n=\infty} \frac{\mathrm{U}_{2n+1}}{\mathrm{U}_{2n-1}} .$$

Dopo di che sarà anche dimostrato che la serie (50_1) ha lo stesso raggio di convergenza della serie (42_2). Il valore eccezionale di valore assoluto r_0 sarà r_0 o $-r_0$ secondochè è $\lim\limits_{n=\infty} \{(-r_0)^n u_n + (-r_0)^{n-1} u_{n-1}\} \equiv 0$ o $\lim\limits_{n=\infty} (r_0^n u_n + r_0^{n-1} u_{n-1}) \equiv 0$. I valori r_0 e $-r_0$ saranno entrambi valori eccezionali se entrambi quei limiti sono non identicamente nulli. In ogni caso, quei limiti daranno le funzioni eccezionali corrispondenti, rispettivamente, a $-r_0$ e r_0.

Posto

$$u_0(x) = v_0(x) \quad , \quad u_1(x) = v_1(x) \, ,$$

$$u_n - \frac{u_{n-2}}{r_0^2} = v_n(x) \qquad (n \geq ?) \, ,$$

si avrà

$$(43_2) \qquad \left(1 - \frac{\lambda^2}{r_0^2}\right) \lambda^2 y(x,\lambda) = \sum_0^\infty{}_n \, v_n(x) \lambda^n .$$

Sussistono le relazioni

$$\mathrm{D} v_n + \mathrm{A} v_{n-1} = 0 \quad , \quad \mathrm{L}_i \, v_n = 0 \qquad (n \geq 5) .$$

Per cui, ponendo

$$\mathrm{V}_{n+4} = \int_a^b \mathrm{A} \, v_n \, v_4 \, dx \, ,$$

si avrà

$$\mathrm{V}_{m+n} = \int_n^b \mathrm{A} \, v_m \, v_n \, dx \qquad (m, n \geq 4) .$$

Ne segue

$$V_{2n-1} = -\left[\theta v_u \frac{dv_n}{dx}\right]_n^b + \int_a^b \theta \left(\frac{dv_n}{dx}\right)^2 dx + \int_a^b P\, v_n^2\, dx$$

e quindi

$$V_{2n-1} > 0 \qquad (n \geq 5)\,.$$

Come precedentemente si dimostrerà

$$V_{2n-1}^2 \leq V_{2n+1}\, V_{2n-3} \qquad (n \geq 6)$$

da cui seguirà che il raggio di convergenza della serie (43_2) è finito e quindi l'esistenza di valori eccezionali di valore assoluto $> r_0$. Ecc.

Il fatto che le condizioni $L_i y = 0$ sono quelle di Mason ci ha solo servito per dimostrare l'effettiva esistenza di infiniti valori eccezionali; per il calcolo di questi valori e delle corrispondenti soluzioni eccezionali non abbiamo invocato che la realità e la semplicità dei poli di $\lambda^2 y(x, \lambda)$.

Quest'osservazione ci permette di dire, nelle sole ipotesi poste al principio di questo numero (in queste ipotesi infatti si verificano la realità e la semplicità dei poli di $\lambda^2 y(x, \lambda)$), che, una volta nota l'esistenza di valori eccezionali, il calcolo di ciascuno di essi e delle corrispondenti soluzioni eccezionali potrà effettuarsi, appena sia costruita la serie (42), nel modo testè esposto.

Un caso in cui, senza essere nelle condizioni di Mason, si può dimostrare l'esistenza di infiniti valori eccezionali è il seguente. Sussistono le ipotesi in principio del numero e di più *per due diverse funzioni u e v che soddisfano alle* $L_i y = 0$, *si ha*

$$\left[\theta u \frac{dv}{dx}\right]_a^b = \left[\theta v \frac{du}{dx}\right]_a^b = 0\,.$$

In questa ipotesi, infatti, costruite le quantità U_n, si avrà

$$U_{2n-1} = \int_a^b \theta \frac{du_{n-1}}{dx} \frac{du_{n+1}}{dx}\, dx + \int_a^b P\, u_{n-1}\, u_{n+1}\, dx\,,$$

$$U_{2n-3} = -\left[\theta u_{n-1} \frac{du_{n-1}}{dx}\right]_a^b + \int_a^b \theta \left(\frac{du_{n-1}}{dx}\right)^2 dx + \int_a^b P u_{n-1}^2 \, dx ,$$

$$U_{2n+1} = -\left[\theta u_{n+1} \frac{du_{n+1}}{dx}\right]_a^b + \int_a^b \theta \left(\frac{du_{n+1}}{dx}\right)^2 dx + \int_a^b P u_{n-1}^2 \, dx ,$$

e quindi $U_{2n-1}^2 \leq U_{2n-3} U_{2n+1}$. Ne segue che il raggio di convergenza della serie (42) è finito.

NOTA

Sulle equazioni differenziali lineari ordinarie d'ordine superiore al secondo.

I metodi esposti nell'ultimo paragrafo possono essere generalizzati per trattare problemi, analoghi a quelli ivi trattati, per una classe numerosissima di equazioni differenziali lineari ordinarie di ordine superiore al secondo.

Noi crediamo di giustificare questa affermazione trattando, solo brevemente, dei valori eccezionali del parametro λ nell'equazione del 4.° ordine

$$(1) \qquad \frac{d^2}{dx^2}\left\{\theta(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right\} + \{\lambda\, \mathrm{A}(x) + \mathrm{B}(x)\}\, y = 0\,,$$

sotto certe ipotesi pei coefficienti e relativi a certe condizioni lineari; reputando che, colla scorta delle nostre due Note sull'argomento che ci occupa [1]), sarà, per es., facilissimo estendere i ragionamenti e i calcoli che stiamo per esporre allo studio dei valori eccezionali del parametro λ nelle equazioni d'ordine $2n$:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{d^k}{dx^k}\left\{\theta_k(x)\frac{d^k y}{dx^k}\right\} + \{\lambda\, \mathrm{A}(x) + \mathrm{B}(x)\}\, y = 0\,,$$

sotto analoghe ipotesi pei coefficienti e relativi ad analoghe condizioni lineari.

---

[1]) *I teoremi d'esistenza per gl' integrali ... ecc. Del legame fra l'equazione di Fredholm e le equazioni differenziali ... ecc.* Rend. Acc. dei Lincei, vol. XVII (1908).

La funzione di Green.

Consideriamo l'espressione differenziale

$$\mathrm{D}y \equiv \frac{d^2}{dx^2}\left(\theta \frac{d^2y}{dx^2}\right) + \mathrm{B}y\,,$$

nella quale $\mathrm{B}(x), \theta(x), \frac{d\theta}{dx}, \frac{d^2\theta}{dx^2}$ sono funzioni finite e continue della variabile reale x nel tratto finito (a, b) e l'equazione

$$\mathrm{D}y + \varphi(x) = 0 \tag{2}$$

dove $\varphi(x)$ è anch'essa funzione finita e continua in (a, b). Supponiamo naturalmente che la funzione $\theta(x)$ non s'annulli mai in (a, b) e, per fissare le idee, che, M e m indicando due numeri positivi finiti, sia in (a, b):

$$\mathrm{M} \geq \theta(x) \geq m > 0\,.$$

Possiamo dare all'integrale generale dell'equazione (2) un'espressione analoga alla espressione (9) del § 6 data all'integrale generale dell'equazione del second'ordine (5) di quel paragrafo. Notiamo, a tale scopo, che, se $y(x)$ designa l'integrale generale dell'equazione

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\theta \frac{d^2y}{dx^2}\right) + \varphi(x) = 0 \tag{3}$$

e c_0, c_1, c_2, c_3 designano quattro costanti arbitrarie, si ha successivamente

$$\theta \frac{d^2y}{dx^2} = c_2 + c_3 x + \int_a^x (\xi - x)\,\varphi(\xi)\,d\xi\,,$$

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 \int_a^x \frac{x-\xi}{\theta(\xi)}\,d\xi + c_3 \int_a^x \frac{\xi(x-\xi)}{\theta(\xi)}\,d\xi +$$

$$+ \int_a^x \frac{x-\xi}{\theta(\xi)}\,d\xi \int_a^\xi (s-\xi)\,\varphi(s)\,ds\,.$$

Ma è

$$\int_a^x d\xi \int_a^\xi \frac{(x-\xi)(s-\xi)}{\theta(\xi)} \varphi(s)\, ds = \int_a^x \varphi(\xi)\, d\xi \int_\xi^x \frac{(x-s)(\xi-s)}{\theta(s)}\, ds\,,$$

ponendo dunque

$$c_0 + c_1 x + c_2 \int_a^x \frac{x-\xi}{\theta(\xi)}\, d\xi + c_3 \int_a^x \frac{\xi\,(x-\xi)}{\theta(\xi)}\, d\xi = t(x)\,,$$

$$\int_\xi^x \frac{(x-s)(\xi-s)}{\theta(s)}\, ds = t(x,\xi)\,,$$

ne seguirà

$$(4) \qquad y(x) = t(x) + \int_a^x t(x,\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Viceversa dalla (4) seguirà la (3), qualunque siano le costanti c.

Indichi ora $y(x)$ l'integrale generale della (2). Poniamo, ctr. n. 23,

$$-t(x,\xi)\, \mathrm{B}(\xi) = f(x,\xi)\ ,\quad t(x) + \int_a^x t(x,\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi = \Phi(x)\,,$$

si avrà l'eguaglianza

$$y(x) + \int_a^x f(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi = \Phi(x)\,.$$

Viceversa da questa eguaglianza segue la (2). Ma allora ponendo

$$f_0(x,\xi) = f(x,\xi)\ ,\quad f_i(x,\xi) = \int_x^\xi f_{i-j}(x,s)\, f_{j-1}(s,\xi)\, ds \quad (j=1,2,\ldots,i),$$

$$\sum_0^\infty{}_i\, f_i(x,\xi) = \mathrm{F}(x,\xi)\,,$$

$$t(x,\xi) + \int_a^\xi \mathrm{F}(x,s)\, t(s,\xi)\, ds = \mathrm{H}(x,\xi)\ ,\quad t(x) - \int_a^x \mathrm{F}(x,\xi)\, t(\xi)\, d\xi = g(x),$$

si avrà per l' integrale generale della (2) l'espressione

$$(5) \qquad y(x) = g(x) + \int_a^x \mathrm{H}(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

che è quella che si cercava. Si ha

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \int_\xi^x \frac{\xi - s}{\theta(s)}\, ds \;, \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{\xi - x}{\theta(x)} \;, \quad \frac{\partial^3 t}{\partial x^3} = -\frac{1}{\theta(x)} - \frac{\xi - x}{\theta^2(x)} \frac{d\theta}{dx} \;,$$

e quindi, per es. dalla relazione

$$\mathrm{H}(x, \xi) = t(x, \xi) + \int_\xi^x t(x, s)\, \mathrm{B}(s)\, \mathrm{H}(s, \xi)\, ds \;,$$

si ottiene, considerando, per ogni valore di ξ, $\mathrm{H}(x, \xi)$ come funzione di x,

$$\mathrm{DH}(x, \xi) = 0 \;,$$

$$\mathrm{H}(\xi, \xi) = \left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}\right]_{x=\xi} = \left[\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial x^2}\right]_{x=\xi} = 0 \;, \quad \left[\frac{\partial^3 \mathrm{H}}{\partial x^3}\right]_{x=\xi} = -\frac{1}{\theta(\xi)} \,.$$

Nell'espressione (5) dell' integrale generale della (2), $g(x)$ è l'integrale generale della $\mathrm{D}y = 0$ e $\int_a^x \mathrm{H}(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi$ è l'integrale della (2) che è nullo in a insieme alle sue derivate dei primi tre ordini.

Definiamo la funzione $g(x, \xi)$ col porre

$$\begin{aligned} g(x, \xi) &= 0 && \text{per } x \leq \xi, \\ &= \mathrm{H}(x, \xi) && \text{per } x \geq \xi. \end{aligned}$$

La $g(x, \xi)$, per ogni valore di ξ, considerata come funzione di x, è una soluzione dell'equazione $\mathrm{D}y = 0$, finita e continua colle sue derivate dei *due* primi ordini, la sua derivata terza è finita e continua in $(a, \xi - 0)$ e in $(\xi + 0, b)$, mentre nel punto ξ ha una discontinuità di prima specie, è

$$\left[\frac{\partial^3 g}{\partial x^3}\right]_{x=\xi+0} - \left[\frac{\partial^3 g}{\partial x^3}\right]_{x=\xi-0} = -\frac{1}{\theta(\xi)} \,.$$

Colla nuova posizione l'integrale generale $y(x)$ della (2) sarà definito dall'eguaglianza

$$y(x) = g(x) + \int_a^b g(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi \,. \tag{6}$$

Imponiamo all'integrale $y(x)$ le condizioni lineari

$$\mathrm{L}_i y \equiv \sum_{k=1}^{k=4} \left\{ \sum_{l=1}^{l=m_{ik}} a_{ikl}\, y^{(k-1)}(\tau_{ikl}) + \int_a^b a_{ik}(\tau)\, y^{(k-1)}(\tau)\, d\tau \right\} = l_i \tag{7}$$

$$(\mathrm{i} = 1, 2, 3, 4)$$

Le $a_{ik}(\tau)$ sono funzioni reali di τ finite e integrabili in (a, b), assegnate insieme alle quantità reali a_{ikl} e l_i e ai punti, di (a, b), τ_{ikl} in numero finito $\leq \sum_{i,k} m_{ik}$. Supponiamo, naturalmento, che le quattro condizioni (7) sian tali che nessuna di esse sia conseguenza delle altre.

Definiamo come funzione di Green relativa all'espressione differenziale $\mathrm{D}y$ *e alle condizioni* $\mathrm{L}_i y = 0$, *una funzione* $\mathrm{G}(x, \xi)$ *delle due variabili* x *e* ξ, *finita e integrabile rispetto a* ξ, *finita e continua rispetto a* x, *tale che, qualunque sia* $\varphi(x)$, *si abbia, per ogni integrale* $y(x)$ *della* (2) *soddisfacente alle condizioni* $\mathrm{L}_i y = 0$, *la eguaglianza*

$$y(x) = \int_a^b \mathrm{G}(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi \,,$$

e viceversa quest'eguaglianza abbia di conseguenza la (2) *e le* $\mathrm{L}_i y = 0$.

Dopo quanto abbiamo testè premesso apparrà ben chiaro che, procedendo con metodo del tutto analogo a quello seguito al n. 23, si potrà dimostrare il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista la funzione di Green relativa all'espressione differenziale $\mathrm{D}y$ *e alle condizioni* $\mathrm{L}_i y = 0$, *è che esista uno ed un solo integrale dell'equazione* $\mathrm{D}y = 0$ *soddisfacente alle* (7) *qualunque siano le* l_i, *o cioè, che l'integrale della* $\mathrm{D}y = 0$ *soddisfacente alle* $\mathrm{L}_i y = 0$ *sia necessariamente nullo.*

La funzione di Green $G(x, \xi)$ che si perverrà a costruire godrà delle seguenti proprietà:

La $G(x, \xi)$, considerata come funzione di x, è finita e continua colle sue derivate dei *due* primi ordini, la sua derivata terza è finita e continua in $(a, \xi - 0)$ e in $(\xi + 0, b)$, mentre nel punto ξ ha una discontinuità di prima specie, è

$$\left[\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}\right]_{x=\xi+0} - \left[\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}\right]_{x=\xi-0} = -\frac{1}{\theta(\xi)} .$$

La $G(x, \xi)$, considerata sempre come funzione di x, soddisfa, per ogni valore di ξ, alla $Dy = 0$ e, i punti τ_{i41} tutt'al più eccettuati, alle $L_i y = 0$.

Le funzioni $\frac{\partial^i}{\partial x^i} G(x, \xi)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$, considerate come funzioni di ξ, sono, per ogni valore di x, finite e continue in (a, b), tranne tutt'al più in numero finito di punti non dipendenti da x, in cui, restando finite, presentano delle discontinuità di prima specie.

Nell'ipotesi dell'esistenza della funzione di Green $G(x, \xi)$, relativa alla Dy e alle $L_i y = 0$, esisterà uno ed un solo integrale della (2) soddisfacente alle (7), esso sarà definito dall'eguaglianza

$$y(x) = G(x) + \int_a^b G(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi ,$$

dove $G(x)$ esprime l'integrale della $Dy = 0$ soddisfacente alle (7).

Se le condizioni $L_i y = 0$ son tali che per due funzioni $u(x)$ e $v(x)$ che vi soddisfano si abbia

$$(8) \qquad [\Delta(u, v)]_a^b \equiv$$

$$\equiv \left[v \frac{d}{dx}\left(\theta \frac{d^2 u}{dx^2}\right) - u \frac{d}{dx}\left(\theta \frac{d^2 v}{dx^2}\right)\right]_a^b - \left[\theta\left(\frac{dv}{dx}\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{du}{dx}\frac{d^2 v}{dx^2}\right)\right]_a^b = 0 ,$$

si avrà $G(x_1, x_2) = G(x_2, x_1)$, supposto che x_1, x_2 non siano fra i punti τ_{i41}. Difatti, poniamo $G(x, x_1) = G_1(x)$, $G(x, x_2) = G_2(x)$ e nella relazione

$$\int_a^b (v\,\mathrm{D}u - u\,\mathrm{D}v)\,dx = \Big[\Delta(u, v)\Big]_a^b ,$$

valevole qualunque siano $u(x)$ e $v(x)$ purchè finite e continue in (a, b) colle loro derivate dei primi quattro ordini, poniamo $u = \mathrm{G}_1$, $v = \mathrm{G}_2$. Supposto, per es., $x_1 < x_2$, si avrà

$$\Big[\Delta(\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2)\Big]_a^{x_1-\varepsilon} + \Big[\Delta(\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2)\Big]_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} + \Big[\Delta(\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2)\Big]_{x_2+\varepsilon}^{b} = 0 ,$$

qualunque sia l'infinitesimo ε, e passando al limite

$$\mathrm{G}(x_1, x_2) = \mathrm{G}(x_2, x_1).$$

Ne seguirà che:

Se le condizioni $\mathrm{L}_i y = 0$ *son tali che per due funzioni* u *e* v *che vi soddisfano si verifica la* (8), *sono cioè, come le diremo, simmetriche, la funzione di Green corrispondente è una funzione simmetrica dei suoi due argomenti.*

Così, ad es., ciascuna delle quaterne di condizioni

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l}
y(a) = 0\,,\ \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_a = 0\,,\ y(b) = 0\,,\ \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_b = 0\,;\\[2ex]
y(a) = 0\,,\ \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_a = 0\,,\ \left[\dfrac{d^2y}{dx^2}\right]_b = 0\,,\ \left[\dfrac{d^3y}{dx^3}\right]_b = 0\,;\\[2ex]
\left[\dfrac{d^2y}{dx^2}\right]_a = 0\,,\ \left[\dfrac{d^3y}{dx^3}\right]_a = 0\,,\ y(b) = 0\,,\ \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_b = 0\,;\\[2ex]
\left[\dfrac{d^2y}{dx^2}\right]_a = 0\,,\ \left[\dfrac{d^3y}{dx^3}\right]_a = 0\,,\ \left[\dfrac{d^2y}{dx^2}\right]_b = 0\,,\ \left[\dfrac{d^3y}{dx^3}\right]_b = 0\,;
\end{array}\right.$$

e, nell'ipotesi $\theta(b) = \theta(a)$, $\left[\dfrac{d\theta}{dx}\right]_b = \left[\dfrac{d\theta}{dx}\right]_a$, l'altra quaterna

$$(9_1)\qquad \left[\frac{d^i y}{dx^i}\right]_b - \left[\frac{d^i y}{dx^i}\right]_a = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3),$$

sono simmetriche.

L'esistenza di valori eccezionali e il calcolo di essi e delle corrispondenti soluzioni eccezionali.

Partendo dall'espressione (6) dell'integrale generale della (2) si perverrà, proprio come nel § 6, a dare un criterio per l'esistenza della funzione $y(x, \lambda)$, meromorfa in λ, integrale della

$$Dy + (\lambda A + B)\, y = 0 \,, \tag{1}$$

soddisfacente alle (7). Di più, supposta la $y(x, \lambda)$ esistente, se ne trarrà l'ordine del suo polo nell'origine per le l_i affatto generiche, un suo sviluppo, per potenze di λ, valevole nell'intorno dell'origine e un'equazione integrale lineare del tipo di FREDHOLM a cui soddisfa.

Se esiste la funzione di Green $G(x, \xi)$, relativa alla Dy e alle $L_i y = 0$, esisterà l'indicata funzione meromorfa $y(x, \lambda)$ e sarà soluzione dell'equazione integrale del tipo di FREDHOLM

$$y(x, \lambda) - \lambda \int_a^b G(x, \xi)\, A(\xi)\, y(\xi, \lambda)\, d\xi = G(x) \,,$$

equazione che *traduce* il problema della determinazione di un integrale della (1) soddisfacente alle (7).

Condizione necessaria e sufficiente perchè la $y(x, \lambda)$ abbia in $\lambda = 0$ un punto ordinario è che esista la funzione di Green relativa alla Dy e alle $L_i y = 0$. In questa ipotesi si avrà lo sviluppo di $y(x, \lambda)$:

$$y(x, \lambda) = \sum_0^{\infty}{}_n\, u_n(x)\, \lambda^n \,,$$

valido nell'intorno dell'origine e sarà

$$u_0(x) = G(x) \quad , \quad u_n(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, A(\xi)\, u_{n-1}(\xi)\, d\xi \,.$$

In tutti i casi, esista o no la funzione di Green, supposta la $y(x, \lambda)$ esistente, detto ν l'ordine del suo polo nell'origine e avuto lo sviluppo

$$\sum_{0}^{\infty} u_n(x)\,\lambda^n = \lambda^\nu\, y(x, \lambda) \tag{11}$$

della $\lambda^\nu y(x,\lambda)$ nell' intorno dell'origine, si procederà, come al n. 28, alla ricerca dei valori eccezionali del parametro λ nella (1) e relativi alle condizioni (7).

Per le $u_n(x)$ varranno le relazioni

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathrm{D}u_0 = 0 \;, & \mathrm{L}_i u_0 = 0 \;, & \\ \mathrm{D}u_n + \mathrm{A}u_{n-1} = 0 \;, & \mathrm{L}_i u_n = 0 & (n = 1, 2, \ldots, \nu-1)\,, \\ \mathrm{D}u_\nu + \mathrm{A}u_{\nu-1} = 0 \;, & \mathrm{L}_i u_\nu = l_i \;, & \\ \mathrm{D}u_n + \mathrm{A}u_{n-1} = 0 \;, & \mathrm{L}_i u_n = 0 & (n \geq \nu + 1)\,. \end{array}\right. \tag{12}$$

Noi faremo l'applicazione del metodo indicato allo studio dei valori eccezionali del parametro λ nella (1) e relativi alle condizioni (7) nella seguente ipotesi che sottintenderemo mantenuta sino alla fine:

Le condizioni $\mathrm{L}_i y = 0$ *sono simmetriche.*

In tale ipotesi, *se esiste la funzione di Green relativa alla* $\mathrm{D}y$ *e alle* $\mathrm{L}_i y = 0$, i valori eccezionali di λ coincidono con quelli nell'equazione integrale (10') il cui nucleo è costituito dal prodotto di una funzione simmetrica per una funzione della variabile d'integrazione. Per cui, in grazia delle citate ricerche dell'HILBERT e dello SCHMIDT, *se di più la funzione* $\mathrm{A}(x)$ *subisce in* (a, b) *solo un numero finito di cambiamenti di segno,* risulta provata l'esistenza di infiniti [1]) valori eccezionali, aventi quindi il punto ∞ per unico punto limite [2]).

---

[1]) Anche qui infatti, come al n. 29, la funzione $\mathrm{G}(x, \xi)$ è *chiusa (abgeschlossen).*

[2]) Cfr. la memoria di M. DAVIDOGLOU: *Étude de l'équation differentielle* $\frac{d^2}{dx^2}\left(\theta\,\frac{d^2y}{dx^2}\right) = k\,\varphi(x)\,y$. Annales de l'École Normale Superieure de Paris, t. 22 (1905), pp. 539-565. Ivi il D. stabilisce l'esistenza dei valori

Non facendo alcuna ipotesi sulla funzione di Green, andiamo a fare la menzionata applicazione.

Stabiliamo dapprima alcune relazioni. Siano λ_i e λ_k due valori eccezionali distinti e $y_i(x)$, $y_k(x)$ le funzioni eccezionali ad essi corrispondenti, ciascuna di queste potrà al più dipendere da quattro costanti arbitrarie. Dalle

$$\mathrm{D}y_i + \lambda_i \mathrm{A} y_i = 0 \ , \quad \mathrm{D}y_k + \lambda_k \mathrm{A} y_k = 0 \ ,$$

---

eccezionali del parametro λ nell'equazione (1) e relativi alle condizioni

$$y(a) = 0 \ , \quad \left[\frac{dy}{dx}\right]_a = 0 \ , \quad y(b) = 0 \ , \quad \left[\frac{dy}{dx}\right]_b = 0 \ ,$$

nelle ulteriori ipotesi: $\mathrm{A}(x) \leq 0$ in (a, b) e $\mathrm{B}(x) \equiv 0$. Il D., che non si serve dello strumento delle equazioni integrali, perviene, oltre a stabilire l'esistenza dei valori eccezionali, ai teoremi d'oscillazione per le corrispondenti soluzioni eccezionali. Notiamo che la menzionata esistenza dei valori eccezionali discende, come caso particolare, dalle considerazioni del testo ora svolte e, più particolarmente ancora, da quelle che seguono. Esiste infatti la funzione di Green relativa all'espressione differenziale $\mathrm{D}y \equiv \frac{d^2}{dx^2}\left(\theta \frac{d^2 y}{dx^2}\right)$ e alla prima quaterna delle condizioni (9). Invero, $t(x)$ è l'integrale generale della $\mathrm{D}y = 0$ nell'attuale ipotesi $\mathrm{B}(x) \equiv 0$: le condizioni $t(a) = \left[\frac{dt}{dx}\right]_a = 0$ dànno $c_0 = c_1 = 0$ e le condizioni $t(b) = \left[\frac{dt}{dx}\right]_b = 0$ le equazioni nelle c_2, c_3:

$$c_2 \int_a^b \frac{b-\xi}{\theta(\xi)}\, d\xi + c_3 \int_a^b \frac{\xi(b-\xi)}{\theta(\xi)}\, d\xi = 0 \ ,$$

$$c_2 \int_a^b \frac{1}{\theta(\xi)}\, d\xi + c_3 \int_a^b \frac{\xi}{\theta(\xi)}\, d\xi = 0 \ .$$

Il determinante di questa equazione è

$$\int_a^b \frac{\xi^2}{\theta(\xi)}\, d\xi \int_a^b \frac{1}{\theta(\xi)}\, d\xi - \left(\int_a^b \frac{\xi}{\theta(\xi)}\, d\xi\right)^2,$$

e quindi, per la relazione di Schwarz applicata alle funzioni $\frac{1}{\sqrt{\theta(\xi)}}$, $\frac{\xi}{\sqrt{\theta(\xi)}}$, esso è positivo, ne segue pertanto anche $c_2 = c_3 = 0$ e quindi $t(x) \equiv 0$.

si ricava

$$\left[y_k\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{d^2y_i}{dx^2}\right)\right]_a^b-\left[\theta\frac{dy_k}{dx}\frac{d^2y_i}{dx^2}\right]_a^b+\int_n^b\theta\frac{d^2y_i}{dx^2}\frac{d^2y_k}{dx^2}dx+\int_a^b(\lambda_i\,\mathrm{A}+\mathrm{B})y_iy_k\,dx=0,$$

$$\left[y_i\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{d^2y_k}{dx^2}\right)\right]_a^b-\left[\theta\frac{dy_i}{dx}\frac{d^2y_k}{dx^2}\right]_a^b+\int_a^b\theta\frac{d^2y_i}{dx^2}\frac{d^2y_k}{dx^2}dx+\int_a^b(\lambda_k\,\mathrm{A}+\mathrm{B})\,y_iy_k\,dx=0\,,$$

e quindi, per la (8),

$$(13)\qquad \int_a^b\mathrm{A}\,y_i\,y_k\,dx=0\,,$$

$$4)\quad \left[y_k\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{d^2y_i}{dx^2}\right)\right]_a^b-\left[\theta\frac{dy_k}{dx}\frac{d^2y_i}{dx^2}\right]_a^b+\int_a^b\theta\frac{d^2y_i}{dx^2}\frac{d^2y_k}{dx^2}dx+\int_a^b\mathrm{B}\,y_iy_k\,dx=0\,.$$

Se è $\lambda_i=\lambda_k$ e $y_i=y_k$ si ha

$$5)\ -\lambda_i\int_a^b\mathrm{A}\,y_i^2\,dx=\left[y_i\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{d^2y_i}{dx^2}\right)\right]_a^b-\left[\theta\frac{dy_i}{dx}\frac{d^2y_i}{dx^2}\right]_a^b+\int_a^b\theta\left(\frac{d^2y_i}{dx^2}\right)^2dx+\int_a^b\mathrm{B}\,y_i^2\,dx\,.$$

Facciamo la nostra applicazione ai seguenti due casi:

1.º caso: La funzione finita e continua $\mathrm{A}\,(x)$ *è di segno costante in* $(a\,,b)$.

2.º caso: La funzione finita e continua $\mathrm{B}\,(x)$ *non prende valori negativi in* $(a\,,b)$ *e le condizioni simmetriche* $\mathrm{L}_iy=0$ *son tali che, per due funzioni* $u\,(x)$ *e* $v\,(x)$ *che vi soddisfano, si ha*

$$\left[\Delta_1(u,v)\right]_a^b\equiv\left[u\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{d^2v}{dx^2}\right)\right]_a^b-\left[\theta\frac{du}{dx}\frac{d^2v}{dx^2}\right]_a^b=0\ ^{1)}\,.$$

1.º Caso. Supponiamo, per fissare le idee, che sia, in (a,b), $\mathrm{A}(x)\geq 0$. Segue subito dalla (13) che: *Non esistono valori ecce-*

---

[1]) Tutte le quaterne di condizioni (9) e, nel caso $\theta\,(b)=\theta\,(a)$, $\left[\frac{d\theta}{dx}\right]_b=\left[\frac{d\theta}{dx}\right]_a$, la quaterna (9_1) godono, per es., di questa proprietà.

zionali complessi. Esiste quindi la funzione $y(x, \lambda)$, meromorfa in λ, integrale delle (1) soddisfacente alle $L_i y = l_i$.

I valori eccezionali sono poli semplici di $y(x, \lambda)$ [1]. La dimostrazione è completamente analoga a quella data al n. 30 in analoga occasione. Ne segue $\nu \leq 1$. Sarà

$$(11) \qquad \sum_0^\infty {}_n\, u_u(x)\, \lambda^n = \lambda y(x, \lambda) \quad , \text{ con } u_0(x) \equiv 0 \text{ per } \nu = 0 .$$

Il raggio di convergenza delle serie (11) è finito. Difatti, posto

$$U_{n+1} = \int_a^b A u_n u_1 \, dx ,$$

si ha, in virtù delle (12) fattovi $\nu = 1$,

$$U_{n+1} = -\int_a^b u_n D u_2 \, dx = -\int_a^b \frac{d^2}{dx^2}\left(\theta \frac{d^2 u_2}{dx^2}\right) u_n \, dx - \int_a^b B u_2 u_n \, dx =$$

$$= -\left[\Delta_1(u_n, u_2)\right]_a^b - \int_a^b \theta \frac{d^2 u_n}{dx^2} \frac{d^2 u_2}{dx^2} dx - \int_a^b B u_2 u_n \, dx =$$

$$= \left[\Delta(u_2, u_n)\right]_a^b - \int_a^b u_2 \frac{d^2}{dx^2}\left(\theta \frac{d^2 u_n}{dx^2}\right) dx - \int_a^b B u_2 u_n \, dx =$$

$$= \int_a^b u_2 (A u_{n-1} + B u_n) \, dx - \int_a^b B u_2 u_n \, dx = \int_a^b A u_{n-1} u_2 \, dx .$$

Ne segue

$$U_{m+n} = \int_a^b A u_m u_n \, dx \qquad (m + n \geq 2 \, , \; mn \neq 0),$$

e quindi

$$U_{2n} = \int_a^b A u_{n-1} u_{n+1} \, dx \quad (n \geq 2) \quad , \quad U_{2n} = \int_a^b A u_n^2 \, dx \quad (n \geq 1).$$

---

[1]) Nel caso che esista la funzione di Green, cfr. BOGGIO, loc. cit.

Il raggio di convergenza della serie

$$\sum U_{2n} \lambda^{2n}$$

è pertanto finito e altrettanto potrà dirsi di quello della serie (11). Diciamo r_0 il raggio di convergenza della serie (11), si avrà

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{2n}(x)}{u_{2n-2}(x)} = \frac{1}{r_0^2} = \frac{U_{2n}}{U_{2n-2}},$$

e quindi il calcolo del valore assoluto del valore eccezionale non nullo di minimo valore assoluto. Il valore eccezionale di valore assoluto r_0 sarà r_0 o $-r_0$, secondochè è $\lim\limits_{n=\infty} \{(-r_0)^n u_n + (-r_0)^{n-1} u_{n-1}\} = 0$ o $\lim\limits_{n=\infty} \{r_0^n u_n + r_0^{n-1} u_{n-1}\} = 0$. In ogni caso questi limiti forniscono il calcolo delle soluzioni eccezionali corrispondenti, rispettivamente, a $-r_0$ e r_0. Ecc.

Appare ormai manifesto che il metodo dei nn. 28 e 30 si potrà applicare, quasi inalterato, all'attuale ricerca e che si otterrà la dimostrazione dell'esistenza di infiniti valori eccezionali e insieme il calcolo di essi e delle soluzioni eccezionali corrispondenti.

2.° Caso. Non esistono valori eccezionali complessi. Difatti, se $\lambda' + i\lambda''(\lambda'' \neq 0)$ è un valore eccezionale complesso e $y' + iy''$ la soluzione eccezionale corrispondente, si potrà porre nella (14)

$$\lambda_i = \lambda' + i\lambda'' \;,\; \lambda_k = \lambda' - i\lambda'' \;,\; y_i = y' + iy'' \;,\; y_k = y' - iy''$$

e si avrà

$$\int_a^b \theta \left\{ \left(\frac{d^2 y'}{dx^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 y''}{dx^2} \right)^2 \right\} dx + \int_a^b \mathrm{B} \left\{ (y')^2 + (y'')^2 \right\} dx = 0 \,.$$

Se non è, in (a,b), $\mathrm{B}(x) \equiv 0$, ne seguirà $y' \equiv y'' \equiv 0$, contro l'ipotesi che $\lambda' + i\lambda''$ sia un valore eccezionale, se è $\mathrm{B}(x) \equiv 0$, ne seguirà che $y' + iy''$ è una funzione lineare della x e quindi $\lambda' = \lambda'' = 0$, contro l'ipotesi $\lambda'' \neq 0$.

Ne deriva che esiste la funzione $y(x, \lambda)$, meromorfa in λ, integrale della (1) soddisfacente alle (7).

Sia y_i la soluzione eccezionale (reale) corrispondente al valore eccezionale λ_i, la (15) dà

$$-\lambda_i \int_a^b A y_i^2 \, dx = \int_a^b \theta \left(\frac{d^2 y_i}{dx^2}\right)^2 dx + \int_a^b B y_i^2 \, dx ,$$

e quindi che, se non è, in (a, b), $B(x) \equiv 0$,

$$\lambda_i \int_a^b A y_i^2 \, dx < 0 . \tag{16}$$

Se non è $B(x) \equiv 0$ lo zero non è dunque un valore eccezionale ed esisterà pertanto la funzione di Green relativa alla Dy e alle $L_i y = 0$.

Se è $B(x) \equiv 0$, perchè lo zero sia un valore eccezionale, sarà necessario e sufficiente che una funzione lineare sia la soluzione eccezionale ad esso corrispondente, cioè che si possano determinare due costanti c_1 e c_2 non entrambe nulle soddisfacenti alle equazioni

$$c_1 L_i 1 + c_2 L_i x = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Dalla (16) si trae che se è, in (a, b), $A(x) \geq 0$ (≤ 0) non esistono valori eccezionali positivi (negativi). Segue dalla stessa (16):

Un valore eccezionale non nullo è polo semplice di $y(x, \lambda)$.

Determinato l'ordine ν del polo di $y(x, \lambda)$ nell'origine e costruito lo sviluppo (11) di $\lambda^\nu y(x, \lambda)$, si ponga

$$U_{n+\nu} = -\int_a^b A u_n u_\nu \, dx .$$

Si ha

$$U_{m+n} = -\int_a^b A u_m u_n \, dx \qquad (m, n \geq \nu),$$

e quindi

$$U_{m+n} = \int_a^b \theta \frac{d^2 u_n}{dx^2} \frac{d^2 u_{m+1}}{dx^2} dx + \int_a^b B u_n u_{m+1} \, dx .$$

Ne segue

$$U_{2n-1} = \int_a^b \theta \left(\frac{d^2 u_n}{dx^2}\right)^2 dx + \int_a^b B u_n^2 \, dx > 0 \quad (n \geq \nu + 1),$$

e, supposto $n \geq \nu + 2$,

$$U_{2n-1} = \int_a^b \theta \frac{d^2 u_{n-1}}{dx^2} \frac{d^2 u_{n+1}}{dx^2} dx + \int_a^b B u_{n-1} u_{n+1} \, dx,$$

$$U_{2n-3} = \int_a^b \theta \left(\frac{d^2 u_{n-1}}{dx^2}\right)^2 dx + \int_a^b B u_{n-1}^2 \, dx,$$

$$U_{2n+1} = \int_a^b \theta \left(\frac{d^2 u_{n+1}}{dx^2}\right)^2 dx + \int_a^b B u_{n+1}^2 \, dx.$$

Si avrà dunque, per $n \geq \nu + 2$,

$$U_{2n-1}^2 \leq U_{2n-3} U_{2n+1},$$

da cui si ricava che il raggio di convergenza della serie $\Sigma U_{2n-1} \lambda^{2n-1}$, e quindi anche quello della serie (11), è finito. Ecc.

Si otterrà, anche in questo caso, con metodo del tutto analogo a quello tenuto nei nn. 28 e 31, la dimostrazione dell'esistenza di infiniti valori eccezionali e il calcolo di essi e delle corrispondenti soluzioni eccezionali.

Pisa, aprile 1909.

INDICE

ERRATA

Pag.	9	linea	6 dall'alto	*in luogo di*	mesomorfa	*leggi*	meromorfa
»	83	»	2 »	»	$\lim_{x=x_1+0} G(x, x_2)$	»	$\lim_{x=x_1+0} G(x_2, x)$
»	93	»	4 »	»	[1])	»	[2])
»	»	»	3 dal basso	»	[2])	»	[1])