Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Siro Medici

Sui gruppi di rotazioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 10 (1908), exp. nº 3, p. 1-160
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1908_1_10__A3_0>

DOTT. SIRO MEDICI

SUI

GRUPPI DI ROTAZIONI

In questa memoria mi propongo di trovare tutti i possibili tipi di gruppi di rotazioni. La ricerca mi sembra che presenti dell'interesse, sia perchè i gruppi stessi son fra i più importanti sottogruppi del gruppo lineare, sia perchè si trovano frequentemente anche in altre questioni, come ad esempio in quella della ricerca degli spazii, che ammettono un gruppo di movimenti od un gruppo conforme.

Debbo qui ringraziare pubblicamente il Prof. Fubini della R. Università di Genova, il quale con consigli davvero preziosi e con osservazioni giustissime mi fu di grande aiuto in questo lavoro.

§ 1.

Definizioni e proprietà generali

1. Consideriamo in un S_n (euclideo) delle coordinate $x_1, \ldots, x_n$ ortogonali; chiameremo *rotazione infinitesima* una trasformazione infinitesima del tipo

$$\sum_{1}^{n}{}_{ik}\, c_{ik}\,(x_i p_k - x_k p_i) \qquad (c_{ik} = -c_{ik}) ,$$

dove conforme alle notazioni di Monge abbiamo posto

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (i = 1, \ldots, n) .$$

Ci proponiamo ora di trovare i varii gruppi, le cui trasformazioni hanno tutte la forma detta, ossia di trovare tutti i sottogruppi del gruppo $G_{\frac{n(n-1)}{2}}$

$$x_i p_k - x_k p_i \qquad (i, k = 1, \ldots, n ; i \neq k) .$$

Tali gruppi li diremo brevemente *gruppi di rotazioni*.

Notiamo poi che il gruppo $G_{\frac{n(n-1)}{2}}$ è il gruppo delle trasformazioni lineari, che lascian ferma la quadrica tutta di punti immaginarî

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0 ;$$

perciò l'essere trasformazioni lineari e il lasciar ferma questa quadrica sono le proprietà caratteristiche delle rotazioni [1]).

[1]) Il gruppo $G_{\frac{n(n-1)}{2}}$ si può considerare anche come il gruppo dei movimenti ammessi da uno spazio S_{n-1} a curvatura costante positiva.

Nelle cose che seguono noi abbiamo sempre in vista gruppi reali, onde le costanti, che compariranno nei calcoli, salvo avvertenza in contrario, le supporremo sempre reali.

2. Introduciamo ora alcuni simboli, che ci abbrevieranno i calcoli seguenti. Intanto per semplicità poniamo

$$\mathrm{S}_{ik} = x_i\, p_k - x_k\, p_i \qquad (i, k = 1, \ldots, n)\,, \tag{1}$$

per modo che sarà $\mathrm{S}_{ik} = -\mathrm{S}_{ki}$

$$(\mathrm{S}_{ik}\,\mathrm{S}_{mq}) = -\varepsilon_{im}\,\mathrm{S}_{kq} + \varepsilon_{iq}\,\mathrm{S}_{km} + \varepsilon_{km}\,\mathrm{S}_{iq} - \varepsilon_{kq}\,\mathrm{S}_{im} \tag{2}$$
$$(i, k, m, q = 1, \ldots, n;\ i \neq k;\ m \neq q)\ ^{1)}.$$

Dopo ciò introduciamo anche le altre notazioni seguenti:

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{X}_{\lambda\mu} = \mathrm{S}_{2\lambda, 2\mu} + \mathrm{S}_{2\lambda-1, 2\mu-1}\,, & \mathrm{Y}_{\lambda\mu} = \mathrm{S}_{2\lambda-1, 2\mu} + \mathrm{S}_{2\mu-1, 2\lambda} \\ \mathrm{W}_{\lambda\mu} = \mathrm{S}_{2\lambda, 2\mu} - \mathrm{S}_{2\lambda-1, 2\mu-1}\,, & \mathrm{Z}_{\lambda\mu} = \mathrm{S}_{2\lambda-1, 2\mu} - \mathrm{S}_{2\mu-1, 2\lambda}\,. \end{array}\right. \tag{3}$$

Ne vengon di conseguenza le formole

$$\mathrm{X}_{\lambda\mu} = -\mathrm{X}_{\mu\lambda}\,,\quad \mathrm{Y}_{\lambda\mu} = \mathrm{Y}_{\mu\lambda}\,,\quad \mathrm{W}_{\lambda\mu} = -\mathrm{W}_{\mu\lambda}\,,\quad \mathrm{Z}_{\lambda\mu} = -\mathrm{Z}_{\mu\lambda}$$

$$\left\{\begin{array}{l}
(\mathrm{X}_{\lambda\mu}\,\mathrm{X}_{\nu\tau}) = -\varepsilon_{\lambda\nu}\,\mathrm{X}_{\mu\tau} + \varepsilon_{\lambda\tau}\,\mathrm{X}_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}\,\mathrm{X}_{\lambda\tau} - \varepsilon_{\mu\tau}\,\mathrm{X}_{\lambda\nu} \\
(\mathrm{X}_{\lambda\mu}\,\mathrm{Y}_{\nu\tau}) = -\varepsilon_{\lambda\nu}\,\mathrm{Y}_{\mu\tau} - \varepsilon_{\lambda\tau}\,\mathrm{Y}_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}\,\mathrm{Y}_{\lambda\tau} + \varepsilon_{\mu\tau}\,\mathrm{Y}_{\lambda\nu} \\
(\mathrm{X}_{\lambda\mu}\,\mathrm{W}_{\nu\tau}) = -\varepsilon_{\lambda\nu}\,\mathrm{W}_{\mu\tau} + \varepsilon_{\lambda\tau}\,\mathrm{W}_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}\,\mathrm{W}_{\lambda\tau} - \varepsilon_{\mu\tau}\,\mathrm{W}_{\lambda\nu} \\
(\mathrm{X}_{\lambda\mu}\,\mathrm{Z}_{\nu\tau}) = -\varepsilon_{\lambda\nu}\,\mathrm{Z}_{\mu\tau} + \varepsilon_{\lambda\tau}\,\mathrm{Z}_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}\,\mathrm{Z}_{\lambda\tau} - \varepsilon_{\mu\tau}\,\mathrm{Z}_{\lambda\nu} \\
(\mathrm{Y}_{\lambda\mu}\,\mathrm{Y}_{\nu\tau}) = -\varepsilon_{\lambda\nu}\,\mathrm{X}_{\mu\tau} - \varepsilon_{\lambda\tau}\,\mathrm{X}_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu\nu}\,\mathrm{X}_{\lambda\tau} - \varepsilon_{\mu\tau}\,\mathrm{X}_{\lambda\nu} \\
(\mathrm{Y}_{\lambda\mu}\,\mathrm{W}_{\nu\tau}) = +\varepsilon_{\lambda\nu}\,\mathrm{Z}_{\rho\tau} - \varepsilon_{\lambda\tau}\,\mathrm{Z}_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}\,\mathrm{Z}_{\lambda\tau} - \varepsilon_{\rho\tau}\,\mathrm{Z}_{\lambda\nu} \\
(\mathrm{Y}_{\lambda\mu}\,\mathrm{Z}_{\nu\tau}) = -\varepsilon_{\lambda\nu}\,\mathrm{W}_{\mu\tau} + \varepsilon_{\lambda\tau}\,\mathrm{W}_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu\nu}\,\mathrm{W}_{\lambda\tau} + \varepsilon_{\mu\tau}\,\mathrm{W}_{\lambda\nu} \\
(\mathrm{W}_{\lambda\mu}\,\mathrm{W}_{\nu\tau}) = -\varepsilon_{\lambda\nu}\,\mathrm{X}_{\mu\tau} + \varepsilon_{\lambda\tau}\,\mathrm{X}_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}\,\mathrm{X}_{\lambda\tau} - \varepsilon_{\mu\tau}\,\mathrm{X}_{\lambda\nu} \\
(\mathrm{W}_{\lambda\mu}\,\mathrm{Z}_{\nu\tau}) = +\varepsilon_{\lambda\nu}\,\mathrm{Y}_{\rho\tau} - \varepsilon_{\lambda\tau}\,\mathrm{Y}_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu\nu}\,\mathrm{Y}_{\lambda\tau} + \varepsilon_{\mu\tau}\,\mathrm{Y}_{\lambda\nu} \\
(\mathrm{Z}_{\lambda\mu}\,\mathrm{Z}_{\nu\tau}) = -\varepsilon_{\lambda\nu}\,\mathrm{X}_{\mu\tau} + \varepsilon_{\lambda\tau}\,\mathrm{X}_{\mu\nu} + \varepsilon_{\rho\nu}\,\mathrm{X}_{\lambda\tau} - \varepsilon_{\mu\tau}\,\mathrm{X}_{\lambda\nu}
\end{array}\right. \quad (\lambda, \rho, \nu, \tau = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

---

[1]) Con ε_{ik} qui, come faremo sempre anche in seguito, abbiamo indicata l'unità o lo zero secondochè i e k sono uguali o diversi: è una notazione, che seguiremo costantemente senza più avvertirlo.

In particolare si ha

$$(5)\quad \begin{cases} (Y_{\nu\nu} X_{\lambda\mu}) = 2(\varepsilon_{\lambda\nu} - \varepsilon_{\mu\nu}) Y_{\lambda\mu}, & (Y_{\nu\nu} Y_{\lambda\mu}) = 2(\varepsilon_{\mu\nu} - \varepsilon_{\lambda\nu}) X_{\lambda\mu} \\ (Y_{\nu\nu} W_{\lambda\mu}) = 2(\varepsilon_{\lambda\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}) Z_{\lambda\mu}, & (Y_{\nu\nu} Z_{\lambda\mu}) = -2(\varepsilon_{\mu\nu} + \varepsilon_{\lambda\nu}) W_{\lambda\mu} \end{cases}.$$

Introdotti questi simboli una rotazione qualunque Rf potrà porsi o sotto la forma

$$(6)\qquad Rf = \sum_1^n{}_{\lambda\mu}\, \alpha_{\lambda\mu} S_{\lambda\mu} \qquad (\alpha_{\lambda\mu} = -\alpha_{\mu\lambda})$$

o sotto l'altra

$$(7)\qquad Rf = \sum_1^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}{}_{\lambda\mu} (a_{\lambda\mu} X_{\lambda\mu} + b_{\lambda\mu} W_{\lambda\mu} + c_{\lambda\mu} Z_{\lambda\mu} + d_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu})$$

$$(a_{\lambda\mu} = -a_{\mu\lambda},\quad b_{\lambda\mu} = -b_{\mu\lambda},\quad c_{\lambda\mu} = -c_{\mu\lambda},\quad d_{\lambda\mu} = d_{\mu\lambda}).$$

3. Abbiamo già avvertito come le rotazioni sieno caratterizzate dall'essere trasformazioni lineari che lasciano invariata la quadrica

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0.$$

Ora se facciamo sulle variabili una sostituzione ortogonale qualunque, questa lascia invariata l'equazione di questa quadrica, e perciò lascia invariata anche la forma tipica delle rotazioni; dunque la definizione di rotazione è affatto indipendente dal particolare sistema di coordinate ortogonali adoperato. Può darsi però, che particolari rotazioni conservino la loro forma tipica anche facendo delle sostituzioni ortogonali, come avviene per es. nel caso, che le rotazioni considerate non contengano alcune delle variabili [1]). Ma noi *faremo solo sostituzioni ortogonali*, perchè c'interessa conservare sempre coordinate ortogonali, e poi perchè il nostro scopo essendo la ricerca dei sottogruppi di rotazioni, quelli appartenenti ad uno stesso tipo devono essere tali che si possa trasformare l'uno nell'altro con trasformazioni del gruppo. Queste come facilmente si vede

---

[1]) Si potrebbe facilmente dimostrare, che solo quando si possono con sostituzioni ortogonali ridurre le rotazioni a questo caso, ci sono rotazioni non ortogonali, che ne lasciano invariata la forma.

si riducono a sostituzioni ortogonali a determinante $+1$, però noi consideriamo anche sostituzioni ortogonali a determinante -1, per non dover stare sempre a distinguere i varî casi. Vuol dire, che per ottenere poi tutti i tipi di sottogruppi si dovrà a quelli trovati aggiungere quelli che si ottengono da essi con una particolare sostituzione ortogonale a determinante -1, per es. con quella che è data dalle formule $x'_1 = -x_1$ $x'_i = x_i$ $(i = 2, \dots, n)$: ogni sostituzione ortogonale a determinante -1, essendo composta di quella e di una sostituzione ortogonale a determinante $+1$.

A questo proposito aggiungiamo, che come è evidente geometricamente, *si può sempre con una sostituzione ortogonale portare un* S_t *qualunque in quello che ha per equazioni*

$$x_{t+1} = x_{t+2} = \dots = x_n = 0 \text{ [1]}.$$

4. Cominciamo dal dare alcune altre definizioni e dal dimostrare alcune proprietà generali delle rotazioni.

Un punto

$$x_1 = a_1 \ , \quad x_2 = a_2 \ , \dots , \ x_n = a_n$$

sarà lasciato fermo dalla rotazione Rf allora ed allora soltanto, che in forza delle precedenti equazioni sia

$$R\,x_\lambda = 0 \qquad\qquad (\lambda = 1, \dots, n),$$

cioè per la (6)

$$\sum_1^n {}_\mu \, \alpha_{\lambda\mu} \, x_\mu = 0 \qquad\qquad (\lambda = 1, \dots, n). \tag{8}$$

I valori $a_1, a_2, \dots, a_n$ devon dunque soddisfare queste equazioni; onde i punti lasciati fermi dalla rotazione, devono colle loro coordinate soddisfare le (8), e poichè viceversa se questo avviene, il punto rimane fermo per la rotazione, le (8) sono le equazioni del

---

[1]) Cfr. ad es. BEMPORAD, *Sui gruppi di movimenti e similitudini nello spazio a 3, 4, 5 dimensioni*. (Ann. della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa, vol. VIII, 1899), dove trovasi una dimostrazione analitica della proprietà enunciata (lemma 2.°).

luogo di quei punti. Tal luogo è dunque uno spazio lineare per l'origine, che noi chiameremo *spazio assiale;* e che ha la dimensione $n-\nu$, se ν è la caratteristica del determinante $|a_{\lambda\mu}|$ $(\lambda, \mu = 1, \ldots, n)$.

5. Con una sostituzione ortogonale portiamo lo spazio assiale nello spazio

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_\nu = 0$$

con che non si altera la forma della Rf (n. 3), che potremo quindi supporre data ancora dalla (6). Le (8) devono allora essere soddisfatte quando vi si ponga

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_\nu = 0 ,$$

qualunque valore abbiano del resto le altre variabili. Deve dunque essere identicamente

$$a_{\lambda\mu} = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, n ; \ \mu = \nu+1, \ldots, n) ,$$

e nella (6) non figurano allora che le variabili $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$.

Notiamo subito, che deve essere $|a_{ik}| \neq 0$ $(i, k = 1, \ldots, \nu)$, perchè altrimenti le (8) divenute ora

$$\sum_1^\nu {}_\mu \, a_{\lambda\mu} \, x_\mu = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, \nu),$$

ammetterebbero ancora delle soluzioni con valori non tutti nulli delle variabili, e perciò vi sarebbero dei punti invarianti per Rf, anche fuori dello spazio assiale, ciò che è assurdo; in particolare essendo $|a_{ik}|$ emisimmetrico deve essere ν pari. Orbene, se $\nu = 2s$, noi diremo che la rotazione infinitesima è di *grado s.*

Il numero $2s$ dà il minimo numero di variabili su cui si può ridurre ad operare una rotazione di grado s, che se si potesse ridurre ad operare su un minor numero di variabili non potrebbe essere $|a_{ik}| \neq 0$. Abbiamo dunque

Lo spazio assiale di una rotazione di grado s su n variabili è di dimensione $n-2s$, e la rotazione stessa si può allora ridurre ad operare su $2s$ variabili soltanto, ma non su un minor numero.

Dalle cose dette deriva anche, poichè ν è pari, che

Una rotazione infinitesima su n variabili è al massimo di grado $\left[\frac{n}{2}\right]$[1].

Il doppio del grado è la caratteristica del determinante $|\alpha_{\lambda\mu}|$ $(\lambda, \mu = 1, \dots, n)$.

6. Supponiamo, che la rotazione Rf lasci fermo un certo S_k, e con una sostituzione ortogonale prendiamo tale S_k per quello $x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 0$ (n. 3) dopo di che potremo supporre ancora la Rf data dalla (6). Dovrà allora essere in forza di queste equazioni $Rx_i = 0$ $(i = k+1, \dots, n)$, cioè $\sum_1^n {}_\mu\, \alpha_{\lambda\mu} x_\mu = 0$ $(\lambda = k+1, \dots, n)$: ne viene, che son nulle tutte le $\alpha_{\lambda\mu}$ con un indice $\leq k$ e l'altro invece $> k$. Ma allora la Rf lascia invariato anche lo spazio $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$, che è ortogonale al precedente: dunque *se una rotazione lascia fermo uno spazio qualunque* S_k, *lascia fermo anche l'* S_{n-k} *per l'origine ortogonale a quello.*

7. Se ora consideriamo un iperpiano qualunque

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n = 0 \tag{9}$$

la condizione necessaria e sufficiente, perchè esso sia lasciato fermo da una rotazione $Rf = \sum_1^n {}_{\lambda\mu}\, \alpha_{\lambda\mu} S_{\lambda\mu}$, è che sia identicamente

$$\sum_1^n {}_{\lambda\mu}\, \alpha_{\lambda\mu} (b_\mu x_\lambda - b_\lambda x_\mu) = -2\rho \sum_1^n {}_i\, b_i x_i ,$$

essendo ρ una costante qualunque. Deve dunque essere

$$\sum \alpha_{\lambda\mu} b_\mu = -\rho b_\lambda \qquad (\lambda = 1, \dots, n). \tag{10}$$

Se supponiamo di aver già fatta la trasformazione di cui nel numero 5, queste equazioni son certo soddisfatte, quando si ponga

$$b_1 = b_2 = \dots = b_{2s} = 0 \qquad \rho = 0$$

---

[1]) Con $\left[\frac{m}{i}\right]$ indichiamo, come si suole, la parte intera del quoziente $m : i$.

e $b_{2s+1}, \dots, b_n$ sien qualunque: sicchè rimane invariato ogni iperpiano passante per lo spazio

$$x_{2s+1} = x_{2s+2} = \dots = x_n = 0\,,$$

spazio che è ortogonale allo spazio assiale. Ma questi sono anche i soli iperpiani reali invarianti per la $\mathrm{R}f$: giacchè affinchè le (10) sien risolubili con valori non tutti nulli delle incognite b, occorre e basta, che sia

(11) $$\mathrm{D}(\rho) = \begin{vmatrix} \rho & \alpha_{12} \dots \alpha_{1n} \\ -\alpha_{12} & \rho \;\dots \alpha_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ -\alpha_{1n} & -\alpha_{2n} \dots \rho \end{vmatrix} = 0\,.$$

Ora questa equazione non ha altre radici reali fuorchè eventualmente lo zero [1]; sicchè gl'iperpiani invarianti reali si ottengono dalle (10) quando vi si faccia $\rho = 0$. L'equazioni, che così si ottengono ricavandosi dalle (8) colla sola sostituzione delle b alle x, saran soddisfatte solo quando si ponga

$$b_1 = b_2 = \dots = b_{2s} = 0\,.$$

Sicchè: *Una rotazione infinitesima lascia fermi tutti gl'iperpiani passanti per l'* S_{2s} *(s essendo il grado della rotazione) ortogonale allo spazio assiale; e di reali lascia fermi solo quelli.*

8. Visto ciò supponiamo di aver ridotto la $\mathrm{R}f$, supposta di grado s, ad operare soltanto su $2s$ variabili $x_1, \dots, x_{2s}$, e ragioniamo senz'altro nell'$\mathrm{S}_{2s} \equiv (x_1, \dots, x_{2s})$. La $\mathrm{R}f$ dovrà avere la forma

$$\mathrm{R}f = \sum_{1}^{2s}{}_{\lambda\mu}\, \alpha_{\lambda\mu}\, \mathrm{S}_{\lambda\mu}$$

e di più dovrà essere $|\alpha_{\lambda\mu}| \neq 0$ $(\lambda, \mu = 1, \dots, 2s)$. Per questa seconda condizione non ci potrà essere nessun S_{2s-1} reale ed invariante per la $\mathrm{R}f$. Ma siccome le α son reali, la (11) scritta per la

[1]) Cfr. ad es. Cesàro, *Analisi algebrica*, pag. 35.

rotazione che consideriamo, insieme ad ogni radice (puramente) immaginaria ammette anche la coniugata: corrispondentemente a due radici coniugate si potran poi prendere due S_{2s-1} invarianti per la Rf ed immaginarî coniugati. Due tali S_{2s-1} s'incontreranno in un S_{2s-2} reale, che sarà lasciato fermo dalla Rf: se con una sostituzione ortogonale lo prendiamo per l'S_{2s-2} di equazioni

$$x_{2s-1} = x_{2s} = 0\,,$$

la Rf conserverà la sua forma (n. 3) onde potrà supporsi data ancora dall'equazione scritta; ma di più dovrà essere

$$\alpha_{\lambda,\,2s-1} = \alpha_{\lambda,\,2s} = 0 \qquad (\lambda = 1, \dots, 2s-2)$$

(cfr. n. 6). Sarà dunque

$$Rf = \sum_{1}^{2s-2}{}_{\lambda\mu}\, \alpha_{\lambda\mu}\, S_{\lambda\mu} + m_s\, S_{2s-1,\,2s}\,.$$

Se $s > 1$ ragionando analogamente sulla prima parte. con una nuova sostituzione ortogonale, che non tocca x_{2s-1} ed x_{2s}, potrà ridursi

$$Rf = \sum_{1}^{2s-4}{}_{\lambda\mu}\, \alpha'_{\lambda\mu}\, S_{\lambda\mu} + m_{s-1}\, S_{2s-3,\,2s-2} + m_s\, S_{2s-1,\,2s}\,.$$

Così seguitando si trova, che

Una rotazione infinitesima di grado s si può sempre ridurre alla forma (canonica)

$$\text{(I)} \qquad Rf = \sum_{1}^{s}{}_{\lambda}\, m_\lambda\, S_{2\lambda-1,\,2\lambda}\,.$$

Naturalmente le m devono essere tutte $\neq 0$, chè altrimenti la Rf non sarebbe di grado s: si posson poi supporre tutte positive, chè, se fosse per es. $m_1 < 0$, cambiando di segno ad x_1 si cambierebbe segno anche ad m_1, che così diverrebbe positiva. Infine le m si posson supporre non mai decrescenti, per modo cioè, che sia

$$0 < m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_s\,.$$

Coi simboli introdotti al n. 2 la forma canonica è

$$\mathrm{R}f = \frac{1}{2} \sum_{1}^{s}{}_{\lambda}\, m_\lambda\, \mathrm{Y}_{\lambda\lambda}\,. \tag{I'}$$

9. La riduzione operata nel numero precedente si può evidentemente fare partendo da un qualunque S_{2s-2} invariante per la rotazione: anzi si può dire più in generale, che di quegli S_{2s-2} se ne posson prendere, per fare la riduzione, quanti se ne vuole, ad arbitrio, purchè sieno a due a due ortogonali tra loro. Siccome poi come appare dalla (I), fatta la riduzione, ci sono gli s S_{2s-2} di equazioni

$$x_1 = x_2 = 0 \quad ; \quad x_3 = x_4 = 0 \ ; \ \ldots ; \ x_{2s-1} = x_{2s} = 0\,,$$

che sono a due ortogonali ed invarianti per la Rf, così ne viene che:

Scelti arbitrariamente k ($\leq s$) tra gli S_{2s-2} invarianti per una rotazione di grado s di un S_{2s}, a due a due ortogonali tra loro, se ne posson trovare altri s—k pure invarianti per la Rf, *ortogonali a tutti i precedenti e a due a due tra loro.*

10. Evidentemente le m sono i soli invarianti della Rf, ma possiamo facilmente far vedere, che esse sono effettivamente invarianti per sostituzioni ortogonali delle variabili, che poi sono le uniche sostituzioni, che noi consideriamo. Infatti una rotazione qualunque

$$\mathrm{R}f = \sum_{1}^{2s}{}_{\lambda\mu}\, \alpha_{\lambda\mu}\, \mathrm{S}_{\lambda\mu}\,,$$

finchè si considerano solo sostituzioni ortogonali a determinante $+1$, in quanto sulle p viene allora a farsi la stessa sostituzione che sulle x, si può considerare come una forma a variabili cogredienti nei due sistemi di variabili $x_1, \ldots, x_{2s}\,; p_1, \ldots, p_{2s}$.

Gl'invarianti della Rf per queste sostituzioni son dunque i divisori elementari del determinante caratteristico della forma, cioè del determinante D (ρ), e sono questi soltanto [1]. Ora quando la Rf

---

[1]) Cfr. ad es. MUTH, *Theorie und Anwendung der Elementartheiler.* (Leipzig, Teubner, 1899).

è ridotta a forma canonica, si vede subito, che tali divisori sono

$$\rho - i\, m_1 \ , \quad \rho - i\, m_2 \, , \dots , \rho - i\, m_s$$
$$\rho + i\, m_1 \ , \quad \rho + i\, m_2 \, , \dots , \rho + i\, m_s \, .$$

Le m son dunque invarianti per sostituzioni ortogonali a determinante $+1$, però a meno del segno potendosi qualcuno di quei divisori scambiare col coniugato; le altre sostituzioni ortogonali ottenendosi col comporne una a determinante $+1$, con una per es. del tipo

$$x'_1 = -x_1 \, ,$$

si vede, che le m sempre a meno del segno sono invarianti per tutte le sostituzioni ortogonali.

Dunque: *Ridotta la* Rf *a forma canonica i valori assoluti delle* m *risultano gli unici invarianti per sostituzioni ortogonali della* Rf.

Però siccome la Rf si può, senza alterarne affatto la natura, dividere per una costante arbitraria, così ne viene che per la Rf gl'invarianti essenziali sono solo i valori assoluti dei rapporti di s–1 di quelle m all'altra.

Dalle cose dette si trae anche un modo per avere subito i valori delle m appena data la rotazione: poichè $\rho - i\, m_\iota$ deve esser un divisore elementare di D (ρ), ne viene la seguente regola per quella ricerca.

Si considerino tutte le radici (puramente) immaginarie della equazione D $(\rho) = 0$, *e si dividano per* i: *i valori positivi tra quelli ottenuti sono le* m *relative alla rotazione considerata.*

11. Possiamo veder subito anche il significato geometrico delle m_ι: l'equazioni finite del G_1 generato dalla rotazione infinitesima data, quando questa sia ridotta a forma canonica sono nell'S_{2s} solito

$$\left.\begin{aligned} x'_{2\iota-1} &= x_{2\iota-1} \cos m_\iota\, t - x_{2\iota} \operatorname{sen} m_\iota\, t \\ x'_{2i} &= x_{2\iota-1} \operatorname{sen} m_i\, t + x_{2i} \cos m_i\, t \end{aligned}\right. \quad (i = 1, \dots, s) \, ,$$

dove t è il parametro da cui dipendono le ∞^1 rotazioni del G_1. Se consideriamo l'effetto prodotto nel piano $(x_{2\iota-1}, x_{2\iota})$, troviamo dunque, che è una rotazione dell'angolo $m_\iota t$. Sicchè il rapporto $\frac{m_i}{m_l}$ è il rapporto degli angoli di cui ruotano per una rotazione qualunque del G_1 i piani $(x_{2\iota-1}, x_{2\iota})$ ed (x_{2l-1}, x_{2l}).

12. Abbiamo già visto quali sono gli iperpiani invarianti reali per una rotazione infinitesima Rf di un S_n: facciamo ora la medesima ricerca per gli S_{n-2} pure reali. Consideratone uno si potrà prendere per quello di equazioni (n. 3)

$$x_{n-1} = x_n = 0 ,$$

dopo di che la Rf avrà la forma

$$Rf = \sum_1^{n-2}{}_{\lambda\mu} \, \sigma_{\lambda\mu} \, S_{\lambda\mu} + m \, S_{2n-1,2n} .$$

Ora potran darsi due casi, o $m = 0$ o $m \neq 0$. Se $m = 0$ sono invarianti anche i due iperpiani $x_{2n-1} = 0$ e $x_{2n} = 0$: dunque il nostro S_{n-2}, essendo intersezione di due tali iperpiani, passa per l'S_{n-2s} ortogonale allo spazio assiale (n. 7). L'inversa è evidente, perchè ogni iperpiano per un tale S_{n-2} è certo invariante. Se $m \neq 0$ saranno invarianti per la Rf i due iperpiani immaginarî coniugati

$$x_{2n-1} - i\, x_{2n} = 0 \qquad \text{ed} \qquad x_{2n-1} + i\, x_{2n} = 0 ,$$

sicchè la ricerca degli S_{n-2} invarianti, di questa seconda specie, si riduce alla ricerca degli iperpiani immaginarî invarianti. Questa ultima si compie subito, quando alla rotazione si sia data la forma canonica: supponiamo infatti, che allora tra le m ce ne sieno solo t di diverse, e che sia in conseguenza

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_{q_1} = a_1 \; ; \; m_{q_1+1} = m_{q_1+2} = \ldots = m_{q_2} = a_2 \; ; \; \ldots \; ;$$
$$m_{q_{t-1}+1} = m_{q_{t-1}+2} = \ldots = m_{q_t} = a_t$$

$$(1 \leq q_1 < q_2 < q_3 \ldots < q_t \; ; \; q_t = s)$$

essendo le q_ι dei numeri interi. La Rf essendo allora data dalla equazione

$$(\mathrm{I}'') \qquad \mathrm{R}f = \sum_{1}^{t}{}_{l}\, a_l \sum_{q_{l-1}+1}^{q_l}{}_{\lambda}\, \mathrm{S}_{2\lambda-1,\,2\lambda} \qquad (q_0 = 0)\,,$$

le (10) divengono

$$a_l\, b_{2\lambda} = -\rho\, b_{2\lambda-1}\;;\quad a_l\, b_{2\lambda-1} = \rho\, b_{2\lambda} \quad (\lambda = q_{l-1}+1, \dots, q_l\,;\; l = 1, \dots, t).$$

Poichè le b non sieno tutte nulle occorre dare a ρ uno dei valori $\pm i a_l$ $(l = 1, \dots, t)$: dopo di che viene

$$b_{2\lambda-1} = -i b_{2\lambda} \qquad (\lambda = q_{l-1}+1, \dots, q_l)\,,$$

mentre tutte le altre b devono esser nulle: perciò distinguendo nei coefficienti la parte reale dell'immaginaria, ogni iperpiano invariante immaginario ha per equazione

$$\sum_{q_{l-1}+1}^{q_l}{}_{\lambda} \left\{ (b_\lambda\, x_{2\lambda-1} + c_\lambda\, x_{2\lambda}) + i(b_\lambda\, x_{2\lambda} - c_\lambda\, x_{2\lambda-1}) \right\} = 0 \quad (l \leq t).$$

Viceversa ogni iperpiano, che abbia una tale equazione è invariante per la $\mathrm{R}f$.

Un S_{n-2} invariante della 2.ª specie essendo intersezione di un iperpiano quale il precedente col suo coniugato avrà dunque per equazioni:

$$\sum_{q_{l-1}+1}^{q_l}{}_{\lambda} (b_\lambda\, x_{2\lambda-1} + c_\lambda\, x_{2\lambda}) = 0 \quad \sum_{q_{l-1}+1}^{q_l}{}_{\lambda} (b_\lambda\, x_{2\lambda} - c_\lambda\, x_{2\lambda-1}) = 0 \quad (l \leq t).$$

Dunque: *Un* S_{n-2} *invariante per la* $\mathrm{R}f$ *o passa per l'* S_{n-2s} *ortogonale allo spazio assiale, oppure, data alla* $\mathrm{R}f$ *la forma* (I''), *ha due equazioni del tipo delle precedenti: viceversa un* S_{n-2}, *che soddisfi ad una di queste condizioni, è invariante per la* $\mathrm{R}f$.

Tutti gli S_{n-2} invarianti della seconda specie si dividono corrispondentemente ai varî valori di l in t sistemi: quelli dell'l^{mo}, per es., passano per lo spazio

$$x_{2q_{l-1}+1} = \dots = x_{2q_l} = 0\,.$$

Supponiamo ora che sia $n = 2s$ per fare il caso più semplice: allora si possono determinare dei gruppi di s S_{n-2} invarianti ed a due a due ortogonali, che ora vogliamo vedere come si distribuiscono in quei sistemi. Se noi consideriamo k qualunque degli S_{n-2} di uno di quei gruppi essi devono avere a comune un S_{n-2k} ma non uno spazio maggiore, chè altrimenti non potrebbero essere a due a due ortogonali. Ne viene, che per lo spazio

$$x_{2q_{l-1}+1} = \dots = x_{2q_l} = 0\,,$$

che è un $S_{n-2q_l+2q_{l-1}}$, non ne posson passare più di $q_l - q_{l-1}$; ossia tra gli s S_{n-2} non ce ne possono essere più di $q_l - q_{l-1}$ dell'l^{mo} sistema. Ma allora se indichiamo con α_l il numero degli S_{n-2} di uno dei nostri gruppi, che appartengono al sistema l^{mo}, abbiamo

$$\alpha_l \leq q_l - q_{l-1}\ (l = 1, \dots, t) \quad \sum_1^t {}_l\, \alpha_l = s\,,$$

e perchè quest'ultima equazione sia verificata occorre che sia

$$\alpha_l = q_l - q_{l-1}\,.$$

Sicchè tutti i gruppi di s S_{n-2} invarianti per la Rf son formati di q_1 S_{n-2} del primo sistema, di $q_2 - q_1$ del secondo,..., di $q_t - q_{t-1}$ del t^{mo} sistema.

Nel caso, che sia $n > 2s$, valgono ancora le stesse cose, solo che allora bisogna ragionare sempre dell'S_{n-2s} per l'origine ortogonale allo spazio assiale.

13. Premesso questo possiamo risolvere facilmente una questione fondamentale, quella di trovare tutte le sostituzioni ortogonali, che lasciano inalterata la forma canonica di una rotazione, cioè le sostituzioni ortogonali tali che, indicando con x' le nuove coordinate, sia

$$\sum_1^t {}_l\, a_l \sum_{q_{l-1}+1}^{q_l} {}_\lambda (x_{2\lambda-1}\, p_{2\lambda} - x_{2\lambda}\, p_{2\lambda-1}) =$$

$$= \sum_1^{t'} {}_l\, a'_l \sum_{q'_{l-1}+1}^{q'_l} {}_\lambda (x'_{2\lambda-1}\, p'_{2\lambda} - x'_{2\lambda}\, p'_{2\lambda-1}) \qquad (q_0 = q'_0 = 0)\,.$$

Intanto per il n. 10 le a'_l a meno dell'ordine coincidono colle a_l, e così le differenze $q'_l - q'_{l-1}$ coincidono pure a meno dell'ordine colle altre $q_l - q_{l-1}$, sicchè $q'_{t'} = q_t$. La sostituzione poi lascia fermo lo spazio assiale, e quindi, essendo essa ortogonale, anche lo spazio per l'origine ortogonale a quello. La sostituzione si può dunque considerare come il prodotto di due, una che non tocca affatto le variabili $x_1, \dots, x_{2s}$, l'altra che non tocca invece le variabili $x_{2s+1}, \dots, x_n$. La prima può essere evidentemente qualunque: occupiamoci invece della seconda, ossia del caso, che sia $n = 2s$. Allora gli S_{n-2} di equazioni

$$x'_1 = x'_2 = 0 \ ; \ x'_3 = x'_4 = 0 \ ; \dots ; \ x'_{2s-1} = x'_{2s} = 0$$

sono invarianti per la Rf e a due a due ortogonali: dunque $q_l - q_{l-1}$ di essi devono avere equazioni del tipo (n. 12)

$$\sum_{q_{l-1}+1}^{q_l}{}_\lambda (b_\lambda x_{2\lambda-1} + c_\lambda x_{2\lambda}) = 0 \qquad \sum_{q_{l-1}+1}^{q_l}{}_\lambda (b_\lambda x_{2\lambda} - c_\lambda x_{2\lambda-1}) = 0 ,$$

e ciò per ogni valore di l. Ne deriva dunque, che alterando se mai l'ordine delle $x'_1, \dots, x'_n$ deve essere

$$x'_{2\lambda-1} = \sum_{q_{l-1}+1}^{q_l}{}_\mu (b_{\lambda\mu} x_{2\mu-1} + c_{\lambda\mu} x_{2\mu}) \quad x'_{2\lambda} = \sum_{q_{l-1}+1}^{q_l}{}_\mu (b_{\lambda\mu} x_{2\mu} - c_{\lambda\mu} x_{2\mu-1})$$

$$(\lambda = q_{l-1}+1, \dots, q_l \ ; \ l = 1, \dots, t) ,$$

e le b e c possono esser qualunque compatibilmente coll'ortogonalità della sostituzione. Viceversa se son soddisfatte queste condizioni gli S_{n-2} di equazioni $x'_1 = x'_2 = 0 \ ; \ x'_3 = x'_4 = 0 ; \dots ; x'_{2s-1} = x'_{2s} = 0$ essendo invarianti per la Rf, questa ha ancora la forma canonica. Nel caso generale che sia $n > 2s$ bisogna aggiungere una sostituzione qualunque sulle variabili $x_{2s+1}, \dots, x_n$. Dunque:

La più generale sostituzione ortogonale sulle variabili, che lascia *inalterata la forma* (I″) *di una rotazione* Rf *è del tipo*

$$x'_{2\lambda-1} = \sum_{q_{l-1}+1}^{q_l}{}_\mu (b_{\lambda\mu} x_{2\mu-1} + c_{\lambda\mu} x_{2\mu}) \qquad x'_{2\lambda} = \sum_{q_{l-1}+1}^{q_l}{}_\mu (b_{\lambda\mu} x_{2\mu} - c_{\lambda\mu} x_{2\mu-1})$$

$$(\lambda = q_{l-1}+1, \dots, q_l \ ; \ l = 1, \dots, t)$$

$$x'_\lambda = \sum_{q_t+1}^{n}{}_\mu c_{\lambda\mu} x_\mu \qquad (\lambda = q_{t+1}, \dots, n) \ ,$$

le b *e le* c *dovendo soddisfare soltanto alle condizioni imposte dal dover essere la sostituzione ortogonale.*

Notiamo che da una sostituzione di questo tipo non viene alterato neanche l'ordine delle a.

14. Un'ultima osservazione vogliamo ora fare: se supponiamo di avere un S_{n-2} invariante di equazioni

$$\sum_{q_{l-1}+1}^{q_l}{}_\mu (b_\mu x_{2\mu-1} + c_\mu x_{2\mu}) = 0 \qquad \sum_{q_{l-1}+1}^{q_l}{}_\mu (b_\mu x_{2\mu} - c_\mu x_{2\mu-1}) = 0 \, ,$$

si potrà sempre prenderlo per lo spazio

$$x_{2q_{l-1}+1} = x_{2q_{l-1}+2} = 0$$

senza alterare la forma (I″) della Rf. Infatti (n. 9) se $n = 2s$ si posson trovare altri $s-1$ S_{n-2} invarianti ortogonali a quello, e a due a due tra loro: ognuno di questi avrà dunque due equazioni dello stesso tipo delle precedenti, e dividendole se mai per fattori convenienti si potrà far sì che il determinante dei coefficienti sia quello di una sostituzione ortogonale. Allora basterà prendere per nuove variabili i primi membri di tutte queste equazioni, in ordine conveniente, chè le condizioni del numero precedente saran certo soddisfatte. Se $n > 2s$ basta lasciare inalterate le $x_{2s+1}, \dots, x_{2n}$ per ridurci al caso di ora.

Più in generale se abbiamo un S_{n-2k} di equazioni

$$\sum_{q_{l-1}+1}^{q_l}{}_\mu (b_{i\mu} x_{2\mu-1} + c_{i\mu} x_{2\mu}) = 0 \qquad \sum_{q_{l-1}+1}^{q_l}{}_\mu (b_{i\mu} x_{2\mu} - c_{i\mu} x_{2\mu-1}) \, ,$$

$$(i = 1, \dots, k)$$

diciamo che si può prendere per lo spazio $x_{2q_{l-1}+1} = \dots = x_{2q_{l-1}+2k} = 0$ senza alterare la forma (I''): avendolo dimostrato per $k = 1$, potremo supporlo dimostrato per $k - 1$, e dimostrarlo per k. Per questa ipotesi l'S_{n-2k+2}, che si ottiene tralasciando le due ultime delle precedenti equazioni, si può prendere per lo spazio

$$x_{2q_{l-1}+1} = \dots = x_{2q_{l-1}+2k-2} = 0$$

senza alterare la forma (I'') della Rf: le altre due equazioni conservano la loro forma, poichè esse sono le equazioni di un S_{n-2} invariante per la Rf; ma in esse potremo ora tralasciare le variabili $x_{2q_{l-1}+1}, \dots, x_{2q_{l-1}+2k-2}$ in forza delle precedenti equazioni; sicchè si potran ridurre alla forma

$$\sum_{q_{l-1}+k-1}^{q_l}{}_{\mu} (b_\mu x_{2\mu-1} + c_\mu x_{2\mu}) = 0 \qquad \sum_{q_{l-1}+k-1}^{q_l}{}_{\mu} (b_\mu x_{2\mu} - c_\mu x_{2\mu-1}) = 0,$$

con che pur di lasciare inalterate le variabili $x_{2q_{l-1}+1}, \dots, x_{2q_{l-1}+2k-2}$ la cosa è ricondotta al caso precedente. Dunque:

Data una rotazione Rf *della forma* (I'') *si può senza alterare questa forma prendere per lo spazio* $x'_{2q_{l-1}+1} = \dots = x'_{2q_{l-1}+2k} = 0$ *lo spazio*

$$\sum_{q_{l-1}+1}^{q}{}_{\mu} (b_{i\mu} x_{2\mu-1} + c_{i\mu} x_{2\mu}) = 0 \qquad \sum_{q_{l-1}+1}^{q_l}{}_{\mu} (b_{i\mu} x_{2\mu} - c_{i\mu} x_{2\mu-1}) = 0$$
$$(i = 1, \dots, k).$$

15. Diamo un'altra definizione. Diremo *grado di un gruppo di rotazioni* il minimo grado delle rotazioni infinitesime del gruppo.

Il grado di un G_1 sarà dunque quello della sua rotazione generatrice.

16. Date due rotazioni

$$Rf = \sum_{\lambda\mu} (a_{\lambda\mu} X_{\lambda\mu} + b_{\lambda\mu} W_{\lambda\mu} + c_{\lambda\mu} Z_{\lambda\mu} + d_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu})$$
$$R'f = \sum_{\lambda\mu} (a'_{\lambda\mu} X_{\lambda\mu} + b'_{\lambda\mu} W_{\lambda\mu} + c'_{\lambda\mu} Z_{\lambda\mu} + d'_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu})$$

si dice, che la $R'f$ è una *parte* di Rf se tutte le a', b', c', d' che non sono nulle sono uguali rispettivamente alle *a, b, c, d* cogli stessi indici.

Se considerando in un gruppo G_r una rotazione Rf esiste una sua parte $R'f$, che sia anch'essa una rotazione (non l'identità) del gruppo, anche $Rf - R'f$ è una parte di Rf ed insieme una rotazione del gruppo: in questo caso la Rf si dice *riducibile,* mentre nel caso contrario la Rf si dirà *irriducibile* [1]).

Evidentemente poi ogni rotazione riducibile sarà composta di parti irriducibili: perciò se con $R_1 f, R_2 f, \ldots, R_r f$ indichiamo le rotazioni generatrici di G_r, avremo

$$R_i f = \sum_{1}^{n_i}{}_k R_{ik} \qquad (i = 1, \ldots, r),$$

dove le n_i son numeri interi ≥ 1, e le R_{ik} sono rotazioni irriducibili del gruppo. Ora tra le $R_{ik} f$ non ce ne possono essere più di r indipendenti essendo esse rotazioni di G_r, e quindi combinazioni lineari delle $R_i f$: ma ce ne saranno proprio r d'indipendenti, se no le $R_i f$, che son combinazioni lineari di esse, non sarebbero tutte indipendenti. Allora potremo prendere come rotazioni generatrici del gruppo r rotazioni indipendenti scelte tra le $R_{ik} f$: quindi

Si può sempre supporre, che le rotazioni generatrici di un gruppo di rotazioni sieno irriducibili.

Se poi si prendono k rotazioni indipendenti del gruppo, tra le $R_{ik} f$ se ne potranno sempre trovare $r - k$ d'indipendenti tra loro e dalle precedenti; che qualora ce ne fosse solo $r - k - t$ $(t > 0)$ in tale condizione vorrebbe dire, che tutte le $R_{ik} f$ sarebbero combinazioni lineari di quelle $r - k - t$, e delle k considerate, e perciò tra esse non ce ne potrebbe essere r indipendenti. Dunque:

Date k rotazioni indipendenti di un gruppo G_r di rotazioni si posson prendere come generatrici del G_r quelle k rotazioni ed altre $r - k$ irriducibili.

---

[1]) Notisi che il concetto di riducibilità ed irriducibilità di una rotazione dipende essenzialmente dalla forma data al gruppo, chè facendo un cambiamento di variabili una rotazione riducibile può divenire irriducibile, o viceversa.

§ 2.

I gruppi Abeliani di rotazioni

17. Supponiamo di avere due rotazioni qualunque di un gruppo, $R_1 f$ ed $R_2 f$, e ad una di esse diamo la forma canonica: poniamo dunque

$$R_1 f = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} {}_{\nu}\, m_\nu \, Y_{\nu\nu} \;;$$

ora supponiamo però che le m_ν sien qualunque, anche nulle per non dover stare a distinguere i varii casi. L'altra rotazione sarà allora

$$(12) \qquad R_2 f = \sum_{1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} {}_{\lambda\mu} \left(a_{\lambda\mu} X_{\lambda\mu} + b_{\lambda\mu} W_{\lambda\mu} + c_{\lambda\mu} Z_{\lambda\mu} + d_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu} \right).$$

Dopo ciò se poniamo

$$(R_1 R_2) = R_3 f ,$$

avremo per le (5)

$$(13) \qquad R_3 f = \sum_{1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} {}_{\lambda\mu} \Big\{ (m_\lambda - m_\mu)\,(a_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu} - d_{\lambda\mu} X_{\lambda\mu}) + $$
$$+ (m_\lambda + m_\mu)\,(b_{\lambda\mu} Z_{\lambda\mu} - c_{\lambda\mu} W_{\lambda\mu}) \Big\} .$$

Di qui deduciamo subito, che

I G_2 *di rotazioni son tutti abeliani* [1]).

---

[1]) Cfr. LEVI, *Sui gruppi di movimenti* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XIV, serie 5ª, 1905, n. 3). Come abbiamo già detto noi intendiamo sempre di parlare di gruppi reali, onde tutto quello che diremo si riferirà *sempre* a gruppi reali.

Infatti se ci fosse un $G_2 \equiv (R_1, R_2)$ non abeliano, si potrebbe ridurre ad avere la composizione $(R_1 R_2) = \rho R_2 f$: sicchè potendosi fare la riduzione precedente dovrebbe essere identicamente

$$R_3 f = \rho R_2 f,$$

cioè

$$\rho a_{\lambda\mu} = -(m_\lambda - m_\mu)\, d_{\lambda\mu}, \quad \rho d_{\lambda\mu} = (m_\lambda - m_\mu)\, a_{\lambda\mu}$$

$$\rho b_{\lambda\mu} = -(m_\lambda + m_\mu)\, c_{\lambda\mu}, \quad \rho c_{\lambda\mu} = (m_\lambda + m_\mu)\, b_{\lambda\mu}$$

$$\left(\lambda, \mu = 1, \ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right]\right).$$

E queste equazioni non sono certo risolubili con un valore reale e diverso da zero di ρ, a meno di supporre nulle tutte le a, b, c, d, cosa evidentemente da escludersi. Rimane così dimostrato il nostro teorema: ne viene poi

Ogni gruppo di rotazioni è di genere zero.

18. Supponiamo ora che la $R_1 f$ sia di grado s, e che gli si sia data la forma (I''): allora la $R_3 f$ sarà data ancora dalla (13), solo che vi si supponga

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_{q_1} = \alpha_1\ ;\quad m_{q_1+1} = m_{q_1+2} = \ldots = m_{q_2} = \alpha_2\ ;\ \ldots\ ;$$

$$m_{q_{t-1}+1} = m_{q_{t-1}+2} = \ldots = m_{q_t} = \alpha_t\ ;\quad m_{q_t+1} = \ldots = m_{\left[\frac{n+1}{2}\right]} = 0$$

$$\left(q_1 < q_2 < \ldots < q_t\,,\ q_t = s \leq \left[\frac{n+1}{2}\right]\right),$$

dove le α son tutte positive.

Perchè la $R_3 f$ sia nulla occorre sia

$$(m_\lambda - m_\mu)\, a_{\lambda\mu} = (m_\lambda - m_\mu)\, d_{\lambda\mu} = (m_\lambda + m_\mu)\, b_{\lambda\mu} = (m_\lambda + m_\mu)\, a_{\lambda\mu} = 0$$

$$\left(\lambda, \mu = 1, \ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right]\right).$$

Se poniamo in queste equazioni λ e μ ambedue $> s$, esse son verificate certamente qualunque sieno $a_{\lambda\mu}$, $b_{\lambda\mu}$, $c_{\lambda\mu}$ e $d_{\lambda\mu}$ poichè $m_\lambda = m_\mu = 0$: se invece poniamo $\lambda \leq s$, $\mu > s$, essendo $m_\lambda > 0$,

$m_\nu = 0$ deve essere

$$a_{\lambda\mu} = b_{\lambda\nu} = c_{\lambda\nu} = d_{\lambda\mu} = 0 \quad \left(\lambda = 1, \dots, s\,;\ \mu = s+1, \dots, \left[\frac{n+1}{2}\right]\right).$$

Infine se λ e μ son ambedue $< s$, siccome m_λ ed m_μ son positivi non può essere $m_\lambda + m_\mu = 0$, onde deve essere

$$b_{\lambda\mu} = c_{\lambda\mu} = 0 \qquad (\lambda, \mu = 1, \dots, s)\,;$$

delle $a_{\lambda\mu}$, $d_{\lambda\mu}$ possono poi essere diverse da zero, solo quelle i cui indici son tali, che m_λ e m_μ sieno uguali. Ne viene che, perchè sia $(R_1 R_2) = 0$, insieme a

$$R_1 f = \frac{1}{2} \sum_1^t{}_i\, a_i \sum_{q_{i-1}+1}^{q_i}{}_\nu\, Y_{\nu\nu}$$

si deve avere

$$R_2 f = \sum_1^t{}_i \sum_{q_{i-1}+1}^{q_i}{}_{\lambda\mu} (a_{\lambda\mu} X_{\lambda\mu} + b_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}) + \dots,$$

dove la parte tralasciata opera solo sulle variabili $x_{2s+1}, \dots, x_n$. A questa parte si può dare la forma canonica

$$\frac{1}{2} \sum_{s+1}^{s'}{}_\nu\, n_\nu\, Y_{\nu\nu},$$

e quindi di essa è inutile occuparsi ulteriormente.

19. Supponiamo per semplicità $t = 1$, chè il caso generale si deduce ben facilmente da questo premettendo una semplice sommatoria: di più supponiamo $n = 2s$. In tal caso potendosi supporre $a_1 = 1$, si ha

$$R_1 f = \frac{1}{2} \sum_1^s{}_\nu\, Y_{\nu\nu} \qquad R_2 f = \sum_1^s{}_{\lambda\mu} (a_{\lambda\mu} X_{\lambda\mu} + d_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}).$$

Ora la $R_1 f$, come sappiamo (n. 12) lascia fermi tutti gli S_{2s-2} di equazioni

$$A = \sum_1^s{}_\lambda (\gamma_\lambda\, x_{2\lambda} + \beta_\lambda\, x_{2\lambda-1}) = 0\ ,\ B = \sum_1^s{}_\lambda (-\alpha_\lambda\, x_{2\lambda-1} + \beta_\lambda\, x_{2\lambda}) = 0$$

e perchè $R_2 f$ lasci fermo uno di questi S_{2s-2} occorre e basta che sia identicamente

$$R_2 A = \rho_1 A + \rho_2 B \qquad R_2 B = \rho_3 A + \rho_4 B.$$

Scrivendo le equazioni, che ne risultano, si trovan le seguenti

$$(14) \qquad \begin{aligned} \sum_1^s{}_\mu (\beta_\mu d_{\lambda\mu} - \alpha_\mu a_{\lambda\mu}) &= \rho_2 \beta_\lambda + \rho_1 \alpha_\lambda \ ; \\ \sum_1^s{}_\mu (\beta_\mu a_{\lambda\mu} - \alpha_\mu d_{\lambda\mu}) &= -\rho_1 \beta_\lambda + \rho_2 \alpha_\lambda \ ; \end{aligned} \qquad (\lambda = 1, \ldots, s)$$

son queste $2s$ equazioni lineari omogenee nelle $2s$ quantità α_λ, β_λ: perchè sien risolubili occorre e basta, che sia

$$\begin{vmatrix} d_{11}-\rho_2 & d_{12} \ldots & d_{1s} & -\rho_1 & -a_{12} \ldots & -a_{1s} \\ d_{21} & d_{22}-\rho_2 \ldots & d_{2s} & -a_{21} & -\rho_1 \ \ldots & -a_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{s1} & d_{s2} \ldots & d_{ss}-\rho_2 & -a_{s2} & -a_{s2} \ldots & -\rho_1 \\ \rho_1 & a_{12} \ldots & a_{1s} & d_{11}-\rho_2 & d_{12} \ \ldots & d_{1s} \\ a_{21} & \rho_1 \ \ldots & a_{2s} & d_{21} & d_{22}-\rho_2 \ldots & d_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{s1} & a_{s2} \ldots & \rho_1 & d_{s1} & d_{s2} \ \ldots & d_{ss}-\rho_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Se noi rammentiamo che $a_{\lambda\mu} = -a_{\mu\lambda}$, $d_{\lambda\mu} = +d_{\mu\lambda}$, se vi si fa $\rho_1 = 0$, questa equazione è l'equazione secolare, che come si sa ha tutte le radici reali.

L'equazione precedente si può dunque risolvere dando a ρ_1 il valore 0, e a ρ_2 un valore reale: corrispondentemente a questi le (14) ci dànno almeno un sistema di valori delle α e β, e quindi almeno un S_{2s-2} che è lasciato fermo tanto da $R_1 f$, che da $R_2 f$. Questo S_{2s-2} lo possiamo prendere per l'S_{2s-2}

$$x_1 = x_2 = 0$$

senza alterare la forma della $R_1 f$ (n. 14): allora la $R_2 f$ acquista la forma

$$R_2 f = \frac{1}{2}\, n_1 Y_{11} + \sum_{2}^{s}{}_{\lambda\mu} (a'_{\lambda\mu} X_{\lambda\mu} + d'_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu})\,.$$

Ragionando ora in modo analogo sulla seconda parte, con una sostituzione ortogonale sulle $x_3, \ldots, x_{2s}$ solamente si può ridurre

$$R_2 f = \frac{1}{2}\,(n_1 Y_{11} + n_2 Y_{22}) + \sum_{3}^{s}{}_{\lambda\mu} (a''_{\lambda\mu} X_{\lambda\mu} + d''_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu})$$

senza alterare $R_1 f$.

Così seguitando si arriva evidentemente a dare ad $R_2 f$ la forma

$$R_2 f = \frac{1}{2} \sum_{1}^{s'}{}_{\nu}\; n_\nu\, Y_{\nu\nu}\,.$$

Nel caso generale basta premettere una sommatoria, ed aggiungere in $R_2 f$ una parte simile a quella scritta. Sicchè anche la $R_2 f$, come la $R_1 f$, assume la forma canonica: se ne trae così il teorema:

Ogni G_2 *di rotazioni si può ridurre alla forma (canonica)*

$$R_1 f = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_{\nu}\; \alpha_{1\nu}\, Y_{\nu\nu}\;, \quad R_2 f = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_{\nu}\; \alpha_{2\nu}\, Y_{\nu\nu}\,.$$

20. Veniamo ora alla ricerca dei G_3 abeliani: a due delle rotazioni $R_1 f$ ed $R_2 f$ del G_3 potremo dare la forma ora vista, ed allora se supponiamo che la terza rotazione $R_3 f$ generatrice del gruppo sia data dall'equazione

$$R_3 f = \sum_{1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}{}_{\lambda\mu} (a_{\lambda\mu} X_{\lambda\mu} + b_{\lambda\mu} W_{\lambda\mu} + c_{\lambda\mu} Z_{\lambda\mu} + d_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu})\,,$$

poichè $(R_1 R_3) = 0$, potranno esser $\neq 0$ solo quelle $a_{\lambda\mu}$ e $b_{\lambda\mu}$, tali che sia $\alpha_{1\lambda} = \alpha_{1\mu}$ (n. 18) e delle $b_{\lambda\mu}$ e $c_{\lambda\mu}$ solo quelle per cui sia $\alpha_{1\lambda} = \alpha_{1\mu} = 0$. Se indichiamo con s il grado di $R_1 f$ e disponiamo le variabili in modo che sieno $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1s}$ tutti $\neq 0$, $\alpha_{1,s+1} = \ldots = \alpha_{1,\left[\frac{n}{2}\right]} = 0$, ed anzi più precisamente (come al solito)

$$\alpha_{11} = \ldots = \alpha_{1,q_1} = a_1\;;\; \alpha_{1,q_1+1} = \ldots = \alpha_{1,q_2} = a_2\,; \ldots ; \alpha_{1,q_{t-1}+1} = \ldots = \alpha_{1\,s} = 0$$

con le a tutte diverse tra loro dovremo avere

$$\mathrm{R}_2 f = \sum_1^t {}_i \sum_{q_{i-1}+1}^{q_i} {}_{\lambda\mu} (a_{\lambda\mu} \mathrm{X}_{\lambda\mu} + d_{\lambda\mu} \mathrm{Y}_{\lambda\mu}) +$$
$$+ \sum_{s+1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} {}_{\lambda\mu} (a_{\lambda\mu} \mathrm{X}_{\lambda\mu} + b_{\lambda\mu} \mathrm{W}_{\lambda\mu} + c_{\lambda\mu} \mathrm{Z}_{\lambda\mu} + d_{\lambda\mu} \mathrm{Y}_{\lambda\mu}).$$

Per la seconda parte osserviamo, che pur di lasciare inalterate le variabili $x_1, \dots, x_{2s}$, si rientra nel caso precedente poichè $\mathrm{R}_1 f$ non agisce affatto sulle variabili $x_{2s+1}, \dots, x_n$: a questa parte potremo dunque dare la forma

$$\sum_{s+1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} {}_\nu \, \sigma_{3\nu} \, \mathrm{Y}_{\nu\nu}.$$

Perciò basterà considerare il caso di $t = 1$, $n = 2s$ che l'altro se ne deduce subito: allora potremo prendere in tale ordine le x che risulti

$$\sigma_{21} = \dots = \sigma_{2,u_1} = b_1 \,;\; \sigma_{2,u_1+1} = \dots = \sigma_{2,u_2} = b_2 ; \dots ; a_{2,u_{t'-1}+1} = \dots = a_{2s} = b_{t'}$$

con le b tutte diverse tra loro. Fatto ciò poichè per essere $(\mathrm{R}_2\, \mathrm{R}_3) = 0$ non possono in $\mathrm{R}_3 f$ essere diverse da zero, che quelle $a_{\lambda\mu}$ e $d_{\lambda\mu}$ per cui è $\sigma_{2\lambda} = \sigma_{2\mu}$, ne viene, che $\mathrm{R}_3 f$ avrà ancor più particolarmente la forma

$$\mathrm{R}_3 f = \sum_1^{t'} {}_i \sum_{u_{i-1}+1}^{u_i} {}_{\lambda\mu} (a_{\lambda\mu} \mathrm{X}_{\lambda\mu} + d_{\lambda\mu} \mathrm{Y}_{\lambda\mu}).$$

Potremo dunque supporre $t' = 1$, chè l'altro caso se ne deduce col premettere una sommatoria: ma allora $\mathrm{R}_1 f$ ed $\mathrm{R}_2 f$ differiscono solo per una costante, e quindi si rientra nel caso precedente e ad $\mathrm{R}_3 f$ si può dare la forma

$$\mathrm{R}_3 f = \sum_1^s {}_\nu \, \sigma_{3\nu} \, \mathrm{Y}_{\nu\nu}$$

senza alterare quella di $\mathrm{R}_1 f$ ed $\mathrm{R}_2 f$.

Le due sommatorie, che bisognerebbe premettere per passare prima al caso che t' sia qualunque, e poi a quello, che sia qualunque t non alterano questa forma, e così non la altera neanche la parte da aggiungere quando $n > 2s$. Potendosi poi il ragionamento estendere nel medesimo modo ad un G_r abeliano qualunque di rotazioni, abbiamo il teorema:

Un $G_r \equiv (R_1, R_2, \dots, R_r)$ *abeliano di rotazioni si può sempre ridurre alla forma (canonica)*

$$\text{(II)} \qquad R_i f = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} {}_\nu\, \alpha_{i\nu} Y_{\nu\nu} = \sum_{1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} {}_\nu\, \alpha_{i\nu} S_{2\nu-1, 2\nu} \qquad (i = 1, \dots, r).$$

21. Ne seguono alcune conseguenze, che vogliamo notare.

Prendendo una conveniente combinazione lineare delle $R_1 f, \dots, R_r f$ si possono eliminare certo $r-1$ delle $Y_{\nu\nu}$: la rotazione, che si ottiene è allora al più di grado $\left[\frac{n}{2}\right] - r + 1$. Perciò rammentando la definizione di grado di un gruppo (n. 15) abbiamo

Un G_r *abeliano di rotazioni su* n *variabili può avere al massimo il grado* $\left[\frac{n}{2}\right] - r + 1$.

Di qui si trae che

Non ci possono essere dei G_r *di rotazioni, con* $r > 1$, *abeliani e di grado* $\left[\frac{n}{2}\right]$, *che operino solo su* n *variabili.*

Per conseguenza, avendo un sottogruppo di un gruppo di rotazioni almeno di grado uguale a questo per la definizione stessa:

In un gruppo di rotazioni su n *variabili di grado* $\left[\frac{n}{2}\right]$ *non ci possono essere mai due rotazioni permutabili.*

§ 3.

Alcuni teoremi sulla composizione dei gruppi di rotazioni

22. Abbiamo già visto al n. 17 che posto

$$
(15)\quad \begin{cases} R_1 f = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}{}_{\nu}\, m_\nu\, Y_{\nu\nu} \\ R_2 f = \sum\limits_{1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}{}_{\lambda\mu} \left(a_{\lambda\mu} X_{\lambda\mu} + b_{\lambda\mu} W_{\lambda\mu} + c_{\lambda\mu} Z_{\lambda\mu} + d_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}\right), \end{cases}
$$

si ha

$$
(16)\quad (R_1 R_2) = \sum_{1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}{}_{\lambda\mu} \Big\{ (m_\lambda - m_\mu)\, (a_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu} - d_{\lambda\mu} X_{\lambda\mu}) + + (m_\lambda + m_\mu)\, (b_{\lambda\mu} Z_{\lambda\mu} - c_{\lambda\mu} W_{\lambda\mu}) \Big\}.
$$

Nello stesso modo si ha pure

$$
(17)\quad \big(R_1 (R_1 R_2)\big) = - \sum_{1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}{}_{\lambda\mu} \Big\{ (m_\lambda - m_\mu)^2\, (a_{\lambda\mu} X_{\lambda\mu} + d_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}) + + (m_\lambda + m_\mu)^2\, (b_{\lambda\mu} W_{\lambda\mu} + c_{\lambda\mu} Z_{\lambda\mu}) \Big\}.
$$

Son queste delle formule molto importanti da cui trarremo conseguenze notevoli.

Prima di tutto osserviamo, che ogni termine di $R_2 f$ dà origine ad un solo term'ne di $\big(R_1 (R_1 R_2)\big)$ e che su questo non influiscono affatto gli altri termini di $R_2 f$. Perciò *se data ad* $R_1 f$ *la forma canonica è* $R'_2 f$ *una parte di* $R_2 f$, $\big(R_1 (R_1 R'_2)\big)$ *è una parte di* $\big(R_1 (R_1 R_2)\big)$.

Osserviamo ancora che dalla (17) vien subito che

Se è $\big(R_1 (R_1 R_2)\big) = k\, R_2 f$, *deve essere* k *negativo o nullo.*

Infatti potremo dare ad $R_1 f$ la forma canonica, dopo di che varranno le formule precedenti: se consideriamo uno qualunque dei coefficienti, che figurano in $R_2 f$ e son diversi da zero, per es. $a_{\lambda\mu}$, dovrà essere per l'ipotesi

$$k\, a_{\lambda\mu} = -(m_\lambda - m_\mu)^2\, a_{\lambda\mu}$$

ed essendo $a_{\lambda\mu} \neq 0$ ne verrà $k = -(m_\lambda - m_\mu)^2$, cioè k negativo o nullo.

23. Visto questo introduciamo per semplicità di linguaggio una altra denominazione: se è $\big(R_1 (R_1 R_2)\big) = k\, R_2 f$, essendo k negativo o nullo potremo porre $k = -\rho^2$. Diremo allora che $R_2 f$ *rispetto ad* $R_1 f$ *appartiene al fattore* ρ: ci sarebbe veramente per ρ un'ambiguità di segno, che noi elimineremo prendendo per ρ sempre il valore positivo.

Ma quali sono le condizioni perchè questo avvenga? La (17) ci dice subito che deve essere

$$(m_\lambda - m_\mu)^2\, a_{\lambda\mu} = \rho^2\, a_{\lambda\mu} \qquad (m_\lambda - m_\mu)^2\, d_{\lambda\mu} = \rho^2\, d_{\lambda\mu}$$

$$(m_\lambda + m_\mu)^2\, b_{\lambda\mu} = \rho^2\, b_{\lambda\mu} \qquad (m_\lambda + m_\mu)^2\, c_{\lambda\mu} = \rho^2\, c_{\lambda\mu}\,.$$

Quindi devono essere nulle tutte le $a_{\lambda\mu}$ e $d_{\lambda\mu}$ tali, che non sia $m_\lambda - m_\mu = \pm\rho$ e tutte le $b_{\lambda\mu}$ e $c_{\lambda\mu}$ tali che invece non sia $m_\lambda + m_\mu = \pm\rho$. Viceversa se queste condizioni son soddisfatte, la $R_2 f$ rispetto ad $R_1 f$ appartiene al fattore ρ. Ne viene subito, che

Se una rotazione $R_2 f$ *rispetto ad* $R_1 f$ *appartiene ad un certo fattore, ogni parte di* $R_2 f$, *sempre rispetto ad* $R_1 f$, *appartiene allo stesso fattore.*

24. Supponiamo ora $\rho = 0$: allora devono essere nulle tutte le $a_{\lambda\mu}$ e $d_{\lambda\mu}$ tali, che agli indici λ e μ non corrispondano due valori uguali delle m, e son nulle pure tutte le $b_{\lambda\mu}$ e $c_{\lambda\mu}$ tali che agli indici λ e μ non corrispondano due valori uguali e di segno contrario

delle m. Ma queste, per la (16), son le condizioni, perchè sia $(R_1 R_2) = 0$: dunque

Se una rotazione rispetto ad un'altra appartiene al valore 0, *le due rotazioni son permutabili.*

25. Consideriamo ora più a fondo il caso di $\rho \neq 0$: poniamo allora

$$(R_1 R_2) = \rho R_3 f.$$

Dalla ipotesi fatta, che sia $\big(R_1 (R_1 R_2)\big) = -\rho^2 R_2 f$ viene allora

$$(R_1 R_3) = -\rho R_2 f$$

e quindi anche

$$\big(R_1 (R_1 R_3)\big) = -\rho^2 R_3 f$$

cioè anche la $R_3 f$ appartiene al fattore ρ. Dalla (16) vien subito, come si ottiene la $R_3 f$ da $R_2 f$: rammentando quali condizioni derivano dall'ipotesi fatta (n. 23) si vede subito, che i coefficienti $m_\lambda - m_\mu$ o $m_\lambda + m_\mu$, che figurano allora effettivamente nella (16), son tutti $= \pm \rho$ e che perciò basta in $R_2 f$ sostituire ad $X_{\lambda\mu}$, $Y_{\lambda\mu}$, $W_{\lambda\mu}$ e $Z_{\lambda\mu}$ ordinatamente $Y_{\lambda\mu}$, $X_{\lambda\mu}$, $Z_{\lambda\mu}$ e $W_{\lambda\mu}$, e poi cambiare di segno ad alcuni termini. Se con $R'_2 f$ indichiamo il complesso dei termini di $R_2 f$ che in questo passaggio conservano il loro segno, con $R''_2 f$ il complesso di quelli che invece lo cambiamo avremo evidentemente

$$R_2 f = R'_2 f + R''_2 f,$$

e posto

$$(R_1 R'_2) = \rho R'_3 f \qquad (R_1 R''_2) = -\rho R''_3 f$$

sarà

$$R_3 f = R'_3 f - R''_3 f$$

e tanto $R'_3 f$ da $R'_2 f$, come $R''_3 f$ da $R''_2 f$ si deducono col semplice scambio di cui sopra: è un'osservazione questa, che dovremo richiamare in seguito.

Un'altra osservazione su quest'argomento è la seguente: se $R_2^{(1)} f$ è una parte di $R_2 f$, per il modo con cui $R_3 f$ si ottiene da $R_2 f$, sarà $(R_1 R_2^{(1)})$ una parte di $R_3 f$. Ne viene, che se $R_2 f$ è irriducibile lo è anche $R_3 f$, e viceversa poichè scambiando $R_2 f$ ed $R_3 f$ non si fa altro che cambiare ρ in $-\rho$. Perciò riassumendo:

Se prese due rotazioni $R_1 f$ *ed* $R_2 f$, *la* $R_2 f$ *appartiene al fattore* ρ, *a questo stesso fattore appartiene anche* $\frac{1}{\rho}(R_1 R_2)$; *ed anzi se data ad* $R_1 f$ *la forma canonica* $R_2 f$ *è irriducibile, è pure irriducibile* $\frac{1}{\rho}(R_1 R_2)$.

Inoltre $R_2 f$ *si può nelle ipotesi fatte scomporre in due parti* $R'_2 f$ *ed* $R''_2 f$ *tali che* $\frac{1}{\rho}(R_1 R'_2)$ *e* $-\frac{1}{\rho}(R_1 R''_2)$ *si ottengano rispettivamente da* $R'_2 f$ *e* $R''_2 f$ *scambiando* $X_{\lambda\mu}$ *con* $Y_{\lambda\mu}$ *e* $W_{\lambda\mu}$ *con* $Z_{\lambda\mu}$.

26. Prendiamo ora in esame la (17) nel caso più generale possibile: da essa risulta, che la $\big(R_1(R_1 R_2)\big)$ si ottiene dalla $R_2 f$ moltiplicando ciascuno dei coefficienti che figurano in questa per un fattore negativo che può variare da termine a termine. Tra questi fattori ce ne sarà un certo numero p di diversi, che essendo negativi potremo indicare con $-\rho_1^2, -\rho_2^2, \dots, -\rho_p^2$. Consideriamo ora tutti i termini di $R_2 f$, i cui coefficienti vengono moltiplicati per $-\rho_1^2$, quando si passa alla $\big(R_1(R_1 R_2)\big)$: il complesso di essi formerà una parte $R_{21} f$ di $R_2 f$. La rotazione $\big(R_1(R_1 R_{21})\big)$ si ottiene da $R_{21} f$ moltiplicandone semplicemente tutti i coefficienti per $-\rho_1^2$: sarà dunque

$$\big(R_1(R_1 R_{21})\big) = -\rho_1^2 R_{21} f,$$

ed $R_{21} f$ apparterrà rispetto ad $R_1 f$, al fattore ρ_1. Analogamente se consideriamo tutti i termini, i cui coefficienti nel passaggio da $R_2 f$ ad $\big(R_1(R_1 R_2)\big)$ vengon moltiplicati per $-\rho_2^2$, essi formano una parte $R_{22} f$ di $R_2 f$, che rispetto ad $R_1 f$ appartiene al fattore ρ_2. Così proseguendo si trovano p parti $R_{21} f, R_{22} f, \dots, R_{2p} f$ di $R_2 f$, che esauriscono completamente la $R_2 f$, in quanto ogni termine di questa deve appartenere all'una o all'altra di quelle parti, e che rispetto ad $R_1 f$ appartengono ordinatamente ai fattori $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$. Sicchè si avrà

$$R_2 f = R_{21} f + R_{22} f + \dots + R_{2p} f$$

$$\big(R_1(R_1 R_{2i})\big) = -\rho_i^2 R_{2i} f \qquad (i = 1, \dots, p).$$

Se ora $R_1 f$ ed $R_2 f$ son due rotazioni di un gruppo, a questo deve appartenere anche la rotazione $-\big(R_1(R_1 R_2)\big)$, che per le formule ultime è data da

$$\rho_1^2 R_{21} f + \rho_2^2 R_{22} f + \dots + \rho_p^2 R_{2p} f$$

E nello stesso modo, che questa si deduce dalla $R_2 f$, da essa si dedurran successivamente

$$\rho_1^4 R_{21} f + \rho_2^4 R_{22} f + \dots + \rho_p^4 R_{2p} f$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\rho_1^{2(p-1)} R_{21} f + \rho_2^{2(p-1)} R_{22} f + \dots + \rho_p^{2(p-1)} R_{2p} f.$$

Le ρ essendo diverse tra loro, la $R_2 f$ e le altre $p-1$ rotazioni del gruppo, che ne abbiamo ricavato, son combinazioni lineari indipendenti di $R_{21} f, \dots, R_{2p} f$; e perciò queste son tutte combinazioni lineari di quelle e per conseguenza rotazioni del gruppo. Ma allora se $p > 1$, la $R_2 f$ è riducibile, se $p = 1$ invece, per definizione, la $R_2 f$ rispetto ad $R_1 f$ appartiene ad un certo fattore. Dunque

Data ad una rotazione qualunque $R_1 f$ di un G_r di rotazioni la forma canonica, ogni rotazione irriducibile del G_r rispetto ad $R_1 f$ appartiene ad un certo fattore.

27. Ne possiamo trarre subito un teorema, che completato ci porterà al teorema, che ora vogliamo stabilire.

Consideriamo un gruppo G_r di rotazioni, qualunque, e supponiamo, che in esso esista un $G_t \equiv (R_1, R_2, \dots, R_t)$ abeliano: la condizione sarà certo soddisfatta almeno per $t = 1$. Poi data a G_t la forma canonica prendiamo, come rotazioni generatrici del G_r, le precedenti ed altre $r - t$ irriducibili $R_{t+1} f, \dots, R_r f$ (n. 16). Per il teorema precedente avremo allora

$$\big(R_i (R_\iota R_{t+k})\big) = -\rho_{ik}^2 R_{t+k} f \quad (i = 1, \dots, t\ ;\ k = 1, \dots, r - t).$$

Dunque: *Fissato in un gruppo G_r di rotazioni qualunque un $G_t \equiv (R_1, R_2, \dots, R_t)$ abeliano, e data a questo G_t la forma canonica, si posson prendere irriducibili le altre rotazioni $R_{t+1} f, \dots, R_r f$ generatrici del gruppo ed allora si avrà*

$$(18)\quad \big(R_i (R_\iota R_{t+k})\big) = -\rho_{ik}^2 R_{t+k} f \quad (i = 1, \dots, t\,;\ k = 1, \dots, r - t).$$

Da questo teorema si capisce subito quale importanza abbia per la nostra ricerca lo studio delle rotazioni, che rispetto ad una data appartengono ad un certo fattore.

28. Dimostriamo ora una proprietà, che ci permetterà di completare il teorema precedente. Supponiamo di considerare due rotazioni di un G_r di rotazioni, $R_1 f$ ed $R_2 f$, permutabili e di aver data ad esse la forma canonica: poi consideriamo una terza rotazione $R_3 f$ del gruppo, irriducibile: sarà allora pel teorema precedente

$$\left(R_1 (R_1 R_3)\right) = -\rho_1^2 R_3 f \qquad \left(R_2 (R_2 R_3)\right) = -\rho_2^2 R_3 f.$$

Vogliamo dimostrare, che si avrà di più

$$\rho_2 (R_1 R_3) = \pm \rho_1 (R_2 R_3).$$

Se ρ_1 e ρ_2 son nulli ambedue la relazione è certo soddisfatta: se $\rho_1 = 0$ e $\rho_2 \neq 0$ osserviamo, che per il n. 25 $R_3 f$ è permutabile con $R_1 f$, e questo dimostra la relazione scritta: così se fosse $\rho_2 = 0$, $\rho_1 \neq 0$. Resta dunque da esaminare il caso, che ρ_1 e ρ_2 sieno ambedue $\neq 0$. La $R_3 f$ si comporrà allora di due parti $R'_3 f$ ed $R''_3 f$, tali che posto

$$(R_1 R'_3) = \rho_1 R'_4 f \ , \ (R_1 R''_3) = -\rho_1 R''_4 f,$$

$R'_3 f$ ed $R''_4 f$ si ottengono da $R'_3 f$ ed $R''_3 f$ rispettivamente soltanto scambiando $X_{\lambda\mu}$ con $Y_{\lambda\mu}$ e $W_{\lambda\mu}$ con $Z_{\lambda\mu}$ (n. 25). Ora $R'_3 f$ rispetto ad $R_2 f$ apparterrà al fattore ρ_2 (n. 23), e così anche $R''_3 f$: analogamente a quello, che abbiamo ora detto $R'_3 f$ si comporrà di due parti $R_{31} f$ ed $R_{32} f$ tali, che posto

$$(R_2 R_{31}) = \rho_2 R_{41} f \ , \ (R_2 R_{32}) = -\rho_2 R_{42} f \, ,$$

$R_{41} f$ ed $R_{42} f$ si ottengono rispettivamente da $R_{31} f$ ed $R_{32} f$ collo scambio suddetto. Ma ora se poniamo

$$(R_1 R_{31}) = \rho_1 \overline{R}_{41} f \ , \ (R_1 R_{32}) = \rho_1 \overline{R}_{42}$$

$\overline{R}_{41} f$ ed $\overline{R}_{42} f$, che son parti di $R'_4 f$, si ottengono pure esse collo stesso scambio da $R_{31} f$ ed $R_{32} f$ rispettivamente, sicchè sarà

$$\overline{R}_{41} f = R_{41} f \ , \ \overline{R}_{42} f = R_{42} f.$$

Analogamente potremo decomporre $R''_3 f$ in due parti $R_{33} f$ ed $R_{34} f$ tali che posto

$$(R_1 R_{33}) = -\rho_1 R_{43} f \quad , \quad (R_1 R_{34}) = -\rho_1 R_{44} f,$$

sia anche

$$(R_2 R_{33}) = \rho_2 R_{43} f \quad , \quad (R_2 R_{34}) = -\rho_2 R_{44} f.$$

Ma date tutte queste formule, poichè è

$$R_3 f = R_{31} f + R_{32} f + R_{33} f + R_{34} f,$$

ne viene

$$(R_1 R_3) = \rho_1 (R_{41} f + R_{42} f - R_{43} f - R_{44} f)$$

$$(R_2 R_3) = \rho_2 (R_{41} f - R_{42} f + R_{43} f - R_{44} f).$$

Ed ora nel gruppo ci saranno le due rotazioni

$$\frac{1}{\rho_1} (R_1 R_3) - \frac{1}{\rho_2} (R_2 R_3) = 2 (R_{42} f - R_{43} f)$$

$$\frac{1}{\rho_1} (R_1 R_3) + \frac{1}{\rho_2} (R_2 R_3) = 2 (R_{41} f - R_{44} f).$$

Dunque se una di queste due non è identicamente nulla la $(R_1 R_3)$ è riducibile, ciò che non è possibile avendo noi supposto $R_3 f$ irriducibile (n. 25).

Sicchè deve esser nulla una di quelle rotazioni, cioè deve essere verificata una dell'equazioni da noi scritte in principio. Si ha così il teorema:

Se date a due rotazioni $R_1 f$ *ed* $R_2 f$ *di un gruppo di rotazioni la forma canonica, si considera una terza rotazione irriducibile* $R_3 f$ *oltre ad aversi* $\big(R_1 (R_1 R_3)\big) = -\rho_1^2 R_3 f$; $\big(R_2 (R_2 R_3)\big) = -\rho_2^2 R_3 f$ *si avrà anche o* $\rho_2 (R_1 R_3) = \rho_1 (R_2 R_3)$ *o* $\rho_2 (R_1 R_3) = -\rho_1 (R_2 R_3)$.

29. Possiamo ora dimostrare il teorema che ci proponevamo.

Supponiamo, di considerare un gruppo qualunque di rotazioni G_r, e che in esso ci sia un $G_t \equiv (R_1, R_2, \ldots, R_t)$ abeliano il quale però ora non sia contenuto in nessun G_{t+1} abeliano di G_r. Supponiamo poi di aver trovato le rotazioni $R_{t+1} f, \ldots, R_{t+2s} f$ $(t+2s \leq r; s \geq 0)$

indipendenti tra loro e da quelle del G_t in modo, che sia

$$(20)\quad (R_i\, R_{t+2k-1}) = \rho_{ik}\, R_{t+2k} f\ ,\quad (R_i\, R_{t+2k}) = -\rho_{ik}\, R_{t+2k-1} f$$
$$(k=1\,,\ldots,\, s\,;\ i=1\,,\ldots,\, t)\,.$$

Io dico, che, se $r > t+2s$, si possono trovare nel gruppo altre due rotazioni, che soddisfino ad equazioni analoghe alle precedenti, e che sieno indipendenti tra loro e dalle altre già considerate. Infatti prendiamo le altre $r-t-2s$ rotazioni $R_{t+2s+1}f, \ldots, R_r f$ generatrici del gruppo irriducibili (n. 16): avremo allora (n. 27)

$$(21)\quad \big(R_i\,(R_i\, R_{t+k})\big) = -\rho^2_{ik}\, R_{t+k} f\ \ (k=2s+1\,,\ldots,\, r-t\,;\ i=1\,,\ldots,\, t).$$

Potremo poi applicare il teorema precedente prendendo per le rotazioni $R_1 f$ ed $R_2 f$ che vi figurano, due qualunque rotazioni del G_t e per $R_3 f$ una qualunque $R_{t+k} f$ $(k=2s+1\,,\ldots,\, r-t)$: ne viene che deve essere

$$(22)\quad \rho_{lk}\,(R_i\, R_{t+k}) = \pm\, \rho_{ik}\,(R_l\, R_{t+k})\ \ (i,\, l=1\,,\ldots,\, t\,;\ k=1\,,\ldots,\, r-t).$$

Premesso tutto ciò prendiamo a considerare la $R_{t+2s+1}f$: essa non può essere permutabile contemporaneamente con $R_1 f, \ldots, R_t f$, perchè se no con queste formerebbe un G_{t+1}, abeliano e contenente il G_t, contro l'ipotesi. Possiamo dunque supporre sia

$$(R_1\, R_{t+2s+1}) \neq 0$$

senza alterare la generalità della questione. Ma $(R_1\, R_{t+2s+1})$, che è irriducibile (n. 25), è anche indipendente da $R_1 f, \ldots, R_{t+2s+1} f$, perchè se fosse

$$(R_1\, R_{t+2s+1}) = \sum_l^{1\ldots t+2s+1} \alpha_l\, R_l f,$$

dalle (20), siccome deve essere $\big(R_1\,(R_1\, R_{t+2s+1})\big) = -\rho^2_{1,2s+1}\, R_{t+2s+1} f$, e d'altra parte per ipotesi è anche $(R_i\, R_l) = 0$ $(i,\, l=1\,,\ldots,\, t)$, verrebbe

$$-\rho^2_{1,2s+1}\, R_{t+2s+1} f = \sum_l^{1\ldots s} \rho_{il}\,(\alpha_{t+2l-1}\, R_{t+2l} f - \alpha_{t+2l}\, R_{t+2l-1} f) +$$
$$+\ \alpha_{t+2s+1} \sum_l^{1\ldots t+2s+1} \alpha_l\, R_l f$$

cosicchè, essendo il coefficiente $-(\rho^2_{1,2s+1}+\alpha^2_{t+2s+1})$ di $R_{t+2s+1}f$ certo differente da zero, $R_{t+2s+1}f$, stessa non sarebbe indipendente da $R_1 f, \ldots, R_{t+2s}f$, contro le ipotesi fatte. Dunque $(R_1\,R_{t+2s+1})$ è certo indipendente da $R_1 f, \ldots, R_{t+2s+1}f$, e si può quindi prendere $\dfrac{(R_1\,R_{t+2s+1})}{\rho_{1,2s+1}}$ per nuova $R_{t+2s+2}f$; dopo di che si avrà

$$(R_1\,R_{t+2s+1}) = \rho_{1,2s+1}\,R_{t+2s+2}f\,,$$

e per conseguenza per le (21) anche

$$(R_1\,R_{t+2s+2}) = -\rho_{1,2s+1}\,R_{t+2s+1}f.$$

Ma allora dalle (22) ricaviamo

$$(R_i\,R_{t+2s+1}) = \pm\rho_{i,2s+1}\,R_{t+2s+2}f \quad (i = 2, \ldots, t).$$

Basta includere in $\rho_{i,2s+1}$ il segno per avere

$$(R_i\,R_{t+2s+1}) = \rho_{i,2s+1}\,R_{t+2s+2}f \quad (R_i\,R_{t+2s+2}) = -\rho_{i,2s+1}\,R_{t+2s+1}f$$
$$(i = 1, \ldots, t)$$

conforme al nostro asserto.

Applicando quanto sopra col supporre $s = 0$, ne viene, che se il gruppo non è abeliano, se cioè $r > t$ deve essere $r \geq t+2$, e che possiamo prendere le $t+2$ prime rotazioni generatrici in modo da soddisfare le (20): allora facendo $s = 1$, ne viene, che se $r > t+2$ deve essere $r \geq t+4$, e che possiamo prendere in simil guisa le prime $t+4$ rotazioni generatrici del gruppo, dimodochè si potrebbe applicare la dimostrazione precedente per $s = 2$. Così proseguendo si dovrà alla fine arrivare ad ottenere tutte le r rotazioni generatrici del gruppo in modo da soddisfare le (20), e siccome ad ogni passo, che si fa se ne aggiunge due vuol dire che deve essere $r - t$ un numero pari. Abbiamo così il teorema:

In un G_r *non abeliano di rotazioni considerato un* $G_t \equiv (R_1, R_2, \ldots, R_t)$ *abeliano e non contenuto in nessun* G_{t+1} *abeliano di* G_r, *si ha* $r - t = 2s$ *(s intero), e le altre* $2s$ *rotazioni generatrici del gruppo* $R_{t+1}f, \ldots, R_{t+2s}f$ *si possono prendere in modo, che sieno* *irriducibili, e di più si abbia:*

$$(23)\qquad (R_i\, R_{t+2k-1}) = \rho_{ik}\, R_{t+2k} f\ ,\quad (R_i\, R_{t+2k}) = -\rho_{ik}\, R_{t+2k-1} f$$
$$(i = 1, \dots, t\,;\ k = 1, \dots, s)\,.$$

La prima parte del teorema ci dà come caso particolare:

Il massimo gruppo abeliano contenuto in un G_r *di rotazioni è un* G_{r-2s} *(s intero).*

30. L'importanza del teorema ora dimostrato risulterà immediatamente dalle conseguenze, che ora ne trarremo.

Cerchiamo dapprima la composizione dei G_3 non abeliani: per il teorema precedente in questi G_3 non ci posson essere dei G_2 (abeliani) e le tre rotazioni generatrici del G_3 se questo non è abeliano, $R_1 f$, $R_2 f$ ed $R_3 f$ si posson prendere in modo che sia

$$(R_1\, R_2) = \rho\, R_3 f\ ,\quad (R_1\, R_3) = -\rho\, R_2 f \quad \text{con } \rho \neq 0\,.$$

Dall'identità Jacobiana tra $R_1 f$, $R_2 f$ ed $R_3 f$ si ottiene

$$\big((R_2\, R_3)\, R_1\big) = 0\,,$$

quindi

$$(R_2\, R_3) = \alpha\, R_1 f$$

con $\alpha \neq 0$, altrimenti ci sarebbe nel G_3 un G_2 (abeliano). Anzi poichè si ha

$$\big(R_2\, (R_2\, R_1)\big) = -\rho\,\alpha\, R_1 f$$

ρ ed α devon avere lo stesso segno (n. 22). Allora dividendo $R_2 f$ ed $R_3 f$ per $\sqrt{\dfrac{\alpha}{\rho}}$ si rende $\alpha = \rho$. Poichè inoltre dividendo $R_1 f$, $R_2 f$, $R_3 f$ per una costante, anche ρ vien diviso per questa costante, si ha così:

Ogni $G_3 \equiv (R_1, R_2, R_3)$ *si può ridurre alla composizione*

$$(23^*)\qquad (R_1\, R_2) = \rho\, R_3 f\ ;\quad (R_2\, R_3) = \rho\, R_1 f\ ;\quad (R_3\, R_1) = \rho\, R_2 f\,;$$

dove ρ, *se* $\neq 0$, *ha un valore arbitrario.*

31. Un'altra applicazione se ne ha nella ricerca dei G_r, che contengono un G_{r-2} abeliano: escludendo il caso di quelli abeliani, il G_r non può contenere dei G_{r-1} abeliani, e perciò si possono pren-

dere le rotazioni generatrici in modo, che sia

$$(R_i R_l) = 0 \quad (R_i R_{r-1}) = \rho_i R_r f \quad (R_i R_r) = -\rho_i R_{r-2} f \quad (i, l = 1, \dots, r-2),$$

e tutte le ρ_i non posson esser nulle, altrimenti, per esempio, il $G_{r-1} \equiv (R_1, \dots, R_{r-1})$ sarebbe abeliano. Ma allora non può essere $(R_{r-1} R_r) = 0$, altrimenti, supposto $\rho_i \neq 0$, $R_i f$, $R_{r-1} f$, $R_r f$ formerebbero un G_3 di composizione diversa da quelle che abbiamo or ora visto, solo essere possibili. D'altra parte, siccome per le identità Jacobiane deve essere

$$\big(R_i (R_{r-1} R_r)\big) = 0,$$

ne viene, che $(R_{r-1} R_r)$ è una combinazione lineare non identicamente nulla di $R_1 f, R_2 f, \dots, R_t f$; onde tale combinazione potendosi prendere per $\rho R_1 f$ senza alterare nelle formule precedenti altro che le ρ_i, potremo supporre

$$(R_{r-1} R_r) = \rho R_1 f \qquad (\rho \neq 0).$$

Ora deve essere $\rho_1 \neq 0$, altrimenti $R_1 f, R_{r-1} f, R_r f$ formerebbero un G_3 di composizione diversa da quelle possibili, ed anzi come sopra si può rendere $\rho_1 = \rho$. Sostituendo poi a $R_i f$, $\rho R_i f - \rho_i R_1 f$ $(i = 2, \dots, r-2)$ le nuove $R_i f$ saran permutabili con $R_{r-1} f$ ed $R_r f$. Dunque

Se un G_r di rotazioni non abeliano contiene un G_{r-2} abeliano, si possono prendere per trasformazioni generatrici del G_r quelle di un G_3 non abeliano e quelle di un G_{r-3} abeliano di rotazioni tutte permutabili con quelle del G_3.

Si ha perciò:

Se un G_r di rotazioni non abeliano contiene un G_{r-2} abeliano, si posson prendere le rotazioni $R_1 f, \dots, R_r f$ generatrici del gruppo, in modo che sia

$$(R_1 R_{r-1}) = \rho R_r f, \quad (R_1 R_r) = \rho R_{r-1} f, \quad (R_{r-1} R_r) = \rho R_1 f$$

$$(R_1 R_i) = (R_i R_l) = (R_{r-1} R_i) = (R_r R_i) = 0$$

$$(i, l = 2, \dots, r-2).$$

32. Un caso particolare ci dà la composizione dei G_4 non abeliani: infatti ogni G_4 contiene un G_2 abeliano (n. 29), onde si ricade nel caso del teorema precedente, da cui si ricava così:

Ogni $G_4 \equiv (R_1, R_2, R_3, R_4)$ *si può ridurre alla composizione*

$$(R_1 R_2) = \rho R_3 f \,, \quad (R_2 R_3) = \rho R_1 f \,, \quad (R_3 R_1) = \rho R_2 f \,,$$
$$(R_1 R_4) = (R_2 R_4) = (R_2 R_4) = 0 \,.$$

33. Se ora riprendiamo le ipotesi e le notazioni del teorema del n. 29, scrivendo le identità Jacobiane tra $R_i f$, $R_{t+2k-1} f$ ed $R_{t+2k} f$ $(i = 1, \ldots, t ;\ k = 1, \ldots, s)$ ne viene

$$\big(R_i (R_{t+2k-1} R_{t+2k})\big) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, t ;\ k = 1, \ldots, s) \,,$$

onde $(R_{t+2k-1} R_{t+2k})$ essendo permutabile con $R_1 f, \ldots, R_t f$ è una combinazione lineare di $R_1 f, \ldots, R_t f$ stesse: cosicchè il G_t, $R_{t+2k-1} f$ ed $R_{t+2k} f$ formano un G_{t+2}, non abeliano per l'ipotesi fatta, che il G_t non sia contenuto in nessun G_{t+1} abeliano di G_r. Dunque:

In un G_r *qualunque non abeliano di rotazioni, se c'è un* G_t *abeliano non contenuto in nessun* G_{t+1} *abeliano, c'è anche un* G_{t+2} *non abeliano, che contiene il* G_t.

Combinando questo col teorema del n. 31 e con quello del n. 29, abbiamo

In un G_{t+2s} *qualunque non abeliano di rotazioni, se c'è un* $G_t \equiv (R_1, \ldots, R_t)$ *abeliano non contenuto in nessun* G_{t+1} *abeliano, si posson prendere le altre rotazioni* $R_{t+1} f, R_{t+2} f, \ldots, R_{t+2s} f$ *generatrici del gruppo, in modo che sia*

$$(23^{**}) \quad \begin{aligned} &(R_i R_l) = 0 \,,\ (R_i R_{t+2k-1}) = +\rho_{ik} R_{t+2k} f \,,\ (R_i R_{t+2k}) = -\rho_{ik} R_{t+2k-1} f \\ &(R_1 R_i) = 0 \,,\ (R_1 R_{t+1}) = \rho R_{t+2} f \,,\ (R_1 R_{t+2}) = -\rho R_{t+1} f \,, \\ &(R_{t+1} R_{t+2}) = \rho R_1 f \,,\ (R_1 R_{t+2k-1}) = \rho_k R_{t+2k} f \\ &(R_1 R_{t+2k}) = -\rho_k R_{t+2k-1} f \,,\ (R_i R_{t+1}) = 0 \,,\ (R_i R_{t+2}) = 0 \\ &\qquad (i, l = 2, \ldots, t ;\ k = 2, \ldots, s). \end{aligned}$$

In particolare da questo si trae

Ogni G_r *non abeliano di rotazioni contiene un* G_3 *pure non abeliano.*

34. Stabiliamo alcune formule, che ci occorreranno subito dopo.

Supponiamo di considerare cinque rotazioni $R_1 f, \dots, R_5 f$, che soddisfino alle condizioni:

$$(24)\qquad \begin{aligned} (R_1 R_2) &= \rho_1 R_3 f\,, \quad (R_1 R_3) = -\rho_1 R_2 f\,, \\ (R_1 R_4) &= \rho_2 R_5 f\,, \quad (R_1 R_5) = -\rho_2 R_4 f \end{aligned}$$

con ρ_1 e ρ_2 diverse da zero.

Le identità Jacobiane ha $R_1 f$, $R_2 f$ o $R_3 f$ ed $R_4 f$ o $R_5 f$ ci dànno

$$(25)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\big((R_2 R_4) R_1\big) + \rho_1 (R_3 R_4) + \rho_2 (R_2 R_5) = 0 \\ &\big((R_3 R_5) R_1\big) - \rho_2 (R_3 R_4) - \rho_1 (R_2 R_5) = 0 \\ &\big((R_3 R_4) R_1\big) + \rho_2 (R_3 R_5) - \rho_1 (R_2 R_4) = 0 \\ &\big((R_2 R_5) R_1\big) + \rho_1 (R_3 R_5) - \rho_2 (R_2 R_4) = 0\,. \end{aligned} \right.$$

Da queste derivano le altre

$$(26)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\big((R_2 R_4) \pm (R_3 R_5)\, R_1\big) = -(\rho_1 \mp \rho_2) \big\{(R_3 R_4) \mp (R_2 R_5)\big\} \\ &\big((R_3 R_4) \mp (R_2 R_5)\, R_1\big) = (\rho_1 \mp \rho_2) \big\{(R_2 R_4) \pm (R_3 R_5)\big\}\,. \end{aligned} \right.$$

Se dunque poniamo

$$(27)\qquad \left\{ \begin{aligned} &(R_2 R_4) + (R_3 R_5) = 2\, S_1 f\;; \quad (R_3 R_4) - (R_2 R_5) = -2\, S_2 f \\ &(R_2 R_4) - (R_3 R_5) = 2\, S_3 f\;; \quad (R_3 R_4) + (R_2 R_5) = 2\, S_4 f \end{aligned} \right.$$

ne viene

$$(28)\qquad \begin{aligned} (R_1 S_1) &= (\rho_2 - \rho_1)\, S_2 f\;; \quad (R_1 S_2) = -(\rho_2 - \rho_1)\, S_1 f\,; \\ (R_1 S_3) &= (\rho_1 + \rho_2)\, S_4 f\;; \quad (R_1 S_4) = -(\rho_1 + \rho_2)\, S_3 f\,, \end{aligned}$$

e alle (27) si posson sostituire le altre

$$(29)\qquad \begin{aligned} (R_2 R_4) &= S_1 f + S_3 f\;; \quad (R_2 R_5) = S_2 f + S_4 f\,; \\ (R_3 R_4) &= -S_2 f + S_4 f\;; \quad (R_3 R_5) = S_1 f - S_3 f \end{aligned}$$

mentre dalle (28) si deduce che $S_1 f$ ed $S_2 f$ rispetto ad $R_1 f$ appartengono al fattore $|\rho_1 - \rho_2|$, ed $S_3 f, S_4 f$ al fattore $|\rho_1 + \rho_2|$. Siccome $R_2 f$ ed $R_4 f$ sono due rotazioni qualunque, che rispetto ad $R_1 f$ appartengono rispettivamente ai fattori $|\rho_1|$ e $|\rho_2|$, parte delle formole precedenti si possono enunciare nel teorema:

Prese tre rotazioni $R_1 f$, $R_2 f$ *ed* $R_4 f$, *se* $R_2 f$ *ed* $R_4 f$ *rispetto ad* $R_1 f$ *appartengono l'una al fattore* $|\rho_1|$, *l'altra al fattore* $|\rho_2|$, *ed* ρ_1, ρ_2 *son* $\neq 0$, *l'alternata* $(R_2 R_4)$ *è somma di due rotazioni, che rispetto ad* $R_1 f$ *appartengono l'una al fattore* $|\rho_1+\rho_2|$, *l'altra al fattore* $|\rho_1-\rho_2|$.

35. Consideriamo ora il caso, che prese quattro rotazioni $R_1 f, \ldots, R_4 f$ sia

$$(24^*)\qquad (R_1 R_2) = \rho R_3 f \ , \quad (R_1 R_3) = -\rho R_2 f \ , \quad (R_1 R_4) = 0 .$$

Come sopra si ha

$$(25^*)\qquad \big((R_2 R_4) R_1\big) + \rho (R_3 R_4) = 0 \qquad \big((R_3 R_4) R_1\big) - \rho (R_2 R_4) = 0 ,$$

sicchè posto

$$(29^*)\qquad (R_2 R_4) = S_1 f \qquad (R_3 R_4) = S_2 f$$

si ha

$$(28^*)\qquad (R_1 S_1) = \rho S_2 f \qquad (R_1 S_2) = -\rho S_1 f .$$

In parte queste formole vengon tradotte dal teorema:

Se rispetto ad $R_1 f$ *la rotazione* $R_2 f$ *appartiene al fattore* $|\rho|$ $(\neq 0)$ *e* $R_4 f$ *è permutabile con* $R_1 f$, *l'alternata* $(R_2 R_4)$ *appartiene rispetto alla* $R_1 f$ *ancora al fattore* $|\rho|$.

Notiamo, che questo vale anche nel caso di $\rho = 0$.

36. Preso ora un gruppo G_r qualunque di rotazioni, se in esso c'è un G_t abeliano, che non è contenuto in nessun G_{t+1} abeliano del G_r, si può trovare nel G_r un G_{t+2}, e le rotazioni del gruppo si posson prendere in modo da soddisfare le relazioni del teorema del n. 33, che per chiarezza riscriviamo, supponendo $r = t+2s$ e $\rho = 2$

$$(R_1 R_{t+1}) = 2 R_{t+2} f \ , \quad (R_1 R_{t+2}) = -2 R_{t+1} f \ , \quad (R_{t+1} R_{t+2}) = 2 R_1 f$$

$$(R_i R_l) = 0 \ , \ (R_i R_{t+2k-1}) = \rho_{ik} R_{t+2k} f \ , \ (R_i R_{t+2k}) = -\rho_{ik} R_{t+2k-1} f$$

$$(i, l = 1, \ldots, t \ ; \ k = 2, \ldots, s)$$

$$(R_i R_{t+1}) = 0 \ , \quad (R_i R_{t+2}) = 0 \qquad (i = 2, \ldots, t).$$

Potremo di più fare evidentemente in modo, che le ρ_{1k} $(k=2,\dots,s)$ sieno tutte positive: di più supporremo $s>1$, essendo ormai nota la composizione del gruppo nel caso di $s=1$. Infine supponiamo, che tra i numeri $\rho_{12},\dots,\rho_{1s}$, ce ne sieno uno o più $=\rho\ (>0)$, ma nessuno $=\rho+2$, con ρ, che non è un numero intero. Date queste ipotesi indichiamo con $S_1 f$ ed $S_2 f$ due rotazioni irriducibili del gruppo tali che sia

$$(R_1\, S_1) = \rho\, S_2 f \quad , \quad (R_1\, S_2) = -\rho\, S_1 f.$$

Poichè non ci sono nel gruppo per ipotesi rotazioni, che rispetto ad $R_1 f$ appartengono al fattore $\rho+2$, la parte di $(R_{t+1}\, S_1)$ che appartiene a quel fattore deve essere nulla: sicchè per le (29) e (28) potremo porre

$$\begin{aligned} &(R_{t+1}\, S_1) = S_3 f \ , \quad (R_{t+2}\, S_2) = S_4 f \ , \\ (30)\qquad &(R_{t+2}\, S_1) = -S_4 f \ , \quad (R_{t+2}\, S_2) = S_3 f \\ &(R_1\, S_3) = (\rho-2)\, S_4 f \ , \quad (R_1\, S_4) = -(\rho-2)\, S_3 f. \end{aligned}$$

Dall'identità Jacobiana tra $R_{t+1} f$, $R_{t+2} f$ ed $S_1 f$ od $S_2 f$ si ricava

$$(R_{t+1}\, S_3) - (R_{t+2}\, S_4) = -2\rho\, S_1 f \ ; \ (R_{t+1}\, S_4) + (R_{t+2}\, S_3) = -2\rho\, S_2 f,$$

e non può essere nulla nè $S_3 f$, nè $S_4 f$, perchè se fosse nulla l'una di esse per l'ultime delle (30), essendo $\rho-2$ certamente $\neq 0$, lo sarebbe anche l'altra, ciò che è impossibile per le ultime equazioni scritte. In forza di queste poi si può, per le formole del n. 34, porre

$$\begin{aligned} &(R_{t+1}\, S_3) = -\rho\, S_1 f + 2\, S_5 f \ , \quad (R_{t+1}\, S_4) = -\rho\, S_1 f + 2\, S_6 f \ , \\ &(R_{t+2}\, S_3) = -\rho\, S_2 f - 2\, S_6 f \ , \quad (R_{t+2}\, S_4) = \rho\, S_1 f + 2\, S_5 f \\ &(R_1\, S_5) = (\rho-4)\, S^6 f \ , \quad (R_1\, S_6) = -(\rho-4)\, S_5 f. \end{aligned}$$

Poichè $\rho-4$ non può essere $=0$ per l'ipotesi fatta, che ρ non sia intero, ne viene, che se una delle rotazioni $S_5 f$ ed $S_6 f$ è nulla, lo è anche l'altra: ma tutte due non lo possono essere, perchè dalla identità Jacobiana ha $R_{t+1} f$, $R_{t+2} f$ ed $S_5 f$ si ricava

$$(R_{t+1}\, S_5) - (R_{t+2}\, S_6) = -2\,(\rho-1)\, S_3 f,$$

perciò le rotazioni $S_5 f$, $S_6 f$ saranno ambedue diverse da zero.

Così continuando si stabilirà una catena di relazioni del tipo:

$$(31)\quad \begin{cases} (R_{t+1}\,S_{2i+1}) = -(\rho-i+1)\,S_{2i-1}f + (i+1)\,S_{2i+3}f\ ; \\ (R_{t+1}\,S_{2i+2}) = -(\rho-i+1)\,S_{2i}\,f + (i+1)\,S_{2i+4}f\ ; \\ (R_{t+2}\,S_{2i+1}) = -(\rho-i+1)\,S_{2i}\,f - (i+1)\,S_{2i+4}f\ ; \\ (R_{t+2}\,S_{2i+2}) = (\rho-i+1)\,S_{2i-1}f + (i+1)\,S_{2i+3}f\ ; \\ (R_1\,S_{2i+1}) = (\rho-2i)\,S_{2i+2}f\ ,\ (R_1\,S_{2i+2}) = -(\rho-2i)\,S_{2i+1}f \\ \qquad\qquad (i=1\,,2\,,\ldots)\ , \end{cases}$$

e tale catena seguiterà senza mai poter finire, poichè non potendo essere le quantità $\rho-2i$ e $\rho-i$ mai nulle, si potrà sempre ripetere il ragionamento di sopra, e quindi si avranno ad ogni passo sempre due rotazioni, nessuna delle quali può essere nulla, e per cui si può proseguire il ragionamento. Le rotazioni S_1f, S_3f, ..., S_{2i-1}, ... son certo tutte indipendenti, perchè esse rispetto ad R_1f appartengono ordinatamente ai fattori ρ, $|\rho-2|$, $|\rho-4|$, ..., $|\rho-2i|$, ... certo tutti diversi tra loro. Ne viene, che se fossero possibili le ipotesi fatte nel gruppo ci sarebbero infinite rotazioni indipendenti, ciò che evidentemente è assurdo.

Notiamo di più, che in quanto precede non entra altro, che il fatto della composizione del $G_3 \equiv (R_1, R_{t+1}, R_{t+2})$, e che se non c'è nessun valore ρ non intero, tale che tra le $\rho_{12}, \ldots, \rho_{1s}$, ce ne sia qualcuna $=\rho$, ma nessuna $=\rho+2$, vuol dire, che $\rho_{12}, \ldots, \rho_{1s}$ son tutte intere. Abbiamo dunque il teorema:

Preso in un G_r *di rotazioni un* $G_3 \equiv (R_1, R_{t+1}, R_{t+2})$ *non abeliano di composizione*

$$(R_1\,R_{t+1}) = 2\,R_{t+2}f\ ,\quad (R_1\,R_{t+2}) = -2\,R_{t+1}f\ ,\quad (R_{t+1}\,R_{t+2}) = 2\,R_1f$$

le rotazioni del gruppo rispetto alla R_1f *non possono appartenere che a fattori interi o nulli.*

37. Supponiamo ora, che ferme restando tutte le altre ipotesi, sia invece ρ un numero intero dispari, sia quindi $\rho = 2h+1$, con h intero o nullo. Allora si può ottenere, nel modo stesso del numero precedente, una catena di relazioni, che potrà terminare solo quando si arriva ad $i = 2h+1$, poichè pei valori precedenti di i tanto $\rho - i$,

che $\rho - 2i$ son diversi da zero, e perciò si può ripetere il ragionamento di dianzi. Si ha dunque in tal caso oltre le (30):

$$(32)\quad \begin{cases} (R_{t+1}\, S_{2i+1}) = -(2h+2-i)\, S_{2i-1}f + (i+1)\, S_{2i+3}f\,, \\ (R_{t+1}\, S_{2i+2}) = -(2h+2-i)\, S_{2i}\, f + (i+1)\, S_{2i+4}f\,, \\ (R_{t+2}\, S_{2i+1}) = -(2h+2-i)\, S_{2i}\, f - (i+1)\, S_{2i+4}f\,, \\ (R_{t+2}\, S_{2i+2}) = (2h+2-i)\, S_{2i-1}f + (i+1)\, S_{2i+3}f\,, \\ (R_1\, S_{2i+1}) = (2h-2i+1)\, S_{2i+2}\,, \quad (R_1\, S_{2i+2}) = -(2h-2i+1)\, S_{2i+1}f\,, \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2h) \\ (R_{t+1}\, S_{4h+3}) = -S_{4h+1}f\,, \quad (R_{t+1}\, S_{4h+4}) = -S_{4h+2}f\,, \\ (R_{t+2}\, S_{4h+3}) = -S_{4h+2}f\,, \quad (R_{t+2}\, S_{4h+2}) = S_{4h+1}f\,, \\ (R_1\, S_{4h+3}) = -(2h+1)\, S_{4h+4}f\,, \quad (R_1\, S_{4h+4}) = (2h+1)\, S_{4h+3}f. \end{cases}$$

Supponiamo dapprima $h = 0$: abbiamo allora

$$\begin{array}{llll} (R_{t+1}S_1) = S_3f\,, & (R_{t+1}S_2) = S_4f\,, & (R_{t+2}S_1) = -S_4f\,, & (R_{t+2}S_2) = S_3f, \\ (R_{t+1}S_3) = -S_1f\,, & (R_{t+1}S_4) = -S_2f\,, & (R_{t+2}S_3) = -S_2f\,, & (R_{t+2}S_4) = S_1f, \\ (R_1\, S_1) = S_2f\,, & (R_1\, S_2) = -S_1f\,, & (R_1\, S_3) = -S_4f\,, & (R_1\, S_4) = S_3f; \end{array}$$

vogliamo dimostrare, che le quattro rotazioni, S_1f, S_2f, S_3f, S_4f sono indipendenti tra loro.

Se le rotazioni dette non sono indipendenti deve esistere una relazione

$$a\, S_1f + b\, S_2f + c\, S_3f + d\, S_4f = 0.$$

Facendo l'alternate con R_1f, $R_{t+1}f$ ed $R_{t+2}f$ se ne ottengono le altre relazioni

$$\begin{aligned} a\, S_2f - b\, S_1f - c\, S_4f + d\, S_3f &= 0 \\ a\, S_3f + b\, S_4f - c\, S_1f - d\, S_2f &= 0 \\ -a\, S_4f + b\, S_3f - c\, S_2f + d\, S_1f &= 0. \end{aligned}$$

Ora queste quattro relazioni se non sono identiche, perchè il determinante dei coefficienti è allora certo $\neq 0$, portano di necessità che sieno S_1f, S_2f, S_3f, S_4f tutte nulle; questo essendo assurdo deve essere $a = b = c = d = 0$, quindi le quattro rotazioni sono indipendenti.

Nel caso di $h > 0$ sono indipendenti le rotazioni $S_1 f$, $S_2 f$, $S_{4h+3} f$ ed $S_{4h+4} f$, che se tra esse esistesse una relazione, facendo l'alternate con $R_{t+1} f$ se ne dedurrebbe una ancora tra S_3, $S_4 f$, $S_{4h+1} f$, $S_{4h+2} f$, e così seguitando ne verrebbe per le formule superiori una anche tra $S_{2h+1} f$, $S_{2h+2} f$, $S_{2h+3} f$, $S_{2h+4} f$; ma questo caso si esclude subito nel modo stesso di sopra. Ne viene così che $S_1 f$, $S_2 f$, $S_{4h+3} f$ ed $S_{4h+4} f$ sono indipendenti: da questo e dal fatto che $S_{2h+1} f, \ldots, S_{2h+4} f$, che rispetto ad $R_1 f$ appartengono al fattore 1, non sono nulle, ed anzi sono indipendenti, si ricava il teorema:

Se preso un G_r di rotazioni ed in esso un $G_3 \equiv (R_1 f, R_{t+1} f, R_{t+2} f)$ di composizione

$$(R_1\, R_{t+1}) = 2\, R_{t+3} f \ , \quad (R_1\, R_{t+2}) = -2\, R_{t+1} f \ , \quad (R_{t+1}\, R_{t+2}) = 2\, R_1 f$$

nel gruppo c'è qualche rotazione, che rispetto ad $R_1 f$ appartiene ad un valore dispari, ce ne sono almeno 4 indipendenti, che appartengono al massimo valore dispari, e almeno 4, che appartengono al fattore 1.

38. Infine consideriamo il caso, che sempre conservate le altre ipotesi sia $\rho = 2h$ con h intero positivo. Allora la catena del n. 36 si potrà proseguire fino ad $i = h$, perchè per questo valore si arriva a due rotazioni $S_{2h+1} f$ ed $S_{2h+2} f$ permutabili con $R_1 f$, cui perciò non si possono applicare le formule del n. 34: prima però la catena non si potrà arrestare, per il ragionamento stesso fatto nei due casi precedenti. Si avrà dunque

$$(33) \quad \begin{cases} (R_{t+1} S_1) = S_3 f \, , \ (R_{t+1} S_2) = S_4 f \, , \ (R_{t+2} S_1) = -S_4 f \, , \ (R_{t+2} S_2) = S_3 f \, , \\ (R_{t+1}\, S_{2i+1}) = -(2h - i + 1)\, S_{2i-1} f + (i+1)\, S_{2i+3} f \ , \\ (R_{t+1}\, S_{2i+2}) = -(2h - i + 1)\, S_{2i} f + (i+1)\, S_{2i+4} f \ , \\ (R_{t+2}\, S_{2i+1}) = -(2h - i + 1)\, S_{2i} f - (i+1)\, S_{2i+4} f \ , \\ (R_{t+2}\, S_{2i+2}) = (2h - i + 1)\, S_{2i-1} f + (i+1)\, S_{2i+3} f \ , \\ \qquad (i = 1, \ldots, h-1) \\ (R_1 S_{2i+1}) = (2h - 2i)\, S_{2i+2} f \, , \ (R_1 S_{2i+2}) = -(2h - 2i)\, S_{2i+1} f \ (i = 0, \ldots, h). \end{cases}$$

Dalle identità Jacobiane tra $R_{t+1}f$, $R_{t+2}f$ ed $S_{2h-1}f$ od $S_{2h}f$ viene

$$(\alpha)\qquad \begin{aligned} (R_{t+2}\, S_{2h+1}) + (R_{t+1}\, S_{2h+2}) &= -2\,(h+1)\, S_{2h} f, \\ (R_{t+1}\, S_{2h+1}) - (R_{t+2}\, S_{2h+2}) &= -2\,(h+1)\, S_{2h-1} f, \end{aligned}$$

perciò non possono essere contemporaneamente $S_{2h+1}f$ e $S_{2h+2}f$ nulle.

D'altra parte poichè $S_1 f$ ed $S_2 f$ sono irriducibili, si avrà (n. 28)

$$(R_i\, S_1) = \rho_i\, S_2 f \qquad (R_i\, S_2) = -\rho_i\, S_1 f \qquad (i = 2\,, \dots\,, t)\,;$$

poichè $R_{t+1}f$ ed $R_{t+2}f$ sono permutabili con le $R_i f$ $(i = 2, \dots, t)$ del n. 35 ne risulta anche

$$(R_i\, S_{2l+1}) = \rho_i\, S_{2l+2} f \qquad (R_i\, S_{2l+2}) = -\rho_i\, S_{2l+1} f$$
$$(l = 1\,, \dots\,, h\ ;\ i = 2\,, \dots\,, t)\,.$$

Ne viene, che le ρ_i non possono essere tutte nulle: che altrimenti S_{2h+1} ed S_{2h+2} sarebbero permutabili con $R_1 f, \dots, R_t$, e quindi combinazioni lineari delle medesime. Ma allora per le (α) $S_{2h-1}f$ ed $S_{2h}f$ dovrebbero essere se mai combinazioni lineari di $R_{t+1}f$ e $R_{t+2}f$, e questo non può darsi se $h = 1$, perchè $S_1 f$ ed $S_3 f$ son prese indipendenti dal G_{t+2}, e non può darsi neanche se $h > 1$, perchè in tal caso dalle formule (33) si avrebbe $S_{2h-3}f = S_{2h-4}f = 0$, contro quanto dicemmo sopra. Possiamo dunque supporre $\rho_2 \neq 0$: in questa ipotesi le ultime equazioni scritte ci dicono, che se è nulla una delle due rotazioni $S_{2h+1}f$, $S_{2h+2}f$, lo è anche l'altra, ciò che sopra abbiamo visto non potersi dare. Di più ne viene, che $S_{2h+1}f$ ed $S_{2h+2}f$ son certo indipendenti, che se no $R_2 f$ ed $S_{2h+1}f$ formerebbero un G_2 non abeliano. In forza delle (α) e delle formule del n. 35 abbiamo ora, che le (33) valgono anche per $i = h$. Dopo ciò si può seguitare il ragionamento fatto nei numeri precedenti, poichè non si trovano più rotazioni permutabili con $R_1 f$, e la catena si dovrà prolungare fino ad $i = 2h$. Avremo allora oltre le formule scritte in principio, e in cui bisogna far variare i da 1 a $2h - 1$, le altre

$$(R_{t+1}\, S_{4h+1}) = -S_{4h-1} f\,,\quad (R_{t+1}\, S_{4h+2}) = -S_{4h} f\,,$$
$$(R_{t+2}\, S_{4h+1}) = -S_{4h} f\,,\quad (R_{t+2}\, S_{4h+2}) = S_{4h-1} f.$$

Aggiungiamo un'osservazione, che ci occorrerà in seguito. Se noi supponiamo, che $S_1 f$, $S_2 f$, $S_{4h+1} f$ ed $S_{4h+2} f$ non sieno indipendenti, esisterà almeno una relazione del tipo

$$a\, S_1 f + b\, S_2 f + c\, S_{4h+1} f + d\, S_{4h+2} f = 0 .$$

Ma in tal caso, facendo l'alternata con $R_{t+1} f$ del primo membro, si ha

$$a\, S_3 f + b\, S_4 f - c\, S_{4h-1} f - d\, S_{4h} f = 0 ,$$

e da questa nello stesso modo se ne ricaverebbe una tra $S_5 f$, $S_6 f$, $S_{4h-3} f$, $S_{4h-2} f$. Così continuando si perverrebbe ad una relazione

$$a'\, S_{2h-1} f + b'\, S_{2h} f + c'\, S_{2h+3} f + d'\, S_{2h+4} f = 0 ,$$

e da questa facendo le alternate con $R_{t+1} f$ ed $R_{t+2} f$ se ne ricavano le due

$$(a' - c')\, S_{2h+1} f + (b' - d')\, S_{2h+2} f = 0 \quad (b' + d')\, S_{2h+1} f - (a' + c')\, S_{2h+2} f = 0.$$

Una di queste non è certo identica, onde se $S_1 f$, S_2, $S_{4h+1} f$, S_{4h+2} non fossero indipendenti tra loro, non sarebbero indipendenti neppure $S_{2h+1} f$ ed S_{2h+2}, contro quanto dicemmo. Dunque:

Se preso un G_r *di rotazioni ed in esso un* $G_{t+2} \equiv (R_1 f, \dots, R_{t+2})$ *della composizione vista al n. 33, fuori del* G_{t+2} *c'è qualche rotazione, che rispetto ad* $R_1 f$ *appartiene ad un fattore pari, ci sono almeno 4 rotazioni che rispetto ad* $R_1 f$ *appartengono al massimo valore pari, e di più ce ne sono almeno due permutabili con* $R_1 f$.

39. Infine consideriamo il caso di $t = 1$, il caso cioè in cui presa una rotazione $R_1 f$ del G_r in questo non ce ne sono altre permutabili con $R_1 f$: dico che allora non può essere, che $r = 1$ o $r = 3$. Infatti $r = 2$ non può essere perchè i G_2 son tutti abeliani (n. 17), e neanche può essere $r > 3$. In questa ultima ipotesi si potrebbero prendere le rotazioni del gruppo in modo, che fosse (n. 29)

$$(R_1\, R_{2k}) = \rho_k\, R_{2k+1} f \ , \quad (R_1\, R_{2k+1}) = -\rho_k\, R_{2k} f \quad (k = 1, \dots, s),$$

ed anzi cambiando se mai l'ordine di quest'altre rotazioni potremo supporre $\rho_1 \leq \rho_k$ $(k = 2, \dots, s)$: dividendo ora $R_1 f$ per $\frac{\rho_1}{2}$ si rende $\rho_1 = 2$, e $\rho_k \geq 2$ $(k = 2, \dots, s)$.

Ora dall'identità Jacobiana tra $R_1 f$, $R_2 f$ ed $R_3 f$ risulta

$$\big((R_2 R_3) R_1\big) = 0$$

quindi per le ipotesi fatte $(R_2 R_3) = \alpha R_1 f$: ma per le precedenti questa divenendo $\big(R_2 (R_2 R_1)\big) = -2\alpha R_1 f$, α deve essere positivo (n. 22). Si può dunque dividere $R_2 f$ ed $R_3 f$ ambedue per $\sqrt{\frac{\alpha}{2}}$, dopo di che si ottiene $\alpha = 2$.

Ora le altre rotazioni $R_4 f, \dots, R_{2s} f$ apparterranno tutte a fattori interi ≥ 2, mentre per i teoremi dei due numeri precedenti ciò è impossibile, perchè ce ne dovrebbe essere qualcuna che rispetto ad $R_1 f$ appartenesse o al fattore 1 o al fattore 0: dunque non può darsi, se $r > 3$, il caso di $t = 1$, si ha cioè

Ogni rotazione di un G_r $(r > 3)$ *è contenuta almeno in un* G_2 *(abeliano) del* G_r.

o anche

Ogni G_r *di rotazioni, se* $r > 3$, *contiene sempre almeno un* G_2 *(abeliano).*

Alcuni corollarï semplicissimi sono i seguenti:

I gruppi di rotazioni di grado $\left[\frac{n}{2}\right]$ *su n variabili possono essere solamente* G_1 *o* G_3.

Infatti essi non possono contenere dei G_2 (abeliani) (n. 21).

Ogni $G_5 \equiv (R_1, \dots, R_5)$ *non abeliano si può sempre ridurre alla composizione*

$$(R_1 R_2) = 2 R_3 f\ ,\quad (R_2 R_3) = 2 R_1 f\ ,\quad (R_3 R_1) = 2 R_2 f\ ,\quad (R_i R_k) = 0$$
$$(i = 1, 2, 3, 4, 5\ ;\ k = 4, 5).$$

Infatti dovendo il G_5 contenere almeno un G_2 abeliano, dovrà contenere anche un G_3 (n. 29), dopo di che questa proprietà è un caso particolare del teorema del n. 31.

§ 4.

Alcuni casi particolari ed un teorema fondamentale

40. In questo e nei numeri seguenti vogliamo considerare due casi particolari, la cui importanza risulterà dal seguito, in quanto che vedremo essere questi i soli casi possibili.

Supponiamo di avere un gruppo, e di averne prese le rotazioni infinitesime nel modo indicato nel n. 33: il caso particolare che ora considereremo è quello in cui, colle notazioni già adottate altra volta, $R_{t+3}f, \dots, R_{t+2s}f$ rispetto ad $R_1 f$ appartengono tutte al fattore 0 o al fattore 2. Noi supporremo anzi dapprima, che non sieno tutte permutabili con $R_1 f$, nella quale ipotesi potremo dunque supporre, che $R_{t+3}f$ rispetto ad $R_1 f$ appartenga al fattore 2. Nelle formule del n. 38 potremo allora porre $S_1 f = R_{t+3}f$, dopo di che le formule stesse divengono

$$(R_{t+1}\,R_{t+3}) = S_{t+5}f \quad , \quad (R_{t+1}\,R_{t+4}) = S_{t+6}f \ ,$$
$$(R_{t+2}\,R_{t+3}) = -S_{t+6}f \quad , \quad (R_{t+2}\,R_{t+4}) = S_{t+5}f \ ,$$

$$(R_{t+1}\,S_{t+5}) = -2R_{t+3}f + 2S_{t+7}f \ , \ (R_{t+1}\,S_{t+6}) = -2R_{t+4}f + 2S_{t+8}f \ ,$$
$$(R_{t+2}\,S_{t+5}) = -2R_{t+4}f - 2S_{t+8}f \ , \ (R_{t+2}\,S_{t+6}) = 2R_{t+3}f + 2S_{t+7}f \ ,$$

$$(R_{t+1}\,S_{t+7}) = -S_{t+5}f \quad , \quad (R_{t+1}\,S_{t+8}) = -S_{t+6}f \ ,$$
$$(R_{t+2}\,S_{t+7}) = -S_{t+6}f \quad , \quad (R_{t+2}\,S_{t+8}) = S_{t+5}f \ ,$$

$$(R_1\,R_{t+3}) = 2\,R_{t+4}f \ , \ (R_1\,R_{t+4}) = -2\,R_{t+3}f \ ,$$
$$(R_1\,S_{t+5}) = (R_1 S_{t+6}) = 0 \ , \ (R_1 S_{t+7}) = -2\,S_{t+8}f \ , \ (R_1 S_{t+8}) = 2\,S_{t+7}f .$$

Se si pone

$$R_{24}f = R_{t+3}f - S_{t+7}f\ ,\ R_{14}f = R_{t+4}f + S_{t+8}f\ ,\ R_{34}f = -S_{t+5}f,$$
$$R_{25}f = R_{t+4}f - S_{t+8}f\ ,\ R_{15}f = -R_{t+3}f - S_{t+7}f\ ,\ R_{35}f = -S_{t+6}f,$$

si avrà dunque

$$(R_1 R_{24}) = 2 R_{14}f\ ,\ (R_1 R_{25}) = 2 R_{15}f\ ,\ (R_{t+1} R_{24}) = -2 R_{34}f,$$
$$(R_{t+1} R_{25}) = -2 R_{35}f\ ,\ (R_{t+2} R_{24}) = 0\ ,\ (R_{t+2} R_{25}) = 0\ ,$$

$$(R_1 R_{14}) = -2 R_{24}f\ ,\ (R_1 R_{15}) = -2 R_{25}f\ ,\ (R_{t+1} R_{14}) = 0\ ,$$
$$(R_{t+1} R_{15}) = 0\ ,\ (R_{t+2} R_{14}) = -2 R_{34}f\ ,\ (R_{t+2} R_{15}) = -2 R_{35}f,$$

$$(R_1 R_{34}) = 0\ ,\ (R_1 R_{35}) = 0\ ,\ (R_{t+1} R_{34}) = 2 R_{24}f,$$
$$(R_{t+1} R_{35}) = 2 R_{25}f\ ,\ (R_{t+2} R_{34}) = 2 R_{14}f\ ,\ (R_{t+2} R_{35}) = 2 R_{15}f.$$

D'altra parte si ha

$$(R_i R_{t+3}) = a_i R_{t+4}f\ ,\ (R_i R_{t+4}) = -a_i R_{t+3}f \quad (i = 2, \dots, t)\ ;$$

ne viene per le formule del n. 35 (essendo $R_{t+1}f$ ed $R_{t+2}f$ permutabili con le $R_i f$)

$$(R_i S_{t+5}) = a_i S_{t+6}f\ ,\ (R_i S_{t+6}) = -a_i S_{t+5}f,$$
$$(R_i S_{t+7}) = a_i S_{t+8}f\ ,\ (R_i S_{t+8}) = -a_i S_{t+7}f \quad (i = 2, \dots, t).$$

Ora S_{t+5} non può, per le formule scritte sopra, essere una combinazione lineare di $R_1 f, \dots, R_t f$: non può dunque essere permutabile con queste t rotazioni per l'ipotesi solita che il G_t non sia contenuto in nessun G_{t+1} abeliano; essendo d'altra parte permutabile con $R_1 f$, ne viene, che non possono tutte le a_i $(i = 2, \dots, t)$ essere nulle. Potremo dunque supporre $a_2 \neq 0$: ma allora prendendo al posto di $R_i f$ $(i = 3, \dots, t)$, $a_2 R_i f - a_i R_2 f$ si riduce $a_3 = \dots = a_t = 0$.

Poi prendendo al posto di $R_2 f$, $\dfrac{2}{a_2} R_2 f$ si riduce anche $a_2 = 2$. Sicchè colle altre notazioni introdotte si avrà

$$(R_i R_{24}) = (R_i R_{14}) = (R_i R_{34}) = (R_i R_{25}) = (R_i R_{15}) = (R_i R_{35}) = 0 \quad (i = 3, \dots, t),$$

$$(R_2 R_{24}) = 2 R_{25}f\ ,\ (R_2 R_{14}) = 2 R_{15}f\ ,\ (R_2 R_{34}) = 2 R_{35}f,$$
$$(R_2 R_{25}) = -2 R_{24}f\ ,\ (R_2 R_{15}) = -2 R_{14}f\ ,\ (R_2 R_{35}) = -2 R_{34}f.$$

Scrivendo ora le identità Jacobiane tra $R_i f\,(i=1,\ldots,t)$, $R_{34}f$, $R_{35}f$, si trova che $(R_{34}\,R_{35})$ deve essere permutabile con $R_1 f$, $R_2 f,\ldots, R_t f$; quindi per la solita ragione

$$(R_{34}\,R_{35}) = \sum_1^t{}_i\; \alpha_i\, R_i f.$$

Ma poichè $R_{34}f$ ed $R_{35}f$ rispetto ad $R_{t+1}f$ appartengono ambedue al fattore 2, l'alternata non può contenere, che rotazioni permutabili con $R_{t+1}f$ e rotazioni, che rispetto a quest'ultima appartengono al fattore 4 (n. 34), mentre $R_1 f$ appartiene al fattore 2. Deve dunque essere $\alpha_1 = 0$. Invece non può essere $\alpha_2 = 0$, perchè in questo caso sarebbe

$$\big(R_{34}\,(R_{34}\,R_{35})\big) = 0,$$

e quindi (n. 24)

$$(R_{34}\,R_{35}) = 0,$$

cioè $\big(R_{34}\,(R_{34}\,R_2)\big) = 0$ ed $(R_{34}\,R_2) = 0$ contro quanto abbiamo detto sopra. Si può dunque prendere, a meno di un fattore, per nuova $R_2 f$ la $(R_{34}\,R_{35})$, e ciò non altera affatto le formule superiori: possiamo dunque porre

$$(R_{34}\,R_{35}) = \alpha\, R_2 f.$$

Questa per le formule precedenti potendosi scrivere $\big(R_{34}(R_{34}R_2)\big) = -\frac{\alpha}{2}\, R_2 f$, ne viene (n. 22) che $\alpha > 0$, onde prendendo al posto di $R_{ik}f$ $(i = 1, 2, 3;\; k = 4, 5)$ la rotazione $\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\; R_{ik} f$, senza alterare le altre formule si ottiene

$$(R_{34}\,R_{35}) = 2\, R_2 f.$$

Osserviamo ora, che le rotazioni permutabili con $R_1 f$, $R_3 f$, $R_4 f,\ldots, R_t f$ formano un gruppo, di cui fa parte il $G_{t+2} \equiv (R_1,\ldots, R_t, R_{34}, R_{35})$; in questo gruppo non c'è fuori del G_{t+2} nessuna rotazione permutabile con $R_2 f$, per la solita ragione, quindi non ci saranno neanche rotazioni, che appartengano rispetto ad $R_2 f$ a fattori pari all'infuori di $R_{34}f$, $R_{35}f$ (n. 38). Ne viene che deve essere

$$(R_{14}\,R_{24}) = \sum_1^t{}_i\; \beta_i\, R_i f.$$

Infatti $R_{14}f$ ed $R_{24}f$ son permutabili con $R_3f, \dots, R_tf$, quindi tale deve essere anche $(R_{14}R_{24})$: di più deve essere permutabile anche con R_1f, come risulta dall'identità Jacobiana tra R_1f, $R_{14}f$, $R_{24}f$. Infine $R_{14}f$, $R_{24}f$ rispetto ad R_2f appartengono al fattore 2 ambedue, quindi non essendoci rotazioni permutabili con R_1f, $R_3f, \dots, R_tf$, e che rispetto ad R_2f appartengano al fattore 4, ne viene, che $(R_{14}R_{24})$ deve essere permutabile anche con R_2f, dopo di che è evidente, che si può scrivere l'ultima equazione.

Ma $R_{14}f$ rispetto ad R_{t+2} appartiene al fattore 2, $R_{24}f$ al fattore 0: dunque $(R_{14}R_{24})$ rispetto ad $R_{t+2}f$ deve appartenere al fattore 2, onde

$$\beta_2 = \dots = \beta_t = 0$$

ed

$$(R_{14}R_{24}) = \beta R_1f.$$

Analogamente si trova

$$(R_{15}R_{25}) = \gamma R_1f \ , \quad (R_{14}R_{25}) = \delta R_1f \ ,$$

solo che per quest'ultima bisogna osservare, che è permutabile con R_1f non essendoci nel gruppo, per ipotesi, rotazioni che rispetto ad R_1f appartengano al fattore 4, ed $R_{14}f$, $R_{25}f$, appartenendo d'altra parte, sempre rispetto ad R_1f, ambedue al fattore 2.

Ed ora basta scrivere altre identità Jacobiane per trovare, $\beta = \gamma = -2$, $\delta = 0$, onde ponendo

$$R_{12}f = R_1f \ , \quad R_{45}f = -R_2f \ , \quad R_{23}f = R_{t+1}f \ , \quad R_{13}f = R_{t+2}f,$$

si ha

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &(R_iR_{kl}) = 0 \qquad (i = 3, \dots, t\,;\ k, l = 1, \dots, 5\,;\ k \neq l),\\ &(R_{im}R_{kl}) = 2\left\{-\varepsilon_{ik}R_{ml}f + \varepsilon_{il}R_{mk}f + \varepsilon_{mk}R_{il}f - \varepsilon_{ml}R_{ik}f\right\}\\ &\qquad (i, m, k, l = 1, \dots, 5\,;\ i \neq m\,;\ k \neq l). \end{aligned}\right.$$

Se si osserva che non può esistere una relazione tra rotazioni, che rispetto ad una stessa appartengano a fattori diversi, senza che sieno nulle separatamente le parti costituite da quelle rotazioni, che rispetto alla considerata appartengono allo stesso fattore, dalla composizione risulta immediatamente, che le $t+8$ rotazioni, che figurano nelle (34) sono certo indipendenti.

Ne viene il teorema:

Se in un gruppo G_r, *che contiene un* G_t *abeliano non contenuto in nessun* G_{t+1} *pure abeliano del gruppo, si prendon le rotazioni infinitesime conforme al teorema del n. 33, ed* $R_{t+3}f, \dots, R_{t+2s}f$ *rispetto ad* $R_1 f$ *appartengono tutte al fattore* 0 *o al fattore* 2, *e non tutte al primo di questi due fattori, è* $s \geq 4$ *ed il gruppo contiene un* G_{t+8} *della composizione* (34).

41. Consideriamo ora il caso, che $R_{t+3}f, \dots, R_{t+2s}f$ (colle solite notazioni) sien tutte permutabili con $R_1 f$. Allora le uniche rotazioni, che non sono permutabili con $R_1 f$ sono $R_{t+1}f$ ed $R_{t+2}f$, quindi le alternate tra $R_{t+1}f$ od $R_{t+2}f$ ed una qualunque delle rotazioni $R_{t+3}f, \dots, R_{t+2s}f$ dovendo rispetto ad $R_1 f$ appartenere al fattore 2 (n. 35), ne viene per es.

$$(R_{t+3}\, R_{t+1}) = \alpha\, R_{t+1}f + \beta\, R_{t+2}f.$$

Ma ora osserviamo, che, per la solita ragione, $R_{t+3}f$ non può essere permutabile con $R_2 f, \dots, R_t f$: se noi quindi supponiamo, che rispetto ad $R_2 f$ appartenga al fattore $\rho \neq 0$, come possiamo sempre, anche l'alternata $(R_{t+3}\, R_{t+1})$, se non è nulla, deve rispetto ad $R_2 f$ appartenere al fattore ρ, essendo R_{t+1} permutabile con $R_2 f$. Ma questo caso non è possibile, perchè, come abbiamo ora detto, $R_{t+1}f$, e così $R_{t+2}f$, son permutabili con $R_2 f$. Deve dunque essere

$$(R_{t+3}\, R_{t+1}) = 0\,.$$

In generale si avrà dunque $(R_{t+1}\, R_{t+k}) = (R_{t+2}\, R_{t+k}) = 0$ $(k=3, \dots, 2s)$. Ma allora le rotazioni $R_2 f, \dots, R_t f$, $R_{t+3}f, \dots, R_{t+2s}f$ formano un gruppo, poichè, essendo esse tutte permutabili tanto con $R_1 f$, che con $R_{t+1}f$ e con $R_{t+2}f$, anche le loro alternate devono essere permutabili con quelle tre rotazioni, e perciò in esse tali tre rotazioni non possono figurare. Dunque:

Se nelle ipotesi stesse del teorema precedente, $R_{t+3}f, \dots, R_{t+2s}f$ *son tutte permutabili con* $R_1 f$, *lo sono ancora con* $R_{t+1}f$ *ed* $R_{t+2}f$ *ed il gruppo ha per rotazioni infinitesime quelle di un* G_3 *non* *abeliano, e quelle di un* G_{t+2s-3} *(contenente un* G_{t-1} *abeliano) di rotazioni tutte permutabili con quelle del* G_3.

Se in particolare $s > 1$, il G_{t+2s-3} conterrà un $G_{(t-1)+2}$, che insieme al G_3, darà un G_{t+4} contenuto nel gruppo dato: dunque

Se nelle ipotesi tutte del teorema precedente, è $s > 1$ *il gruppo contiene un* G_{t+4} *(contenente a sua volta il* G_t*).*

42. Veniamo ora all'altro caso, che cioè le $R_{t+3}f, \dots, R_{t+2s}f$ rispetto ad $R_1 f$ appartengano tutte al fattore 1. Allora conforme a quanto vedemmo nel n. 37 si può supporre

$$\begin{aligned}
&(R_{t+1} R_{t+3}) = R_{t+5} f\ , \quad (R_{t+1} R_{t+4}) = -R_{t+6} f,\\
&(R_{t+2} R_{t+3}) = R_{t+6} f\ , \quad (R_{t+2} R_{t+4}) = R_{t+5} f,\\
&(R_{t+1} R_{t+5}) = -R_{t+3} f\ , \quad (R_{t+1} R_{t+6}) = R_{t+4} f,\\
&(R_{t+2} R_{t+5}) = -R_{t+4} f\ , \quad (R_{t+2} R_{t+6}) = -R_{t+3} f,\\
&(R_1 R_{t+3}) = R_{t+4} f\ , \quad (R_1 R_{t+4}) = -R_{t+3} f,\\
&(R_1 R_{t+5}) = R_{t+6} f\ , \quad (R_1 R_{t+6}) = -R_{t+5} f.
\end{aligned}$$

Siccome poi più in generale è

$$(R_i R_{t+3}) = a_i R_{t+4} f\ , \quad (R_i R_{t+4}) = -a_i R_{t+3} f \qquad (i = 2, \dots, t),$$

da altre identità Jacobiane si ricava subito, che prendendo delle convenienti combinazioni lineari delle $R_2 f, \dots, R_t f$ per nuove $R_2 f$, $R_3 f$, si può porre:

$$\begin{aligned}
&(R_{t+3} R_{t+4}) = \alpha R_1 f + \alpha_1 R_2 f\ , \quad (R_{t+5} R_{t+6}) = \alpha R_1 f + \alpha_1 R_2 f\ ,\\
&(R_{t+3} R_{t+5}) = \alpha R_{t+1} f + \beta R_2 f + \beta_1 R_3 f,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(R_{t+3} R_{t+6}) = \alpha R_{t+2} f + \gamma R_2 f + \gamma_1 R_3 f\ , \quad (R_{t+4} R_{t+5}) = \alpha R_{t+2} f - \gamma R_2 f - \gamma_1 R_3 f,\\
&(R_{t+4} R_{t+6}) = -\alpha R_{t+1} f + \beta R_2 f + \beta_1 R_3 f.
\end{aligned}$$

Tali formule valgono ancora nel caso di $t = 2$, purchè vi si supponga $\beta_1 = \gamma_1 = 0$.

Ed ora dalle identità del tipo di quelle tra $R_2 f$, $R_{t+1} f$ ed $R_{t+3} f$ si ottiene

$$\begin{aligned}
&(R_2 R_{t+5}) = a_2 R_{t+6} f\ , \quad (R_2 R_{t+6}) = -a_2 R_{t+5} f\ ,\\
&(R_3 R_{t+5}) = a_3 R_{t+6} f\ , \quad (R_3 R_{t+6}) = -a_3 R_{t+5} f
\end{aligned}$$

dopo di che altre identità come quella tra $R_{t+3}f$, $R_{t+4}f$, $R_{t+5}f$ ci dànno

$$3\alpha = \alpha_1 a_2 \quad \text{e o} \quad a_2 = a_3 = 0 \quad \text{o} \quad \beta = \beta_1 = \gamma = \gamma_1 = 0 .$$

Ma non può essere $a_2 = 0$, perchè venendone anche $\alpha = 0$, se fosse $\alpha_1 \neq 0$, $R_2 f$, $R_{t+3}f$, $R_{t+4}f$, formerebbero un G_3 di composizione diversa da quelle che abbiamo visto essere le sole possibili (n. 30), e se fosse $\alpha_1 = 0$ sarebbero nelle stesse condizioni le rotazioni $R_1 f$, $R_{t+3}f$, $R_{t+4}f$. Dunque si potrà supporre $a_2 \neq 0$, quindi $\beta = \beta_1 = \gamma = \gamma_1 = 0$. Dall'equazione

$$(R_{t+3}\, R_{t+6}) = \alpha\, R_{t+2} f$$

viene in forza delle precedenti

$$\big(R_{t+3}\, (R_{t+3}\, R_{t+2})\big) = -\alpha\, R_{t+2} f ;$$

perciò $\alpha > 0$ (n. 22). Ponendo al posto di $R_2 f$, $R_{t+3}f$ rispettivamente $\frac{1}{a_2} R_2 f$, $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} R_{t+3} f$ pur di modificare convenientemente le altre rotazioni si riduce $\alpha = 1$, $a_2 = 1$; quindi anche $\alpha_1 = 3$. Infine sostituendo ad $R_i f$ $(i = 3, \ldots, t)$, $R_i f - a_i R_2 f$ si ottiene che le $R_i f$ $(i = 3, \ldots, t)$ diventino permutabili anche con $R_{t+3}f$, $R_{t+4}f$; essendolo già con $R_{t+1}f$ ed $R_{t+2}f$ ne viene, che allora saran permutabili anche con $R_{t+5}f$ ed $R_{t+6}f$. Sicchè le $t+6$ rotazioni $R_1 f, \ldots, R_{t+6}f$ formano un gruppo che diciamo essere un G_{t+6}, ossia le $t+6$ rotazioni considerate son tutte tra loro indipendenti. Infatti se esistesse una relazione tra esse, tale relazione non potrebbe essere, che tra quelle rotazioni, che rispetto ad $R_1 f$ appartengono allo stesso fattore. Ma ora quelle permutabili con $R_1 f$ son quelle del G_t , che abbiamo supposte indipendenti; quelle che appartengono al fattore 2 sono solo $R_{t+1}f$ ed $R_{t+2}f$ e queste pure son indipendenti tra loro. Dunque se c'è una relazione tra le $t+6$ rotazioni questa deve essere del tipo

$$a\, R_{t+3}f + b\, R_{t+4}f = c\, R_{t+5}f + d\, R_{t+6}f$$

e nessuno dei due membri può essere nullo separatamente, perchè se $R_{t+4}f$ non differisse, che di una costante da $R_{t+3}f$, questa ed

$R_1 f$, formando un G_2, dovrebbero esser permutabili contro l'ipotesi. Ma d'altra parte rispetto ad $R_{t+3}f$ il secondo membro dà una rotazione che appartiene al fattore 1, lo stesso deve dunque avvenire del primo membro, ciò che porta $a=b=0$, come subito si vede scrivendo quella condizione: si ricade perciò nel caso ora escluso.

Perciò le $t+6$ rotazioni sono indipendenti e formano un G_{t+6}: per dare alla composizione di questo una forma più comoda e più simmetrica, poniamo

$$S_i f = R_{i+2}f \ (i=1,\dots,t-2)\ ,\ R_{12}f = R_{t+4}f\ ,\ R_{23}f = R_{t+6}f\ ,\ R_{13}f = -R_{t+1}f,$$

$$R'_{12}f = R_{t+3}f\ ,\ R'_{13}f = R_{t+2}f\ ,\ R'_{23}f = R_{t+5}f\ ,$$

$$R''_{12}f = \frac{1}{2}(R_1 f + 3R_2 f)\ ,\ R''_{23}f = \frac{1}{2}(R_1 f - 3R_2 f)\ ,\ R''_{13}f = R_1 f$$

Tra le $t+7$ rotazioni passa la relazione

$$R''_{23}f = R''_{13}f - R''_{12}f,$$

ed il G_{t+6} acquista la composizione

$$(35)\quad \begin{cases} (S_i R_{lk}) = (S_i R'_{lk}) = (S_i R''_{lk}) = (S_i S_j) = 0\ (i,j=1,\dots,t-2\,;\ l,k=1,2,3\,;\ l \neq k) \\ (R_{ik}R''_{ik}) = 2R'_{ik}f,\ (R''_{ik}R'_{ik}) = 2R_{ik}f,\ (R'_{ik}R_{ik}) = 2R''_{ik}f\ ,\ (R''_{ik}R''_{lm}) = 0 \\ (R_{ik}R_{lm}) = -\varepsilon_{il}R_{km}f + \varepsilon_{im}R_{kl}f + \varepsilon_{kl}R_{im}f - \varepsilon_{km}R_{il}f\ , \\ (R_{ik}R'_{lm}) = -\varepsilon_{il}R'_{km}f + \varepsilon_{im}R'_{kl}f - \varepsilon_{kl}R'_{im}f + \varepsilon_{km}R'_{il}f\ , \\ (R'_{ik}R'_{lm}) = -\varepsilon_{il}R_{km}f - \varepsilon_{im}R_{kl}f - \varepsilon_{kl}R_{im}f - \varepsilon_{km}R_{il}f\ , \\ (R_{ik}R''_{lm}) = (\varepsilon_{il} - \varepsilon_{im} - \varepsilon_{kl} + \varepsilon_{km})R'_{ik}f\ ,\ (R'_{ik}R''_{lm}) = (-\varepsilon_{il} + \varepsilon_{im} + \varepsilon_{kl} - \varepsilon_{km})R_{ik}f \end{cases}$$

$$(i,k,l,m = 1,2,3\ ;\ i \neq k\ ;\ l \neq m)\,.$$

Dunque

Supposte verificate le condizioni del teorema del n. 35, se $R_{t+3}f, \dots, R_{t+2s}f$ *rispetto ad* $R_1 f$ *appartengono tutte al fattore 1 è certo* $s \geq 3$, *ed il* G_{t+2s} $(t \geq 2)$ *contiene almeno un* G_{t+6} *della composizione (35).*

43. Da quanto abbiamo visto si trae facilmente anche la composizione dei G_{t+4} e dei G_{t+6}, che contengono un G_t abeliano, ma nessun G_{t+1} abeliano. Cominciamo dai G_{t+4}: colle solite notazioni

$R_{t+3}f$ ed $R_{t+4}f$ non possono rispetto ad $R_1 f$ appartenere a un fattore diverso da zero, poichè in tal caso a quel fattore ne dovrebbero appartenere 4, fuori del solito G_{t+2} (n. 37 e 38). Ma allora essendo verificate le ipotesi del n. 41 il gruppo ha per rotazioni infinitesime quelle di un G_3 e quelle di un G_{t+1} di rotazioni tutte permutabili con quelle del G_3. Siccome questo G_{t+1} contiene un G_{t-1} abeliano, così abbiamo (n. 31):

Per ogni G_{t+4}, *che contiene un* G_t *abeliano, ma non un* G_{t+1} *pure abeliano, è* $t \geq 2$ *e si posson prendere per rotazioni infinitesime del gruppo quelle di un* G_{t-2} *abeliano e quelle di due* G_3 *non abeliani tali, che ogni rotazione di uno qualunque di quei tre sottogruppi sia permutabile con tutte quelle degli altri due.*

Per i G_{t+6} si arriva pure facilmente al risultato. Intanto si potrà supporre $t \geq 2$, non potendo, come sappiamo, darsi il caso di $t=1$ (n. 39). Tra le rotazioni $R_{t+3}f, \dots, R_{t+6}f$, ce ne deve essere qualcuna che rispetto ad $R_1 f$ appartiene al fattore 0 o al fattore 1 (n. 37 e 38). Se ce n'è una che appartiene al fattore 1, ce ne devono essere 4 (n. 37), cioè tutte devono appartenere a quel fattore, ed il gruppo ha la composizione (35) (n. 42). Nel caso, che nessuna appartenga al fattore 1 devono appartenere tutte a fattori pari o nulli: ma a fattori diversi da zero non potrebbero allora appartenere, se no nel gruppo fuori del G_{t+2}, ci dovrebbero essere 4 rotazioni, che appartenessero a quel fattore e due permutabili. Dunque $R_{t+3}f, \dots, R_{t+6}f$ in questo caso son tutte permutabili con $R_1 f$; ma allora il gruppo ha per rotazioni infinitesime quelle di un G_3 e quelle di un G_{t+3}, che contiene un G_{t-1} abeliano. Per il teorema precedente si ha dunque:

I G_{t+6} $(t \geq 2)$ *di rotazioni che contengono dei* G_t *abeliani, ma non dei* G_{t+1} *abeliani, possono essere di due specie; cioè*

1.° Avere per rotazioni infinitesime quelle di un G_{t-3} *abeliano, e quelle di tre* G_3 *non abeliani, tali che le rotazioni di ciascuno di quei sottogruppi sien permutabili con tutte quelle degli altri tre; o*

2.° Avere la composizione (35).

Il primo caso però può darsi solo se $t \geq 3$.

44. Come casi particolari di questi teoremi e di quello del n. 32

si avrebbero le composizioni dei G_6, G_7, G_8, G_9, rammentando solo che per essi non può essere $t = 1$. Diamo solo il risultato per i G_6, poichè dovremo richiamarlo in seguito: si ha per essi:

I G_6 *di rotazioni hanno per rotazioni infinitesime quelle di due* G_3, *tali che le rotazioni dell'uno son permutabili con quelle dell'altro.*

Se nessuno dei due G_3 è abeliano, il G_6 contiene solo dei G_2 abeliani, se lo è uno, contiene anche dei G_4, se infine lo son tutte e due è abeliano.

Consideriamo il caso, che nessuno dei due sia abeliano: gli si potrà dare la composizione

$$(R_1 R_2) = 2 R_3 f\,,\ (R_2 R_3) = 2 R_1 f\,,\ (R_3 R_1) = 2 R_2 f\,,\ (R_4 R_5) = 2 R_6 f,$$
$$(R_5 R_6) = 2 R_4 f\,,\ (R_6 R_4) = 2 R_5 f\,,\ (R_i R_k) = 0\ (i=1\,,2\,,3\,;k=4\,,5\,,6)\ ;$$

ma gli si può dare un'altra composizione che c'importa notare: ponendo

$$(36)\ \begin{cases} R_{12} f = R_1 f + R_4 f\,,\ R_{23} f = R_2 f + R_5 f\,,\ R_{13} f = R_3 f + R_6 f\,, \\ R_{24} f = R_3 f - R_6 f\,,\ R_{14} f = -R_2 f + R_5 f\,,\ R_{34} f = -R_1 f + R_4 f\,, \end{cases}$$

il G_6 acquista la composizione

$$(36^*)\ \begin{cases} (R_{ik} R_{lm}) = 2 \{ -\varepsilon_{il} R_{km} f + \varepsilon_{im} R_{kl} f + \varepsilon_{kl} R_{im} f - \varepsilon_{km} R_{il} f \} \\ \qquad (i\,, k\,, l\,, m = 1\,, 2\,, 3\,;\ i \neq k\,;\ l \neq m)\,. \end{cases}$$

45. Ed ora premessi questi casi particolari ci possiamo avviare alla dimostrazione di un teorema fondamentale per il seguito. Per questo occorre premettere innanzi tutto un'osservazione importante: dai teoremi dei n. 34 e 35, segue, che ritenendo lo zero come multiplo di qualunque numero, se noi consideriamo due rotazioni, che rispetto ad una data appartengono a fattori multipli di un numero fisso, l'alternata delle prime due è somma di due rotazioni, che rispetto a quella stessa appartengono a fattori multipli di quel medesimo numero fisso. Perciò se noi consideriamo le rotazioni permutabili con una fissa, e quelle che rispetto a quest'ultima appartengono a fattori multipli di un numero dato esse forman gruppo.

In particolare:

Preso in un gruppo G_r *una rotazione* $R_1 f$, *le rotazioni del gruppo* *permutabili con* $R_1 f$, *e quelle che rispetto ad* $R_1 f$, *appartengono al fattore più grande generano un sottogruppo del gruppo dato.*

46. Dimostriamo ora il seguente lemma.

Ogni G_r *di rotazioni, che contenga un* G_t *abeliano ma nessun* G_{t+1} *pure abeliano, se* $r > t+2$, *contiene o un* G_{t+6} *o un* G_{t+4} *contenente alla sua volta il* G_t.

Sappiamo, che deve essere $r = t + 2s$ (n. 29). Il teorema è certo vero per $s = 2, 3$: potremo dunque supporlo dimostrato per i $G_{t+4}, G_{t+6}, \dots, G_{t+2(s-1)}$ e dimostrarlo per i G_{t+2s}. Allora preso nel gruppo un G_{t+2} nel modo solito indicato nel n. 33, potrà darsi che rispetto ad $R_1 f$ le rotazioni $R_{t+3} f, \dots, R_{t+2s} f$ appartengano tutte a fattori ≤ 2, o no. In questo secondo caso consideriamo le rotazioni permutabili con $R_1 f$, e quelle che rispetto ad $R_1 f$ appartengono al massimo fattore, e che sono almeno 4: siccome tra quelle permutabili si hanno anche quelle del G_t abeliano si ha così un sottogruppo $G_{r'}$ del G_r ed è $r' \geq t + 4$: Di più $r' < r$, perchè se non altro $R_{t+1} f$ ed $R_{t+2} f$ vengono escluse dal $G_{r'}$: per quanto abbiamo ammesso il $G_{r'}$ contiene almeno un G_{t+4} o un G_{t+6}, ed il lemma in questo caso è completamente dimostrato.

Resta dunque da esaminare il caso, che $R_{t+3} f, \dots, R_{t+2s} f$ appartengano rispetto ad $R_1 f$ tutte a fattori ≤ 2: se supponiamo, che $R_{t+2i-1} f$, $R_{t+2i} f$ appartengano al fattore ρ_i $(i = 2, \dots, s)$, potremo poi supporre anche $\rho_2 = \dots = \rho_{s_1} = 0$, $\rho_{s_1+1} = \dots = \rho_{s_2} = 2$, $\rho_{s_2+1} = \dots = \rho_s = 1$ $(s_1 \leq s_2 \leq s)$. Consideriamo dapprima il caso di $s_1 < s_2$. Le rotazioni $R_1 f, \dots, R_{t+2s_2} f$ per il numero precedente formano allora un gruppo, che soddisfa alle condizioni del n. 40 e che quindi contiene un G_{t+8} della composizione (34); ma se di questo G_{t+8} trascuriamo $R_{13} f, R_{23} f, R_{34} f, R_{35} f$ le altre generano un G_{t+4} nelle condizioni volute. Se poi $1 < s_1 = s_2$, $R_1 f, \dots, R_{t+2s_1} f$ generano pure un gruppo, che per il n. 41 contiene certo un G_{t+4}. Infine se $s_1 = s_2 = 1$, siamo nelle ipotesi del n. 42 ed il gruppo contiene un G_{t+6} della composizione (35). Il lemma è così completamente dimostrato.

47. Veniamo ora al teorema, cui volevamo arrivare e che è il seguente:

Ogni gruppo G_r *di rotazioni, che contenga un* G_t *abeliano, ma* *nessun* G_{t+1} *pure abeliano, onde* $r = t + 2s$, *contiene anche un* G_{t+6} *della composizione* (35) *o un* G_{t+8} *della composizione* (34) *ammenochè sia* $t \geq s$ *ed il gruppo abbia per rotazioni infinitesime quelle di un* G_{t-s} *abeliano e quelle di* s G_3 *non abeliani, e tali, che le rotazioni di uno qualunque di quei sottogruppi sien permutabili con tutte quelle degli altri.*

Prendiamo nel gruppo nel solito modo un $G_{t+2} \equiv (R_1, R_2, \dots, R_{t+2})$, poi consideriamo nel gruppo stesso quelle rotazioni, che supporremo essere $R_{t+3}f, \dots, R_{t+2s_1}f$ oltre $R_2 f, \dots, R_t f$, che son permutabili con $R_1 f$, $R_{t+1} f$, $R_{t+2} f$. Tali rotazioni formano un gruppo, poichè l'alternata di due di esse è ancora permutabile con $R_1 f$, $R_{t+1} f$, $R_{t+2} f$, e quindi per la composizione di questo G_3 non possono in tale alternata figurare quelle tre rotazioni. Se $s_1 > 1$, questo G_{t+2s_1-3} contenendo un G_{t-1} abeliano, ma non un G_t abeliano, conterrà un $G_{t+1} \equiv (R_2, \dots, R_t, R_{t+3}, R_{t+4})$ analogo al G_{t+2} di dianzi. Prendiamo ora nel G_{t+2s_1-3} le rotazioni $R_3 f, \dots, R_t f$, $R_{t+5} f, \dots, R_{t+2s_2}$, che son permutabili con $R_2 f$, $R_{t+3} f$, $R_{t+4} f$: esse formeranno un G_{t+2s_2-6}, che se $s_2 > 2$ conterrà un $G_t \equiv (R_3, \dots, R_t, R_{t+5}, R_{t+6})$ analogo al G_{t+2}. Proseguiamo ora in maniera analoga fino ad arrivare ad un gruppo abeliano: se il processo si sarà ripetuto q volte $(q \leq t)$ troveremo così un $G_{t+2q} \equiv (R_1, \dots, R_{t+2q})$ $(q \leq s)$ di composizione

$$(R_i R_{t+2i-1}) = 2R_{t+2i} f, \; (R_i R_{t+2i}) = -2R_{t+2i-1} f, \; (R_{t+2i-1} R_{t+2i}) = 2R_i f,$$

$$(R_k R_l) = 0, \; (R_k R_{t+2i-1}) = (R_k R_{t+2i}) = 0,$$

$$(R_{t+2i-1} R_{t+2m-1}) = (R_{t+2i-1} R_{t+2m}) = 0 \; (i, m = 1, \dots, q; k, l = 1, \dots, t; i \neq k; i \neq m).$$

Naturalmente potrà darsi, che nel gruppo si trovino diversi gruppi di composizione uguale alla precedente e contenenti il G_t, ma noi supporremo, che quello, che consideriamo, corrisponda per il dato G_r al massimo valore di q, ciò che non limita la natura del G_r, ma solo la scelta di quel sottogruppo.

Se $q = 1$ il teorema si dimostra subito: poichè il G_r non può contenere un G_{t+4} (che corrisponderebbe a $q = 2$), esso o è un G_{t+2} o contiene un G_{t+6} della composizione (35) (n. precedente): rammentando dunque la composizione dei G_{t+2} con un G_t abeliano si vede così, che il teorema in questo caso vale.

Potremo dunque supporre di aver dimostrato il teorema per $q=1, 2, \ldots, p-1$ e dimostrarlo per $q=p$. Per $s=p$ il teorema è evidente; il G_{t+2p}, che coincide allora col G_t avendo la composizione voluta dalla terza ipotesi del teorema. Possiamo dimostrare subito che non può essere $s=p+1$: infatti allora essendoci due sole rotazioni, oltre il G_{t+2p}, esse devono essere permutabili con $R_1 f$ (n. 37, 38), onde il gruppo ha per rotazioni quelle del $G_3 \equiv (R_1 R_{t+1} R_{t+2})$ e quelle di un G_{t+2p-1} di rotazioni tutte permutabili con quelle del G_3. Ora questo non può avere la composizione sopra indicata, se no esso insieme al G_3 darebbe un gruppo per cui risulterebbe $q=p+1$, contro l'ipotesi. Il G_{t+2p-1} corrisponderebbe dunque al valore $p-1$ di q, e perciò dovrebbe verificare il teorema, ciò che evidentemente è assurdo.

Visto ciò potremo supporre di aver dimostrato che per $s=p$, $p+1$, $p+2, \ldots, p+u-1$, il teorema vale, tutte le volte, che esistono dei gruppi corrispondenti, e dimostrare la stessa cosa per $s=p+u$.

Non c'è da far altro, che ripetere il ragionamento stesso del n. precedente. Se $R_{t+2p+1} f, \ldots, R_{t+2s} f$ rispetto ad $R_1 f$ non appartengono tutte a fattori ≤ 2, prendiamo quelle (almeno 4), che appartengono al massimo di quei fattori e quelle permutabili con $R_1 f$. Esse formeranno un gruppo, e tra esse ci saran di certo $R_1 f, \ldots, R_t f$, $R_{t+3} f, \ldots, R_{t+2p}$ ed altre 4 onde il gruppo avrà almeno $t+2p+2$ rotazioni. Per tale gruppo, che esiste certamente, se si dànno le ipotesi fatte, q ha al massimo il valore p, onde avendo esso al massimo $t+2s-2$ parametri, poichè non vi figurano $R_{t+1} f$ e $R_{t+2} f$, per le ipotesi fatte deve valere il teorema ed il gruppo, e quindi anche il G_r dato, deve contenere un G_{t+6} o un G_{t+8} delle composizioni volute, non potendo darsi la terza ipotesi, poichè per questo occorrerebbe esso fosse un G_{t+2p} soltanto.

Veniamo all'altro caso: indicando con ρ_i il fattore cui rispetto ad $R_1 f$ appartengono $R_{t+2i-1} f$ ed $R_{t+2i} f$ $(i=p+1, \ldots, s)$ supponiamo

$$\rho_{p+1} = \ldots = \rho_{p+u_1} = 0\,,\ \rho_{p+u_1+1} = \ldots = \rho_{p+u_2} = 2\,,\ \rho_{p+u_2+1} = \ldots = {}_{p+u}\rho = 1$$
$$(u_1 \leq u_2 \leq u).$$

Se $u_2 > u_1$ le rotazioni $R_1 f, \dots, R_{t+2p+2u_2} f$ formano un gruppo di quelli considerati al n. 40, cioè un gruppo che contiene un G_{t+8} della composizione (34).

Se $u_2 = u_1 \geq 1$, $R_1 f, \dots, R_{t+2p+2u_1} f$ formano ancora un gruppo che avrà per rotazioni infinitesime quelle di un G_3 e quelle di un $G_{t+2p+2u_1-3}$ di rotazioni permutabili tutte con quelle del G_3. Per questo gruppo q avrà un valore $\geq p-1$; ma possiamo escludere subito il segno di $>$, chè se avesse il valore p, il G_{t-1+2p}, che si potrebbe trovare in esso, insieme al G_3 genererebbe un G_{t+2p+2} della composizione indicata, contro quanto abbiamo supposto: ma allora tal $G_{t+2p+2u_1-3}$, che esiste certamente se son verificate le ipotesi da noi fatte, deve verificare il teorema e contenere o un G_{t+8} o un G_{t+6} delle composizioni indicate, ed il teorema anche in questo caso vale certamente.

Infine se $u_1 = u_2 = 0$ il gruppo dato è nelle condizioni del n. 42 e perciò contiene un G_{t+6} della composizione (35).

Il teorema è così completamente dimostrato.

48. Un corollario immediato di questo teorema è il seguente:

Ogni gruppo di rotazioni contiene un G_8 *della composizione* (35) *o un* G_{10} *della composizione* (34), *oppure ha per rotazioni infinitesime quelle di un gruppo abeliano e quelle di varî* G_3, *tali che le rotazioni di ciascuno di questi sottogruppi sono permutabili con tutte quelle degli altri.*

49. Ma possiamo precisare ancora di più il teorema precedente dimostrando che

Ogni gruppo di rotazioni contiene un G_8 *della composizione* (35), *o ha per rotazioni infinitesime quelle di un gruppo abeliano, e quelle di varii* G_3 *e* G_{10} *della composizione* (34), *tali che le rotazioni di ciascuno di questi sottogruppi sono permutabili con tutte quelle degli altri.*

Per il numero precedente basterà che noi dimostriamo, che i gruppi, che contengono almeno un G_{10}, ma nessun G_8 sono nelle condizioni della seconda ipotesi. Ora il teorema è vero certamente per i G_{10} e per i G_{11}: per questi ultimi basta osservare, che preso nel G_{11} il G_{10}, che supponiamo esistere, e datagli la solita composizione, se la rimanente rotazione Sf non fosse permutabile con tutte quelle del G_{10}, e fosse per es. $(R_{12}S) \neq 0$ si potrebbe supporre, che Sf rispetto ad $R_{12}f$ appartenesse ad un certo fattore a, dopo di che sarebbe

$$(R_{12}S) = a\,S_1 f \;,\quad (R_{12}S_1) = -a\,Sf\,,$$

ed $S_1 f$ per la seconda di queste relazioni sarebbe certamente indipendente e da Sf e dal G_{10} per cui il gruppo non potrebbe essere un G_{11}. Ed ora se la Sf è permutabile con tutte quelle del G_{10}, siamo appunto nel caso detto.

Potremo dunque supporre di aver dimostrato il teorema per i gruppi con meno di r parametri, e dimostrarlo per quelli con r parametri.

Sia G_r uno di questi gruppi e supponiamo, come potremo sempre fare, di poter prendere nel gruppo p_1 G_{10} della solita composizione (per l'ipotesi sarà sempre $p_1 \geq 1$), p_2 G_3 ed un G_{p_3} abeliano tali, che le rotazioni di ciascuno di questi $p_1 + p_2 + 1$ sottogruppi sien permutabili con tutte quelle degli altri: potremo poi supporre, che nel G_r non ci sia nessun gruppo con più di $10p_1 + 3p_2 + p_3$ parametri nelle condizioni del precedente. Tutto questo non limita evidentemente la generalità del problema: orbene noi ora dovremo dimostrare, che è $r = 10p_1 + 3p_2 + p_3$.

Supponiamo, che posto $\mu = 10p_1 + 3p_2 + p_3$, sia $r > \mu$, ed indichiamo con $S_1 f, \ldots, S_{r-\mu} f$ le rotazioni fuori del G_μ. Prendiamo poi uno dei G_{10} e diamogli la composizione (34), chiamandone al solito $R_{ik} f$ $(i, k = 1, \ldots, 5; i \neq k)$ le rotazioni. Noi dimostreremo ora che le $S_i f$ devono essere permutabili con quelle del G_{10}, altrimenti nel G_r esisterebbe un G_{r_1} con $\mu < r_1 < r$, che non contenendo G_8 sarebbe nelle condizioni del G_μ contro le ipotesi fatte. Ma allora il G_r ha per rotazioni quelle del G_{10} e quelle di un G_{r-10}, le cui rotazioni son permutabili con quelle del G_{10}: ma questo G_{r-10} è nelle condizioni del G_μ, onde in tali condizioni sarà anche tutto il G_r, e quindi $r = \mu$.

Resta dunque da dimostrare solo, che se le $S_i f$ $(i = 1, \ldots, r-\mu)$ non son tutte permutabili con le $R_{ik} f$ esiste nel G_r un G_{r_1} con $\mu < r_1 < r$. Consideriamo per questo i due G_3, che indicheremo con $G_3^{(1)}$ e $G_3^{(2)}$, e le cui rotazioni sono per l'uno $\frac{1}{2}(R_{12}f+R_{34}f)$, $\frac{1}{2}(R_{13}f-R_{24}f)$, $\frac{1}{2}(R_{23}f+R_{14}f)$, per l'altro $\frac{1}{2}(R_{12}f-R_{34}f)$, $\frac{1}{2}(R_{13}f+R_{24}f)$, $\frac{1}{2}(R_{23}f-R_{14}f)$.

Le $S_i f$, che possiamo supporre irriducibili apparterranno tutte a certi fattori rispetto ad $\frac{1}{2}(R_{12}f+R_{34}f)$ (e così rispetto ad $\frac{1}{2}(R_{12}f-R_{34}f)$): supponiamo dapprima, che tra le $S_i f$, ce ne sieno di quelle, che appartengono a fattori pari o nulli, e consideriamo il G_{r_1} formato dalle rotazioni del G_r, che rispetto ad $\frac{1}{2}(R_{12}f+R_{34}f)$ appartengono a fattori pari o nulli. Sarà $r_1 < r$, perchè almeno le $R_{i1}f$ $(i = 1, \ldots, 4)$ vengon tralasciate appartenendo esse al fattore 1 rispetto a $\frac{1}{2}(R_{12}f+R_{34}f)$; il G_{r_1} conterrà poi il $G_3^{(1)}$, il $G_3^{(2)}$, gli altri G_{10} e G_3 del G_μ non considerati ed il G_{p_3}: contiene dunque un $G_{\mu-4}$ del G_μ. Inoltre se le $S_i f$, che entrano nel G_{r_1} non son tutte permutabili con $\frac{1}{2}(R_{12}f+R_{34}f)$, ce ne saranno tra esse almeno 4 che appartengono al fattore massimo (n. 38): ci sarà poi nel G_r almeno una rotazione permutabile con $\frac{1}{2}(R_{12}f+R_{34}f)$, ma non con le altre due del $G_3^{(1)}$ (sempre per il n. 38), e indipendente dal $G_3^{(1)}$, e quindi anche dal G_μ e questa apparterrà ancora al G_{r_1}. Ne viene, che nel G_{r_1} oltre il $G_{\mu-4}$ ci sono anche almeno 5 delle $S_i f$, onde $r_1 > \mu$, c. d. d.

Se invece le $S_i f$, che entrano nel G_{r_1}, son tutte permutabili con $\frac{1}{2}(R_{12}f+R_{34}f)$ lo devono essere anche con le altre due rotazioni del $G_3^{(1)}$, altrimenti le loro alternate con queste apparterrebbero al fattore 2 rispetto ad $\frac{1}{2}(R_{12}f+R_{34}f)$. Ma ora se tra esse ce n'è una non permutabile con $\frac{1}{2}(R_{12}f-R_{34}f)$, se essa appartiene ad un fattore pari si può ripetere quanto sopra scambiando solo $G_3^{(1)}$ con $G_3^{(2)}$, se appartiene ad un fattore dispari >1, ce ne saranno 4 appartenenti al valore massimo di quel fattore, e 4 appartenenti al fattore 1; le $S_i f$, che entrano nel G_{r_1}, essendo almeno 8, sarebbe ancora $r_1 > \mu$. Se poi ce ne fosse una appartenente al fattore 1, ce ne sarebbero almeno quattro, e quindi perchè non fosse $r_1 > \mu$, dovrebbero le $S_i f$ che entrano nel G_{r_1}, essere solo 4, ed appartenere tutte al fattore 1 rispetto ad $\frac{1}{2}(R_{12}f - R_{34}f)$. Ma allora si potrebbe con poche modificazioni ripetere il ragionamento del n. 42, che porterebbe all'esistenza di un G_8 nel G_{r_1} contro l'ipotesi. Resta dunque solo il caso, che le $S_i f$ del G_{r_1} sien permutabili anche con $\frac{1}{2}(R_{12}f - R_{34}f)$, e quindi, per una ragione già detta sopra, sien permutabili con tutte le rotazioni del $G_2^{(2)}$: caso che si tratterà per ultimo.

Supponiamo ora, che tra le $S_i f$ non ce ne sia nessuna che rispetto ad $\frac{1}{2}(R_{12}f + R_{34}f)$ appartenga a fattori pari o nulli. Se ce n'è una Sf, che appartiene ad un fattore >3, non può essere $(R_{i5}S) = 0$ $(i = 1, \ldots, 4)$, altrimenti la Sf dovrebbe esser permutabile anche colle alternate delle $R_{i5}f$, e quindi con $R_{12}f$ ed $R_{34}f$, contro l'ipotesi ora fatta. Ma allora, se supponiamo $(R_{15}S) \neq 0$, la $(R_{15}S)$ si compone di due parti ciascuna delle quali rispetto ad $\frac{1}{2}(R_{12}f + R_{34}f)$ appartiene ad un fattore pari >2, contro l'ipotesi. Se Sf appartenesse al fattore 3 si potrebbe ripetere ancora il ragionamento: solo bisognerebbe aggiungere, che non potrebbero le $(R_{i5}S)$ essere tutte nulle o combinazioni lineari delle rotazioni del $G_3^{(1)}$, altrimenti la $\frac{1}{2}(R_{12} + R_{34}\,S)$ sarebbe una combinazione lineare delle rotazioni del G_{10}, e non potrebbe perciò la Sf appartenere al fattore 3 rispetto ad $\frac{1}{2}(R_{12}f + R_{34}f)$: ci sarebbe quindi analogamente al caso precedente almeno una rotazione delle $S_i f$ appartenente ad un fattore pari rispetto ad $\frac{1}{2}(R_{12}f + R_{34}f)$.

Se ora la Sf appartenesse al fattore 1 rispetto ad $\frac{1}{2}(R_{12}f + R_{34}f)$ e ad un fattore ∓ 1 rispetto ad $\frac{1}{2}(R_{12}f - R_{34}f)$ basterebbe scambiare il $G_3^{(1)}$ col $G_3^{(2)}$ per rientrare in uno dei casi trattati.

Dunque le rotazioni $S_i f$ $(i = 1, \ldots, r - \mu)$ o son permutabili con le rotazioni del $G_3^{(1)}$ e del $G_3^{(2)}$, o rispetto ad $\frac{1}{2}(R_{12}f + R_{34}f)$ e a $\frac{1}{2}(R_{12}f - R_{34}f)$ appartengono al fattore 1. Se Sf è una rotazione irriducibile che si trova in questo secondo caso, si avrà

$$\frac{1}{2}(R_{12} + R_{34}\ S) = S'f \ , \ \frac{1}{2}(R_{12} + R_{34}\ S') = -Sf \, ,$$

$$\frac{1}{2}(R_{12} - R_{34}\ S) = \pm S'f \ , \ \frac{1}{2}(R_{12} - R_{34}\ S') = \mp Sf \, ,$$

dunque nei due casi

$$(R_{12}S) = 2\, S'f \ , \ (R_{12}S') = -2\, Sf \ , \ (R_{34}S) = (R_{34}S') = 0 \, ,$$

o

$$(R_{12}S) = (R_{12}S') = 0 \ , \ (R_{34}S) = 2\, S'f \ , \ (R_{34}S') = -2\, Sf.$$

Perciò rispetto alla rotazione $R_{12}f$, le altre del gruppo devono appartenere o al fattore 0 o al fattore 2, e quest'ultime devono essere permutabili con $R_{34}f$. Se ce n'è una S_1f non permutabile con $R_{12}f$, avremo (cfr. n. 40)

$$(R_{12}S_1) = 2\, S_2 f \, , \ (R_{12}S_2) = -2\, S_1 \, ,$$

$$(R_{23}S_1) = S_3 f \ , \ (R_{23}S_2) = S_4 f \ , \ (R_{13}S_1) = -S_4 f \ , \ (R_{13}S_2) = S_3 f$$

$$(R_{23}S_3) = -2\, S_1 f + 2\, S_5 f \, , \ (R_{23}S_4) = -2\, S_2 f + 2\, S_6 f \, ,$$

$$(R_{13}S_3) = -2\, S_2 f - 2\, S_6 f \, , \ (R_{13}S_4) = 2\, S_1 f + 2\, S_5 f \, ,$$

$$(R_{23}S_5) = -S_3 f \, , \ (R_{23}S_6) = -S_4 f \, , \ (R_{13}S_5) = -S_4 f \, , \ (R_{13}S_6) = S_3 f$$

$$(R_{12}S_3) = 0 \ , \ (R_{12}S_4) = 0 \ , \ (R_{12}S_5) = -2\, S_6 f \, , \ (R_{12}S_6) = 2\, S_5 f.$$

Di più $S_1 f$ (e così $S_2 f$) dovrà essere permutabile con $R_{34}f$, e così pure con $R_{35}f$ se no scambiando $R_{34}f$ con $R_{35}f$ si ricadrebbe in uno dei casi già esclusi. Si avrà allora

$$(R_{34}S_1)=(R_{34}S_2)=(R_{34}S_5)=(R_{34}S_6)=0 \ , \ (R_{35}S_1)=(R_{35}S_2)=(R_{35}S_5)=(R_{35}S_6)=0 .$$

Se si pone ora

$$R_{26}f=S_1f-S_5f\ ,\ R_{16}f=S_2f+S_6f\ ,\ R_{36}f=-S_3f$$

si ha

$$(R_{12}R_{26})=2R_{16}f\ ,\ (R_{12}R_{16})=-2R_{26}f\ ,\ (R_{12}R_{36})=0\ ,$$
$$(R_{13}R_{26})=0\ ,\ (R_{13}R_{16})=-2R_{36}f\ ,\ (R_{13}R_{36})=2R_{16}f,$$
$$(R_{23}R_{26})=-2R_{36}f\ ,\ (R_{23}R_{16})=0\ ,\ (R_{23}R_{36})=2R_{26}f,$$
$$(R_{34}R_{26})=(R_{34}R_{16})=(R_{35}R_{26})=(R_{35}R_{16})=0 .$$

Perciò la $(R_{26}R_{16})$ deve essere permutabile con $R_{12}f$, $R_{34}f$, $R_{35}f$, ma non con $R_{13}f$, $R_{23}f$, e quindi neanche con $R_{24}f$, $R_{25}f$, $R_{14}f$, $R_{15}f$; se dunque la $(R_{26}R_{16})$ non fosse del G_{10}, essa appartenendo al fattore 2 rispetto ad $R_{13}f$, $R_{24}f$, si ricadrebbe in uno dei casi precedenti: perciò deve essere

$$(R_{26}R_{16})=aR_{12}f.$$

Visto questo a potendosi ridurre $=2$, se si pone anche $(R_{14}R_{16})=-2R_{46}f$, $(R_{15}R_{16})=-2R_{56}f$, le $R_{ik}f$ $(i,k=1,\dots,6;\ i\neq k)$ formano un G_{15} della composizione

$$(R_{ik}R_{lm})=2\left\{-\varepsilon_{il}R_{km}f+\varepsilon_{im}R_{kl}f+\varepsilon_{kl}R_{im}f-\varepsilon_{km}R_{il}f\right\} .$$

Ma allora le rotazioni

$$S_{12}f=\frac{1}{2}(R_{13}f+R_{24}f)\ ,\ S'_{12}f=\frac{1}{2}(R_{14}f-R_{23}f)\ ,\ S''_{12}f=\frac{1}{2}(R_{34}f-R_{12}f),$$

$$S_{13}f=\frac{1}{2}(R_{15}f+R_{26}f)\ ,\ S'_{13}f=\frac{1}{2}(R_{16}f-R_{25}f)\ ,\ S''_{13}f=\frac{1}{2}(R_{56}f-R_{12}f),$$

$$S_{23}f=\frac{1}{2}(R_{35}f+R_{46}f)\ ,\ S'_{23}f=\frac{1}{2}(R_{36}f-R_{45}f)\ ,\ S''_{23}f=\frac{1}{2}(R_{56}f-R_{34}f),$$

formano un G_8 della solita composizione. Dunque neanche questo caso si può dare e le rotazioni S_if devono essere tutte permutabili con $R_{12}f$, e quindi anche con le altre del G_{10} c. v. d.

§ 5.

I G_3 di rotazioni

50. Veniamo ora a cercare la forma canonica, che si può dare ai G_3, cominciando dal caso che il G_3 sia di grado s ed operi solo su $2s$ variabili: osserviamo intanto, che così avremo trovato tutti i gruppi di rotazioni di grado s su $2s$ variabili, perchè questi, come sappiamo (n. 39), si riducono ai G_1 ed ai G_3.

Facciamo però prima un'osservazione generale. Indicando con $R_1 f$, $R_2 f$, $R_3 f$ le rotazioni generatrici del G_3, cui supporremo data la composizione (n. 30) $(R_1 R_2) = 2 R_3 f$, $(R_2 R_3) = 2 R_1 f$, $(R_3 R_1) = 2 R_2 f$ potremo anche supporre, che ad $R_1 f$ si sia data la forma canonica, di avere quindi

$$R_1 f = \frac{1}{2} \sum_{1}^{s}{}_{\nu}\, m_\nu \, Y_{\nu\nu}$$

dove le m son tutte positive (n. 8). Prendiamo allora la più piccola delle m ed indicatala con b_1, consideriamo *tutte* le altre m che hanno la forma b_1+2i o $2i-b_1$ con i intero qualunque. Se b_1 è un numero intero non vi ha luogo a distinguere le due forme, poichè in quel modo si hanno tutte le m le quali son $\equiv b_1 \pmod 2$, e queste m si posson mettere tutte sotto la forma b_1+2i, con i intero e positivo o nullo poichè son maggiori o uguali tutte di b_1. Se supponiamo, che queste m sieno $m_1, \ldots, m_{u_1}$ potremo disporle in modo che al crescere dell'indice non decrescano mai. Allora si avrà

$$R_1 f = \sum_{0}^{p_1}{}_{i}\, (b_1+2i) \sum_{q_i+1}^{q_{i+1}}{}_{\nu}\, Y_{\nu\nu} + \sum_{u_1+1}^{s}{}_{\nu}\, m_\nu \, Y_{\nu\nu} \quad (0=q_0<q_1\leq q_2 \leq \cdots \leq q_{p_1+1}=u_1)$$

dove si capisce bene il significato dei numeri q_i: di più nessuna delle m_ν che figurano nella seconda parte si potrà mettere sotto la forma $b_1 - 2i$, o $2i \pm b_1$, perchè la forma $b_1 - 2i$ è esclusa dal fatto, che la b_1 è la più piccola delle m, e le m delle altre due forme son solo quelle considerate nella prima parte. Notisi che $b_1 > 0$, essendo b_1 un valore delle m, per ipotesi appunto tutte > 0.

Un po' diverso è il caso, che b_1 non sia intero: supponiamo allora, che tutte le m, che hanno la forma $b_1 + 2i$ sieno $m_1, \ldots, m_{u'}$, quelle che hanno la forma $2i - b_1$ sieno $m_{u'+1}, \ldots, m_{u_1}$. Allora cambiando di segno alle variabili $x_{2u'+1}, x_{2u'+3}, \ldots, x_{2u_1-1}$ si cambia di segno anche alle $m_{u'+1}, \ldots, m_{u_1}$, che assumono così la forma $b_1 - 2i$: fatto ciò prendiamo la più piccola in valore algebrico delle nuove quantità $m_1, \ldots, m_{u_1}$ e indichiamola con a_1. Quei coefficienti assumeranno tutti la forma $a_1 + 2i$ con i nullo o intero e positivo. Ed ora si arriva ad una forma simile a quella del caso precedente, solo che ora a_1, è bensì $\neq 0$, essendo a meno del segno uno dei valori delle m, ma può essere anche negativo.

Sulla seconda parte si può ora operare in modo analogo, onde similmente proseguendo si arriva a dare alla $R_1 f$ la forma

$$R_1 f = \sum_1^t {}_l \sum_0^{p_l} {}_i \, (a_l + 2i) \sum_{q_{l,i}+1}^{q_{l,i+1}} {}_\nu \, Y_{\nu\nu}$$

$$(0 = q_{10} < q_{11} \leq q_{12} \leq \cdots \leq q_{1,p_1+1} = q_{20} \leq q_{21} \leq \cdots \leq q_{t,p_t+1} = s),$$

dove le a_l son tali, che la differenza o la somma tra due qualunque di esse non può mai essere un numero intero pari, e quelle a_l, che sono intere, son positive.

51. Supponiamo ora $t = 1$: avremo allora

$$R_1 f = \sum_0^p {}_i \, (a + 2i) \sum_{q_i+1}^{q_{i+1}} {}_\nu \, Y_{\nu\nu} \quad (0 = q_0 < q_1 \leq q_2 \leq \cdots \leq q_{p+1} = s),$$

e se a è intero sarà da supporsi positivo. Dobbiamo distinguere ora due casi $a = 1$ od $a \neq 1$. In questo secondo caso, che sarà quello che tratteremo ora, la somma di due coefficienti non può mai essere $= \pm 2$, poichè ne verrebbe $2a + 2(i+k) = \pm 2$, cioè $a = \pm 1 - (i+k)$, e questo non si può dare, perchè venendone a intero, dovrebbe essere positivo; quindi varrebbe se mai il segno $+$, e sarebbe $i+k=0$, e $a=1$ contro l'ipotesi. Ora poichè $R_2 f$ rispetto ad $R_1 f$ appartiene al fattore 2, in esso posson comparire solo quelle $Z_{\lambda\mu}$ e $W_{\lambda\mu}$ tali che $m_\lambda + m_\mu = \pm 2$, e quelle $X_{\lambda\mu}$ ed $Y_{\lambda\mu}$ tali, che $m_\lambda - m_\mu = \pm 2$ (n. 23). Dall'osservazione fatta or ora viene che nella $R_2 f$ non possono figurare le Z e le W, e che la $R_2 f$ stessa ha la forma

$$R_2 f = \sum_1^p{}_i \sum_{q_{i-1}+1}^{q_i}{}_\lambda \sum_{q_i+1}^{q_{i+1}}{}_\mu (a_{\lambda\mu} X_{\lambda\mu} + d_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}).$$

Corrispondentemente si avrà

$$R_3 f = \sum_1^p{}_i \sum_{q_{i-1}+1}^{q_i}{}_\lambda \sum_{q_i+1}^{q_{i+1}}{}_\mu (d_{\lambda\mu} X_{\lambda\mu} - a_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu})$$

ed

$$(R_2 R_3) = \sum_1^p{}_i \sum_{q_{i-1}+1}^{q_i}{}_\lambda \sum_{q_i+1}^{q_{i+1}}{}_{\mu\nu} \left\{ (a_{\lambda\mu} a_{\lambda\nu} + d_{\lambda\mu} d_{\lambda\nu}) Y_{\mu\nu} + (a_{\lambda\nu} d_{\lambda\mu} - a_{\lambda\mu} d_{\lambda\nu}) X_{\mu\nu} \right\} +$$

$$+ \sum_1^p{}_i \sum_{q_{i-1}+1}^{q_i}{}_{\mu\nu} \sum_{q_i+1}^{q_{i+1}}{}_\lambda \left\{ (a_{\nu\lambda} d_{\mu\lambda} - a_{\mu\lambda} d_{\nu\lambda}) X_{\mu\nu} - (a_{\mu\lambda} a_{\nu\lambda} + d_{\mu\lambda} d_{\nu\lambda}) Y_{\mu\nu} \right\}.$$

Siccome deve essere $(R_2 R_3) = 2 R_1 f$, così ne viene

$$(37) \quad \sum_{q_{p-1}+1}^{q_p}{}_\lambda (a_{\lambda\mu} a_{\lambda\nu} + d_{\lambda\mu} d_{\lambda\nu}) = 0 \;, \quad \sum_{q_{p-1}+1}^{q_p}{}_\lambda (a_{\lambda\nu} d_{\lambda\mu} - a_{\lambda\mu} d_{\lambda\nu}) = 0 \,,$$
$$(\mu, \nu = q_p + 1, \ldots, q_{p+1} ; \mu \neq \nu) ;$$

$$(38) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{q_{i-1}+1}^{q_i}{}_\lambda (a_{\lambda\mu} a_{\lambda\nu} + d_{\lambda\mu} d_{\lambda\nu}) - \sum_{q_{i+1}+1}^{q_{i+2}}{}_\lambda (a_{\mu\lambda} a_{\nu\lambda} + d_{\mu\lambda} d_{\nu\lambda}) = 0 \,, \\ \displaystyle\sum_{q_{i-1}+1}^{q_i}{}_\lambda (a_{\lambda\nu} d_{\lambda\mu} - a_{\lambda\mu} d_{\lambda\nu}) + \sum_{q_{i+1}+1}^{q_{i+2}}{}_\lambda (a_{\nu\lambda} d_{\mu\lambda} - a_{\mu\lambda} d_{\nu\lambda}) = 0 \,, \\ (i = 1, \ldots, p-1 \; ; \; \mu, \nu = q_i + 1, \ldots, q_{i+1} \; ; \; \mu \neq \nu) ; \end{cases}$$

$$(39) \quad \sum_{q_1+1}^{q_2}{}_\lambda (a_{\mu\lambda} a_{\nu\lambda} + d_{\mu\lambda} d_{\nu\lambda}) = 0 \;, \quad \sum_{q_1+1}^{q_2}{}_\lambda (a_{\nu\lambda} d_{\mu\lambda} - a_{\mu\lambda} d_{\nu\lambda}) = 0 \,,$$
$$(\mu, \nu = 1, \ldots, q_1 ; \mu \neq \nu).$$

Ma consideriamo ora più da vicino la $R_2 f$, cercando di semplificarne la forma: vediamo che la parte in cui figurano x_1 o x_2 è la seguente, che scriviamo per disteso

$$\sum_{q_1+1}^{q_2}{}_\mu \Big\{ a_{1\mu}(x_1 p_{2\mu-1} - x_{2\mu-1} p_1 + x_2 p_{2\mu} - x_{2\mu} p_2) + \\ + d_{1\mu}(x_1 p_{2\mu} - x_{2\mu} p_1 - x_2 p_{2\mu-1} + x_{2\mu-1} p_2) \Big\}.$$

Ora lasciando inalterate le variabili $x_1, \dots, x_{2q_1}, x_{2q_2+1}, \dots, x_{2q_{p+1}}$, facciamo una sostituzione ortogonale sulle variabili $x_{2q_1+1}, \dots, x_{2q_2}$ prendendo per nuovo spazio

$$x_{2q_1+1} = x_{2q_1+2} = 0$$

lo spazio

$$\sum_{q_1+1}^{q_2}{}_\mu (a_{1\mu} x_{2\mu-1} + d_{1\mu} x_{2\mu}) = \sum_{q_1+1}^{q_2}{}_\mu (d_{1\mu} x_{2\mu-1} - a_{1\mu} x_{2\mu}) = 0;$$

questo potremo farlo poichè le $a_{1\mu}$, $d_{1\mu}$ non possono essere tutte nulle, che altrimenti nella $R_2 f$, e quindi neanche nella $R_3 f$, non figurerebbero x_1 ed x_2, che perciò non comparirebbero neanche nella $(R_2 R_3)$, mentre questa deve essere $= 2 R_1 f$: anzi lo potremo fare senza alterare affatto la forma di $R_1 f$ (n. 13).

Con ciò ci riduciamo al caso, che sia

$$a_{1, q_1+2} = \dots = a_{1, q_2} = d_{1, q_1+1} = \dots = d_{1, q_2} = 0.$$

Ed ora similmente se non son nulli tutti i coefficienti $a_{q_1+1, \mu}$, $d_{q_1+1, \mu}$ $(\mu = q_2 + 1, \dots, q_3)$ con una sostituzione ortogonale sulle sole variabili $x_{2q_2+1}, \dots, x_{2q_3}$, che non altera la forma di $R_1 f$, possiamo ottenere, che sia anche

$$a_{q_1+1, q_2+2} = a_{q_1+1, q_2+3} = \dots = a_{q_1+1, q_3} = d_{q_1+1, q_2+1} = d_{q_1+1, q_2+2} = \dots = d_{q_1+1, q_3} = 0.$$

Così seguitando otterremo in generale, senza variare affatto nè le variabili $x_1, \dots, x_{2q_1}$, nè la forma di $R_1 f$

$$a_{q_{i-1}+1, q_i+2} = \dots = a_{q_{i-1}+1, q_{i+1}} = d_{q_{i-1}+1, q_i+1} = \dots = d_{q_{i-1}+1, q_{i+1}} = 0$$
$$(i = 1, \dots, p).$$

In questo caso è evidentemente compreso anche quello in cui vengano a mancare per qualche valore di i tutte le $a_{q_{i-1}+1,\lambda}$, $d_{q_{i-1}+1,\lambda}$ $(\lambda = q_i + 1, \dots, q_{i+1})$: noi supporremo che questo caso avvenga la prima volta per $i = u + 1$ $(u \leq p)$, ed u per un' osservazione fatta poco sopra dovrà anzi essere > 0. Le (39) in cui si faccia $\mu = 1$, poichè $a_{1, q_1+1} \neq 0$, ci dànno

$$a_{2, q_1+1} = \dots = a_{q_1, q_1+1} = d_{2, q_1+1} = \dots = d_{q_1, q_1+1} = 0 .$$

Dopo di ciò se $u > 1$, e quindi $a_{q_1+1, q_2+1} \neq 0$, le (38) per $i = 1$, $\mu = q_1 + 1$ ci dànno pure

$$a_{q_1+2, q_2+1} = \dots = a_{q_2, q_2+1} = d_{q_1+2, q_2+1} = \dots = d_{q_2, q_2+1} = 0 ,$$

e così seguitando nella stessa maniera dalle formule scritte sopra ricaviamo

$$a_{q_{i-1}+2, q_i+1} = \dots = a_{q_i, q_i+1} = d_{q_{i-1}+2, q_i+1} = \dots = d_{q_i, q_i+1} = 0$$
$$(i = 1, \dots, u).$$

Sicchè rammentando, che se $u < p$ è

$$a_{q_u+1, q_{u+1}+1} = \dots = a_{q_u+1, q_{u+2}} = d_{q_u+1, q_{u+1}+1} = \dots = d_{q_u+1, q_{u+2}} = 0 ,$$

la $R_2 f$ viene ad assumere la forma

$$R_2 f = \sum_1^u {}_i\, a_{q_{i-1}+1, q_i+1}\, X_{q_{i-1}+1, q_i+1} + \dots ,$$

dove la parte tralasciata contiene solo variabili tutte diverse da quelle, che figurano nella parte scritta. Avendosi ora

$$(R_2 R_3) = \sum_1^u {}_i\, a^2_{q_{i-1}+1, q_i+1} (Y_{q_i+1, q_i+1} - Y_{q_{i-1}+1, q_{i-1}+1}) + \dots ,$$

dove al solito nella parte tralasciata non compaiono $x_{2q_{i-1}+1}$, $x_{2q_{i-1}+2}$ $(i = 1, \dots, u + 1)$, e dovendo il primo membro essere $= 2 R_1 f$, ne viene

$$-a^2_{1, q_1+1} = 2a ,\quad a^2_{q_{i-1}+1, q_i+1} - a^2_{q_i+1, q_{i+1}+1} = 2\,(a+2i)\ (i = 1, \dots, u-1),$$
$$a^2_{q_{u-1}+1, q_u+1} = 2\,(a + 2u).$$

Sommando membro a membro si ottiene

$$(u+1)\ (a+u)=0,$$

e poichè $u>0$, $a+u=0$, cioè a intero e negativo, contro quanto abbiamo visto in principio. Questo assurdo deriva dall'aver supposto $a \neq 1$: quindi nel caso di $t=1$, se mai deve essere $a=1$.

Ma questo ci dice che non si può presentare neanche il caso di $t>1$: infatti in tal caso la somma e la differenza di due coefficienti a_l+2i, $a_{l'}+2k$ $(l' \neq l)$ non può mai essere $=\pm 2$: quindi le sole X, Y, Z, W, che posson figurare nella $R_2 f$, son quelle ai cui indici corrispondono nella $R_1 f$ due coefficienti della forma a_l+2i, a_l+2k (n. 23): ne viene, che la $R_2 f$ si otterrà come una sommatoria di parti corrispondenti ciascuna al caso di $t=1$: ma questo non potendosi dare altro che quando $a=1$, vuol dire, che di queste parti non ce ne possono essere più di una, che cioè deve essere $t=1$.

52. Ci resta ora da trattare il caso di $t=1$, $a_1=1$, il caso cioè in cui si ha

$$R_1 f=\frac{1}{2}\sum_0^p{}_i\,(1+2i)\sum_{q_i+1}^{q_{i+1}}{}_\nu\, Y_{\nu\nu} \quad (q_0=0\,,\ q_0<q_1\leq q_2\leq\ldots\leq q_{p+1}=s);$$

ma noi prima considereremo il caso di $p=0$ per maggior semplicità. In tal caso particolare, si avrà

$$R_1 f=\frac{1}{2}\sum_1^s{}_\nu\, Y_{\nu\nu}.$$

Siccome la $R_2 f$ appartiene rispetto ad $R_1 f$ al fattore 2, in essa non potran comparire, che le W e le Z (n. 23), e dovrà quindi aver la forma

$$R_2 f=\sum_1^s{}_{\lambda\mu}\,(b_{\lambda\mu}\, W_{\lambda\mu}+c_{\lambda\mu}\, Z_{\lambda\mu}).$$

Procederemo ora alla semplificazione della forma della $R_2 f$ in modo analogo a quello tenuto nel n. 19: se noi consideriamo un S_{2s-2} di equazioni

$$\sum_1^s{}_\mu\,(\gamma_\mu\, x_{2\mu}+\beta_\mu\, x_{2\mu-1})=0\ ,\quad \sum_1^s{}_\mu\,(\alpha_\mu\, x_{2\mu-1}-\beta_\mu\, x_{2\mu})=0\ ,$$

perchè esso sia lasciato fermo da $R_2 f$, occorre e basta, che sieno verificate le equazioni

$$\begin{cases} \sum_1^s {}_\mu \, (b_{\lambda\mu}\,\alpha_\mu + c_{\lambda\mu}\,\beta_\mu) = \rho_1\,\alpha_\lambda - \rho_2\,\beta_\lambda \\ \sum_1^s {}_\mu \, (c_{\lambda\mu}\,\alpha_\mu - b_{\lambda\mu}\,\beta_\mu) = \rho_2\,\alpha_\lambda + \rho_1\,\beta_\lambda \end{cases} \qquad (\lambda = 1\,, \dots\,, s)\,.$$

Son queste $2s$ equazioni omogenee in $2s$ incognite α, β, onde perchè esse sien risolubili con valori non tutti nulli delle α, β, bisogna sia nullo il determinante dei coefficienti. Questo è una funzione di grado $2s$ nelle incognite ρ_1 e ρ_2; ma ora si potran dare due casi: che ci sia qualche coppia di valori reali di ρ_1 e ρ_2, che lo annulla, o che non ci sia nessuna di tali coppie. Nel primo caso c'è almeno un S_{2s-2} reale ed avente due equazioni, come quelle ultimamente scritte, che è lasciato fermo contemporaneamente da $R_1 f$ ed $R_2 f$: tale S_{2s-2} si può con una sostituzione ortogonale, che non cambia la forma di $R_1 f$ (n. 13), prendere per quello $x_1 = x_2 = 0$; la sostituzione ortogonale che occorre, come qualunque altra, che lasci immutata la forma di $R_1 f$, lascia immutata anche quella di $R_2 f$, la forma data di questa dipendendo solo dal fatto, che la $R_2 f$ rispetto ad $R_1 f$ appartiene al fattore 2. Ma allora la $R_2 f$ dovendo avere la forma detta e d'altra parte dovendo lasciar fermo l'S_{2s-2} $x_1 = x_2 = 0$, non può operare sulle variabili x_1, x_2: queste non figurano allora neanche in $R_3 f$, e perciò non può essere $(R_2 R_3) = 2 R_1 f$. Escluso così il primo caso consideriamo l'altro. Diamo allora a ρ_1 un valore reale qualunque, per es. 0: ne risulta in ρ_2 un'equazione a coefficienti reali, che non può avere radici reali. Ad ogni radice complessa ne corrisponderà un'altra complessa coniugata, e corrispondentemente a due radici complesse coniugate, ci saran due S_{2s-2}, immaginarii coniugati, le cui equazioni son del tipo detto, e che son lasciati fermi dalla $R_2 f$. Perciò la $R_2 f$ lascierà fermo anche l'S_{2s-4} loro intersezione, il quale ha per equazioni due coppie del tipo di quella scritta sopra, e che perciò (n. 13) si può prendere con una sostituzione ortogonale, che non altera la forma di $R_1 f$, per quello

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0\,.$$

La $R_2 f$, che per l'osservazione fatta sopra ha conservata la sua forma, dovrà allora più in particolare, aver la forma

$$R_2 f = c_1 W_{12} + b_1 Z_{12} + \sum_3^s{}_{\lambda\mu} \; (b_{\lambda\mu} W_{\lambda\mu} + c_{\lambda\mu} Z_{\lambda\mu}) .$$

Ed ora se poniamo

$$x'_3 = \cos\alpha \; x_3 - \operatorname{sen}\alpha \; x_4 \;\;,\;\; x'_4 = \operatorname{sen}\alpha \; x_4 + \cos\alpha \; x_3 \;\; \left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{b_1}{c_1}\right)$$

la $R_1 f$ resta ancora invariata, mentre nella $R_2 f$ si ottiene $b_1 = 0$. Proseguendo ora ad operare nello stesso modo sulla sommatoria, che ancora figura in $R_2 f$, si trova che s deve essere pari e che a $R_2 f$ si può dare la forma

$$R_2 f = \sum_1^{\frac{s}{2}}{}_\lambda \;\; c_\lambda \; W_{2\lambda-1, 2\lambda} .$$

Avendosi

$$R_3 f = \sum_1^{\frac{s}{2}}{}_\lambda \;\; c_\lambda \; Z_{2\lambda-1, 2\lambda}$$

e dovendo d'altra parte essere $(R_2 R_3) = 2 R_1 f$ si trova $c_\lambda^2 = 1 \left(\lambda = 1, \ldots, \frac{s}{2}\right)$.
Ma ora si posson supporre le c tutte $= 1$, che se fosse per es. $c_1 = -1$, basterebbe per ridurlo positivo cambiar di segno contemporaneamente ad x_1 e x_2. Sicchè si può supporre nel caso fatto:

$$R_1 f = \sum_1^{s}{}_\lambda \; Y_{\lambda\lambda} \;,\; R_2 f = \sum_1^{\frac{s}{2}}{}_\lambda \; W_{2\lambda-1, 2\lambda} \;\;,\;\; R_3 f = \sum_1^{\frac{s}{2}}{}_\lambda \; Z_{2\lambda-1, 2\lambda} .$$

53. È facile ora trattare anche il caso di $p > 0$: allora, sempre per il n. 23, si ha, poichè la $R_2 f$ rispetto ad $R_1 f$ appartiene al fattore 2,

$$R_2 f = \sum_1^{q_1} (b_{\lambda\mu} W_{\lambda\mu} + c_{\lambda\mu} Z_{\lambda\mu}) + \sum_1^{p}{}_i \;\; \sum_{q_{i-1}+1}^{q_i}{}_\lambda \;\; \sum_{q_i+1}^{q_{i+1}}{}_\mu \; (a_{\lambda\mu} X_{\lambda\mu} + b_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}) .$$

Per la prima parte si può fare una semplificazione analoga a quella fatta nel n. precedente, solo che ora non si può escludere subito il caso, che l'equazione, in cui ci siamo in quel numero imbattuti abbia soluzioni reali, perciò con quella riduzione può darsi che qualche variabile scompaia dalla prima parte della $R_2 f$: però tal cosa non può avvenire per tutte le variabili $x_1, \dots, x_{2q_1}$, chè altrimenti si ricadrebbe nel caso del n. 50. Dunque la prima parte prende la forma

$$c_1 W_{12} + \sum_3^{q_1}{}_{\lambda\mu} (b_{\lambda\mu} W_{\lambda\mu} + c_{\lambda\mu} Z_{\lambda\mu}) .$$

Per la seconda parte si può ora fare una riduzione del tutto analoga a quella fatta nel n. 50 e poichè, essa, come allora notammo espressamente, non toccava le variabili $x_1, \dots, x_{2q_1}$, si otterrà così

$$R_3 f = c_1 W_{12} + \sum_1^{u_1}{}_i \, a_{q_{i-1}+1, q_i+1} X_{q_{i-1}+1, q_i+1} +$$
$$+ \sum_1^{u_2}{}_i \, a_{q_{i-1}+2, q_i+2} X_{q_{i-1}+2, q_i+2} + \dots \quad (0 \leq u_1, u_2 \leq t),$$

dove la parte tralasciata non contiene le variabili che figurano in quella scritta: e ciò sempre senza alterare la forma di $R_1 f$. Perchè poi sia $(R_2 R_3) = 2 R_1 f$, si trova

$$c_1^2 - a^2_{1, q_i+1} = 1 \;, \; a^2_{q_{i-1}+1, q_i+1} - a^2_{q_i+1, q_{i+1}+1} = 2i+1 \; (i=1, \dots, u_1 - 1),$$
$$a^2_{q_{u_1-1}+1, q_{u_1}+1} = 2u_1 + 1 ;$$

$$c_1^2 - a^2_{1, q_i+2} = 1 \;, \; a^2_{q_{i-1}+2, q_i+2} - a^2_{q_i+2, q_{i+1}+2} = 2i+1 \; (i=1, \dots, u_2 - 1),$$
$$a^2_{q_{u_2-1}+2, q_{u_2}+2} = 2u_2 + 1 .$$

Da queste equazioni si ricava facilmente

$$u_1 = u_2 \;, \; c_1^2 = (u_1+1)^2 \;, \; a^2_{q_{i-1}+1, q_i+1} = a^2_{q_{i-1}+2, q_i+2} = (u_1+1)^2 - i^2$$
$$(i = 1, \dots, u_1).$$

Come nel caso precedente cambiando se mai il segno di qualche variabile si può nell'estrarre i radicali prendere il valore positivo, e si avrà così

$$R_2 f = (u_1+1) W_{12} + \sum_1^{u_1}{}_i \sqrt{(u_1+1)^2 - i^2} \, (X_{q_{i-1}+1, q_i+1} + X_{q_{i-1}+2, q_i+2}) + \dots ,$$

dove le radici van prese nel senso aritmetico.

Ora sulla parte tralasciata si potrà operare in modo analogo, e così poi seguitando si otterranno per la $R_2 f$ q parti tutte simili alla precedente. Queste devono esaurire tutta la $R_2 f$; e non potrà dopo tale riduzione mancare nella $R_2 f$ nessuna variabile; sarà dunque $q_1 = 2q$.

Cambiando ora il nome delle variabili che vi figurano, la parte scritta sopra si potrà scrivere invece

$$(u_1+1)\,W_{12} + \sum_0^{u_1-1}{}_i \sqrt{(u_1+1)^2-(i+1)^2}\;(X_{2i+1,2i+3}+X_{2i+2,2i+4}),$$

mentre la parte di $R_1 f$, che si riferisce alle stesse variabili è

$$\frac{1}{2}\sum_0^{u_1}{}_i\,(1+2i)\,(Y_{2i+1,2i+1}+Y_{2i+2,2i+2}).$$

Sicchè se distinguiamo le variabili dei varii gruppi, in cui vengono divise così le $2s$ variabili, con un indice in alto, e con $X^{(m)}$, $Y^{(m)}$, $Z^{(m)}$, $W^{(m)}$ indichiamo le X, Y, Z, W che operano sulle $x^{(m)}$, potremo scrivere

$$\text{(III)}\left\{\begin{aligned}
R_1 f &= \frac{1}{2}\sum_1^{q}{}_\lambda \sum_0^{u_\lambda}{}_i\,(1+2i)\,(Y^{(\lambda)}_{2i+1,2i+1}+Y^{(\lambda)}_{2i+2,2i+2}),\\
R_2 f &= \sum_1^{q}{}_\lambda \left\{(u_\lambda+1)W^{(\lambda)}_{12} + \sum_0^{u_\lambda-1}{}_i\sqrt{(u_\lambda+1)^2-(i+1)^2}\,(X^{(\lambda)}_{2i+1,2i+3}+X^{(\lambda)}_{2i+2,2i+4})\right\},\\
R_3 f &= \sum_1^{q}{}_\lambda \left\{(u_\lambda+1)\,Z^{(\lambda)}_{12} - \sum_0^{u_\lambda-1}{}_i\sqrt{(u_\lambda+1)^2-(i+1)^2}\,(Y^{(\lambda)}_{2i+1,2i+3}+Y^{(\lambda)}_{2i+2,2i+4})\right\},\\
&\big(2\,(u_1+u_2+\ldots+u_q+q) = s\,;\; u_i \geq 0\,,\, i=1\,,\ldots,\,q\big).
\end{aligned}\right.$$

Si vede subito che queste formano un gruppo, onde abbiamo che

Ogni G_3 di grado s su $2s$ variabili si può sempre ridurre alla forma (III).

54. Evidentemente gl'invarianti del gruppo si riducono se mai semplicemente ai numeri $u_1, u_2, \ldots, u_q$: ma possiamo vedere subito che essi sono effettivamente invarianti del gruppo. Infatti essi lo sono per la $R_1 f$, perchè il doppio del numero di queste u non è altro,

che il numero dei coefficienti di $R_1 f$, che sono $=1$; il doppio del numero delle u, maggiori di zero è il numero dei coefficienti di $R_1 f$, $=3$; il doppio del numero di quelle >1 è il numero dei coefficienti di $R_1 f$, $=5$: e così via.

55. Ed ora passiamo a trattare il caso generale, in cui la $R_2 f$ contiene ancora variabili diverse da quelle, che figurano in $R_1 f$.

Siccome queste variabili si può immaginare, che compaiano anche in $R_1 f$, pur di attribuire alla Y relativa un coefficiente zero, così, al solito per il n. 23, dovendo la $R_2 f$ rispetto ad $R_1 f$ appartenere al fattore 2, esse non possono comparire altro, che in X, Y, W, Z, tali, che contengano anche variabili, che figurano effettivamente in $R_1 f$ ed alle quali in questa corrisponde un coefficiente $=2$. Sicchè nella $R_1 f$ ci devono essere delle $m_1 = 2$: perciò nel modo indicato al n. 49 otterremo

$$R_1 f = \frac{1}{2} \sum_1^p {}_i \, 2i \sum_{q_{i-1}+1}^{q_i} {}_\nu \, Y_{\nu\nu} + \frac{1}{2} \sum_{q_p+1}^{s} {}_\nu \, m_\nu \, Y_{\nu\nu} \, ,$$
$$(0 = q_0 < q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_p \leq s)$$

dove le q son numeri interi, e tra le m_ν non ce n'è nessuna, che sia un numero intero, pari e positivo.

Consideriamo ora per primo il caso di $p=1$, $s=q_1$: il caso cioè in cui si abbia

$$R_1 f = \sum_1^s {}_\nu \, Y_{\nu\nu} .$$

Sarà allora

$$R_2 f = \sum_1^s {}_\lambda \sum_1^{s_1} {}_\mu \, (a_{\lambda\mu} \, S_{2\lambda, 2s+\mu} + b_{\lambda\mu} \, S_{2\lambda-1, 2s+\mu}) \, ;$$

avendosi in conseguenza

$$R_3 f = \sum_1^s {}_\lambda \sum_1^{s_1} {}_\mu \, (a_{\lambda\mu} \, S_{2\lambda-1, 2s+\mu} - b_{\lambda\mu} \, S_{2\lambda, 2s+\mu}) \, ,$$

perchè sia $(R_2 R_3) = 2 R_1 f$ occorre che intanto sia

$$(40) \qquad \sum_1^s {}_\lambda \, (a_{\lambda\mu} \, b_{\lambda\nu} - b_{\lambda\mu} \, a_{\lambda\nu}) = 0 \quad (\mu, \nu = 1, \dots, s_1) .$$

Può darsi, che la $R_2 f$ lasci fermo un iperpiano avente un'equazione della forma

$$\sum_1^{s_1}{}_\mu \gamma_\mu x_{2s+\mu} = 0 \,?$$

Per questo occorre e basta, che sia

$$\sum_1^{s_1}{}_\mu a_{\lambda\mu} \gamma_\mu = 0 \quad , \quad \sum_1^{s_1}{}_\mu b_{\lambda\mu} \gamma_\mu = 0 \qquad (\lambda = 1, \dots, s):$$

dunque ciò avviene tutte le volte che la matrice delle a e delle b ha una caratteristica $< s_1$, in particolare quando $s_1 > 2s$. Se si dà il caso detto prendiamo uno di quegli iperpiani per l'iperpiano

$$x_{2s+s_1} = 0 \,,$$

ciò che si può fare con una sostituzione ortogonale sulle sole $x_{2s_1+1}, \dots, x_{2s+s_1}$, che quindi non altera certo la $R_1 f$. Fatto questo la x_{2s+s_1} scompare dalla $R_2 f$, cioè si passa dal caso di s_1 a quello di $s_1 - 1$. Proseguendo analogamente si arriverà ad un momento in cui l'operazione non è più possibile: potremo dunque supporre di essere già in questo caso, e che perciò la matrice delle $a_{\lambda\mu}$, $b_{\lambda\mu}$ abbia per caratteristica s_1. Allora non si possono fare scomparire altre variabili dalla $R_2 f$, perchè se per es. si potesse far scomparire la x_{2s+s_1} con un cambiamento di variabili, l'iperpiano assunto per nuovo iperpiano $x_{2s+s_1}=0$ sarebbe lasciato fermo dalla $R_2 f$ contro quanto abbiamo detto.

Consideriamo ora uno spazio, che abbia per equazioni

$$(41) \qquad \sum_1^{s}{}_\lambda (\alpha_\lambda x_{2\lambda-1} + \beta_\lambda x_{2\lambda}) = 0 \quad , \quad \sum_1^{s_1}{}_\mu \gamma_\mu x_{2s+\mu} = 0 \,;$$

perchè sia lasciato fermo dalla $R_2 f$ occorre sien verificate le equazioni

$$\sum_1^{s}{}_\lambda (a_{\lambda\mu} \beta_\lambda + b_{\lambda\mu} \alpha_\lambda) = \rho_1 \gamma_\mu \qquad (\mu = 1, \dots, s_1)$$

$$\sum_1^{s_1}{}_\mu a_{\lambda\mu} \gamma_\mu = \rho_2 \beta_\lambda \quad , \quad \sum_1^{s_1} b_{\lambda\mu} \gamma_\mu = \rho_2 \alpha_\lambda \qquad (\lambda = 1, \dots, s).$$

Queste son $2s + s_1$ equazioni lineari omogenee in altrettante incognite, le α, β, γ: esse saran risolubili tutte le volte, che il determinante dei coefficienti sia nullo. Ora questo uguagliato a zero pur di farvi $\rho_1 = \rho_2$ dà in ρ_1 l'equazione secolare: ne viene, che quel determinante si può annullare con valori reali di ρ_1 e ρ_2, e perciò le equazioni superiori sostituitivi questi valori reali di ρ_1 e ρ_2 dànno per le α, β, γ valori reali non tutti nulli; per conseguenza esistono degli spazii, come quello (41), reali, che son lasciati fermi dalla $R_2 f$. Supponiamo, che lo spazio (41) sia uno di questi: noi potremo ora prendere con una sostituzione ortogonale, che non cambia la $R_1 f$ (n. 14), gli spazii

$$\sum_1^s{}_\lambda\, (\alpha_\lambda\, x_{2\lambda-1} + \beta_\lambda\, x_{2\lambda}) = 0 \;,\quad \sum_1^s{}_\lambda\, (\gamma_\lambda x_{2\lambda} - \beta_\lambda\, x_{2\lambda-1}) = 0 \;,\quad \sum_1^{s_1}{}_\mu\, \gamma_\mu\, x_{2s+\mu} = 0$$

rispettivamente per gli spazii

$$x_2 = 0 \;,\quad x_1 = 0 \;,\quad x_{2s+1} = 0 .$$

Quanto alla $R_2 f$, non cambia neanch'essa di forma: solo ora dovendo essa lasciare invariato lo spazio $x_2 = 0$, $x_{2s+1} = 0$, dovrà essere

$$a_{12} = \dots = a_{1,s_1} = a_{21} = \dots = a_{s,1} = b_{11} = \dots = b_{s1} = 0 .$$

Siccome non può essere $a_{11} = 0$, chè altrimenti dalla $R_2 f$ scomparirebbe la x_{2s+1} contro le ipotesi fatte, dalle (40) viene

$$b_{12} = b_{13} = \dots = b_{1s_1} = 0 ,$$

dimodochè la $R_2 f$ diviene

$$R_2 f = a_{11}\, S_{2,2s+1} + \sum_2^s{}_\lambda \sum_2^{s_1}{}_\mu\, (a_{\lambda\mu}\, S_{2\lambda,2s+\mu} + b_{\lambda\mu}\, S_{2\lambda-1,2s+\mu}) .$$

Proseguendo in modo analogo sulla seconda parte si otterrà evidentemente, che deve essere $s_1 \leq s$, e

$$R_2 f = \sum_1^{s_1}{}_\lambda\, a_{\lambda\lambda}\, S_{2\lambda,2s+\lambda} .$$

Per conseguenza

$$R_3 f = \sum_1^{s_1}{}_\lambda\, a_{\lambda\lambda}\, S_{2\lambda-1,2s+\lambda}$$

ed

$$(R_2\, R_3) = \sum_1^{s_1}{}_\lambda\, a^2_{\lambda\lambda}\, S_{2\lambda-1,2\lambda}$$

onde perchè sia $(R_2 R_3) = 2 R_1 f$ deve essere $s_1 = s$ ed $a^2_{\lambda\lambda} = 4$ $(\lambda = 1, \ldots, s)$.

Estraendo la radice, si può prendere $a_{\lambda\lambda} = 2$, chè se fosse per es. $a_{11} = -2$ basterebbe cambiare di segno alla variabile x_{2s+1} per ottenere invece $a_{11} = 2$.

Si ha così il G_3

$$\text{(IV)}\quad R_1 f = 2 \sum_1^s{}_\lambda S_{2\lambda-1, 2\lambda}\,, \quad R_2 f = 2 \sum_1^s{}_\lambda S_{2\lambda, 2s+\lambda}\,, \quad R_3 f = 2 \sum_1^s{}_\lambda S_{2\lambda-1, 2s+\lambda}\,.$$

Onde dare forma più simmetrica al G_3 in questo caso cambieremo il nome delle variabili chiamando $x_1, \ldots, x_s$ le prime s variabili con indici dispari, $x_{s+1}, \ldots, x_{2s}$ le prime s variabili con indice pari: con ciò il gruppo prende la forma

$$\text{(IV*)}\quad R_1 f = 2 \sum_1^s{}_\lambda S_{\lambda, s+\lambda}\,, \quad R_2 f = 2 \sum_1^s{}_\lambda S_{\lambda. 2s+\lambda}\,, \quad R_3 f = 2 \sum_1^s{}_\lambda S_{s+\lambda, 2s+\lambda}\,.$$

56. Il caso generale si può ora trattare con molta facilità. Se dunque è

$$R_1 f = \frac{1}{2} \sum_1^p{}_i\, 2i \sum_{q_{i-1}+1}^{q_i}{}_\nu Y_{\nu\nu} + \frac{1}{2} \sum_{q_p+1}^{s}{}_\nu m_\nu Y_{\nu\nu} \quad (q_0 = 0)\,,$$

(n. 54), per il solito n. 23 dovrà essere

$$R_2 f = \sum_1^{q_1}{}_\lambda \sum_1^{s_1}{}_\mu (a_{\lambda\mu} S_{2\lambda, 2s+\mu} + b_{\lambda\mu} S_{2\lambda-1. 2s+\mu}) +$$
$$+ \sum_1^{p-1}{}_i \sum_{q_{i-1}+1}^{q_i}{}_\lambda \sum_{q_i+1}^{q_{i+1}}{}_\mu (\alpha_{\lambda\mu} X_{\lambda\mu} + \beta_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}) + \ldots,$$

dove la parte tralasciata contiene solo le variabili $x_{2q_p+1}, \ldots, x_{2s}$. Avendosi poi

$$R_3 f = \sum_1^{q_1}{}_\lambda \sum_1^{s_1}{}_\mu (a_{\lambda\mu} S_{2\lambda-1, 2s+\mu} - b_{\lambda\mu} S_{2\lambda, 2s+\mu}) +$$
$$+ \sum_1^{p-1}{}_i \sum_{q_{i-1}+1}^{q_i}{}_\lambda \sum_{q_i+1}^{q_{i+1}}{}_\mu (\beta_{\lambda\mu} X_{\lambda\mu} - \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}) + \ldots,$$

perchè sia $(R_2 R_3) = 2 R_1 f$, occorre sien verificate l'equazioni

$$(42) \qquad \sum_{q_{p-2}+1}^{q_{p-1}}{}_\lambda (\alpha_{\lambda\mu}\alpha_{\lambda\nu}+\beta_{\lambda\mu}\beta_{\lambda\nu})=0\ , \quad \sum_{q_{p-2}+1}^{q_{p-1}}{}_\lambda (\alpha_{\lambda\nu}\beta_{\lambda\mu}-\alpha_{\lambda\mu}\beta_{\lambda\nu})=0\ ,$$

$$(\mu, \nu = q_{p-1}+1, \dots, q_p\ ;\ \mu \neq \nu)\ ;$$

$$(43) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{q_{i-1}+1}^{q_i}{}_\lambda (\alpha_{\lambda\mu}\alpha_{\lambda\nu}+\beta_{\lambda\mu}\beta_{\lambda\nu}) - \sum_{q_{i+1}+1}^{q_{i+2}}{}_\lambda (\alpha_{\mu\lambda}\alpha_{\nu\lambda}+\beta_{\mu\lambda}\beta_{\nu\lambda})=0\ , \\ \displaystyle\sum_{q_{i-1}+1}^{q_i}{}_\lambda (\alpha_{\lambda\nu}\beta_{\lambda\mu}-\alpha_{\lambda\mu}\beta_{\lambda\nu}) + \sum_{q_{i+1}+1}^{q_{i+2}}{}_\lambda (\alpha_{\nu\lambda}\beta_{\mu\lambda}-\alpha_{\mu\lambda}\beta_{\nu\lambda})=0\ , \\ (i=1,\dots,p-2\ ;\ \mu, \nu = q_i+1,\dots,q_{i+1}\ ;\ \mu \neq \nu)\ ; \end{cases}$$

$$(44) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{q_1+1}^{q_2}{}_\lambda (\alpha_{\mu\lambda}\alpha_{\nu\lambda}+\beta_{\mu\lambda}\beta_{\nu\lambda}) - \sum_{1}^{s_1}{}_\lambda (a_{\mu\lambda}b_{\nu\lambda}-b_{\mu\lambda}a_{\nu\lambda})=0\ , \\ \displaystyle\sum_{q_1+1}^{q_2}{}_\lambda (\alpha_{\nu\lambda}\beta_{\mu\lambda}-\beta_{\nu\lambda}\alpha_{\mu\lambda}) + \sum_{1}^{s_1}{}_\lambda (a_{\mu\lambda}a_{\nu\lambda}+b_{\mu\lambda}b_{\nu\lambda})=0\ , \\ (\mu, \nu = 1, \dots, q_1\ ;\ \mu \neq \nu)\ ; \end{cases}$$

$$(45) \qquad \sum_{1}^{q_1}{}_\lambda (a_{\lambda\mu}\, b_{\lambda\nu} - b_{\lambda\mu}\, a_{\lambda\nu}) = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, \dots, s_1).$$

Le (45) essendo perfettamente analoghe alle (40), si può sulla prima parte di $R_2 f$ operare la riduzione stessa fatta nel numero precedente, si può ridurla cioè al tipo

$$\sum_{1}^{s_1}{}_\lambda\, a_{\lambda\lambda}\, S_{2\lambda, 2s+\lambda}\,.$$

Le (42), (43), (44) si riducono allora ad equazioni del tutto analoghe alle (37), (38) e (39) del n. 51, onde si potrà eseguire sulla seconda parte una riduzione del tutto analoga a quella fatta allora, e questa riduzione non altera la forma della prima parte, poichè non vengon toccate le variabili $x_1, \dots, x_{2q_1}$. Si ottiene così

$$R_2f = \sum_1^{q_1}{}_\lambda\, a_{\lambda\lambda}\, S_{2\lambda, 2s+\lambda} + \sum_1^{u_1-1}{}_i\, \alpha_{q_{i-1}+1, q_i+1}\, X_{q_{i-1}+1, q_i+1} + \dots \quad (u_1 \leq p),$$

dove la parte tralasciata non opera sulle variabili x_{2q_i+1}, x_{2q_i+2} $(i = 0, 1, \dots, u)$ ed $x_{2s+\lambda}$ $(\lambda = 1, \dots, s_1)$. Facendo la R_3f e la $(R_2 R_3)$ si trova subito

$$\frac{1}{2} a^2_{1,1} - \alpha^2_{1, q_1+1} = 2 \;,\quad \alpha^2_{1, q_1+1} - \alpha^2_{q_1+1, q_2+1} = 4, \dots,$$

$$\alpha^2_{q_{u-3}+1, q_{u-2}+1} - \alpha^2_{q_{u-2}+1, q_{u-1}+1} = 2u-2 \;,\quad \alpha^2_{q_{u-2}+1, q_{u-1}+1} = 2u.$$

Poichè al solito estraendo la radice si può sempre prendere il valore positivo, se ne ricava

$$a_{1,1} = \sqrt{2u_1(u_1+1)} \;,\quad \alpha_{q_{i-1}+1, q_i+1} = \sqrt{u_1(u_1+1) - i(i+1)} \quad (i = 1, \dots, u_1 - 1).$$

Si ha così

$$R_2f = \sqrt{2u_1(u_1+1)}\; S_{2.2s+1} + \sum_1^{u_1-1}{}_i \sqrt{u_1(u_1+1) - i(i+1)}\; X_{q_{i-1}+1, q_i+1} + \dots,$$

$$R_3f = \sqrt{2u_1(u_1+1)}\; S_{1,2s+1} - \sum_1^{u_1-1}{}_i \sqrt{u_1(u_1+1) - i(i+1)}\; Y_{q_{i-1}+1, q_i+1} + \dots.$$

È evidente ora, che la parte scritta sopra della R_2f si comporrà di q_1 parti come quella ora scritta: ma a questa, cambiando di nome ad alcune variabili, si può dare la forma

$$R_2f = \sqrt{2u_1(u_1+1)}\; S_{2, 2u_1+1} + \sum_1^{u_1-1}{}_i \sqrt{u_1\,(u_1+1) - i\,(i+1)}\; X_{i, i+1} + \dots,$$

mentre la parte di R_1f corrispondente diviene

$$R_1f = \frac{1}{2} \sum_1^{u_1}{}_i\, 2i\, Y_{ii} + \dots.$$

Nella R_2f, e quindi nelle R_1f, R_3f, ora compaiono, come abbiam detto, q_1 parti come la precedente, e che noi distingueremo come al n. 53 con un indice in alto: prese queste, le parti rimanenti di R_1f, R_2f, R_3f contenendo variabili tutte diverse da quelle che figurano in quelle q_1 parti, e tutte e tre le stesse, formano un G_3 come quelli considerati nel n. 52.

Ne viene evidentemente che al G_3 si può dare la forma

$$\text{V)}\quad \left\{\begin{aligned} R_1f &= \frac{1}{2}\left\{\sum_1^{q_1}{}_\lambda \sum_1^{u_\lambda}{}_i\, 2i\, Y^{(\lambda)}_{i\,i} + \sum_{q_1+1}^{q_2}{}_\lambda \sum_0^{u_\lambda}{}_i\, (1+2i)\,(Y^{(\lambda)}_{2i+1,2i+1}+Y^{(\lambda)}_{2i+2,2i+2})\right\},\\ R_2f &= \sum_1^{q_1}{}_\lambda \left\{\sqrt{2u_\lambda(u_\lambda+1)}\, S^{(\lambda)}_{2,2u_\lambda+1} + \sum_1^{u_\lambda-1}{}_i \sqrt{u_\lambda(u_\lambda+1)-i(i+1)}\, X^{(\lambda)}_{i,i+1}\right\} +\\ &+ \sum_{q_1+1}^{q_2}{}_\lambda \left\{(u_\lambda+1)\, W^{(\lambda)}_{12} + \sum_0^{u_\lambda-1}{}_i \sqrt{(u_\lambda+1)^2-(i+1)^2}\,(X^{(\lambda)}_{2i+1,2i+3}+X^{(\lambda)}_{2i+2,2i+4})\right\},\\ R_3f &= \sum_1^{q_1}{}_\lambda \left\{\sqrt{2u_\lambda(u_\lambda+1)}\, S^{(\lambda)}_{1,2u_\lambda+1} - \sum_1^{u_\lambda-1}{}_i \sqrt{u_\lambda(u_\lambda+1)-i(i+1)}\, Y^{(\lambda)}_{i,i+1}\right\} +\\ &+ \sum_{q_1+1}^{q_2}{}_\lambda \left\{(u_\lambda+1)\, Z^{(\lambda)}_{12} - \sum_0^{u_\lambda-1}{}_i \sqrt{(u_\lambda+1)^2-(i+1)^2}\,(Y^{(\lambda)}_{2i+1,2i+3}+Y^{(\lambda)}_{2i+2,2i+4})\right\},\\ &(u_i \geq 1,\ i=1,\dots,q_1;\ u_i \geq 0,\ i=q_1+1,\dots,q_2). \end{aligned}\right.$$

Questa è la forma più generale dei G_3, e comprende evidentemente tanto il caso (III), che il caso (IV). Evidentemente poi (cfr. n. 53) gl'invarianti del G_3 son dati soltanto dalle u_λ ($\lambda=1,\dots,q_2$), e questi sono effettivamente invarianti.

Dunque: *Ogni* G_3 *di rotazioni non abeliano si può sempre ridurre alla forma* (V).

57. Diamo un altro aspetto alle rotazioni del G_3 cambiando alcune notazioni; troveremo così una forma più comoda per le ricerche ulteriori. Raccogliamo in uno stesso gruppo quelli dei primi q_1, cui corrisponde uno stesso valore delle u_λ: sieno

$$u_1\ ,\ u_2\ ,\ \dots\ ,\ u_{p_1}$$

tutte le u diverse tra loro, e

$$k_1\ ,\ k_2\ ,\ \dots\ ,\ k_{p_1}$$

il numero di volte, che si presenta ciascuna di quelle u ordinatamente. Notazioni analoghe valgano anche per le ultime q_2-q_1 u. Sarà allora

$$k_1 + k_2 + \dots + k_{p_1} = q_1 ,$$

$$k_{p_1+1} + k_{p_1+2} + \dots + k_{p_2} = q_2 - q_1 .$$

Disponendo in altro ordine le variabili di ciascun gruppo si vede, che alle rotazioni del G_3 si può dare la forma

$$(\mathrm{V}^*) \left\{ \begin{aligned} \mathrm{R}_1 f = & \frac{1}{2} \left\{ \sum_{1}^{p_1}{}_{\lambda} \sum_{1}^{u_\lambda}{}_{i} \, 2i \sum_{1}^{k_\lambda}{}_{\mu} \, \mathrm{Y}^{(\lambda)}_{(i-1)k_\lambda+\mu,(i-1)k_\lambda+\mu} + \sum_{p_1+1}^{p_2}{}_{\lambda} \sum_{0}^{u_\lambda}{}_{i} (1+2i) \sum_{1}^{2k_\lambda}{}_{\mu} \, \mathrm{Y}^{(\lambda)}_{2ik_\lambda+\mu,\, 2ik_\lambda+} \right. \\ \mathrm{R}_2 f = & \sum_{1}^{p_1}{}_{\lambda} \sum_{1}^{k_\lambda}{}_{\mu} \left\{ \sqrt{2u_\lambda(u_\lambda+1)} \; \mathrm{S}^{(\lambda)}_{2\mu,\, 2u_\lambda k_\lambda+\mu} + \right. \\ & \left. + \sum_{1}^{u_\lambda-1}{}_{i} \sqrt{u_\lambda(u_\lambda+1)-i(i+1)} \; \mathrm{X}^{(\lambda)}_{(i-1)k_\lambda+\mu,\, ik_\lambda+\mu} \right\} + \sum_{p_1+1}^{p_2}{}_{\lambda} \sum_{1}^{k_\lambda}{}_{\mu} \left\{ (u_\lambda+1)\, \mathrm{W}^{(\lambda)}_{2\mu-1,\, 2\mu} \right. \\ & \left. + \sum_{0}^{u_\lambda-1}{}_{i} \sqrt{(u_\lambda+1)^2-(i+1)^2} \; (\mathrm{X}^{(\lambda)}_{2ik_\lambda+2\mu-1,\, 2(i+1)k_\lambda+2\mu-1} + \mathrm{X}^{(\lambda)}_{2ik_\lambda+2\mu,\, 2(i+1)k_\lambda+2\mu}) \right\} ; \\ \mathrm{R}_3 f = & \sum_{1}^{p_1}{}_{\lambda} \sum_{1}^{k_\lambda}{}_{\mu} \left\{ \sqrt{2u_\lambda(u_\lambda+1)} \; \mathrm{S}^{(\lambda)}_{2\mu-1,\, 2u_\lambda k_\lambda+\mu} - \right. \\ & \left. - \sum_{1}^{u_\lambda-1}{}_{i} \sqrt{u_\lambda(u_\lambda+1)-i(i+1)} \; \mathrm{Y}^{(\lambda)}_{(i-1)k_\lambda+\mu,\, ik_\lambda+\mu} \right\} + \sum_{p_1+1}^{p_2}{}_{\lambda} \sum_{1}^{k_\lambda}{}_{\mu} \left\{ (u_\lambda+1)\, \mathrm{Z}^{(\lambda)}_{2\mu-1,\, 2\mu} \right. \\ & \left. - \sum_{0}^{u_\lambda-1}{}_{i} \sqrt{(u_\lambda+1)^2-(i+1)^2} \; (\mathrm{Y}^{(\lambda)}_{2ik_\lambda+2\mu-1,\, 2(i+1)k_\lambda+2\mu-1} + \mathrm{Y}^{(\lambda)}_{2ik_\lambda+2\mu,\, 2(i+1)k_\lambda+2\mu}) \right\} . \end{aligned} \right.$$

§ 6.

I gruppi di rotazioni, che non contengono G_8 e G_{10}

58. Vogliamo ora ricercare la forma normale che si può dare ai G_6 che non contengono G_4 abeliani: a questi G_6 si può dare la composizione

$$(46)\quad (R_{ik}\, R_{lm}) = 2\,(-\varepsilon_{il}\, R_{km}f + \varepsilon_{im}\, R_{kl}f + \varepsilon_{kl}\, R_{im}f - \varepsilon_{km}\, R_{il}f)$$
$$(i, k, l, m = 1, 2, 3, 4\,;\; i \neq k\,;\; l \neq m)\,,$$

$R_{12}f$, $R_{13}f$, $R_{14}f$, $R_{23}f$, $R_{24}f$, $R_{34}f$ essendo le rotazioni del gruppo (n. 44).

Comincieremo da alcuni casi particolari, dopo di che ne trarremo con facilità il caso generale: per primo faremo il caso in cui il $G_3 \equiv (R_{12}, R_{23}, R_{13})$ ha la forma del n. 55, per cui si può porre

$$R_{12}f = 2\sum_1^s{}_\lambda\, S_{\lambda,\, s+\lambda}\;,\quad R_{23}f = 2\sum_1^s{}_\lambda\, S_{s+\lambda,\, 2s+\lambda}\;,\quad R_{13}f = 2\sum_1^s{}_\lambda\, S_{\lambda,\, 2s+\lambda}\,.$$

Siccome la $R_{24}f$ rispetto alla $R_{12}f$ appartiene al fattore 2, deve avere la forma (n. 23)

$$R_{24}f = \sum_1^s{}_\lambda \sum_1^t{}_\mu\, (a_{\lambda\mu}\, S_{\lambda, 3s+\mu} + b_{\lambda\mu}\, S_{s+\lambda, 3s+\mu}) +$$
$$+ \sum_1^s{}_{\lambda\mu}\, (c_{\lambda\mu}\, S_{\lambda, 2s+\mu} + d_{\lambda\mu}\, S_{s+\lambda, 2s+\mu})\,.$$

Dovendo poi essere permutabile con $R_{13}f$, devono essere nulle tutte le a e tutte le d; di più deve essere $c_{\lambda\mu} = c_{\mu\lambda}$: si ha dunque

$$R_{24}f = \sum_1^s{}_\lambda \sum_1^t{}_\mu\, b_{\lambda\mu}\, S_{s+\lambda.\, 3s+\mu} + \sum_1^s{}_{\lambda\mu}\, c_{\lambda\mu}\, S_{\lambda, 2s+\mu} \quad (c_{\lambda\mu} = c_{\mu\lambda}).$$

Osserviamo ora che se si fa sulle variabili $x_1, \dots, x_s$ una sostituzione qualunque, pur di fare la stessa sostituzione sulle variabili $x_{s+1}, \dots, x_{2s}$ e sulle $x_{2s+1}, \dots, x_{3s}$ non si altera la forma del G_3. Ora con una sostituzione ortogonale sulle variabili $x_{3s+1}, \dots, x_{3s+t}$ possiamo supporre di esserci ridotti al caso, che esse sieno nel minor numero possibile, per cui, deve la matrice $|b_{\lambda\mu}|$ avere la caratteristica t (cfr. n. 55). Analogamente poichè sulle $x_{s+1}, \dots, x_{2s}$ si può fare una sostituzione qualunque ortogonale senza alterare il G_3, così con una conveniente di tali sostituzioni potremo ridurci al caso che delle s variabili $x_{s+1}, \dots, x_{2s}$ ne figuri il minor numero possibile, e questo numero sarà ancora la caratteristica della matrice delle $b_{\lambda\mu}$, cioè t. Abbiamo così

$$R_{24}f = \sum_1^t{}_{\lambda\mu}\; b_{\lambda\mu}\, S_{s+\lambda,3s+\mu} + \sum_1^s{}_{\mu}\; c_{\lambda\mu}\, S_{\lambda,2s+\mu} \quad (c_{\lambda\mu} = c_{\mu\lambda}\;;\; t \leq s).$$

Per conseguenza

$$R_{14}f = \sum_1^t{}_{\lambda\mu}\; b_{\lambda\mu}\, S_{\lambda,3s+\mu} - \sum_1^s{}_{\lambda\mu}\; c_{\lambda\mu}\, S_{\lambda,2s+\mu}\,,$$

onde perchè sia $(R_{24}\, R_{14}) = 2\, R_{12}f$ occorre sia anche

$$\sum_1^t{}_{\mu}\; b_{\lambda\mu}\, b_{\nu\mu} + \sum_1^s{}_{\mu}\; c_{\lambda\mu}\, c_{\nu\mu} = 0 \quad (\lambda, \nu = 1, \dots, t;\ \lambda \neq \nu)$$

$$\sum_1^s{}_{\mu}\; c_{\lambda\mu}\, c_{\nu\mu} = 0 \quad (\lambda = 1, \dots, s;\ \nu = t+1, \dots s\,;\ \lambda \neq \nu)\,;$$

$$\sum_1^t{}_{\lambda}\; b_{\lambda\mu}\, c_{\lambda\nu} = 0 \quad (\mu = 1, \dots, t;\ \nu = 1, \dots, s)\,.$$

Da queste ultime equazioni essendo $|b_{\lambda\mu}| \neq 0$, per quanto abbiamo detto sopra viene senz'altro che tutte le $c_{\lambda\nu}$ col primo indice $\leq t$ son nulle; essendo poi $c_{\lambda\nu} = c_{\nu\lambda}$ potranno essere $\neq 0$ solo quelle c con ambedue gl'indici $\geq t$, e per conseguenza tanto nella $R_{24}f$, che nella $R_{14}f$, la seconda sommatoria potremo farla variare solo da $t+1$ ad s. Le prime equazioni, divenute ora

$$\sum_1^t{}_{\mu}\; b_{\lambda\mu}\, b_{\nu\mu} = 0 \quad (\lambda, \nu = 1, \dots, t\,;\ \lambda \neq \nu)\,,$$

ci dicono che la sostituzione

$$x'_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\sum_\mu b^2_{\lambda\mu}}} \sum_1^t {}_\mu \, b_{\lambda\mu} \, x_{3s+\mu}$$

è ortogonale: ora facendo tale sostituzione la prima parte di $R_2 f$ diviene

$$\sum_1^t {}_\lambda \, a_\lambda \, S_{s+\lambda, 3s+\lambda}.$$

Quanto alla seconda parte di $R_{24} f$, perchè essa lasci fermo lo spazio

$$\sum_{t+1}^s {}_\lambda \, b_\lambda \, x_\lambda = 0 \quad , \quad \sum_{t+1}^s {}_\lambda \, b_\lambda \, x_{2s+\lambda} = 0 \, ,$$

occorre sia

$$\sum_{t+1}^s {}_\lambda \, b_\lambda \, c_{\lambda\mu} = \rho \, b_\mu \qquad (\mu = t+1, \dots, s).$$

Ora il determinante di queste equazioni uguagliato a zero dando in ρ l'equazione secolare, si può sempre annullarlo (solo) con valori reali di ρ. Ci sono perciò di quegli spazii che son lasciati fermi dalla $R_{24} f$. Prendendo ora con una sostituzione ortogonale sulle $x_{t+1}, \dots, x_s$, che non cambia perciò la prima parte di $R_{24} f$, lo spazio

$$\sum_{t+1}^s {}_\lambda \, b_\lambda \, x_\mu = 0$$

per lo spazio $x_{t+1} = 0$, e la stessa sostituzione facendo sulle $x_{s+t+1}, \dots, x_{2s}$ e sulle $x_{2s+t+1}, \dots, x_{3s}$, onde non alterare la forma di $R_{12} f$, $R_{13} f$, ed $R_{23} f$, la R_{24}f deve lasciare fermo lo spazio $x_{t+1} = = x_{2s+t+1} = 0$ e deve perciò avere la forma

$$R_{24} f = \sum_1^t {}_\lambda \, a_\lambda \, S_{s+\lambda, 3s+\lambda} + c_1 \, S_{t+1, 2s+t+1} + \sum_{t+2}^s {}_{\lambda\mu} \, c_{\lambda\mu} \, S_{\lambda, 2s+\mu}.$$

Operando analogamente su quest'ultima parte, e seguitando poi allo stesso modo si arriva ad avere, sempre senza mutare $R_{12} f$, $R_{13} f$, $R_{23} f$,

$$R_{24} f = \sum_1^t {}_\lambda \, a_\lambda \, S_{s+\lambda. 3s+\lambda} + \sum_{t+1}^s {}_\lambda \, c_\lambda \, S_{t+\lambda, 2s+t+\lambda}.$$

Essendo poi

$$R_{14}f = \sum_1^t {}_\lambda\, a_\lambda\, S_{\lambda, 3s+\lambda} - \sum_{t+1}^s {}_\lambda\, c_\lambda\, S_{s+t+\lambda, 2s+t+\lambda},$$

perchè sia

$$(R_{24}\, R_{14}) = 2\, R_{12}f$$

basta sia

$$a^2_\lambda = 4 \quad (\lambda = 1, \dots, t) \ , \quad c^2_\lambda = 4 \quad (\lambda = t+1, \dots, s).$$

Estraendo le radici per a_λ si può prendere il valore positivo, che altrimenti basterebbe cambiar segno ad alcune delle variabili $x_{3s+1}, \dots, x_{3s+t}$; quanto alle c_λ cambiando se mai l'ordine delle variabili si può supporre che le prime $t_1 - t$ sien positive, le altre negative. Si ha allora il G_6

$$(\mathrm{VI})\left\{\begin{aligned}
&R_{12}f = 2\sum_1^s {}_\lambda\, S_{\lambda, s+\lambda}\ , \quad R_{23}f = 2\sum_1^s {}_\lambda\, S_{s+\lambda, 2s+\lambda}\ , \quad R_{13}f = 2\sum_1^s {}_\lambda\, S_{\lambda, 2s+\lambda}\\
&R_{24}f = 2\sum_1^t {}_\lambda\, S_{s+\lambda, 3s+\lambda} + 2\sum_1^{t_1-t} {}_\lambda\, S_{t+\lambda, 2s+t+\lambda} - 2\sum_1^{s-t_1} {}_\lambda\, S_{t_1+\lambda, 2s+t_1+\lambda}\\
&R_{14}f = 2\sum_1^t {}_\lambda\, S_{\lambda, 3s+\lambda} - 2\sum_1^{t_1-t} {}_\lambda\, S_{s+t+\lambda, 2s+t+\lambda} + 2\sum_1^{s-t_1} {}_\lambda\, S_{s+t_1+\lambda, 2s+t_1+\lambda}\\
&R_{34}f = 2\sum_1^t {}_\lambda\, S_{2s+\lambda, 3s+\lambda} - 2\sum_1^{t_1-t} {}_\lambda\, S_{t+\lambda, s+t+\lambda} + 2\sum_1^{s-t_1} {}_\lambda\, S_{t_1+\lambda, s+t_1+\lambda}.
\end{aligned}\right.$$

Notiamo poi che se $t = 0$, affinchè le rotazioni sieno indipendenti, deve essere $0 < t_1 < s$.

59. Supponiamo ora, che data al $G_3 = (R_{12}, R_{23}, R_{13})$ la forma (V*) risulti $p_1 = p_2 = 1$ ma $u_1 > 1$, che si possa porre cioè

$$R_{12}f = \frac{1}{2}\sum_1^u {}_i\, 2i \sum_1^k {}_\mu\, Y_{(i-1)k+\mu, (i-1)k+\mu}\ ,$$

$$R_{23}f = \sum_1^k {}_\mu \left\{ \sqrt{2u(u+1)}\, S_{2\mu, 2uk+\mu} + \sum_1^{u-1} {}_i \sqrt{u(u+1) - i(i+1)}\, X_{(i-1)k+\mu, ik+\mu} \right\},$$

$$R_{13}f = \sum_1^k {}_\mu \left\{ \sqrt{2u(u+1)}\, S_{2\mu-1, 2uk+\mu} - \sum_1^{u-1} {}_i \sqrt{u(u+1) - i(i+1)}\, Y_{(i-1)k+\mu, ik+\mu} \right\}.$$

Quanto alla $R_{24}f$, essa deve appartenere rispetto alla $R_{12}f$ al fattore 2, e perciò deve essere del tipo (n. 23)

$$R_{24}f = \sum_1^{u-1}{}_i \sum_1^k{}_{\mu\nu} (a_{i\mu\nu} X_{(i-1)k+\mu, ik+\nu} + b_{i\mu\nu} Y_{(i-1)k+\mu, ik+\nu} + \\ + \sum_1^k{}_\mu \sum_1^t{}_\nu (l_{\mu\nu} S_{2\mu, 2uk+\nu} + g_{\mu\nu} S_{2\mu-1, 2uk+\nu}).$$

Perchè poi $R_{24}f$ sia permutabile con $R_{13}f$, occorre che tutte le l ed a sieno nulle; di più che sia

$$g_{\mu\nu} = 0 \ (\nu > k); \ g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}; \ \sqrt{2u(u+1)}\ b_{1\mu\nu} = -\sqrt{u(u+1)-2}\ g_{\nu\mu},$$

$$\sqrt{u(u+1)-i(i-1)}\ b_{i\mu\nu} = \sqrt{u(u+1)-i(i+1)}\ b_{i-1,\mu\nu},$$

$$(\mu, \nu = 1, \dots, k; \ i = 2, \dots, u-1),$$

per cui

$$R_{24}f = \sum_1^k{}_{\mu\nu} (g_{\mu\nu} S_{2\mu-1, 2uk+\nu} + \sum_1^{u-1}{}_i b_{i\mu\nu} Y_{(i-1)k+\mu, ik+\nu}).$$

Ed allora se consideriamo la prima parte, si può ripetere in fondo ciò, che abbiamo detto alla fine del numero precedente, solo che, per non cambiare la forma del G_3, insieme alla sostituzione, che era fatta sulle $x_1, x_3, \dots, x_{1k-1}$, ne va fatta una uguale sulle $x_2, x_4, \dots, x_{2k}$, ed altre uguali a queste sulle $x_{2ik+1}, \dots, x_{2(i+1)k}$ $(i = 1, \dots, u-1)$. Si può così ottenere, che sien nulle tutte le g con indici differenti; dopo di che si ha facilmente che deve essere

$$\text{(VII)} \quad \begin{cases} R_{24}f = \left(\sum_1^{k_1}{}_\mu - \sum_{k_1+1}^{k}{}_\mu\right) \Big\{ \sqrt{2u(u+1)}\ S_{2\mu-1, 2uk+\mu} - \\ \qquad - \sum_1^{u-1}{}_i \sqrt{u(u+1)-i(i+1)}\ Y_{(i-1)k+\mu, ik+\mu} \Big\}, \\ R_{14}f = \left(-\sum_1^{k_1}{}_\mu + \sum_{k_1+1}^{k}{}_\mu\right) \Big\{ \sqrt{2u(u+1)}\ S_{2\mu, 2uk+\mu} + \\ \qquad + \sum_1^{u-1}{}_i \sqrt{u(u+1)-i(i+1)}\ X_{(i-1)k+\mu, ik+\mu} \Big\}, \\ R_{34}f = \frac{1}{2}\left(-\sum_1^{k_1}{}_\mu + \sum_{k_1+1}^{k}{}_\mu\right) \sum_1^{u}{}_i 2i Y_{(i-1)k+\mu, (i-1)k+\mu}, \ (0 < k_1 < k). \end{cases}$$

Ponendo ora

$$2\,R_1 f = R_{12} f - R_{34} f\,,\quad 2\,R_2 f = R_{23} f - R_{14} f\,,\quad 2\,R_3 f = R_{13} f + R_{24} f,$$

$$2\,S_1 f = R_{12} f + R_{34} f\,,\quad 2\,S_2 f = R_{23} f + R_{14} f\,,\quad 2\,S_3 f = R_{13} f - R_{24} f,$$

troviamo due G_3, che agiscono su variabili diverse l'uno dall'altro, e che son del tipo stesso, che il G_3 sopra considerato, solo che a k si deve sostituire per il primo k_1, per il secondo $k - k_1$.

60. Supponiamo ora che invece data al $G_3 \equiv (R_{12}, R_{23}, R_{13})$ la forma (V^*) risulti $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, e dapprima anche $u = 0$, nel qual caso si ha

$$R_{12} f = \frac{1}{2} \sum_1^{2k}{}_\mu\, Y_{\mu\mu}\,,\quad R_{23} f = \sum_1^{k}{}_\mu\, W_{2\mu-1,2\mu}\,,\quad R_{13} f = \sum_1^{k}{}_\mu\, Z_{2\mu-1,2\mu}\,.$$

Nel medesimo modo, che nel numero precedente si trova che deve essere

$$R_{24} f = \sum_1^{k}{}_{\lambda\mu} \Big\{ a_{\lambda\mu} (W_{2\lambda-1,2\mu-1} - W_{2\lambda,2\mu}) + b_{\lambda\mu} (W_{2\lambda-1,2\mu} - W_{2\mu-1,2\lambda}) +$$
$$+ c_{\lambda\mu}\, (Z_{2\lambda-1,2\mu-1} + Z_{2\lambda,2\mu}) + d_{\lambda\mu}\, (Z_{2\lambda-1,2\mu} + Z_{2\mu-1,2\lambda}) \Big\},$$

$$(a_{\lambda\mu} = -a_{\mu\lambda}\,,\ b_{\lambda\mu} = -b_{\mu\lambda}\,,\ c_{\lambda\mu} = -c_{\mu\lambda}\,,\ d_{\lambda\mu} = d_{\mu\lambda}\ ;\ \lambda, \mu = 1, \dots, k).$$

Ora, se si scrivono le condizioni, perchè la $R_{24} f$ lasci fermo lo spazio

$$\sum_1^{k}{}_\lambda\, (a_\lambda\, x_{4\lambda-3} + b_\lambda\, x_{4\lambda-2} + c_\lambda\, x_{4\lambda-1} + d_\lambda\, x_{4\lambda}) = 0\,,$$

$$\sum_1^{k}{}_\lambda\, (a_\lambda\, x_{4\lambda-2} - b_\lambda\, x_{4\lambda-3} + c_\lambda\, x_{4\lambda} - d_\lambda\, x_{4\lambda-1}) = 0\,,$$

$$\sum_1^{k}{}_\lambda\, (a_\lambda\, x_{4\lambda-1} - b_\lambda\, x_{4\lambda} - c_\lambda\, x_{4\lambda-3} + d_\lambda\, x_{4\lambda-2}) = 0\,,$$

$$\sum_1^{k}{}_\lambda\, (a_\lambda\, x_{4\lambda} + b_\lambda\, x_{4\lambda-1} - c_\lambda\, x_{4\lambda-2} - d_\lambda\, x_{4\lambda-3}) = 0\,,$$

si trovano le equazioni

$$\sum_1^k{}_\lambda\, (d_{\lambda\mu}\, a_\lambda + b_{\lambda\mu}\, b_\lambda + c_{\lambda\mu}\, c_\lambda - a_{\lambda\mu}\, d_\lambda) = \rho_1\, d_\mu + \rho_2\, c_\mu - \rho_3\, b_\mu + \rho_4\, a_\mu\,,$$

$$\sum_1^k{}_\lambda\, (-b_{\lambda\mu}\, a_\lambda + d_{\lambda\mu}\, b_\lambda + a_{\lambda\mu}\, c_\lambda + c_{\lambda\mu}\, d_\lambda) = \rho_1\, c_\mu - \rho_2\, d_\mu + \rho_3\, a_\mu + \rho_4\, b_\mu\,,$$

$$(\mu = 1, \dots, k).$$

$$\sum_1^k{}_\lambda\, (-c_{\lambda\mu}\, a_\lambda - a_{\lambda\mu}\, b_\lambda + d_{\lambda\mu}\, c_\lambda - b_{\lambda\mu}\, d_\lambda) = -\rho_1\, b_\mu - \rho_2\, a_\mu - \rho_3\, d_\mu + \rho_4\, c_\mu\,,$$

$$\sum_1^k{}_\lambda\, (a_{\lambda\mu}\, a_\lambda - c_{\lambda\mu}\, b_\lambda + b_{\lambda\mu}\, c_\lambda + d_{\lambda\mu}\, d_\lambda) = -\rho_1\, a_\mu + \rho_2\, b_\mu + \rho_3\, c_\mu + \rho_4\, d_\mu\,,$$

Perchè queste $4k$ equazioni nelle $4k$ incognite a, b, c, d possan sussistere occorre, che il determinante dei coefficienti sia nullo: quando si faccia $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$, esso eguagliato a zero dà in ρ_4 l'equazione secolare, onde si può soddisfare solo con valori reali di ρ_4. Corrispondentemente ad uno di questi valori di ρ_4 c'è almeno uno spazio reale del tipo detto, che è lasciato fermo dalla $R_{24}f$. Ora questo spazio si può prendere per lo spazio $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ senza alterare la forma di $R_{12}f$ (n. 14). Osserviamo poi, che anche $R_{23}f$ ha la forma canonica, e così $R_{13}f$, e se noi applichiamo ad esse il risultato del n. 14 troviamo, che non cambia neanche la forma della $R_{23}f$ e della $R_{13}f$. Non cambia perciò neppur la forma della $R_{24}f$: anzi questa dovendo lasciar fermo lo spazio $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ diviene più particolarmente

$$R_{24}f = \sum_2^k{}_{\lambda\mu} \Big\{ a_{\lambda\mu}\, (W_{2\lambda-1,2\mu-1} - W_{2\lambda,2\mu}) + b_{\lambda\mu}\, (W_{2\lambda-1,2\mu} - W_{2\mu-1,2\lambda}) +$$

$$+ c_{\lambda\mu}\, (Z_{2\lambda-1,2\mu-1} + Z_{2\lambda,2\mu}) + d_{\lambda\mu}\, (Z_{2\lambda-1,2\mu} + Z_{2\mu-1,2\lambda}) \Big\} + m_1\, Z_{12}.$$

Operando analogamente sulla prima parte, si arriva in fine ad avere

$$R_{24} = \sum_1^k{}_\lambda\, m_\lambda\, Z_{2\lambda-1,2\lambda}\,.$$

Perciò

$$R_{14}f = -\sum_1^k{}_\lambda\, m_\lambda\, W_{2\lambda-1,2\lambda}\,,$$

ed

$$(R_{24}\, R_{14}) = \sum_1^k{}_\lambda\, m^2_\lambda\, (Y_{2\lambda-1,2\lambda-1} + Y_{2\lambda,2\lambda})\,.$$

D'altra parte deve essere $(R_{24} R_{14}) = 2\, R_{12}f$, quindi $m_\lambda = \pm 1$: disponendo opportunamente le variabili si trova così

$$R_{24}f = \left(\sum_1^{k_1}{}_\mu - \sum_{k_1+1}^{k}{}_\mu\right) Z_{2\mu-1,2\mu}\ ,\quad R_{14}f = \left(-\sum_1^{k_1}{}_\mu + \sum_{k_1+1}^{k}{}_\mu\right) W_{2\mu-1,2\mu}\ ,$$

$$R_{34}f = \frac{1}{2}\left(-\sum_1^{2k_1}{}_\mu + \sum_{2k_1+1}^{2k}{}_\mu\right) Y_{\mu,\mu}\,.$$

Senza stare a ripetere il ragionamento di questo e del numero precedente nel caso più generale di u qualunque si arriva a trovare facilmente, che ad $R_{14}f$, $R_{24}f$, R_{34} si può dare la forma seguente

$$(\mathrm{VIII})\left\{\begin{array}{l} R_{24}f = \left(\sum_1^{k_1}{}_\mu - \sum_{k_1+1}^{k}{}_\mu\right) \Big\{(u+1)\, Z_{2\mu-1,2\mu} - \\ \qquad - \sum_0^{u-1}{}_i \sqrt{(u+1)^2-(i+1)^2}\, (Y_{2ik+2\mu-1,\,2(i+1)k+2\mu-1} + Y_{2ik+2\mu,\,2(i+1)k+2} \\ R_{14}f = \left(-\sum_1^{k_1}{}_\mu + \sum_{k_1+1}^{k}{}_\mu\right) \Big\{(u+1)\, W_{2\mu-1,2\mu} + \\ \qquad + \sum_0^{u-1}{}_i \sqrt{(u+1)^2-(i+1)^2}\, (X_{2ik+2\mu-1,\,2(i+1)k+2\mu-1} + X_{2ik+2\mu,\,2(i+1)k+2} \\ R_{34}f = \frac{1}{2}\left(-\sum_1^{2k_1}{}_\mu + \sum_{2k_1+1}^{2k}{}_\mu\right) \sum_0^{u}{}_i\, (1+2i)\, Y_{2ik+\mu,2ik+\mu}\ ,\quad (0 < k_1 < k)\,. \end{array}\right.$$

Si può dunque trarre ancora la conclusione della fine del numero precedente, e questo è quello che c'importa specialmente notare.

61. E veniamo al caso in cui data al $G_3 \equiv (R_{12}, R_{23}, R_{13})$ la forma (V^*) p_1 e p_2 son qualunque; in tale ipotesi, scritta la $R_{24}f$ nella forma più generale, compatibile col fatto, che essa rispetto ad $R_{12}f$ deve appartenere al fattore 2, e che deve essere permutabile con $R_{13}f$,

si trova che la $R_{24}f$, e per conseguenza anche $R_{14}f$ ed $R_{34}f$, devono essere composte ciascuna di p_2 parti, ognuna delle quali contiene solamente le variabili di uno dei p_2 gruppi, che figurano nella forma generale (V^*) del G_3. Non stiamo a fare il calcolo puramente materiale, che non presenta nessuna difficoltà. Il G_6 si otterrà dunque associando p_2 gruppi come quelli trovati nei numeri precedenti, naturalmente contraddistinguendoli con un indice in alto, che indichi come ciascuno di essi operi su variabili tutte diverse da quelle degli altri; e l'associazione deve essere fatta sommando le Rf dei varii gruppi con gli stessi indici. Se nessuna delle prime p_1 u_λ è $=1$, il G_6 avrà per rotazioni quelle di due G_3 agenti su variabili tutte diverse, l'uno dall'altro.

Esaurita così completamente la ricerca dei G_6 di rotazioni aggiungiamo solo, che quando sia $p_2 > 1$, non occorrono più le limitazioni che abbiamo imposto volta per volta alle quantità t_1 e k_1, onde le rotazioni del G_6 fossero effettivamente distinte.

62. È ora facile trovare la forma normale dei gruppi, che non contengono nè dei G_8, nè dei G_{10}: essi per il teorema del n. 48 hanno per rotazioni, quelle di α G_3, tali che le rotazioni di ciascuno di questi G_3 son permutabili con quelle di tutti gli altri, e poi quelle di un G_μ di rotazioni permutabili tra loro e con le precedenti.

Supponiamo dapprima, che sia $\alpha = 1$, cioè che nel gruppo ci sia un solo G_3 non abeliano. Data a questo G_3 la forma normale (V^*) si trova subito, che le rotazioni permutabili col G_3 devono operare separatamente su ciascuno dei gruppi di variabili allora distinti con un indice in alto. Potremo supporre dunque, colle notazioni di allora, $p_2 = 1$ chè il caso generale se ne dedurrà con tutta facilità: e supponiamo dapprima anche $p_1 = 1$; il G_3 avrà allora la forma

$$R_1 f = \frac{1}{2} \sum_1^u{}_i \, 2i \sum_1^k{}_\mu \, Y_{(i-1)k+\mu,\,(i-1)k+\mu} \,,$$

$$R_2 f = \sum_1^k{}_\mu \left\{ \sqrt{2u(u+1)}\, S_{2\mu,\,2uk+\mu} + \sum_1^{u-1}{}_i \sqrt{u(u+1)-i(i+1)}\; X_{(i-1)k+\mu,\,ik+\mu} \right\},$$

$$R_3 f = \sum_1^k{}_\mu \left\{ \sqrt{2u(u+1)}\, S_{2\mu-1,\,2uk+\mu} - \sum_1^{u-1}{}_i \sqrt{u(u+1)-i(i+1)}\; Y_{(i-1)k+\mu,\,ik+\mu} \right\}.$$

Perchè le rotazioni $S_l f$ sien permutabili con queste occorre, che sia

$$S_l f = \sum_{1}^{k}{}_{\lambda\mu}\, a_{l\lambda\mu} \left\{ \sum_{1}^{u}{}_i \left(S_{2(i-1)k+2\lambda-1,\,2(i-1)k+2\mu-1} + S_{2(i-1)k+2\lambda,\,2(i-1)k+2\mu}\right) + \right.$$
$$\left. + S_{2uk+\lambda,\,2uk+\mu} \right\} + \cdots,$$

dove la parte tralasciata opera su variabili tutte diverse.

Ora sulle variabili $x_{2uk+1}, \ldots, x_{(2u+1)k}$ si può fare qualunque sostituzione ortogonale; purchè la stessa sostituzione si faccia anche sulle $x_{2(i-1)k+1}, \ldots, x_{2ik-1}$ e sulle $x_{2(i-1)k+2}, \ldots, x_{2ik}$ e ciò per ogni valore di i da 1 ad u, non cambia affatto la forma del G_3 e quindi neanche la forma delle $S_l f$. Ma ora con una tale sostituzione sulle $x_{2uk+1}, \ldots, x_{(2u+1)k}$ alle rotazioni

$$\overline{S}_l f = \sum_{1}^{k}{}_{\lambda\mu}\, a_{l\lambda\mu}\, S_{2uk+\lambda,\,2uk+\mu}$$

permutabili tra loro, si può dare la forma (§ 2)

$$\overline{S}_l f = \sum_{1}^{k'}{}_{\lambda}\, a_{l\lambda}\, Y_{uk+\lambda,\,uk+\lambda} \qquad \left(k' = \left[\frac{k}{2}\right]\right).$$

Ne viene che con la sostituzione detta sopra si ridurrà anche

$$S_l f = \sum_{1}^{k'}{}_{\lambda}\, a_{l\lambda} \left\{ 2 \sum_{1}^{u}{}_i X_{(i-1)k+2\lambda-1,\,(i-1)k+2\lambda} + Y_{uk+\lambda,\,uk+\lambda} \right\} + \cdots, \quad (l = 1, \ldots, v),$$

dove alle parti tralasciate si può dare la forma canonica.

Supponiamo ora invece $p_1 = 0$, $p_2 = 1$: si avrà

$$R_1 f = \frac{1}{2} \sum_{0}^{u_\lambda}{}_i\, (1+2i) \sum_{1}^{2k}{}_{\mu}\, Y_{2ik+\mu,\,2ik+\mu}.$$

$$R_2 f = \sum_{1}^{k}{}_{\mu} \left\{ (u+1)\, W_{2\mu-1,\,2\mu} + \right.$$
$$\left. + \sum_{0}^{u-1}{}_i \sqrt{(u+1)^2 - (i+1)^2}\, \left(X_{2ik+2\mu-1,\,2(i+1)k+2\mu-1} + X_{2ik+2\mu,\,2(i+1)k+2\mu}\right) \right\}$$

e le $S_l f$ dovran esser del tipo

$$S_l f = \sum_0^{u-1} {}_i \sum_1^{2k} {}_{\lambda\mu}\, a_{l\lambda\mu}\, S_{2ik+\lambda,\, 2ik+\mu} + \dots \qquad (l = 1, \dots, v).$$

Con una sostituzione sulle $x_1, \dots, x_{2k}$ le rotazioni

$$\overline{S}_l f = \sum_1^{2k} {}_{\lambda\mu}\, a_{l\lambda\mu}\, S_{\lambda,\mu}$$

si posson, senza alterare la forma di $R_1 f$, portare alla forma

$$\overline{S}_l f = \sum_1^{k} {}_{\lambda}\, a_{l\lambda}\, S_{2\lambda-1,\, 2\lambda}.$$

La stessa sostituzione facendo anche sulle $x_{2ik+1}, \dots, x_{2(i+1)k}$ $(i = 1, \dots, u)$ si rende così sempre senza cambiare $R_1 f$

$$S_l f = \sum_1^{2k} {}_{\lambda}\, a_{l\lambda} \sum_0^{u} {}_i\, S_{2ik+2\lambda-1,\, 2ik+2\lambda} + \dots.$$

Cambierà invece la prima parte della $R_2 f$, non la seconda per il modo con cui si fa la sostituzione; sarà dunque:

$$R_2 f = \sum_1^{2k} {}_{\lambda\mu} \left\{ \alpha_{\lambda\mu} W_{\lambda\mu} + \beta_{\lambda\mu} Z_{\lambda\mu} \right\} + \sum_0^{u-1} {}_i \sqrt{(u+1)^2 - (i+1)^2} \sum_1^{2k} {}_{\mu}\, X_{2ik+\mu,\, 2(i+1)k+\mu}.$$

Ma ora osserviamo, che son nulle tutte le $\alpha_{\lambda\mu}$ e $\beta_{\lambda\mu}$ per cui non è contemporaneamente

$$a_{l\lambda} = - a_{l\mu} \qquad (l = 1, \dots, v).$$

Se noi supponiamo sia

$$a_{l,1} = a_{l,2} = \dots = a_{l,t_1} = - a_{l,t_1+1} = \dots = - a_{l,t} \quad (l = 1, \dots, v),$$

ma che non ci sieno altri valori di λ per cui sia $|a_{l\lambda}| = |a_{l,1}|$ $(l = 1, \dots, v)$, sarà dunque

$$R_2 f = \sum_1^{t_1} {}_{\lambda} \sum_{t_1+1}^{t} {}_{\mu} \left\{ \alpha_{\lambda\mu} W_{\lambda\mu} + \beta_{\lambda\mu} Z_{\lambda\mu} \right\} +$$
$$+ \sum_0^{u-1} {}_i \sqrt{(u+1)^2 - (i+1)^2} \sum_1^{2t} {}_{\mu}\, X_{2ik+\mu,\, 2(i+1)k+\mu} + \dots,$$

dove la parte tralasciata opera su variabili tutte diverse da quelle, che figurano nella parte scritta. Ma ora perchè la prima parte sia di grado $2t$, come occorre perchè il grado non cambia per nessuna trasformazione ortogonale, deve essere $t=2t_1$, dopo di che si vede, che con una sostituzione sulle variabili $x_1, \ldots, x_{2t_1}$ ed una sulle $x_{2t_1+1}, \ldots, x_{4t_1}$ si posson render nulle tutte le $\alpha_{\lambda\mu}$ e $\beta_{\lambda\mu}$ fuorchè le $\alpha_{\lambda, t+\lambda}$, che saran tutte $=\sqrt{u+1}$, senza alterare la forma della $R_1 f$, e quindi per le ipotesi fatte sulle $a_{l,1}, \ldots, a_{l,2t_1}$ senza alterare neanche quella delle $S_l f$. Ma se noi le stesse sostituzioni facciamo anche sulle $x_{2ik+1}, \ldots, x_{2ik+2t_1}$ e sulle $x_{2ik+2t_1+1}, \ldots, x_{2ik+4t_1}$ per i da 1 ad u, non cambian neanche le altre parti della $R_2 f$. Se scambiamo alcuni indici vediamo così, che si può ridurre:

$$R_2 f = \sum_1^{t_1}{}_\lambda \sqrt{u+1}\, W_{2\lambda-1,2\lambda} + \sum_0^{u-1}{}_i \sqrt{(u+1)^2-(i+1)^2} \sum_1^{2t_1}{}_\mu X_{2ik+\mu,2(i+1)k+\mu} + \cdots,$$

mentre si ha

$$S_l f = a_{l1} \sum_1^{t_1}{}_\lambda \sum_0^{u}{}_i (Y_{2ik+2\lambda-1,2ik+2\lambda-1} - Y_{2ik+2\lambda,2ik+2\lambda}) + \cdots \quad (l=1, \ldots, v).$$

Operando analogamente sulle altre parti si trova così che senza alterare la forma del G_3 si può dare alle $S_l f$ la forma

$$S_l f = \sum_1^{k}{}_\lambda a_{l\lambda} \sum_0^{u}{}_i (Y_{2ik+2\lambda-1,2ik+2\lambda-1} - Y_{2ik+2\lambda,2ik+2\lambda}) + \cdots,$$
$$(l=1, \ldots, v).$$

63. Resta ora da trattare il caso, che nel gruppo ci sien più di un G_3 non abeliano, cioè che sia $\alpha > 1$.

Per questo supporremo di conoscere già la forma normale nel caso ci sieno solo $\alpha-1$ o meno di quei G_3, e deduciamone la forma nel caso ce ne sieno α. Consideriamo due di quei G_3, che indicheremo con $G_3^{(1)}$ e $G_3^{(2)}$ (α è ≥ 2): data al G_6 che essi formano la forma normale vista precedentemente le variabili su cui opera il gruppo, si divideranno in 4 serie, la 1.ª formata dalle variabili che non figurano nè in $G_3^{(1)}$ nè in $G_3^{(2)}$, la 2.ª formata dalle variabili che figurano in $G_3^{(1)}$ ma non in $G_3^{(2)}$, la 3.ª formata da quelle che figurano in $G_3^{(2)}$ ma non in $G_3^{(1)}$, la 4.ª infine da quelle che figurano tanto in $G_3^{(1)}$ che in $G_3^{(2)}$. Tutte le altre rotazioni del gruppo essendo permutabili con quelle di $G_3^{(1)}$ e $G_3^{(2)}$, per il n. 23 dovranno agire separatamente sulle variabili di ciascuna serie, e si comporranno quindi di 4 parti agenti rispettivamente sulle variabili di ciascuna serie. Le parti che agiscono su quelle della prima formano un gruppo con al massimo $\alpha - 2$ G_3, e di esse è quindi nota la forma canonica. Le parti, che agiscono sulle variabili della seconda serie formano anch'esse un gruppo, che contiene al più $\alpha - 1$ G_3, e perciò pure di esse è nota per ipotesi la forma canonica. Analogamente per le parti che agiscono sulle variabili della 3.ª serie: onde di tutte queste parti è inutile occuparci. Veniamo alle parti, che operano sulle variabili della 4.ª serie, e che formano pure esse un gruppo: intanto chiamando $R_{ik}f$ $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ le rotazioni del G_6 cui si sia data la composizione (46), poichè tali parti delle rotazioni di $G_3^{(1)}$ e $G_3^{(2)}$ devono operare solo su variabili tutte comuni, si potrà supporre per quanto abbiamo visto

$$R_{ik}f = \sum_{1}^{s}{}_{\lambda} S_{(i-1)s+\lambda,\,(k-1)s+\lambda} + \dots \quad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

dove le parti tralasciate agiscono solo sulle variabili delle altre serie. Per le altre trasformazioni del gruppo permutabili con tutte le precedenti, si ha che devono avere la forma

$$\sum_{1}^{4}{}_{i} \sum_{1}^{s}{}_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} S_{(i-1)s+\lambda,\,(i-1)s+\lambda} + \dots,$$

dove come avanti le parti tralasciate operan solo sulle variabili delle altre serie. Ma ora parti come la

$$\sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} S_{\lambda,\mu}$$

formano un gruppo, che contiene al massimo $\alpha - 2$ G_3 ed al quale perciò si può dare una forma canonica nota con una conveniente sostituzione sulle $x_1, \dots, x_s$. Se la stessa sostituzione facciamo anche sulle $x_{s+1}, \dots, x_{2s}$, sulle $x_{2s+1}, \dots, x_{3s}$, sulle $x_{3s+1}, \dots, x_{4s}$ non cambia la forma del G_6, e perciò neanche quella delle altre rotazioni del gruppo. Noti ora i coefficienti $a_{\lambda\mu}$ è nota così anche la forma canonica di queste altre rotazioni.

§ 7.

I gruppi, che non contengono G_8

64. Veniamo ora alla ricerca dei G_{10}, che hanno la composizione

$$(R_{ik}\, R_{lm}) = 2(-\varepsilon_{il}\, R_{km}f + \varepsilon_{im}\, R_{kl}f + \varepsilon_{kl}\, R_{im}f - \varepsilon_{km}\, R_{il}f)\,,$$
$$(i, k, l, m = 1, \dots, 5\,;\; i \neq k\,;\; l \neq m)\,.$$

Poniamo al solito

$$2\,R_1 f = R_{12}f - R_{34}f\,,\quad 2\,R_2 f = R_{23}f - R_{14}f\,,\quad 2\,R_3 f = R_{13}f + R_{24}f\,,$$
$$2\,S_1 f = R_{12}f + R_{34}f\,,\quad 2\,S_2 f = R_{23}f + R_{14}f\,,\quad 2\,S_3 f = R_{13}f - R_{24}f\,;$$

per il paragrafo precedente, ridotte $R_1 f$ ed $S_1 f$ a forma canonica, esse potranno aver comuni sole quelle $Y_{\nu\nu}$, che in ambedue figurano col coefficiente ± 1. Sicchè avremo

$$R_1 f = \frac{1}{2}\left\{\sum_{1}^{q_1}{}_{\nu}\, Y_{\nu\nu} + \sum_{1}^{t_1-1}{}_{i}\, 2i \sum_{q_i+1}^{q_{i+1}}{}_{\nu}\, Y_{\nu\nu} + \sum_{1}^{t_2-t_1}{}_{i}\,(2i-1) \sum_{q_{t_1+i-1}+1}^{q_{t_1+i}}{}_{\nu}\, Y_{\nu\nu}\right\},$$

$$S_1 f = \frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{1}^{q'_1}{}_{\nu} - \sum_{q'_1+1}^{q_1}{}_{\nu}\right) Y_{\nu\nu} + \sum_{1}^{t_3-t_2}{}_{i}\, 2i \sum_{q_{t_2+i-1}+1}^{q_{t_2+1}}{}_{\nu}\, Y_{\nu\nu} + \sum_{1}^{t_4-t_3}{}_{i}\,(2i-1) \sum_{q_{t_3+i-1}+1}^{q_{t_3+i}}{}_{\nu}\, Y_{\nu\nu}\right\}.$$

D'altra parte $R_{15}f$ deve appartenere rispetto ad $R_1 f$ e a $S_1 f$ al fattore 1: quindi in essa per il solito n. 23 non possono comparire nè le $x_{2q_2+1}, \dots, x_{2q_{t_1}}$ nè le $x_{2q_{t_1+1}+1}, \dots, x_{2q_{t_2}}$, e così neanche le $x_{2q_{t_2+1}+1}, \dots, x_{2q_{t_3}}$ e le $x_{2q_{t_3+1}+1}, \dots, x_{2q_{t_4}}$. Ma allora queste variabili non compaiono neanche nella $2R_{25}f = -(R_{12}\, R_{15})$ e perciò nemmeno nella $(R_{15} R_{25})$. D'altronde questa dovendo essere uguale a $-2 R_{12}f$, ne viene che deve essere $t_1 = 2$, $t_2 = 3$, $t_3 = 3$, $t_4 = 4$. Sicchè si avrà intanto

$$R_1 f = \frac{1}{2} \left\{ \sum_1^{q_1} {}_\nu \, Y_{\nu\nu} + 2 \sum_{q_1+1}^{q_2} {}_\nu \, Y_{\nu\nu} + \sum_{q_2+1}^{q_3} {}_\nu \, Y_{\nu\nu} \right\},$$

$$S_1 f = \frac{1}{2} \left\{ \sum_1^{q'_1} {}_\nu \, Y_{\nu\nu} - \sum_{q'_1+1}^{q_1} {}_\nu \, Y_{\nu\nu} + 2 \sum_{q_3+1}^{q_4} {}_\nu \, Y_{\nu\nu} + \sum_{q_4+1}^{q_5} {}_\nu \, Y_{\nu\nu} \right\},$$

e perciò anche

$$R_{12} f = \frac{1}{2} \left\{ 2 \sum_1^{q'_1} {}_\nu \, Y_{\nu\nu} + 2 \sum_{q_1+1}^{q_2} {}_\nu \, Y_{\nu\nu} + 2 \sum_{q_3+1}^{q_4} {}_\nu \, Y_{\nu\nu} + \sum_{q_2+1}^{q_3} {}_\nu \, Y_{\nu\nu} + \sum_{q_4+1}^{q_5} {}_\nu \, Y_{\nu\nu} \right\},$$

$$R_{34} f = \frac{1}{2} \left\{ -2 \sum_{q'_1+1}^{q_1} {}_\nu \, Y_{\nu\nu} - 2 \sum_{q_1+1}^{q_2} {}_\nu \, Y_{\nu\nu} + 2 \sum_{q_3+1}^{q_4} {}_\nu \, Y_{\nu\nu} - \sum_{q_2+1}^{q_3} {}_\nu \, Y_{\nu\nu} + \sum_{q_4+1}^{q_5} {}_\nu \, Y_{\nu\nu} \right\}.$$

65. Consideriamo prima il caso di $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = q_4$ in cui si ha

$$R_{12} = \frac{1}{2} \left(\sum_1^{2k_1} {}_\nu + \sum_{2k_1+1}^{2k} {}_\nu \right) Y_{\nu\nu}, \quad R_{13} f = \left(\sum_1^{k_1} {}_\nu + \sum_{k_1+1}^{k} {}_\nu \right) Z_{2\nu-1, 2\nu},$$

$$R_{23} f = \left(\sum_1^{k_1} {}_\nu + \sum_{k_1+1}^{k} {}_\nu \right) W_{2\nu-1, 2\nu}; \quad R_{14} f = \left(-\sum_1^{k_1} {}_\nu + \sum_{k_1+1}^{k} {}_\nu \right) W_{2\nu-1, 2\nu},$$

$$R_{34} = \frac{1}{2} \left(-\sum_1^{2k_1} {}_\nu + \sum_{2k_1+1}^{2k} {}_\nu \right) Y_{\nu\nu}, \quad R_{24} f = \left(\sum_1^{k_1} {}_\nu - \sum_{k_1+1}^{k} {}_\nu \right) Z_{2\nu-1, 2\nu}.$$

Dovendo $R_{25} f$ essere permutabile con $R_{34} f$, e rispetto ad $R_{12} f$ appartenere al fattore 2, deve essere

$$R_{25} f = \sum_1^{2k_1} {}_\lambda \sum_{2k_1+1}^{2k} {}_\mu \, (a_{\lambda\mu} W_{\lambda\mu} + b_{\lambda\mu} Z_{\lambda\mu});$$

anzi dovendo per la $R_{25} f$ essere ora soddisfatte le condizioni che erano imposte nel n. 60 alla $R_{24} f$, come in quel numero ne viene che essa deve avere la forma più particolare

$$\mathrm{R}_{25}f=\sum_{1}^{k_1}{}_{\lambda}\ \sum_{k_1+1}^{k}{}_{\mu}\Big\{a_{\lambda\mu}\,(\mathrm{W}_{2\lambda-1,2\mu-1}-\mathrm{W}_{2\lambda,2\mu})+b_{\lambda\mu}\,(\mathrm{W}_{2\lambda-1,2\mu}-\mathrm{W}_{2\mu-1,2\lambda})+$$
$$+\,c_{\lambda\mu}\,(\mathrm{Z}_{2\lambda-1,2\mu-1}+\mathrm{Z}_{2\lambda,2\mu})+d_{\lambda\mu}\,(\mathrm{Z}_{2\lambda-1,2\mu}+\mathrm{Z}_{2\mu-1,2\lambda})\Big\}\,.$$

Procederemo ora in modo analogo a quello tenuto nel n. 55. Può la $\mathrm{R}_{25}f$ lasciar fermo uno spazio (reale)

$$\sum_{k_1+1}^{k}{}_{\mu}\ (\alpha_\mu\ x_{4\mu-3}+\beta_\mu\ x_{4\mu-2}+\gamma_\mu\ x_{4\mu-1}+\delta_\mu\ x_{4\mu})=0\,?$$

Le condizioni per questo son date dall'equazioni

$$(47)\qquad\begin{cases}\displaystyle\sum_{k_1+1}^{k}{}_{\mu}\ (a_{\lambda\mu}\,\alpha_\mu+b_{\lambda\mu}\,\gamma_\mu+c_{\lambda\mu}\,\beta_\mu+d_{\lambda\mu}\,\delta_\mu)=0\,,\\ \displaystyle\sum{}_{\mu}\ (a_{\lambda\mu}\,\beta_\mu+b_{\lambda\mu}\,\delta_\mu-c_{\lambda\mu}\,\alpha_\mu-d_{\lambda\mu}\,\gamma_\mu)=0\,,\\ \displaystyle\sum{}_{\mu}\ (-a_{\lambda\mu}\,\gamma_\mu+b_{\lambda\mu}\,\alpha_\mu+c_{\lambda\mu}\,\delta_\mu-d_{\lambda\mu}\,\beta_\mu)=0\,,\\ \displaystyle\sum{}_{\mu}\ (a_{\lambda\mu}\,\delta_\mu-b_{\lambda\mu}\,\beta_\mu+c_{\lambda\mu}\,\gamma_\mu-d_{\lambda\mu}\,\alpha_\mu)=0\,,\\ \qquad\qquad(\lambda=1\,,\dots,k_1)\,.\end{cases}$$

Ma se in queste equazioni noi mettiamo al posto di α_μ, β_μ, γ_μ, δ_μ ordinatamente β_μ, $-\alpha_\mu$, δ_μ, $-\gamma_\mu$ oppure γ_μ, $-\delta_\mu$, $-\alpha_\mu$, β_μ, oppure δ_μ, γ_μ, $-\beta_\mu$, $-\alpha_\mu$, l'equazioni stesse non cambiano. Ne viene, che se la R_{25} lascia fermo lo spazio detto, lascia fermi anche gli altri tre

$$\sum{}_{\mu}\ (\beta_\mu\ x_{4\mu-3}-\alpha_\mu\ x_{4\mu-2}+\delta_\mu\ x_{4\mu-1}-\gamma_\mu\ x_{4\mu})=0\,,$$

$$\sum{}_{\mu}\ (\gamma_\mu\ x_{4\mu-3}-\delta_\mu\ x_{4\mu-2}-\alpha_\mu\ x_{4\mu-1}+\beta_\mu\ x_{4\mu})=0\,,$$

$$\sum{}_{\mu}\ (\delta_\mu\ x_{4\mu-3}+\gamma_\mu\ x_{4\mu-2}-\beta_\mu\ x_{4\mu-1}-\alpha_\mu\ x_{4\mu})=0\,.$$

Ora i quattro spazii di cui abbiamo scritto le equazioni si potrebbero senza alterare la forma di $\mathrm{R}_{12}f$ (anzi neanche quella del G_6)

prendere per gli spazii (n. 14)

$$x_{4k-3}=0\ ,\quad x_{4k-2}=0\ ,\quad x_{4k-1}=0\ ,\quad x_{4k}=0\,,$$

dopo di che queste variabili non figurando nella $R_{25}f$, e quind neanche nella $(R_{12}R_{25})=2R_{15}f$, l'alternata $(R_{25}R_{15})$ non le conterrebbe pure essa contro l'ipotesi, che sia $(R_{25}R_{15})=2R_{12}f$. Sicchè non può darsi che la $R_{25}f$ lasci fermo uno spazio, come quello di cui sopra: d'altra parte se $k_1<k-k_1$ l'equazioni (47) son risolubili con valori non tutti nulli delle α, β, γ, δ, e quindi esiste almeno uno di quegli spazii invariante per la $R_{25}f$. Ne deriva che deve essere $k_1 \geq k-k_1$.

Analogamente si trova, che la $R_{25}f$ non può lasciar fermo nessuno spazio

$$\sum_1^{k_1}{}_\mu\,(\alpha_\mu\, x_{4\mu-3}+\beta_\mu\, x_{4\mu-2}+\gamma_\mu\, x_{4\mu-1}+\delta_\mu\, x_{4\mu})=0\,;$$

e che perciò deve essere $k-k_1 \geq k_1$. Da questa e dalla precedente segue allora

$$k=2\,k_1\,.$$

Invece la $R_{25}f$ lascierà fermo almeno uno spazio reale di equazioni

$$\sum_1^{k_1}{}_\mu\,(\alpha_\mu\, x_{4\mu-3}+\beta_\mu\, x_{4\mu-2}+\gamma_\mu\, x_{4\mu-1}+\delta_\mu\, x_{4\mu})=0$$

$$\sum_{k_1+1}^{2k_1}{}_\mu\,(\alpha_\mu\, x_{4\mu-3}+\beta_\mu\, x_{4\mu-2}+\gamma_\mu\, x_{4\mu-1}+\delta_\mu\, x_{4\mu})=0\,.$$

Le condizioni per questo son date dall'equazioni (47), in cui nei secondi membri si ponga ordinatamente $\rho_1\,\alpha_\lambda$, $-\rho_1\,\beta_\lambda$, $-\rho_1\,\gamma_\lambda$, $-\rho_1\,\delta_\lambda$; e da altre $4k_1$ analoghe scambiati solo tra loro i due indici μ e λ, e posto invece di ρ_1 un secondo fattore di proporzionalità ρ_2. Il determinante dei coefficienti di queste $8k_1$ equazioni nelle $8k_1$ incognite α, β, γ, δ, quando vi si ponga $\rho_1=\rho_2$ dà in questa incognita l'equazione secolare: ne viene come al solito, che c'è almeno uno spazio reale, come il precedente, che è invariante per la R_2f. Prendiamo per nuovo iperpiano

$$x_1=0$$

l'iperpiano

$$\sum_{1}^{k_1}{}_{\mu} (\alpha_\mu \, x_{4\mu-3}+\beta_\mu \, x_{4\mu-2}+\gamma_\mu \, x_{4\mu-1}+\delta_\mu \, x_{4\mu}) = 0 \; ,$$

essendo questa una delle equazioni di uno di quegli spazii, di cui abbiamo ora parlato. Questo per il n. 13, si può fare senza alterare la forma di $R_{12}f$, $R_{23}f$, $R_{24}f$ (anche queste avendo la forma canonica) pur di prendere per nuovi spazii

$$x_2 = 0 \quad , \quad x_3 = 0 \quad , \quad x_4 = 0$$

ordinatamente gl'iperpiani

$$\sum_{1}^{k_1}{}_{\mu} (\beta_\mu \, x_{4\mu-3} - \alpha_\mu \, x_{4\mu-2} + \delta_\mu \, x_{4\mu-1} - \gamma_\mu \, x_{4\mu}) = 0 \, ,$$

$$\sum_{1}^{k_1}{}_{\mu} (\gamma_\mu \, x_{4\mu-3} - \delta_\mu \, x_{1\mu-2} - \alpha_\mu \, x_{4\mu-1} + \beta_\mu \, x_{4\mu}) = 0 \, ,$$

$$\sum_{1}^{k_1}{}_{\mu} (\delta_\mu \, x_{4\mu-3} + \gamma_\mu \, x_{4\mu-2} - \beta_\mu \, x_{4\mu-1} - \alpha_\mu \, x_{4\mu}) = 0 \, .$$

Tale sostituzione non cambia allora evidentemente neanche il $G_6 \equiv (R_{12}f\,, \ldots , R_{34}f)$.

Analogamente potremo prendere per nuovo spazio $x_{4k_1+1} = 0$ lo spazio, che ha per equazione la seconda di quelle dello spazio considerato per la precedente sostituzione, e ciò senza alterare la forma del G_6. Potremo dunque supporre, che la $R_{25}f$ lasci fermo lo spazio

$$x_1 = x_{4k_1+1} = 0$$

dopo di che la R_{25} avrà la forma

$$R_{25}f = a_1 \, (W_{1,\, 2k_1+1} - W_{2,\, 2k+2}) + \sum_{3}^{k_1}{}_{\lambda} \; \sum_{k_1+3}^{2k_1}{}_{\mu} \, (a_{\lambda\mu} \, W_{\lambda\mu} + b_{\lambda\mu} \, Z_{\lambda\mu}) \, .$$

Operando analogamente sulla seconda parte, e poi proseguendo similmente si otterrà evidentemente

$$R_{25}f = \sum_{1}^{k_1}{}_{\lambda} \, a_\lambda \, (W_{2\lambda-1,\, 2k_1+2\lambda-1} - W_{2\lambda,\, 2k_1+2\lambda}) \, .$$

Perchè ora sia $(R_{25} R_{15}) = 2 R_{12}f$ occorre sia $a^2_\lambda = 1$ $(\lambda = 1, \ldots, k_1)$: ma nell'estrarre il radicale potremo supporre di prendere il valore positivo, che se per es. fosse $a_1 = -1$, basterebbe cambiare di segno ad x_1, x_2, x_3 ed x_4, per ridurci al caso di $a_1 = 0$. Si ha così un G_{10} per cui

$$
\text{(IX)} \quad \begin{cases}
R_{25}f = \sum_1^{k_1}{}_\lambda (W_{2\lambda-1, 2k_1+2\lambda-1} - W_{2\lambda, 2k_1+2\lambda}) , \\
R_{15}f = \sum_1^{k_1}{}_\lambda (Z_{2\lambda-1, 2k_1+2\lambda-1} - Z_{2\lambda, 2k_1+2\lambda}) , \\
R_{35}f = -\sum_1^{k_1}{}_\lambda (X_{2\lambda, 2k_1+2\lambda-1} + X_{2\lambda-1, 2k_1+2\lambda}) , \\
R_{45}f = -\sum_1^{k_1}{}_\lambda (Y_{2\lambda, 2k_1+2\lambda-1} + Y_{2\lambda-1, 2k_1+2\lambda}) .
\end{cases}
$$

65. Trattiamo ora il caso di $q_2 = q_3$, $q_4 = q_5$, in cui per il G_6 si ha evidentemente la forma del n. 58. Si può dunque supporre con altre notazioni (quelle del citato n. 58)

$$
R_{12}f = 2\sum_1^s{}_\lambda S_{\lambda, s+\lambda} , \quad R_{23}f = 2\sum_1^s{}_\lambda S_{s+\lambda, 2s+\lambda} , \quad R_{13}f = 2\sum_1^s{}_\lambda S_{\lambda, 2s+\lambda} ,
$$

$$
R_{24}f = 2\sum_1^t{}_\lambda S_{s+\lambda, 3s+\lambda} + 2\sum_1^{t_1-t}{}_\lambda S_{t+\lambda, 2s+t+\lambda} - 2\sum_1^{s-t_1}{}_\lambda S_{t_1+\lambda, 2s+t_1+\lambda} ,
$$

$$
R_{14}f = 2\sum_1^t{}_\lambda S_{\lambda, 3s+\lambda} - 2\sum_1^{t_1-t}{}_\lambda S_{s+t+\lambda, 2s+t+\lambda} + 2\sum_1^{s-t_1}{}_\lambda S_{s+t_1+\lambda, 2s+t_1+\lambda} ,
$$

$$
R_{34}f = 2\sum_1^t{}_\lambda S_{2s+\lambda, 3s+\lambda} - 2\sum_1^{t_1-t}{}_\lambda S_{t+\lambda, s+t+\lambda} + 2\sum_1^{s-t_1}{}_\lambda S_{t_1+\lambda, s+t_1+\lambda} .
$$

Perchè $R_{25}f$ rispetto ad $R_i f$ appartenga al fattore 2 e sia permutabile con $R_{13}f$ occorre che sia (cfr. n. 58)

$$
R_{25}f = \sum_1^s{}_\lambda \sum_1^u{}_\mu b_{\lambda\mu} S_{s+\lambda, 3s+\mu} + \sum_1^s{}_{\lambda\mu} c_{\lambda\mu} S_{\lambda, 2s+\mu} \quad (c_{\lambda\mu} = c_{\mu\lambda}) .
$$

Perchè poi sia permutabile anche con $R_{34}f$ si vede subito, che deve essere più particolarmente

$$R_{25}f = \sum_1^t {}_\lambda \sum_1^{u-t} {}_\mu\, b_{\lambda\mu} S_{s+\lambda,3s+t+\mu} +$$

$$+ \sum_1^t {}_\lambda \sum_1^{t_1-t} {}_\mu\, a_{\lambda\mu} (S_{s+t+\mu,3s+\lambda} - S_{\lambda,2s+t+\mu} - S_{t+\mu,2s+\lambda}) +$$

$$+ \sum_1^t {}_\lambda \sum_1^{s-t_1} {}_\mu\, c_{\lambda\mu} (S_{s+t_1+\mu,3s+\lambda} + S_{\lambda,2s+t_1+\mu} + S_{t_1+\mu,2s+\lambda}).$$

Poichè facendo una sostituzione ortogonale qualunque sulle variabili $x_{s+1}, \dots, x_{s+t}$, pur di fare la stessa sostituzione sulle $x_1, \dots, x_t$, sulle $x_{2s+1}, \dots, x_{2s+t}$ e sulle $x_{3s+1}, \dots, x_{3s+t}$, non si altera la forma del $G_6 \equiv (R_{12}, \dots, R_{3s+t})$, ripetendo il ragionamento stesso del n. 58, si vede, che ci si può sempre ridurre al caso che le variabili $x_{3s+t+1}, \dots, x_{3s+u}$, che entrano nella $R_{25}f$, sieno nel minor numero possibile, e che pure sieno nel numero minore possibile le variabili $x_{s+1}, \dots, x_{s+t}$, che entrano nella prima sommatoria della $R_{25}f$. Allora se indichiamo con v questo più piccolo numero, potremo fare in modo, che nella prima parte della $R_{25}f$ gli indici λ e μ variino solo da 1 a v ($\leq t$), dopo di che il determinante delle $b_{\lambda\mu}$ è $\neq 0$, e perciò dalla condizione $(R_{25} R_{15}) = 2 R_{12}f$ venendo

$$\sum_1^v {}_\nu\, b_{\nu\mu}\, a_{\nu\lambda} = 0 \quad , \quad \sum_1^v {}_\nu\, b_{\nu\mu}\, c_{\nu\lambda} = 0 \qquad (\mu = 1, \dots, v\,;\ \lambda = 1, \dots, t),$$

devono essere nulle le $a_{\nu\lambda}$ e $c_{\nu\lambda}$ col primo indice $\leq v$, e quindi

$$R_{25}f = \sum_1^v {}_{\lambda\mu}\, b_{\lambda\mu}\, S_{s+\lambda,3s+t+\mu} +$$

$$+ \sum_{v+1}^t {}_\lambda \left\{ \sum_1^{t_1-t} {}_\mu\, a_{\lambda\mu} (S_{s+t+\mu,3s+\lambda} - S_{\lambda,2s+t+\mu} - S_{t+\mu,2s+\lambda}) + \right.$$

$$\left. + \sum_1^{s-t_1} {}_\mu\, c_{\lambda\mu} (S_{s+t_1+\mu,3s+\lambda} + S_{\lambda,2s+t_1+\mu} + S_{t_1+\mu,2s+\lambda}) \right\}.$$

Perchè poi sia $(R_{25} R_{15}) = 2 R_{12} f$ devono essere soddisfatte le altre equazioni

$$\sum_{1}^{v}{}_{\mu} b_{\lambda\mu} b_{\nu\mu} = 4 \varepsilon_{\lambda\nu} \quad (\lambda, \nu = 1, \ldots, v), \tag{48}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{v+1}^{t}{}_{\nu} a_{\nu\lambda} a_{\nu\mu} = 2 \varepsilon_{\lambda\mu} & (\lambda, \mu = 1, \ldots, t_1 - t), \\ \sum_{v+1}^{t}{}_{\nu} c_{\nu\lambda} c_{\nu\mu} = 2 \varepsilon_{\lambda\mu} & (\lambda, \mu = 1, \ldots, s - t_1), \end{array} \right. \tag{49}$$

$$\sum_{1}^{t_1-t}{}_{\nu} a_{\lambda\nu} a_{\mu\nu} + \sum_{1}^{s-t_1}{}_{\nu} c_{\lambda\nu} c_{\mu\nu} = 4 \varepsilon_{\lambda\mu}, \quad \sum_{1}^{t_1-t}{}_{\nu} a_{\lambda\nu} a_{\mu\nu} - \sum_{1}^{s-t_1}{}_{\nu} c_{\lambda\nu} c_{\mu\nu} = 0, \tag{50}$$

$$(\lambda, \mu = v+1, \ldots, t).$$

Le (48) ci dicono, che le $b_{\lambda\mu}$ sono i coefficienti di una sostituzione ortogonale, onde con una sostituzione ortogonale sulle sole variabili $x_{3s+t+1}, \ldots, x_{3s+t+v}$, quella che ha per modulo il determinante delle $b_{\lambda\mu}$, si posson rendere nulle tutte le $b_{\lambda\mu}$ coi due indici diversi.

Analogamente per le $a_{\lambda\mu}$: facendo tanto sulle $x_{t+1}, \ldots, x_{t_1}$, che sulle $x_{s+t+1}, \ldots, x_{s+t_1}$ e sulle $x_{2s+t+1}, \ldots, x_{2s+t_1}$ quella sostituzione, che ha per modulo il determinante delle a, sostituzione che per le (49) è ortogonale, si posson ridurre nulle tutte le $a_{\lambda\mu}$ con indici diversi.

Così pure per le $c_{\lambda\mu}$. Ed ora se teniamo conto anche delle (50) vediamo subito, che deve essere anche

$$t_1 - t = t - v \quad , \quad s - t_1 = t - v \, ,$$

quindi posto

$$t - v = u$$

si avrà

$$t = u + v \quad , \quad t_1 = 2u + v \quad , \quad s = 3u + v \, .$$

Notiamo, che le riduzioni ora fatte non cambiano la forma del G_6, come si vede subito esaminando questo.

Fatta la riduzione ora detta le equazioni superiori diventano

$$b^2_{\lambda\lambda} = 4 \ (\lambda = 1, \ldots, v) \quad , \quad a^2_{\lambda\lambda} = c^2_{\lambda\lambda} = 2 \ (\lambda = 1, \ldots, u) \, .$$

Ora nell'estrarre la radice si possono prendere senz'altro i valori positivi, perchè se fosse per es. $b_{11}=-2$ basterebbe cambiar di segno ad x_{3s+t+1}, mentre se fosse $c_{11}=-\sqrt{2}$, basterebbe cambiar segno ad x_{t+2}, x_{s+t+1}, x_{2s+t+1}. Avremo dunque

$$R_{25}f=2\sum_{1}^{v}{}_{\lambda}\, S_{v+3u+\lambda,\,4v+10u+\lambda}+\sqrt{2}\sum_{1}^{u}{}_{\lambda}\,(S_{2v+4u+\lambda,\,4v+9u+\lambda}-S_{v+\lambda,\,3v+7u+\lambda}-$$
$$-S_{v+u+\lambda,\,3v+6u+\lambda}+S_{2v+5u+\lambda,\,4v+9u+\lambda}+S_{v+\lambda,\,3v+8u+\lambda}+S_{v+2u+\lambda,\,3v+6u+\lambda})\,,$$

dove $\sqrt{2}$ indica sempre la radice aritmetica di 2. Per conseguenza avremo anche:

$$(\mathrm{X})\left\{\begin{aligned}
R_{15}f &= 2\sum_{1}^{v}{}_{\lambda}\, S_{\lambda,\,4v+10u+\lambda}+\\
&\quad+\sqrt{2}\sum_{1}^{u}{}_{\lambda}\,(S_{v+u+\lambda,\,4v+9u+\lambda}+S_{2v+3u+\lambda,\,3v+7u+\lambda}+S_{2v+4u+\lambda,\,3v+6u+\lambda}+\\
&\quad+S_{v+2u+\lambda,\,4v+9u+\lambda}-S_{2v+3u+\lambda,\,3v+8u+\lambda}-S_{2v+5u+\lambda,\,3v+6u+\lambda})\,,\\
R_{35}f &= 2\sum_{1}^{v}{}_{\lambda}\, S_{2v+6u+\lambda,\,4v+10u+\lambda}+\\
&\quad+\sqrt{2}\sum_{1}^{u}{}_{\lambda}\,(S_{3v+7u+\lambda,\,4v+9u+\lambda}+S_{v+u+\lambda,\,2v+3u+\lambda}+S_{v+\lambda,\,2v+4u+\lambda}+\\
&\quad+S_{3v+8u+\lambda,\,4v+9u+\lambda}-S_{v+2u+\lambda,\,2v+3u+\lambda}-S_{v+\lambda,\,2v+5u+\lambda})\,,\\
R_{45}f &= 2\sum_{1}^{v}{}_{\lambda}\, S_{3v+9u+\lambda,\,4v+10u+\lambda}+\\
&\quad+\sqrt{2}\sum_{1}^{u}{}_{\lambda}\,(S_{v+\lambda,\,v+u+\lambda}+S_{2v+3u+\lambda,\,2v+4u+\lambda}+S_{3v+6u+\lambda,\,3v+7u+\lambda}+\\
&\quad+S_{v+\lambda,\,v+2u+\lambda}+S_{2v+3u+\lambda,\,2v+5u+\lambda}+S_{3v+6u+\lambda,\,3v+8u+\lambda})\,,
\end{aligned}\right.$$

dopo di che si vede, che son soddisfatte tutte le condizioni imposte alle rotazioni del gruppo.

67. Il caso generale si ottiene ora subito da questi: siccome la $R_{25}f$ deve appartenere rispetto ad $R_{12}f$ al fattore 2, così essa deve esser somma di due parti, una delle quali opera solamente sulle variabili $x_{2q_2+1}, \dots, x_{2q_3}, x_{2q_4+1}, \dots, x_{2q_5}$ e l'altra sulle altre variabili. Sicchè il G_{10} si ha in generale, prendendo per ogni $R_{ik}f$ la somma

delle due rotazioni indicate nella stessa guisa nei due numeri precedenti, pur di aver cura che le variabili, che figurano in una di esse sieno tutte diverse da quelle, che figurano nell'altra.

68. Possiamo ora trovare facilmente i gruppi, che non contengono nessun G_8: tali gruppi, come sappiamo (n. 49), hanno per rotazioni infinitesime quelle di un certo numero di G_{10}, quelle di un certo numero di G_3, ed infine quelle di un gruppo abeliano, e tutti questi sottogruppi son tali, che le rotazioni di ciascuno di essi son permutabili con tutte quelle degli altri. Il caso, che non ci sia nel gruppo nessun G_{10} lo abbiamo già trattato nel paragrafo precedente, dovremo dunque supporre ora che ce ne sieno α (>0). Orbene preso uno di tali G_{10} si può dargli la forma canonica vista sopra: le rotazioni degli altri sottogruppi dovendo essere permutabili con quelle del G_{10}, dovranno agire separatamente sulle variabili, che non figurano nel G_{10}, e su quelle, che invece vi figurano. Sulla forma delle parti che agiscono sulle prime non influisce affatto la presenza del G_{10}, considerato; se dunque supponiamo, che si conosca la forma canonica del gruppo nel caso, che ci sieno solo $\alpha - 1$, o meno, di quei G_{10}, è nota la forma di quelle parti e di esse è inutile occuparci. Consideriamo pertanto le parti che operano sulle variabili stesse su cui agisce il G_{10}. Avendosi d'altra parte (n. 67)

$$R_{12}f = \frac{1}{2} \sum_{1}^{2k}{}_{\nu}\, Y^{(1)}_{\nu\nu} + 2 \sum_{1}^{s}{}_{\nu}\, S^{(2)}_{\nu, s+\nu},$$

le rotazioni fuori del G_{10} operan separatamente sulle $x^{(1)}$ e sulle $x^{(2)}$, onde potremo evidentemente ridurci a considerare a parte i due casi di $k = 0$ o $s = 0$. Il primo si tratta subito: infatti allora ogni rotazione permutabile con quelle del G_{10}, come si vede subito dalle (X) opera sulle variabili $x_{(i-1)s+1}, \ldots, x_{(i-1)s+v}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ separatamente dalle altre variabili che figurano nel G_{10}: basterà dunque trattare i due casi che colle notazioni del n. 67 sia o $u = 0$ o $v = 0$. Nel primo di questi due casi le rotazioni $T_l f$ $(l = 1, \ldots, r-10)$ del nostro G_r indipendenti dal G_{10} han tutte la forma

$$T_l f = \sum_{1}^{s}{}_{\lambda\mu}\, a_{l\lambda\mu} \sum_{1}^{4}{}_{i}\, S^{(1)}_{(i-1)s+\lambda, (i-1)s+\mu} + \cdots \quad (l = 1, \ldots, r-10),$$

dove la parte tralasciata opera su variabili tutte diverse, da quelle che figurano nella parte scritta. Ora se noi consideriamo le rotazioni

$$\overline{\mathrm{T}_l f} = \sum_{1}^{s}{}_{\lambda\mu} \, a_{l\lambda\mu} \, \mathrm{S}_{\lambda\mu} \qquad (l = 1, \ldots, r-10) ,$$

esse formano un gruppo, chè sarà al massimo un G_{r-10}, e che conterrà al più $\alpha - 1$ G_{10}: a questo gruppo si può dunque con una conveniente sostituzione sulle $x_1, \ldots, x_s$ dare una forma nota. Ma se noi facciamo la stessa sostituzione anche sulle $x_{s+1}, \ldots, x_{2s}$, sulle $x_{2s+1}, \ldots, x_{3s}$ e sulle $x_{3s+1}, \ldots, x_{4s}$, non cambia affatto il G_{10}, e quindi neanche la forma delle $\mathrm{T}_l f$: ma ora essendo noti i coefficienti $a_{l\lambda\mu}$ son note anche le parti scritte delle $\mathrm{T}_l f$.

Nel caso di $v = 0$, le $\mathrm{T}_l f$ hanno invece la forma

$$\mathrm{T}_l f = \sum_{1}^{u}{}_{\lambda\mu} \, a_{l\lambda\mu} \sum_{1}^{9}{}_{i} \, \mathrm{S}^{(2)}_{(i-1)u+\lambda, \, (i-1)u+\mu} + \cdots ,$$

e si può ripetere il ragionamento ora fatto.

E passiamo ora al caso di $s = 0$: si ha allora per le (IX)

$$\mathrm{R}_{12}f - \mathrm{R}_{34}f = \sum_{1}^{2k_1}{}_{\nu} \, \mathrm{Y}_{\nu\nu} \quad , \quad \mathrm{R}_{23}f - \mathrm{R}_{14}f = 2 \sum_{1}^{k_1}{}_{\nu} \, \mathrm{W}_{2\nu-1, 2\nu} \quad ,$$

$$\mathrm{R}_{12}f + \mathrm{R}_{34}f = \sum_{1}^{2k_1}{}_{\nu} \, \mathrm{Y}_{2k_1+\nu, 2k_1+\nu} \quad , \quad \mathrm{R}_{23}f + \mathrm{R}_{14}f = 2 \sum_{1}^{k_1}{}_{\nu} \, \mathrm{W}_{2k_1+2\nu_1-1, 2k_1+2\nu} \quad ,$$

$$\mathrm{R}_{35}f = \sum_{1}^{k_1}{}_{\lambda} \, (\mathrm{X}_{2\lambda, 2k_1+2\lambda-1} + \mathrm{X}_{2\lambda-1, 2k_1+2\lambda}) \, .$$

Se ora facciamo la sostituzione

$$x'_{4k_1+4\lambda-3} = x_{4k_1+4\lambda-1} \quad , \quad x'_{4k_1+4\lambda-2} = x_{4k_1+4\lambda} \quad ,$$
$$x'_{4k_1+4\lambda-1} = x_{4k_1+4\lambda-3} \quad , \quad x'_{4k_1+4\lambda} = x_{4k_1+4\lambda-2} \quad ,$$
$$(\lambda = 1, \ldots, k_1) \quad ,$$

delle prime 4 delle rotazioni ora scritte non cambia la forma, solo la terza cambia segno: invece $R_{35}f$ diventa

$$R_{35}f = \sum_{1}^{4k_1}{}_{\lambda}\, S_{\lambda,\, 4k_1+\lambda}\,.$$

Allora le $T_l f$ devono avere tutte la forma

$$T_l f = \sum_{1}^{2k_1}{}_{\lambda\mu} \left\{ a_{\lambda\mu} (X_{\lambda\mu} + X_{2k_1+\lambda,\, 2k_1+\mu}) + b_{\lambda\mu} (Y_{\lambda\mu} + Y_{2k_1+\lambda,\, 2k_1+\mu}) \right\} + \dots$$
$$(l = 1\,, \dots, r-10)\,.$$

Se ora consideriamo le rotazioni

$$\overline{T_l f} = \sum_{1}^{2k_1}{}_{\lambda\mu} \left\{ a_{\lambda\mu}\, X_{\lambda\mu} + b_{\lambda\mu}\, Y_{\lambda\mu} \right\}$$

e le tre rotazioni $R_{12}f - R_{34}f$, $R_{23}f - R_{14}f$, $R_{13}f + R_{24}f$, esse formano un gruppo, che contiene al massimo $\alpha - 1$ G_{10}, e cui perciò con una conveniente sostituzione sulle $x_1, \dots, x_{4k_1}$ si può dare una forma nota. Se ora facciamo la stessa sostituzione sulle $x_{4k_1+1}, \dots, x_{8k_1}$ la $R_{35}f$ evidentemente non cambia, le $R_{12}f + R_{34}f$, $R_{23}f + R_{14}f$, $R_{13}f - R_{24}f$ prenderanno una forma, che si deduce da quella delle tre considerate avanti aggiungendo $4k_1$ agli indici delle S, ed infine le

$$\overline{T_l f}' = \sum_{1}^{2k_1}{}_{\lambda\mu} \left\{ a_{\lambda\mu} X_{2k_1+\lambda,\, 2k_1+\mu} + b_{\lambda\mu} Y_{2k_1+\lambda,\, 2k_1+\mu} \right\}$$

si deducon nello stesso modo dalle $\overline{T_l f}$. Si può dunque supporre nota la forma delle parti scritte delle $T_l f$, e quindi anche per quanto precede di tutte le $T_l f$, e quelle di $R_{12}f$, $R_{13}f$, $R_{23}f$, $R_{14}f$, $R_{24}f$, $R_{35}f$, e perciò di tutto il G_{10}, le altre rotazioni del G_{10} deducendosi da quelle con semplici alternate.

§ 8.

I G_8 della composizione (35)

69. Vogliamo ora ricercare i G_8, che hanno la composizione (35): per un momento supporremo di aver moltiplicate tutte le rotazioni per 2, con che vengon moltiplicate per 2 anche tutte le costanti di composizione. Colle notazioni, che introducemmo al n. 42, si deve avere

$$(R_{12}\, R_{23}) = 2\, R_{13} f\ ,\quad (R_{23}\, R_{13}) = 2\, R_{12} f\ ,\quad (R_{13}\, R_{12}) = 2\, R_{23} f,$$

$$(R_{12}\, R''_{12}) = 4\, R'_{12} f\ ,\quad (R''_{12}\, R'_{12}) = 4\, R_{12} f\ ,\quad (R'_{12}\, R_{12}) = 2\, R''_{12} f.$$

Per le prime $R_{12}f$ appartiene ad un G_3 della composizione solita; perciò se supponiamo di averlo ridotto a forma normale i coefficienti devono essere numeri interi. Ma per le seconde $\frac{1}{2}\, R_{12}f$ appartiene pure ad un G_3 di quella stessa composizione, sicchè i coefficienti di $R_{12}f$ saran numeri interi pari. Per il n. 57 potremo allora porre

$$R_{12}f = \frac{1}{2} \sum_{1}^{t}{}_i\ 2i \sum_{q_{i-1}+1}^{q_i}{}_\nu\ Y_{\nu\nu}\ ,$$

$$R_{23}f = \sum_{1}^{q_1}{}_\mu\ a_\mu\ S_{2\mu,\,2q_t+\mu} + \sum_{1}^{t-1}{}_i \sum_{1}^{q_{i+1}-q_i}{}_\mu\ a_{i\mu}\ X_{q_{i-1}+\mu,\,q_i+\mu}\ ,$$

$$(q_0 = 0\ ,\ q_1 \geq q_2 - q_1 \geq q_3 - q_2 \geq \dots \geq q_t - q_{t-1})\ ,$$

essendo le a_μ e $a_{i\mu}$ certe costanti diverse da zero.

Quanto poi alla $R'_{12}f$, siccome essa rispetto ad $R_{12}f$ deve appartenere al fattore 4 sarà del tipo

$$R'_{12}f = \sum_{1}^{q_1}{}_{\mu\nu} (\alpha_{\mu\nu} W_{\mu\nu} + \alpha'_{\mu\nu} Z_{\mu\nu}) + \sum_{1}^{t-2}{}_{i} \sum_{q_{i-1}+1}^{q_i}{}_{\mu} \sum_{q_{i+1}+1}^{q_{i+2}}{}_{\nu} (\lambda_{\mu\nu} X_{\mu\nu} + \rho_{\mu\nu} Y_{\mu\nu}) +$$

$$+ \sum_{1}^{q_2-q_1}{}_{\mu} \sum_{q_t+1}^{q_{t+1}}{}_{\nu} (\beta_{\mu\nu} S_{2q_1+2\mu,\nu} + \gamma_{\mu\nu} S_{2q_1+2\mu-1,\nu}) .$$

Basta ora scrivere, che è

$$\big(R_{23} (R_{23} R'_{12})\big) = -4 R'_{12}f ,$$

per trovare, che tutte le β, γ, λ, ρ son nulle: è un calcolo puramente materiale, che noi tralasciamo. Ma allora in $R'_{12}f$ mancano tutte le variabili $x_{2q_1+1}, \dots, x_{2q_t}$, e queste mancano perciò anche in $(R'_{12} R_{12}) = 4 R''_{12}f$: dunque se $t > 1$, non può essere $(R''_{12} R'_{12}) = 4 R_{12}f$, cosicchè l'unico caso da considerare è quello di $t = 1$.

Se ora ritorniamo proprio alla composizione (35), dovendo darsi il caso di $t = 1$, potremo porre (n. 55)

$$R_{12}f = \sum_{1}^{s}{}_{\lambda} S_{\lambda, s+\lambda} , \quad R_{23}f = \sum_{1}^{s}{}_{\lambda} S_{s+\lambda, 2s+\lambda} , \quad R_{13}f = \sum_{1}^{s}{}_{\lambda} S_{\lambda, 2s+\lambda} .$$

La rotazione $R'_{12}f$ dovendo rispetto ad $R_{12}f$ appartenere al fattore 2 sarà del tipo

$$R'_{12}f = \sum_{1}^{s}{}_{\mu\nu} \Big\{ a_{\mu\nu} (S_{\mu, s+\nu} - S_{\nu, s+\mu}) + b_{\mu\nu} (S_{\mu,\nu} + S_{s+\mu, s+\nu}) \Big\} ,$$

anzi siccome rispetto ad $R_{23}f$ deve appartenere al fattore 1, devono esser nulle le b, e perciò

$$R'_{12}f = \sum_{1}^{s}{}_{\mu\nu} \alpha_{\mu\nu} S_{\mu, s+\nu} \quad (\alpha_{\mu\nu} = -\alpha_{\nu\mu}) .$$

Perchè la $R'_{12}f$ lasci fermo lo spazio di equazioni

$$\sum_{1}^{s}{}_{\mu} c_{\mu} x_{\mu} = 0 \quad , \quad \sum_{1}^{s}{}_{\mu} c_{\mu} x_{s+\mu} = 0 ,$$

occorre sia

$$\sum_{1}^{s}{}_{\mu}\, a_{\mu\nu}\, c_{\mu} = \rho\, c_{\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, s).$$

Ma il determinante di questo essendo pseudosimmetrico, uguagliandolo a zero può ammettere come radice reale solo lo 0. Ma allora la $R'_{12}f$ lascierebbe fermo l'iperpiano $\sum_{1}^{s}{}_{\mu}\, c_{\mu}\, x_{\mu} = 0$, e questo con una sostituzione ortogonale sulle sole $x_1, \ldots, x_s$ si potrebbe prendere per l'iperpiano $x_s = 0$: facendo la stessa sostituzione sulle $x_{s+1}, \ldots, x_{2s}$ non cambia la forma di $R_{12}f$. Ma dopo ciò in $R'_{12}f$ verrebbe a scomparire x_s, e quindi per la forma speciale della $R'_{12}f$ anche x_{2s}: queste due variabili mancherebbero allora anche in $R''_{12}f$, e non potrebbe al solito essere $(R''_{12}\, R'_{12}) = 2\, R_{12}f$. Dunque ρ non può avere valori reali e per conseguenza deve essere intanto s pari; prendendo poi due suoi valori immaginarii coniugati, ci saran due di quegli spazii pure immaginarii coniugati, che gli corrispondono, e la $R'_{12}f$ lascierà fermo lo spazio

$$\sum_{1}^{s}{}_{\mu}\, c_{\mu}\, x_{\mu} = 0\ ,\ \sum_{1}^{s}{}_{\mu}\, b_{\mu}\, x_{\mu} = 0\ ,\ \sum_{1}^{s}{}_{\mu}\, c_{\mu}\, x_{s+\mu} = 0\ ,\ \sum_{1}^{s}{}_{\mu}\, b_{\mu}\, x_{s+\mu} = 0.$$

Prendiamo lo spazio definito dalle due prime equazioni per quello

$$x_1 = x_2 = 0$$

con una sostituzione ortogonale sulle sole variabili $x_1, \ldots, x_s$; e poi facciamo la stessa sostituzione anche sulle variabili $x_{s+1}, \cdots, x_{2s}$ e sulle altre $x_{2s+1}, \ldots, x_{3s}$. Con ciò non cambia la forma di $R_{12}f$, $R_{23}f$, $R_{13}f$ e quindi neanche quella di $R'_{12}f$: solo che questa dovendo ora lasciar fermo lo spazio

$$x_1 = x_2 = x_{s+1} = x_{s+2}\,,$$

dovrà essere più in particolare

$$R'_{12}f = a_1\,(S_{1,s+2} - S_{2,s+1}) + \sum_{3}^{s}{}_{\lambda\mu}\, a_{\lambda\mu}\, S_{\lambda, s+\mu}\,.$$

Proseguendo analogamente sulla seconda parte, si trova, che ponendo $s=2k$ si può scrivere

$$R'_{12}f=\sum_{1}^{k}{}_{\mu}\ a_{\mu}\ (S_{2\mu-1,2k+2\mu}-S_{2\mu,2k+2\mu-1})\,.$$

Venendone ora per la composizione del gruppo

$$R''_{12}f=\sum_{1}^{k}{}_{\mu}\ a_{\mu}\ (S_{2k+2\mu-1,2k+2\mu}-S_{2\mu-1,2\mu})\ ,$$

perchè poi sia $(R''_{12}\,R'_{12})=2\,R_{12}f$ occorre sia

$$a^2_{\mu}=1 \qquad (\mu=1,\ldots,k)\,.$$

Ma nell'estrarre la radice si può prendere per essa il valore positivo, perchè se fosse per es. $a_1=-1$, basterebbe cambiar di segno ad x_1, x_{2k+1}, x_{3k+1} per avere $a_1=1$ senz'altri cambiamenti. Fatto ciò le rotazioni del G_8 sono

$$\text{(XI)}\ \begin{cases} R_{il}f=\sum_{1}^{2k}{}_{\lambda}\ S_{2(i-1)k+\lambda,\,2(l-1)k+\lambda} \\ R'_{il}f=\sum_{1}^{k}{}_{\lambda}\ (S_{2(i-1)k+2\lambda-1,\,2(l-1)k+2\lambda}-S_{2(i-1)k+2\lambda,\,2(l-1)k+2\lambda-1}) \\ R''_{il}f=\sum_{1}^{k}{}_{\lambda}\ (S_{2(l-1)k+2\lambda-1,\,2(l-1)k+2\lambda}-S_{2(i-1)k+2\lambda-1,\,2(i-1)k+2\lambda}) \\ \qquad\qquad (i,l=1,2,3\,;\,i<l)\,. \end{cases}$$

§ 9.

Un altro teorema

70. Dobbiamo ora studiare i gruppi che contengono almeno un G_8 della composizione (35). Considerato uno di questi G_8 potremo dargli la forma (XI); chiamate quindi $R_{il}f$, $R'_{il}f$ ed $R''_{il}f$ $(i, l = 1, 2, 3)$ le sue rotazioni, sarà

$$R_{il}f = \sum_{1}^{2k}{}_{\lambda}\, S_{2(i-1)k+\lambda,\, 2(l-1)k+\lambda}$$

$$R'_{il}f = \sum_{1}^{k}{}_{\lambda}\, (S_{2(i-1)k+2\lambda-1,\, 2(l-1)k+2\lambda} - S_{2(i-1)k+2\lambda,\, 2(l-1)k+2\lambda-1})$$

$$R''_{il}f = \sum_{1}^{k}{}_{\lambda}\, (S_{2(l-1)k+2\lambda-1,\, 2(l-1)k+2\lambda} - S_{2(i-1)k+2\lambda-1,\, 2(i-1)k+2\lambda})$$

$$(i\,,\; l = 1\,,\, 2\,,\, 3)\,.$$

Ciò si potrebbe fare evidentemente per un G_8 qualunque del gruppo, ma noi supporremo di aver considerato quel G_8 per cui k ha il minimo valore possibile in quel gruppo.

71. Le rotazioni del gruppo possono appartenere rispetto ad $R_{12}f$ solo ai fattori 0, 1 e 2, tutti i coefficienti della $R_{12}f$ stessa essendo $=1$. Consideriamo ora i varii casi: cominciamo dal considerare il caso, che nel gruppo ci sia una rotazione Sf appartenente al fattore 2 rispetto ad $R_{12}f$, operante quindi solamente sulle variabili $x_1, \ldots, x_{4k}$.

Se noi ora consideriamo tutte le rotazioni del gruppo che contengono solo quelle variabili, esse formeranno un gruppo di cui farà parte il $G_3 \equiv (R_{12}, R'_{12}, R''_{12})$ e tale, che le altre rotazioni apparterranno rispetto ad $R_{12}f$ ad uno dei fattori 0 e 2, e ce ne sarà almeno una, la Sf, non permutabile con $R_{12}f$: tale sottogruppo conterrà allora un G_{10} (n. 40) di cui fa parte alla sua volta il G_3, ed in questo G_{10} ci sarà una rotazione permutabile con $R''_{12}f$ ed appartenente al fattore 2 rispetto ad $R_{12}f$. Potremo dunque supporre $(R''_{12}\,S) = 0$. Di più per la prima condizione imposta alla Sf dovrà essere

$$Sf = \sum_1^{2k}{}_{\lambda\mu} \left\{ a_{\lambda\mu}(S_{\lambda\mu} - S_{2k+\lambda,\,2k+\mu}) + b_{\lambda\mu}(S_{\lambda,\,2k+\mu} - S_{\mu,\,2k+\lambda}) \right\}.$$

Ora abbiamo

$$\big(R_{13}\,(S\,R_{13})\big) = \sum_1^{2k}{}_{\lambda\mu} \left\{ 2\,a_{\lambda\mu}(S_{\lambda\mu} - S_{4k+\lambda,\,4k+\mu}) + b_{\lambda\mu}(S_{\lambda,\,2k+\mu} - S_{\mu,\,2k+\lambda}) \right\}.$$

La prima parte rispetto ad $R_{13}f$ appartiene al fattore 2, la seconda al fattore 1, onde le due parti si potran separare, e perciò esisteranno nel gruppo anche le due parti separate di Sf.

Quindi basterà considerare i due casi, che sien nulle tutte le a o tutte le b: cominciamo da questo secondo. Dovendo essere $(R''_{12}\,S) = 0$ sarà allora

$$Sf = \sum_1^{k}{}_{\lambda\mu} \left\{ \alpha_{\lambda\mu}(X_{\lambda\mu} - X_{k+\lambda,\,k+\mu}) + \beta_{\lambda\mu}(Y_{\lambda\mu} - Y_{k+\lambda,\,k+\mu}) \right\}.$$

Se consideriamo la parte $\sum_1^{k}{}_{\lambda\mu} \left\{ \alpha_{\lambda\mu} X_{\lambda\mu} + \beta_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu} \right\}$ con una sostituzione sulle variabili $x_1, \dots, x_{2k}$, che non altera la forma della $R''_{12}f$ potremo dargli la forma (n. 19)

$$\sum m_\lambda\, Y_{\lambda\lambda}\,.$$

Ora se la stessa sostituzione facciamo anche sulle variabili $x_{2k+1}, \dots, x_{4k}$ ed $x_{4k+1}, \dots, x_{6k}$ non cambia neanche la forma di $R_{12}f$,

$R_{13}f$, $R_{23}f$, e perciò neppure quella di tutto il G_8: quindi la Sf assumerà la forma

$$Sf = \sum_1^k {}_\lambda\, m_\lambda\, (S_{2\lambda-1, 2\lambda} - S_{2k+2\lambda-1, 2k+2\lambda}).$$

Le m_λ non possono essere tutte uguali, perchè se no Sf coinciderebbe con $R''_{12}f$: ma allora se sono uguali in valore assoluto tra loro le prime h e non più, come si può sempre supporre, si vede subito, facendo successive alternate tra la Sf e le rotazioni del G_8, che il gruppo contiene un G_8, che si ottiene da quello scritto sopra sostituendo h a k: ciò che è contro l'ipotesi. Resta il caso, che tutte le m_λ sieno eguali in valore assoluto, ma non tutte in segno, ma ci si riduce all'altro caso considerando invece della Sf la $Sf - m_1 R''_{12}f$. Questo caso perciò va escluso.

Rimane il caso, che sien nulle tutte le a nella Sf: e quindi al solito, dovendo essere $(R''_{12}S) = 0$,

$$Sf = \sum_1^k {}_{\lambda\mu} \left\{ \alpha_{\lambda\mu} (W_{\lambda, k+\mu} - W_{\mu, k+\lambda}) + \beta_{\lambda\mu} (Z_{\lambda, k+\mu} - Z_{\mu, k+\lambda}) \right\}.$$

Posto $2Tf = (R'_{12}S)$ sarà poi

$$Tf = \sum_1^k {}_{\lambda\mu} \left\{ -\beta_{\lambda\mu} (W_{\lambda\mu} + W_{k+\lambda, k+\mu}) + \alpha_{\lambda\mu} (Z_{\lambda\mu} + Z_{k+\lambda, k+\mu}) \right\}.$$

Con un ragionamento del tutto identico a quello fatto or ora, si trova che senza alterare la forma del G_8 si può dare a Tf la forma

$$Tf = \sum_1^{\left[\frac{k}{2}\right]} {}_\lambda\, m_\lambda\, (W_{2\lambda-1, 2\lambda} + W_{k+2\lambda-1, k+2\lambda}).$$

Se le prime h m_λ sono uguali tra loro in valore assoluto, e le altre son tutte diverse da quelle, nel gruppo c'è anche il G_8, che si ottiene da quello scritto sostituendo $2h$ a k, come si vede facendo le alternate tra la Tf e le rotazioni del G_8. Deve dunque essere $2h = k$, e perciò k pari: e noi dovremo dunque considerare il caso solamente di

$$|m_\lambda| = m \qquad \left(\lambda = 1, \dots, \frac{k}{2}\right),$$

essendo m una costante $\neq 0$. Ma potremo allora supporre $m_\lambda = m$, che se fosse per es. $m_1 = -m$ basterebbe cambiar di segno ad $x_1, x_2, x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{4k+1}, x_{4k+2}$ per ridursi al caso di $m_1 = m$. Siccome poi si può supporre $m = 1$; avremo da considerare il caso di

$$Tf = \sum_{1}^{\frac{k}{2}}{}_\lambda \left(W_{2\lambda-1,2\lambda} + W_{k+2\lambda-1,k+2\lambda}\right).$$

Se si cerca ora il minimo gruppo, cui appartengono il G_8 e Tf si trova il G_{21} seguente

$$(\mathrm{XII})\left\{\begin{aligned}
R_{12}^{(i)}f &= \sum_{1}^{2h}{}_\lambda S_{4(i-1)h+2\lambda-1,\,4(i-1)h+2\lambda}\,, \\
R_{23}^{(i)}f &= \sum_{1}^{h}{}_\lambda \left(S_{4(i-1)h+4\lambda-3,\,4(i-1)h+4\lambda} + S_{4(i-1)h+4\lambda-2,\,4(i-1)h+4\lambda-1}\right), \\
R_{13}^{(i)}f &= \sum_{1}^{h}{}_\lambda \left(S_{4(i-1)h+4\lambda-3,\,4(i-1)h+4\lambda-1} - S_{4(i-1)h+4\lambda-2,\,4(i-1)h+4\lambda}\right), \\
R_{1}^{(il)}f &= \sum_{1}^{4h}{}_\lambda S_{4(i-1)h+\lambda,\,4(l-1)h+\lambda}\,, \\
R_{2}^{(il)}f &= \sum_{1}^{2h}{}_\lambda \left(S_{4(i-1)h+2\lambda-1,\,4(l-1)h+2\lambda} - S_{4(i-1)h+2\lambda,\,4(l-1)h+2\lambda-1}\right), \\
R_{3}^{(il)}f &= \sum_{1}^{h}{}_\lambda \left(S_{4(i-1)h+4\lambda-3,\,4(l-1)h+4\lambda-1} - S_{4(i-1)h+4\lambda-2,\,4(l-1)h+4\lambda} -\right. \\
&\qquad \left. - S_{4(i-1)h+4\lambda-1,\,4(l-1)h+4\lambda-3} + S_{4(i-1)h+4\lambda,\,4(l-1)h+4\lambda-2}\right), \\
R_{4}^{(il)}f &= \sum_{1}^{h}{}_\lambda \left(S_{4(i-1)h+4\lambda-3,\,4(l-1)h+4\lambda} + S_{4(i-1)h+4\lambda-2,\,4(l-1)h+4\lambda-1} -\right. \\
&\qquad \left. - S_{4(i-1)h+4\lambda-3,\,4(l-1)h+4\lambda-2} - S_{4(i-1)h+4\lambda,\,4(l-1)h+4\lambda-3}\right), \\
&\qquad (i, l = 1, 2, 3\,;\; i \neq l),
\end{aligned}\right.$$

che ha per composizione

$$
(51)\quad \left\{
\begin{array}{l}
(\mathrm{R}_{12}^{(i)}\mathrm{R}_{23}^{(l)})=2\varepsilon_{il}\mathrm{R}_{13}^{(i)}f\,,\ (\mathrm{R}_{12}^{(i)}\mathrm{R}_{13}^{(l)})=-2\varepsilon_{il}\mathrm{R}_{23}^{(i)}f\,,\ (\mathrm{R}_{23}^{(i)}\mathrm{R}_{13}^{(l)})=2\varepsilon_{il}\mathrm{R}_{12}^{(i)}f\quad (i,\,l=1,2,3)\,;\\[2ex]
\left.\begin{array}{l}
(\mathrm{R}_{12}^{(m)}\mathrm{R}_{1}^{(il)})=(\varepsilon_{im}-\varepsilon_{lm})\mathrm{R}_{2}^{(il)}f\,,\ (\mathrm{R}_{23}^{(m)}\mathrm{R}_{1}^{(il)})=(\varepsilon_{im}-\varepsilon_{lm})\mathrm{R}_{3}^{(il)}f\,,\\
\qquad\qquad (\mathrm{R}_{13}^{(m)}\mathrm{R}_{1}^{(il)})=(\varepsilon_{im}-\varepsilon_{lm})\mathrm{R}_{4}^{(il)}f\,,\\
(\mathrm{R}_{12}^{(m)}\mathrm{R}_{2}^{(il)})=-(\varepsilon_{im}-\varepsilon_{lm})\mathrm{R}_{1}^{(il)}f\,,\ (\mathrm{R}_{23}^{(m)}\mathrm{R}_{2}^{(il)})=-(\varepsilon_{im}+\varepsilon_{lm})\mathrm{R}_{4}^{(il)}f\,,\\
\qquad\qquad (\mathrm{R}_{13}^{(m)}\mathrm{R}_{2}^{(il)})=(\varepsilon_{im}+\varepsilon_{lm})\mathrm{R}_{3}^{(il)}f\,,\\
(\mathrm{R}_{12}^{(m)}\mathrm{R}_{3}^{(il)})=(\varepsilon_{im}+\varepsilon_{lm})\mathrm{R}_{4}^{(il)}f\,,\ (\mathrm{R}_{23}^{(m)}\mathrm{R}_{3}^{(il)})=-(\varepsilon_{im}-\varepsilon_{lm})\mathrm{R}_{1}^{(il)}f\,,\\
\qquad\qquad (\mathrm{R}_{13}^{(m)}\mathrm{R}_{3}^{(il)})=-(\varepsilon_{im}+\varepsilon_{lm})\mathrm{R}_{2}^{(il)}f\,,\\
(\mathrm{R}_{12}^{(m)}\mathrm{R}_{4}^{(il)})=-(\varepsilon_{im}+\varepsilon_{lm})\mathrm{R}_{3}^{(il)}f\,,\ (\mathrm{R}_{23}^{(m)}\mathrm{R}_{4}^{(il)})=(\varepsilon_{im}+\varepsilon_{lm})\mathrm{R}_{2}^{(il)}f\,,\\
\qquad\qquad (\mathrm{R}_{13}^{(m)}\mathrm{R}_{4}^{(il)})=-(\varepsilon_{im}-\varepsilon_{lm})\mathrm{R}_{1}^{(il)}f\,,
\end{array}\right\}\ (i,\,l,\,m=1,2,3)\,;\\[2ex]
(\mathrm{R}_{p}^{(12)}\mathrm{R}_{p}^{(23)})=\mathrm{R}_{p}^{(13)}f\,,\ (\mathrm{R}_{p}^{(23)}\mathrm{R}_{p}^{(13)})=\mathrm{R}_{p}^{(12)}f\,,\ (\mathrm{R}_{p}^{(13)}\mathrm{R}_{p}^{(12)})=\mathrm{R}_{p}^{(23)}f\quad (p=1,2,3,4)\,;\\[2ex]
(\mathrm{R}_{1}^{(il)}\mathrm{R}_{u}^{(im)})=-\mathrm{R}_{u}^{(lm)}f,\ (\mathrm{R}_{2}^{(il)}\mathrm{R}_{3}^{(im)})=\mathrm{R}_{4}^{(lm)}f,\ (\mathrm{R}_{2}^{(il)}\mathrm{R}_{4}^{(im)})=-\mathrm{R}_{3}^{(lm)}f,\ (\mathrm{R}_{3}^{(il)}\mathrm{R}_{4}^{(im)})=\mathrm{R}_{2}^{(lm)}f\\
\qquad\qquad (u=1,2,3,4\,;\ i,\,l,\,m=1,2,3\,;\ l\neq m)\,;\\[2ex]
\left.\begin{array}{l}
(\mathrm{R}_{1}^{(il)}\mathrm{R}_{2}^{(il)})=\mathrm{R}_{12}^{(i)}f-\mathrm{R}_{12}^{(l)}f\,,\ (\mathrm{R}_{1}^{(il)}\mathrm{R}_{3}^{(il)})=\mathrm{R}_{13}^{(i)}f-\mathrm{R}_{13}^{(l)}f\,,\\
\qquad\qquad (\mathrm{R}_{1}^{(il)}\mathrm{R}_{4}^{(il)})=\mathrm{R}_{23}^{(i)}f-\mathrm{R}_{23}^{(l)}f\,,\\
(\mathrm{R}_{2}^{(il)}\mathrm{R}_{3}^{(il)})=-\mathrm{R}_{23}^{(i)}f-\mathrm{R}_{23}^{(l)}f\,,\ (\mathrm{R}_{2}^{(il)}\mathrm{R}_{4}^{(il)})=\mathrm{R}_{13}^{(i)}f+\mathrm{R}_{13}^{(l)}f\,,\\
\qquad\qquad (\mathrm{R}_{3}^{(il)}\mathrm{R}_{4}^{(il)})=-\mathrm{R}_{12}^{(i)}f-\mathrm{R}_{12}^{(l)}f\,,
\end{array}\right\}\ (i,\,l=1,2,3)\,.
\end{array}\right.
$$

Notiamo che se si pone

$$
\mathrm{T}_{12}f=\mathrm{R}_{1}^{(12)}f\,,\ \mathrm{T}_{13}f=-\mathrm{R}_{2}^{(12)}f\,,\ \mathrm{T}_{23}f=\mathrm{R}_{12}^{(2)}f-\mathrm{R}_{12}^{(1)}f\,,\ \mathrm{T}_{34}f=\mathrm{R}_{13}^{(1)}f+\mathrm{R}_{13}^{(2)}f\,,\ \mathrm{T}_{14}f=-\mathrm{R}_{2}^{(12)}f\,,
$$

$$
\mathrm{T}_{24}f=\mathrm{R}_{23}^{(1)}f-\mathrm{R}_{23}^{(2)}f,\ \mathrm{T}_{15}f=\mathrm{R}_{4}^{(12)}f,\ \mathrm{T}_{25}f=\mathrm{R}_{13}^{(2)}f-\mathrm{R}_{13}^{(1)}f,\ \mathrm{T}_{35}f=\mathrm{R}_{23}^{(1)}f+\mathrm{R}_{23}^{(2)}f,\ \mathrm{T}_{45}f=\mathrm{R}_{12}^{(1)}f+\mathrm{R}_{12}^{(2)}f,
$$

le $\mathrm{T}_{ik}f$ $(i,k=1,\dots,5)$ formano un G_{10} della solita composizione (34).

Se dunque il gruppo considerato contiene una rotazione che rispetto ad $\mathrm{R}_{12}f$ appartiene al fattore 2, esso contiene anche un G_{21} come il precedente.

72. Se il gruppo contiene anche un'altra rotazione $\mathrm{S}f$ (fuori del G_{21}) che rispetto ad $\mathrm{R}_{1}^{(12)}f$ appartiene al fattore 2, essa per il nu-

mero precedente dovrà essere del tipo

$$Sf = \sum_1^{2h}{}_{\lambda\mu} \left\{ \alpha_{\lambda\mu} (W_{\lambda, k+\mu} - W_{\mu, k+\lambda}) + \beta_{\lambda\mu} (Z_{\lambda, k+\mu} - Z_{\mu, k+\lambda}) \right\} .$$

Posto poi $2\,Tf = (T_{13}\,S)$ sarà

$$Tf = \sum_1^{2h}{}_{\lambda\mu} \left\{ -\beta_{\lambda\mu} (W_{\lambda\mu} + W_{k+\lambda, k+\mu}) + (\alpha_{\lambda\mu} (Z_{\lambda\mu} + Z_{k+\lambda, k+\mu}) \right\} ,$$

e la Tf apparterrà al fattore 2 rispetto alla $T_{23}f$. Inoltre è

$$\left(R_{12}^{(1)} (R_{12}^{(1)}\,T)\right) = 4 \sum_1^{2h}{}_{\lambda\mu} \left\{ \beta_{\lambda\mu} W_{\lambda\mu} - \alpha_{\lambda\mu} Z_{\lambda\mu} \right\} ,$$

e per conseguenza c'è nel gruppo oltre la $R_{12}^{(1)}f$, $R_{13}^{(1)}f$ e la $R_{23}^{(1)}f$ un'altra rotazione che opera sulle sole variabili $x_1, \dots, x_{4h}$: se noi consideriamo tutte le rotazioni del gruppo, che operano su quelle sole variabili, esse formano un sottogruppo. In questo c'è certo un G_{10}, che comprende il G_3 di cui sopra poichè tutte le rotazioni di esso rispetto ad $R_{12}^{(1)}f$ appartengono ad uno dei fattori 0, 2 (n. 40). Se noi prendiamo in questo G_{10} un G_6 che comprenda il G_3, alla rotazione Uf di esso permutabile con $R_{12}^{(1)}f$ potremo, senza alterare la forma del G_3 in questione, dare la forma (n. 60)

$$Uf = \left(\sum_1^{h'}{}_{\lambda} - \sum_{h'+1}^{2h}{}_{\lambda} \right) S_{2\lambda-1, 2\lambda} ,$$

e ciò naturalmente con una sostituzione ortogonale sulle sole variabili $x_1, \dots, x_{4h}$. La stessa sostituzione facendo anche sulle variabili $x_{4h+1}, \dots, x_{8h}$ ed $x_{8h+1}, \dots, x_{12h}$ si vede subito che non cambian neanche $R_1^{(12)}f$, $R_1^{(13)}f$ ed $R_1^{(23)}f$ nè tutte le $R_{12}^{(i)}f$, $R_{13}^{(i)}f$, $R_{23}^{(i)}f$ $(i = 1, 2, 3)$, e quindi nemmeno il G_{21}. Ma allora osserviamo, che non può essere $h' = h$ altrimenti la Uf coinciderebbe con la $R_{12}^{(1)}f$; nel gruppo c'è dunque la rotazione

$$U_1f = Uf + R_{12}^{(1)}f = \sum_1^{h'}{}_{\lambda} S_{2\lambda-1, 2\lambda} .$$

Ma se noi facciamo le alternate tra la U_1f, e le rotazioni del G_8 da cui siam partiti, vediamo che nel gruppo c'è anche il G_8, che si ottiene da quello sostituendo h' a k, ciò che è contro l'ipotesi fatte, poichè $h' < k$. Vuol dire che nel gruppo non ci possono essere che rotazioni che rispetto ad $R_1^{(12)}f$ appartengono al fattore 1 o al fattore 0.

72. Supponiamo ora che nel gruppo ci sia una rotazione Sf, che rispetto ad $R_1^{(12)}f$ appartenga al fattore 1: dovrà essere

$$Sf = \sum_1^{4h}{}_\lambda \sum_1^{q}{}_\mu (a_{\lambda\mu} S_{\lambda,8h+\mu} + b_{\lambda\mu} S_{4h+\lambda,8h+\mu}).$$

Allora posto $Tf = (R_{12}^{(1)} S)$, se la Tf non è nulla essa ha la forma

$$Tf = \sum_1^{4h}{}_\lambda \sum_1^{q}{}_\mu a_{\lambda\mu} S_{\lambda,8h+\mu}.$$

Perchè sia nulla la Tf, occorre sien nulle tutte le a, ma allora basta scambiare $R_{12}^{(2)}f$ con $R_{12}^{(1)}f$: e lo stesso basta fare nel caso che la Tf appartenga al G_{21}; infatti si ha

$$(R_{12}^{(1)} T) = \sum_\lambda \sum_\mu a_{\lambda\mu} S_{\lambda,8k+\mu},$$

e questa se la Tf appartenesse al G_{21}, vi apparterrebbe pure. Analogamente se $(R_{12}^{(2)} S)$ appartenesse al G_{21} vi apparterrebbe anche la rotazione

$$\sum_\lambda \sum_\mu b_{\lambda\mu} S_{4h+\lambda,8h+\mu}.$$

I due casi non possono dunque presentarsi insieme altrimenti la Sf apparterrebbe al G_{21}. Basterà dunque considerare il caso in cui la Tf dia una rotazione non del G_{21}. Se si scrive

$$Tf = \sum_1^{4h}{}_\lambda \sum_1^{4h}{}_\mu \alpha_{\lambda\mu} S_{\lambda,8h+\mu} + \sum_1^{4h}{}_\lambda \sum_1^{q'}{}_\mu \beta_{\lambda\mu} S_{\lambda,12h+\mu},$$

la prima sommatoria può contenere due parti: una permutabile con $R_1^{(13)}f$, l'altra che rispetto a quest'ultima appartiene al fattore 2. Questa seconda parte deve essere nulla per il numero precedente, essendo $R_1^{(12)}f$ ed $R_1^{(13)}f$ nelle stesse condizioni. La prima sommatoria deve dunque esser permutabile con $R_1^{(13)}f$, ma deve esser nulla anche essa, perchè altrimenti essa si potrebbe isolare essendo

$$\left(\mathrm{R}_1^{(13)}\left(\mathrm{R}_1^{(13)}\mathrm{T}\right)\right) = -\sum_1^{4h}{}_\lambda \sum_1^{q'}{}_\mu \beta_{\lambda\mu}\, \mathrm{S}_{\lambda,12h+\mu}\,.$$

Nel gruppo ci sarebbe dunque la rotazione

$$\mathrm{U}f = \sum_1^{4h}{}_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu}\, \mathrm{S}_{\lambda,8h+\mu}$$

permutabile con $\mathrm{R}_1^{(13)}f$ e questa non potrebbe essere permutabile con $\mathrm{R}_{12}^{(1)}f - \mathrm{R}_{12}^{(3)}f$, e con $\mathrm{R}_{12}^{(1)}f + \mathrm{R}_{12}^{(3)}f$ contemporaneamente non essendolo con $\mathrm{R}_{12}^{(1)}f$. Ma allora, se per es. la $(\mathrm{R}_{12}^{(1)} - \mathrm{R}_{12}^{(3)}\,\mathrm{U})$ non è nulla, essa apparterrebbe al fattore 2 rispetto ad $\mathrm{R}_1^{(13)}f$ e si ricadrebbe in un caso escluso. Dunque deve essere

$$\mathrm{T}f = \sum_1^{4h}{}_\lambda \sum_1^{q'}{}_\mu \beta_{\lambda\mu}\, \mathrm{S}_{\lambda,12h+\mu}\,.$$

Posto $(\mathrm{R}_1^{(12)}\mathrm{T}) = \mathrm{T}'f$ si ha

$$(\mathrm{T}\,\mathrm{T}') = \sum_1^{4h}{}_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu}\, \mathrm{S}_{\lambda,4h+\mu}\,.$$

Per la stessa ragione detta sopra, la $(\mathrm{T}\mathrm{T}')$ (che non può essere nulla, altrimenti $\mathrm{R}_1^{(12)}f$, $\mathrm{T}f$, $\mathrm{T}'f$ formerebbero un G_3 di composizione diversa da quelle, che abbiamo visto essere le sole possibili) deve appartenere al G_{21}, e d'altra parte dovendo esser permutabile con $\mathrm{R}_1^{(12)}f$, deve essere

$$(\mathrm{T}\,\mathrm{T}') = a\, \mathrm{R}_1^{(12)}f.$$

a deve essere positivo, perchè si ha $\left(\mathrm{T}\left(\mathrm{T}\mathrm{R}_1^{(12)}\right)\right) = -a\,\mathrm{R}_1^{(12)}f$ (n. 22), e si può quindi rendere $=1$, dividendo $\mathrm{T}f$ e $\mathrm{T}'f$ per $\sqrt{a}$. Perchè sia

$$(\mathrm{T}\,\mathrm{T}') = \mathrm{R}_1^{(12)}f,$$

occorre sia

$$\sum_1^{q'}{}_\mu \beta_{\lambda\mu}\, \beta_{\nu\mu} = \varepsilon_{\lambda\nu} \qquad (\lambda, \nu = 1, \dots, 4h)\,,$$

e questo dimostra che con una sostituzione ortogonale sulle $x_{12h+1}, \dots,$

$x_{12h+q'}$ si può rendere

$$Tf = \sum_1^{4h}{}_\lambda \; S_{\lambda,\,12h+\lambda}\,.$$

Se noi indichiamo questa rotazione con $R_1^{(14)}f$, e poi cerchiamo il gruppo minimo cui appartengono essa e il G_{21} si trova un G_{36}, che si ottiene dalle (XII) dando ad i ed l i valori da 1 a 4 invece che da 1 a 3, e che ha la composizione data dalle (51) colla stessa avvertenza per gl'indici i, l, m, e coll'aggiunta dell'equazione

$$(52) \qquad (R_p^{(i\,l)}\, R_q^{(mn)}) = 0 \qquad (p, q = 1, 2, 3, 4)\,,$$

che vale tutte le volte che, i, l, m, n son tutti diversi.

73. Se nel gruppo ci fosse ancora una rotazione che rispetto ad $R_1^{(13)}f$ appartenesse al fattore 1, si potrebbe come sopra ridurci al caso, che essa fosse permutabile con $R_1^{(23)}f$ ed allora chiamatala $R_1^{(15)}f$ si potrebbe pure ridurla alla forma

$$R_1^{(15)}f = \sum_1^{4h}{}_\lambda \; S_{\lambda,\,16h+\lambda}\,.$$

Il gruppo minimo poi in cui questa rotazione ed il G_{36} son compresi è un G_{55}, che si ottiene ancora dalle (XII) facendo variare gli indici superiori da 1 a 5.

Così proseguendo si arriverà in generale ad un $G_{r(2r+1)}$, le cui rotazioni si ottengono pure dalle (XII) facendo variare gl'indici superiori da 1 ad r, e che ha la composizione data dalle (51) e dalle (52), in cui però gl'indici superiori al solito posson variare da 1 a r.

74. Da quanto abbiamo detto deriva, che un gruppo, che contiene un G_{21} contiene anche un $G_{r(2r+1)}$ $(r \geq 3)$; se noi supponiamo, che il gruppo non contenga un $G_{(r+1)(2r+3)}$ dello stesso tipo contenente quello, come evidentemente è sempre possibile, vuol dire, che nel gruppo non ci saranno, che rotazioni permutabili con $R_1^{(12)}f$: analogamente dovranno essere permutabili anche con $R_2^{(12)}f$, $R_3^{(12)}f$, $R_4^{(12)}f$, perchè queste son evidentemente nelle stesse condizioni della $R_1^{(12)}f$, e così pure dovranno essere più in generale permutabili con tutte le $R_q^{(i\,l)}f$ $(q = 1, 2, 3, 4;\; i, l = 1, \ldots, r;\; i \neq l)$ per una ragione analoga. Per con-

seguenza saran permutabili anche colle loro alternate, e quindi con tutte le rotazioni del $G_{r(2r+1)}$: ma allora le altre rotazioni formeranno un sottogruppo, ed il gruppo considerato avrà come rotazioni infinitesime quelle del $G_{r(2r+1)}$ e quelle di tale sottogruppo. Basterà dunque considerare questo sottogruppo: se questo contiene ancora un G_{21} di quelli visti si può ripetere ancora il ragionamento stesso, e ridurci alla considerazione di un sottogruppo minore. Così continuando o si esaurirà il gruppo o si arriverà ad un gruppo che non conterrà nessun G_{21} della composizione vista: si avrà perciò in generale che

Ogni gruppo G_r di rotazioni avrà per rotazioni infinitesime quelle di un certo numero di sottogruppi del tipo dei $G_{r(2r+1)}$ visti sopra, e quelle di un sottogruppo non contenente nessun G_{21} della composizione (51), *e questi sottogruppi saran tali, che le rotazioni di uno qualunque saran permutabili con tutte quelle degli altri.*

75. Nel caso, che il sottogruppo non contenente G_{21} di cui or ora non contenga neanche G_8 possiamo trovare subito qual'è la forma normale del gruppo. Preso infatti un $G_{r(2r+1)}$ si potrà ad esso dare la forma normale vista: se ne indichiamo le rotazioni nel solito modo, perchè una rotazione Tf sia permutabile con le $R_1^{(il)}f$ $(i, l = 1, \dots, r)$ occorrerà che la Tf sia del tipo

$$Tf = \sum_1^r{}_i \sum_1^{4h}{}_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} S_{4(i-1)h+\lambda,\, 4(i-1)h+\mu} + \cdots,$$

dove la parte tralasciata opera su variabili tutte diverse da quelle, che figurano nel $G_{r(2r+1)}$, onde su essa non influisce affatto la presenza di questo.

Se noi supponiamo, che il gruppo considerato contenga le rotazioni infinitesime di α sottogruppi del tipo del $G_{r(2r+1)}$, e supponiamo pure di conoscere la forma del gruppo nel caso, che esso contenga solo un numero minore di tali sottogruppi, alle parti tralasciate si potrà dare una forma già nota. Quanto poi alla parte scritta delle Tf basterà conoscere le $a_{\lambda\mu}$. Ora se noi consideriamo le rotazioni

$$\overline{Tf} = \sum_1^{4h}{}_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} S_{\lambda\mu}$$

queste insieme ad $R_{12}^{(1)}f$, $R_{23}^{(1)}f$, $R_{13}^{(1)}f$, formeranno un gruppo di cui si potrà ancora assegnare la forma normale, che si ottiene naturalmente con una sostituzione sulle sole variabili $x_1, \dots, x_{4h}$.

Se la stessa sostituzione facciamo sulle variabili $x_{4h+1}, \dots, x_{8h}; \dots;$ sulle $x_{4(r-1)h+1}, \dots, x_{4rh}$ non cambia la forma delle $R_1^{(i\,l)}f$ e perciò la forma del gruppo è perfettamente determinata, le altre rotazioni del $G_{r(2r+1)}$ ottenendosi dalle $R_1^{(i\,l)}f$ e da $R_{12}^{(1)}f$, $R_{23}^{(1)}f$, $R_{13}^{(1)}f$ con successive alternate.

§ 10.

I gruppi generali di rotazioni

76. Dobbiamo studiare ora i gruppi, che non contengono dei G_{21} della composizione vista: se non contengono nessun G_8 sappiamo come essi sono composti, sicchè dovremo considerare il caso, che essi contengano dei G_8. Presone uno nelle condizioni del n. 70, nel gruppo non ci dovranno essere rotazioni, che rispetto ad $R_{12}f$ appartengano al fattore 2, che altrimenti per il n. 71 ci sarebbe un G_{21} di quelli esclusi: lo stesso dovrà accadere per $R_{13}f$, $R_{23}f$ ed $R'_{12}f$, $R'_{13}f$, $R'_{23}f$, che si trovano nelle stesse condizioni: si vede subito facilmente, che tal cosa deve avvenire anche per $R''_{12}f$, $R''_{13}f$, $R''_{23}f$. Se infatti ci fosse una rotazione, che rispetto, per es., a $R''_{12}f$ appartenesse al fattore 2, essa conterrebbe solamente le variabili $x_1, \dots, x_{4k}$, e quindi tanto rispetto ad $R_{12}f$, che ad $R'_{12}f$, si comporrebbe di due parti una appartenente al fattore 0, l'altra al fattore 2: quest'ultima d'altra parte dovrebbe esser nulla, sicchè ne verrebbe l'assurdo, che la rotazione sarebbe permutabile con $R_{12}f$ ed $R'_{12}f$ e non con la loro alternata $R''_{12}f$.

Analogamente nel gruppo non ci può essere una rotazione permutabile con una delle rotazioni $R_{12}f$, $R'_{12}f$, $R''_{12}f$ senza che lo sia anche colle altre due. Infatti una rotazione Sf permutabile con $R_{12}f$, dovrebbe aver la forma

$$Sf = \sum_{1}^{4k}{}_{\lambda\mu}\, a_{\lambda\mu}\, S_{\lambda\mu} + \sum_{4k+1}^{t}{}_{\lambda\mu}\, b_{\lambda\mu}\, S_{\lambda\mu} \ ,$$

e se in essa ci fosse una parte non permutabile con $R'_{12}f$ questa dovrebbe far parte della prima sommatoria, e quindi appartenere al fattore 2 rispetto ad $R'_{12}f$. La stessa cosa vale evidentemente per $R_{13}f$, $R'_{13}f$, $R''_{13}f$ e per $R_{23}f$, $R'_{23}f$, $R''_{23}f$.

78. Fatte queste osservazioni veniamo alla ricerca dei gruppi, che contengono un G_8, e supponiamo dapprima, che nel gruppo ci sia una rotazione che rispetto ad $R_{12}f$ appartenga al fattore 1. Deve essere allora

$$Sf = \sum_{1}^{2k}{}_{\lambda\mu} (a_{\lambda\mu}\, S_{\lambda,4k+\mu} + b_{\lambda\mu}\, S_{2k+\lambda,4k+\mu}) + \\ + \sum_{1}^{2k}{}_{\lambda} \sum_{1}^{t}{}_{\mu} (c_{\lambda\mu}\, S_{\lambda,6k+\mu} + d_{\lambda\mu}\, S_{2k+\lambda,6k+\mu}).$$

Osserviamo, che alla stessa forma saremmo giunti qualora avessimo supposto, che la $R_{24}f$ appartenesse al fattore 1 o rispetto ad $R'_{12}f$ o rispetto ad $R''_{12}f$, sicchè queste ipotesi non dànno nuovi casi, diversi da quello che stiamo trattando. Possiamo supporre, che le a e le d non sieno tutte nulle, che altrimenti al posto della Sf considereremo la $(R_{12}\,S)$: allora posto $R_{24}f = -\big(R_{23}\,(R_{23}\,S)\big)$ si ha

$$R_{24}f = \sum_{1}^{2k}{}_{\lambda\mu}\, a_{\lambda\mu}\, S_{\lambda,4k+\mu} + \sum_{1}^{2k}{}_{\lambda} \sum_{1}^{t}{}_{\mu}\, d_{\lambda\mu}\, S_{2k+\lambda,6k+\mu}\,;$$

poichè $\sum_{\lambda\mu} b_{\lambda\mu}\, S_{2k+\lambda,4k+\mu}$ se non fosse permutabile con $R_{23}f$, rispetto a questa apparterrebbe al fattore 2.

La $R_{24}f$ deve ora essere permutabile con $R_{13}f$, se no ci sarebbe una parte di essa, che rispetto ad $R_{12}f$ apparterrebbe al fattore 2 contro quanto vedemmo; ma allora deve essere permutabile con $R'_{13}f$ ed $R''_{23}f$ conforme al numero precedente, e perciò più in particolare sarà

$$R_{24}f = \sum_{1}^{k}{}_{\lambda\mu} \Big\{ a_{\lambda\mu}\,(S_{2\lambda-1,4k-2\mu-1} - S_{2\mu,4k+2\lambda} + S_{2\mu-1,4k+2\lambda-1} - S_{2\lambda,4k+2\mu}) + \\ + b_{\lambda\mu}\,(S_{2\lambda-1,4k+2\mu} + S_{2\mu-1,4k+2\lambda} + S_{2\lambda,4k+2\mu-1} + S_{2\mu,4k+2\lambda-1}) \Big\} + \\ + \sum_{1}^{k}{}_{\lambda} \sum_{1}^{t}{}_{\mu} (d_{\lambda\mu}\, S_{2k+2\lambda,6k+\mu} + e_{\lambda\mu}\, S_{2k+2\lambda-1,6k+\mu})$$

$$(a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda}\ ,\ b_{\lambda\mu} = b_{\mu\lambda}).$$

Ora nel solito modo si vede, che la $R_{24}f$ lascia fermo uno spazio di equazioni del tipo

$$\sum_1^k{}_\lambda (m_\lambda\, x_{2\lambda-1}+n_\lambda\, x_{2\lambda})=0 \quad , \quad \sum_1^k{}_\lambda (m_\lambda\, x_{4k+2\lambda-1}+n_\lambda\, x_{4k+2\lambda})=0\,.$$

Senza alterare la forma di $R''_{12}f$, con una sostituzione ortogonale sulle variabili $x_1, \dots, x_{2k}$ si può prendere l'iperpiano, che ha per equazione la prima di questa per l'iperpiano $x_1=0$. Se la stessa sostituzione facciamo ancora sulle $x_{2k+1}, \dots, x_{4k}$ e sulle $x_{4k+1}, \dots, x_{6k}$ non cambierà la forma delle $R_{12}f$, $R_{23}f$, $R_{13}f$, e quindi neanche quella di tutto il G_8, questo essendo determinato da quelle tre rotazioni e da $R''_{12}f$; di più la $R_{24}f$ dovrà lasciar fermo lo spazio $x_1=0$, $x_{4k+1}=0$, e perciò $R_{24}f$ avrà la forma

$$\begin{aligned} R_{24}f = {} & \alpha_1\,(S_{1,4k+1}-S_{2,4k+2}) + \\ & + \sum_2^k{}_{\lambda\mu} \left\{ a_{\lambda\mu}\,(S_{2\lambda-1,4k-2\mu-1}+\dots) + b_{\lambda\mu}\,(S_{2\lambda-1,4k+2\mu}+\dots) \right\} + \\ & + \sum_1^k{}_\lambda \sum_1^t{}_\mu\, (d_{\lambda\mu}\; S_{2k+2\lambda,6k+\mu} + e_{\lambda\mu}\; S_{2k+2\lambda-1,6k+\mu})\,. \end{aligned}$$

Operando nella stessa maniera sulla seconda parte, e così proseguendo si arriva a dare alla $R_{24}f$ la forma

$$\begin{aligned} R_{24}f = {} & \sum_1^k{}_\lambda\, \alpha_\lambda\,(S_{2\lambda-1,4k+2\lambda-1}-S_{2\lambda,4k+2\lambda}) + \\ & + \sum_1^k{}_\lambda \sum_1^t{}_\mu\, (d_{\lambda\mu}\; S_{2k+2\lambda,6k+\mu}+e_{\lambda\mu}\; S_{2k+2\lambda-1,6k+\mu})\,. \end{aligned}$$

Se si pone

$$(R''_{12}\,R_{24}) = R'_{24}f \quad , \quad (R_{24}\,R'_{24}) = 2\,R''_{24}f\,,$$

si ha

$$\begin{aligned} R''_{24}f = {} & \sum_1^k{}_\lambda \left\{ \alpha^2_\lambda\,(Y_{\lambda\lambda}+Y_{2k+\lambda,2k+\lambda}) + \beta_{\lambda\mu}\,Y_{k+\lambda,k+\mu} + \gamma_{\lambda\mu}\,X_{k+\lambda,k+\mu} \right\} + \\ & + \sum_1^t{}_{\lambda\mu}\, \delta_{\lambda\mu}\; S_{6k+\lambda,6k+\mu} \end{aligned}$$

dove

$$\beta_{\lambda\mu} = -\sum_1^k{}_\nu (d_{\lambda\nu}\, d_{\mu\nu} + e_{\lambda\nu}\, e_{\mu\nu})\ ,\ \gamma_{\lambda\mu} = \sum_1^t{}_\nu (e_{\lambda\nu}\, d_{\mu\nu} - e_{\mu\nu}\, d_{\lambda\nu})\quad (\lambda, \mu = 1, \dots, k)\,,$$

$$\delta_{\lambda\mu} = -\sum_1^k{}_\nu (d_{\nu\lambda}\, e_{\nu\mu} - d_{\nu\mu}\, e_{\nu\lambda})\quad (\lambda, \mu = 1, \dots, t)\,.$$

Inoltre sarà

$$(\mathrm{R}_{12}\,\mathrm{R}''_{24}) = 2\sum{}_\lambda\, \alpha_\lambda\, (\mathrm{S}_{2\lambda-1,\,2k+2\lambda} - \mathrm{S}_{2\lambda,\,2k+2\lambda-1}) -$$

$$-\sum_1^k{}_{\lambda\mu} \left\{ \beta_{\lambda\mu}\, (\mathrm{S}_{2\lambda-1,\,2k+2\mu} - \mathrm{S}_{2\lambda,\,2k+2\mu-1}) + \gamma_{\lambda\mu}\, (\mathrm{S}_{2\mu,\,2k+2\lambda} + \mathrm{S}_{2\mu-1,\,2k+2\lambda-1}) \right\}.$$

Questa rotazione rispetto ad $\mathrm{R}''_{12}f$ appartiene al fattore 2, sicchè per la sua forma, essa deve, a meno di un fattore, coincidere con $\mathrm{R}'_{12}f$, onde

$$\beta_{\lambda\mu} = 0\quad (\lambda \neq \mu)\quad ,\quad \gamma_{\lambda\mu} = 0\quad (\lambda, \mu = 1, \dots, k)\,.$$

Ora queste equazioni, se rammentiamo i valori delle β, γ ci dicono, che con una sostituzione ortogonale sulle sole variabili $x_{6k+1}, \dots, x_{6k+t}$ si posson rendere nulle le $d_{\lambda\mu}$ per cui $2\lambda \neq \mu$, e le $e_{\lambda\mu}$ per cui $2\lambda - 1 \neq \mu$. Facendo tale sostituzione si ottiene

$$\mathrm{R}_{24}f = \sum_1^k{}_\lambda \Big\{ \alpha_\lambda\, (\mathrm{S}_{2\lambda-1,\,4k+2\lambda-1} - \mathrm{S}_{2\lambda,\,4k+2\lambda}) +$$

$$+ d_\lambda\, \mathrm{S}_{2k+2\lambda,\,6k+2\lambda} + e_\lambda\, \mathrm{S}_{2k+2\lambda-1,\,6k+2\lambda-1} \Big\}.$$

In conseguenza

$$\big((\mathrm{R}_{24}\,\mathrm{R}_{12}\,\mathrm{R}_{24})\big) = \sum_1^k{}_\lambda \left\{ (\alpha^2_\lambda + e^2_\lambda)\, \mathrm{S}_{2\lambda-1,\,2k+2\lambda-1} + (\alpha^2_\lambda + d^2_\lambda)\, \mathrm{S}_{2\lambda,\,2k+2\lambda} \right\} +$$

$$+ 2\sum_1^k{}_\lambda\, \alpha_\lambda\, (d_\lambda\, \mathrm{S}_{4k+2\lambda,\,6k+2\lambda} - e_\lambda\, \mathrm{S}_{4k+2\lambda-1,\,6k+2\lambda-1})\,.$$

Se ora le quantità $\alpha^2_\lambda + e^2_\lambda$ ed $\alpha^2_\lambda + d^2_\lambda$ non fossero tutte uguali tra loro, la prima sommatoria rispetto ad $\mathrm{R}''_{12}f$ apparterrebbe al fattore 2 (la seconda è permutabile), e non apparterrebbe al G_8, contro quanto abbiamo visto altra volta. Deve dunque essere

$$a^2_\lambda + e^2_\lambda = a^2_\lambda + d^2_\lambda = a\,.$$

Nel gruppo c'è allora la rotazione

$$\big(\mathrm{R}_{24}\,(\mathrm{R}_{12}\,\mathrm{R}_{24})\big) - a\,\mathrm{R}_{12}f = 2\sum_1^k{}_\lambda\, \alpha_\lambda\, (d_\lambda\, \mathrm{S}_{4k+2\lambda,\,6k+2\lambda} - e_\lambda\, \mathrm{S}_{4k+2\lambda-1,\,6k+2\lambda-1})\,,$$

e prendendo questa per la $R_{24}f$ si avrebbe il caso delle α_λ tutte nulle che rientra in quello che ora tratteremo, che sia nulla la seconda parte, cioè sia

$$\alpha_\lambda\, d_\lambda = \sigma_\lambda\, e_\lambda = 0\,,$$

e quindi per ogni valore di λ o $\sigma_\lambda = 0$ o $d_\lambda = e_\lambda = 0$. Se supponiamo che sien nulle le prime t α_λ, come sempre possiamo supporre, avremo

$$R_{24}f = \sum_1^t {}_\lambda\, (d_\lambda\, S_{2k+2\lambda,\,6k+2\lambda} + e_\lambda\, S_{2k+2\lambda-1,\,6k+2\lambda-1}) + \\ + \sum_{t+1}^k {}_\lambda\, \alpha_\lambda\, (S_{2\lambda-1,\,4k+2\lambda-1} - S_{2\lambda,\,4k+2\lambda})\,.$$

Ora potendosi supporre, che sia $a{=}1$, per l'equazioni scritte sopra le d_λ ed e_λ son tutte $= \pm 1$. Ma se fosse per es. $d_1 = -1$, basterebbe cambiar segno alla x_{6k+1}, per ridurci al caso di $d_1 = 1$. Analogamente abbiamo che le α_λ son pure tutte $= \pm 1$; se poi fosse per esempio α_k negativa basterebbe porre $x'_{2k-1} = x_{2k}$, $x'_{2k} = -x_{2k-1}$, ed una sostituzione analoga fare su x_{4k-1}, x_{4k} e su x_{6k-1}, x_{6k} per ridursi al caso di α_k positiva.

Ne viene, che possiamo supporre

$$R_{24}f = \sum_1^{2t} {}_\lambda\, S_{2k+\lambda,\,6k+\lambda} + \sum_{t+1}^k {}_\lambda\, (S_{2\lambda-1,\,4k+2\lambda-1} - S_{2\lambda,\,4k+2\lambda})\,.$$

Cercando il minimo gruppo, che contiene il G_8 e la $R_{24}f$ si trova il G_{15}, che insieme alle rotazioni del G_8 contiene le altre

$$\text{XIII)}\ \left\{\begin{aligned} R_{i4}f &= \sum_1^{2t} {}_\lambda\, S_{2(i-1)k+\lambda,\,6k+\lambda} + \\ &\quad + \sum_{t+1}^k {}_\lambda\, (S_{2(l-1)k+2\lambda-1,\,2(m-1)k+2\lambda-1} - S_{2(l-1)k+2\lambda,\,2(m-1)k+2\lambda})\,, \\ R'_{i4}f &= \sum_1^t {}_\lambda\, (S_{2(i-1)k+2\lambda-1,\,6k+2\lambda} - S_{2(i-1)k+2\lambda,\,6k+2\lambda-1}) + \\ &\quad + \sum_{t+1}^k {}_\lambda\, (S_{2(l-1)k+2\lambda,\,2(m-1)k+2\lambda-1} + S_{2(l-1)k+2\lambda-1,\,2(m-1)k+2\lambda})\,, \\ R''_{i4}f &= \sum_1^t {}_\lambda\, (S_{6k+2\lambda-1,\,6k+2\lambda} - S_{2(i-1)k+2\lambda-1,\,2(i-1)k+2\lambda}) + \\ &\quad + \sum_{t+1}^k {}_\lambda\, (S_{2(l-1)k+2\lambda-1,\,2(l-1)k+2\lambda} + S_{2(m-1)k+2\lambda-1,\,2(m-1)k+2\lambda})\,, \\ &(i = 1, 2, 3;\ i, m, l \text{ è una sostituzione circolare di } 1, 2, 3). \end{aligned}\right.$$

Il gruppo, che così si ottiene è un G_{15} perchè tra le $R''_{i4}f$, ce n'è una sola indipendente da $R''_{12}f$, $R''_{13}f$, e dalle altre; mentre sono indipendenti tutte le altre rotazioni. La composizione poi è quella stessa data dalle formule (35) solo facendovi variare gl'indici da 1 a 4, invece che da 1 a 3.

78. Abbiamo dunque così, che a meno che tutte le altre rotazioni del gruppo sien permutabili con quelle del G_8 il gruppo contiene un G_{15} come quello ora trovato. Se si dà l'altro caso allora le altre rotazioni formano un gruppo che potrà contenere o no un G_8: se contiene un G_8 si può ripetere il ragionamento, e se il gruppo primitivo non conteneva un G_{15} come quello, anche questo sottogruppo avrà per rotazioni infinitesime quelle del G_8 e quelle di un altro gruppo, le cui rotazioni son permutabili con tutte quelle del G_8. Così seguitando si trova, che ogni gruppo di rotazioni o contiene un G_{15} come quello trovato sopra oppure ha per rotazioni infinitesime, quelle di varii G_8, e di un gruppo come quelli studiati al n. 75.

79. Siamo così condotti a studiare i gruppi, che contengono un G_{15}, come quello trovato: però avanti facciamo la seguente osservazione. Se poniamo

$$\begin{array}{lll}
T_{12}f = R''_{34}f - R''_{12}f\,, & T_{13}f = R_{12}f - R_{34}f\,, & T_{14}f = R'_{12}f - R'_{34}f\,, \\
T_{15}f = R_{13}f + R_{24}f\,, & T_{16}f = R'_{13}f + R'_{24}f\,, & T_{23}f = -R'_{12}f - R'_{34}f\,, \\
T_{24}f = R_{12}f + R_{34}f\,, & T_{25}f = -R'_{13}f + R'_{24}f\,, & T_{26}f = R_{13}f - R_{24}f\,, \\
T_{34}f = R''_{12}f + R''_{34}f\,, & T_{35}f = R_{23}f - R_{14}f\,, & T_{36}f = R'_{23}f - R'_{14}f\,, \\
T_{45}f = -R'_{23}f - R'_{14}f\,, & T_{46}f = R_{23}f + R_{14}f\,, & T_{56}f = R''_{23}f + R''_{14}f\,,
\end{array}$$

il gruppo acquista la composizione

$$(T_{ik}\,T_{lm}) = 2\left\{-\varepsilon_{il}\,T_{km}f + \varepsilon_{im}\,T_{kl}f + \varepsilon_{kl}\,T_{im}f - \varepsilon_{km}\,T_{il}f\right\}$$
$$(i, k, l, m = 1, \dots, 6\,;\; i \neq k\,;\; l \neq m).$$

80. Anche nel cercare i gruppi, che contengono dei G_{15} dobbiamo tener conto delle osservazioni fatte al n. 76, per non ricadere in uno dei casi trattati, o in uno dei casi che abbiamo visto non potersi dare. In particolare nel gruppo non ci potranno essere altro che rotazioni,

che rispetto ad $R_{12}f$ appartengono al fattore 1 o al fattore 0: analogamente rispetto ad $R_{34}f$ e alle altre rotazioni del G_{15}, questo comportandosi ugualmente rispetto ad esse.

Supponiamo dapprima che colle notazioni sopra adottate sia $t=k$, e che nel gruppo ci sia almeno una rotazione Sf, che non sia permutabile con $R_{12}f$: essa allora rispetto ad $R_{12}f$ apparterrà al fattore 1, e sarà

$$(R_{12}\,S) = S'f\ ,\quad (R_{12}\,S') = -Sf.$$

Potremo supporre contemporaneamente (n. 28)

$$(R_{34}\,S) = a\,S'f\ ,\quad (R_{34}\,S') = -a\,Sf.$$

Per quanto abbiamo detto poco sopra dovrà essere o $a=\pm 1$, o $a=0$: supponiamo ora dapprima, che si possa trovare nel gruppo una rotazione $R_{25}f$ che corrisponda al caso di $a=0$, ossia tale, che non essendo permutabile con $R_{12}f$ lo sia con $R_{34}f$. Come al n. 78 potremo sempre ridurci al caso che la $R_{25}f$ sia permutabile con $R_{13}f$: sarà allora

$$R_{25}f = \sum_1^{2k}{}_\lambda \sum_1^{q}{}_\mu\ \alpha_{\lambda\mu}\ S_{2k+\lambda,\,8k+\mu}\ .$$

Posto $(R_{12}\,R_{25}) = R_{15}f$ sarà anche

$$R_{15}f = \sum_1^{2k}{}_\lambda \sum_1^{q}{}_\mu\ \alpha_{\lambda\mu}\ S_{\lambda,\,8k+\mu}\ ,$$

e perciò

$$(R_{15}\,R_{25}) = \sum_1^{2k}{}_{\lambda\nu}\ \beta_{\lambda\nu}\ S_{\lambda,\,2k+\nu}\quad \text{con}\quad \beta_{\lambda\nu} = \sum_1^{q}{}_\mu\ \alpha_{\lambda\mu}\ \alpha_{\lambda\mu}\ .$$

Siccome la $(R_{15}\,R_{25})$ opera solo sulle variabili $x_1, \dots, x_{4k}$ ed è permutabile con $R_{12}f$, per il n. 83 dovrà essere

$$(R_{15}\,R_{25}) = a\,R_{12}f + Tf\,,$$

essendo la Tf una rotazione del tipo della $(R_{15}\,R_{25})$ ma permutabile con $R_{12}f$, $R'_{12}f$, $R''_{12}f$: si ha perciò

$$Tf = \sum_1^{k}{}_{\lambda\mu}\left\{a_{\lambda\mu}\,(W_{\lambda,\,k+\mu} + W_{\mu,\,k+\lambda}) + b_{\lambda\mu}\,(Z_{\lambda,\,k+\mu} + Z_{\mu,\,k+\lambda})\right\}.$$

Osservando che la Tf lascia fermo uno spazio

$$\sum_1^k{}_\lambda (m_\lambda x_{2\lambda-1} + n_\lambda x_{2\lambda}) = 0 \quad , \quad \sum_1^k{}_\lambda (m_\lambda x_{2k+2\lambda-1} + n_\lambda x_{2k+2\lambda}) = 0 \, ,$$

come al n. 78 se ne deduce, che alla Tf si può dare la forma

$$Tf = \sum_1^k{}_\lambda \alpha_\lambda (S_{2\lambda-1, 2k+2\lambda-1} - S_{2\lambda. 2k+2\lambda})$$

senza alterare la forma del G_{15}. Ma se ora cerchiamo il gruppo, cui appartengono la Tf ed il G_8 da cui siam partiti, si vede, che nel gruppo ci son dei G_8, cui corrisponde un valore di k minore di quello, che corrisponde al primo considerato: per es. se le prime p $(p < t)$ $|\alpha_\lambda|$ sono uguali, ma diverse da tutte le altre c'è il G_8, che si ottiene da quello considerato facendo variare l'indice solo da 1 a $2p$, invece che da 1 a $2t$: se tutte le α_λ sono uguali in valore assoluto, basta considerare la $Tf - \alpha_1 R_{12}f$ per vedere una cosa analoga. La Tf deve essere dunque nulla e per conseguenza

$$(R_{15} R_{25}) = a R_{12} f \, .$$

a potendosi rendere $= -1$, ne viene

$$\sum_1^q{}_\mu \alpha_{\lambda\mu} \alpha_{\nu\mu} = - \varepsilon_{\lambda\mu} \, ,$$

il che esprime che alla $R_{25}f$ con una sostituzione ortogonale sulle $x_{8k+1}, \dots, x_{8k+q}$ si può dare la forma

$$R_{25} f = \sum_1^{2k}{}_\lambda a_\lambda S_{2k+\lambda, 8k+\lambda} \, ,$$

dove le a_λ posson prendere solo i valori ± 1. Ma se fosse per es. $a_1 = -1$, basterebbe cambiar segno ad x_{8k+1} per ridursi al caso di $\alpha_1 = 1$. Dunque potrà porsi

$$R_{25} f = \sum_1^{2k}{}_\lambda S_{2k+\lambda, 8k+\lambda} \, .$$

Il gruppo minimo che contiene questa rotazione ed il G_{15} è un G_{24} le cui rotazioni si possono avere dalle (XI) facendovi variare gl'indici da 1 a 5 e la cui composizione è data, colla stessa avvertenza, dalle (35).

81. Se dunque nel gruppo c'è una rotazione, permutabile con una sola delle due rotazioni $R_{12}f$, $R_{34}f$, nel gruppo c'è anche un G_{24} della specie ora detta: orbene consideriamo i gruppi, che contengono un tale G_{24}.

Se nel gruppo c'è una rotazione $R_{26}f$ non permutabile con $R_{12}f$, potremo supporre al solito lo sia invece con $R_{13}f$, e quindi abbia la forma

$$R_{26}f = \sum_{1}^{2k}{}_{\lambda\mu} (a_{\lambda\mu}\ S_{\lambda, 4k+\mu} + b_{\lambda\mu}\ S_{2k+\lambda, 6k+\mu} + c_{\lambda\mu}\ S_{2k+\lambda, 8k+\mu}) + \\ + \sum_{1}^{2k}{}_{\lambda} \sum_{1}^{q}{}_{\mu}\ \alpha_{\lambda\mu}\ S_{2k+\lambda, 10k+\mu}\,.$$

Ma ora si ha

$$T'f = -\big(R_{14}\,(R_{14}\,R_{26})\big) = \sum_{1}^{2k}{}_{\lambda\mu} (a_{\lambda\mu}\ S_{\lambda, 4k+\mu} + b_{\lambda\mu}\ S_{2k+\lambda, 6k+\mu})\,,$$

$$T''f = -\big(R_{13}\ (R_{13}\ T')\big) = \sum_{1}^{2k}{}_{\lambda\mu}\ a_{\lambda\mu}\ S_{\lambda, 4k+\mu}\,.$$

La $T''f$ rispetto ad $R_{13}f$ è nelle stesse condizioni della Tf considerata al numero precedente: deve dunque esser nulla, cioè intanto $a_{\lambda\mu} = 0$; ma allora per una ragione analoga deve esser nulla la $T'f$, onde $b_{\lambda\mu} = 0$.

Così pure poichè ora $-\big(R_{15}\,(R_{15}\,R_{26})\big) = \sum_{1}^{2k}{}_{\lambda\mu}\ c_{\lambda\mu}\ S_{2k+\lambda, 8k+\mu}$, devon essere nulle le $c_{\lambda\mu}$.

Si ha dunque

$$R_{26}f = \sum_{1}^{2k}{}_{\lambda} \sum_{1}^{q}{}_{\mu}\ \alpha_{\lambda\mu}\ S_{2k+\lambda, 10k+\mu}$$

e come al numero precedente si vede che si può rendere

$$R_{26}f = \sum_{1}^{2k}{}_{\lambda}\ S_{2k+\lambda, 10k+\lambda}$$

senza alterar la forma del G_{24}. Il gruppo minimo, che contiene la

$R_{26}f$ ed il G_{24} è un G_{35}, le cui rotazioni si ottengono dalle (XI) facendo variare gl'indici da 1 a 6.

Così seguitando finchè ci son rotazioni non permutabili con $R_{12}f$, si trova in generale un G_{r^2-1}, le cui rotazioni si ottengono ancora dalle (XI) facendo variare gl'indici da 1 a r, e che ha ancora la composizione (35), fatta naturalmente la stessa avvertenza.

Il gruppo dunque nel caso fatto conterrà uno di questi G_{r^2-1}; ma se supponiamo, che non contenga nessun $G_{(r+1)^2-1}$ nelle stesse condizioni, non ci potran poi essere nel gruppo altro che rotazioni permutabili con $R_{12}f$. Essendo poi le altre $R_{ik}f$ e le $R'_{ik}f$ nelle stesse condizioni di $R_{12}f$, le altre rotazioni del gruppo dovran essere permutabili con quelle e quindi anche con tutte quelle del G_{r^2-1}: ma allora esse formano un sottogruppo, ed il gruppo ha per rotazioni infinitesime quelle del G_{r^2-1} e quelle di questo sottogruppo. Se in questo si ripresenta il caso fatto si può ripetere il ragionamento, sicchè esso avrebbe per rotazioni quelle di un gruppo $G_{r'^2-1}$ dello stesso tipo del G_{r^2-1} e quelle di un altro sottogruppo di rotazioni tutte permutabili con quelle del $G_{r'^2-1}$. Così seguitando si trova, che il gruppo avrà per rotazioni infinitesime quelle di varii gruppi del tipo del G_{r^2-1} e quelle, permutabili con tutte le precedenti, di un sottogruppo, per cui non si presenta più il caso fatto.

82. Esaurito così il caso fatto veniamo all'altro, che pur essendo ancora $k = t$, non ci sia nessuna rotazione permutabile con una sola delle $R_{12}f$ ed $R_{34}f$. Se Sf è una rotazione non permutabile con $R_{12}f$ si potrà allora supporre (cf. n. 87)

$$(R_{12}\, S) = S'f \;,\quad (R_{12}\, S') = -Sf \;,\quad (R_{34}\, S) = \pm S'f \;,\quad (R_{34}\, S') = \mp Sf \;,$$

quindi

$$\begin{aligned} (R_{12} \pm R_{34}\;\; S) &= 2\, S'f, \qquad & (R_{12} \pm R_{34}\;\; S') &= -2\, Sf \\ (R_{12} \mp R_{34}\;\; S) &= 0 \qquad , & (R_{12} \mp R_{34}\;\; S') &= 0\,. \end{aligned}$$

Sicchè se diamo al G_{15} la composizione del n. 79 la Sf sarà permutabile o con $T_{13}f$ o con $T_{24}f$ e non potrà esserci nel gruppo nessuna rotazione irriducibile, che non sia permutabile con una delle due, se no si ricadrebbe nel caso già trattato, e di più rispetto ad $R'_{13}f$ le rotazioni stesse apparterranno tutte al fattore 2 o al fattore 0.

Ma allora se supponiamo, che la rotazione Sf sia irriducibile e non permutabile con $T_{12}f$, essa dovrà essere permutabile con $T_{34}f$, $T_{35}f$, $T_{45}f$, $T_{36}f$, $T_{46}f$, $T_{56}f$ tutte le Tf essendo nelle stesse condizioni: di più essa per quanto precede rispetto a $T_{12}f$ appartiene al fattore 2. Infine la Sf, si comporrà di due parti, una permutabile con $T_{23}f$ ed una che appartiene al fattore 2, sempre rispetto a $T_{23}f$: se al posto di Sf prendiamo la $T_{27}f = -\frac{1}{4}\big(T_{23}\,(T_{23}\,S)\big)$, la T_{27} oltre esser permutabile con $T_{34}f$, $T_{35}f$, $T_{36}f$, $T_{45}f$, $T_{46}f$, $T_{56}f$ apparterrà al fattore 2 rispetto a $T_{12}f$ e a $T_{23}f$. Ma allora per la solita ragione sarà permutabile anche con $T_{14}f$, $T_{15}f$, $T_{16}f$ e quindi essendolo già con $T_{34}f$ anche con $T_{13}f$. Sicchè avremo

$$(T_{ik}\,T_{27}) = 0 \qquad (i, k = 1, 3, 4, 5, 6\,;\; i \neq k)$$

ed invece sarà certo $(T_{2i}\,T_{27}) \neq 0$ $(i = 1, 3, 4, 5, 6)$ perchè se fosse per es. $(T_{24}\,T_{27}) = 0$, $T_{27}f$ essendo permutabile con $T_{24}f$ e $T_{14}f$ lo sarebbe anche con $T_{12}f$ contro l'ipotesi. Se poniamo poi

$$(T_{12}\,T_{27}) = 2\,T_{17}f$$

sarà

$$(T_{ik}\,T_{17}) = 0 \qquad (i, k = 3, 4, 5, 6\,;\; i \neq k).$$

Inoltre siccome $T_{12}f$ e $T_{27}f$ rispetto a $T_{23}f$ appartengono ambedue al fattore 2, e non ci sono nel gruppo rotazioni, che rispetto a T_{23} appartengano al fattore 4, così avremo anche

$$(T_{23}\,T_{17}) = 0\,,$$

e quindi anche, per le precedenti

$$(T_{2k}\,T_{17}) = 0 \qquad (k = 3, 4, 5, 6).$$

Invece rispetto alle $T_{1i}f$ $(i=2, \dots, 6)$ la $T_{17}f$ appartiene al fattore 2. Ora la $(T_{27}\,T_{17})$ non può essere nulla, che se no il $G_3 \equiv (T_{12}f, T_{27}f, T_{17}f)$ avrebbe una composizione diversa da quelle, che sappiamo essere le sole possibili. D'altra parte la $(T_{27}\,T_{17})$ non può essere permutabile nè con $T_{23}f$ nè con $T_{14}f$ per quanto precede; quindi per le ipotesi fatte dovrà appartenere al G_{15}. Ma allora si vede subito che deve essere

$$(T_{27}\,T_{17}) = a\,T_{12}f\,,$$

e che si può rendere $a=2$. Perciò posto:

$$(T_{23}\,T_{27}) = -2\,T_{37}f\,,\ (T_{24}\,T_{27}) = -2\,T_{47}f\,,\ (T_{25}\,T_{27}) = -2\,T_{57}f\,,\ (T_{26}\,T_{67}) = -2\,T_{67}f,$$

si verifica subito che le $T_{ik}f$ $(i,k=1,\ldots,7\,;\ i \neq k)$ formano un G_{21} di composizione

$$(53)\qquad (T_{ik}\,T_{lm}) = 2\left\{-\varepsilon_{il}\,T_{km}f+\varepsilon_{im}\,T_{kl}f+\varepsilon_{kl}\,T_{im}f-\varepsilon_{km}\,T_{il}f\right\}$$
$$(i,k,l,m=1,2,\ldots,7\,;\ i\neq k\,;\ l\neq m).$$

Dunque nel caso fatto il gruppo contiene un G_{21} come questo.

Se ora c'è un'altra rotazione $T_{28}f$ fuori del G_{21} non permutabile con $T_{12}f$, si vede come sopra, che essendo tutte le Tf nelle stesse condizioni, la $T_{28}f$ deve essere permutabile con le $T_{ik}f$ $(i,k=3,\ldots,7)$ e che si può supporre permutabile anche con $T_{13}f$. Dopo di che basta ripetere il ragionamento ora fatto per trovare, che con posizioni analoghe alle superiori nel gruppo c'è un G_{28}, le cui rotazioni si possono indicare con $T_{ik}f$ $(i,k=1,\ldots,8\,;\ i\neq k)$, e che ha la composizione data dalla formula ultima, dove però gli indici possono prendere anche il valore 8.

Seguitando analogamente si arriva ad un $G_{\frac{r(r-1)}{2}}$, le cui rotazioni si possono indicare con $T_{ik}f$ $(i,k=1,\ldots,r\,;\ i\neq k)$, e che allora ha la composizione data dall'ultima formula dove però gl'indici possono prendere tutti i valori da 1 ad r.

Se nel gruppo non c'è nessun $G_{\frac{r(r+1)}{2}}$ analogo, non ci devono essere altre rotazioni non permutabili con $T_{12}f$; e analogamente con le altre.

Sicchè tutte le altre rotazioni devono essere permutabili con quelle del $G_{\frac{r(r-1)}{2}}$ ed il gruppo ha per rotazioni infinitesime quelle del $G_{\frac{r(r-1)}{2}}$ e quelle di un sottogruppo di rotazioni tutte permutabili con quelle.

Per questo, se si presenta ancora il caso detto si potrà ripetere il ragionamento fatto, onde seguitando e rammentando ciò che abbiamo detto nel numero precedente, se ne conclude, che un gruppo generale di rotazioni avrà per rotazioni quelle di varii gruppi del tipo dei G_{r^2-1} del n. 81, quelle di varii $G_{\frac{r(r-1)}{2}}$, come i precedenti ed infine quelle di un sottogruppo, per il quale non si presenta più il caso di $k=t$: inoltre tutte le rotazioni di uno qualunque di questi sottogruppi saran permutabili con tutte quelle degli altri.

83. Determiniamo la forma normale dei gruppi ora trovati.

Dalle formole (XIII) rammentando anche quelle del n. 79 abbiamo

$$T_{12}f=\sum_1^k{}_\lambda\,(S_{6k+2\lambda-1,\,6k+2\lambda}-S_{4k+2\lambda-1,\,4k+2\lambda}-S_{2k+2\lambda-1,\,2k+2\lambda}+S_{2\lambda-1,\,2\lambda})\,,$$

$$T_{13}f=\sum_1^k{}_\lambda\,(S_{2\lambda-1,\,2k+2\lambda-1}+S_{2\lambda,\,2k+2\lambda}-S_{4k+2\lambda-1,\,6k+2\lambda-1}-S_{4k+2\lambda,\,6k+2\lambda})\,,$$

$$T_{34}f=\sum_1^k{}_\lambda\,(S_{6k+2\lambda-1,\,6k+2\lambda}-S_{4k+2\lambda-1,\,4k+2\lambda}+S_{2k+2\lambda-1,\,2k+2\lambda}-S_{2\lambda-1,\,2\lambda})\,,$$

$$T_{35}f=\sum_1^k{}_\lambda\,(S_{2k+2\lambda-1,\,4k+2\lambda-1}+S_{2k+2\lambda,\,4k+2\lambda}-S_{2\lambda-1,\,6k+2\lambda-1}-S_{2\lambda,\,6k+2\lambda})\,,$$

$$T_{56}f=\sum_1^k{}_\lambda\,(S_{6k+2\lambda-1,\,6k+2\lambda}+S_{4k+2\lambda-1,\,4k+2\lambda}-S_{2k+2\lambda-1,\,2k+2\lambda}-S_{2\lambda-1,\,2\lambda})\,.$$

Ora poichè la $T_{57}f$ deve esser permutabile colle prime tre e rispetto alla quarta e quinta appartenere al fattore 2, si deve avere

$$\begin{aligned}T_{57}f=\sum_1^k{}_{\lambda\mu}\Big\{&a_{\lambda\mu}(W_{\lambda,\,k+\mu}+W_{\mu,\,k+\lambda}-W_{2k+\lambda,\,3k+\mu}-W_{2k+\mu,\,3k+\lambda})+\\&+b_{\lambda\mu}(Z_{\lambda,\,k+\mu}+Z_{\mu,\,k+\lambda}-Z_{2k+\lambda,\,3k+\mu}-Z_{2k+\mu,\,3k+\lambda})\Big\}\,.\end{aligned}$$

Ora se noi consideriamo la parte

$$\sum_1^k{}_{\lambda\mu}\Big\{a_{\lambda\mu}(W_{\lambda,\,k+\mu}+W_{\mu,\,k+\lambda})+b_{\lambda\mu}(Z_{\lambda,\,k+\mu}+Z_{\mu,\,k+\lambda})\Big\}\,,$$

come abbiamo visto per es. al n. 80, con la stessa sostituzione sulle $x_1,\ldots,x_{2k}$ e sulle $x_{2k+1},\ldots,x_{4k}$, e senza alterare la forma di $T_{12}f$ e quindi neanche di $T_{34}f$ e $T_{56}f$, possiamo dargli la forma

$$\sum_1^k{}_\lambda\, a_\lambda\, W_{\lambda,\, k+\lambda}\,.$$

Se ora la stessa sostituzione facciamo anche sulle $x_{4k+1}, \dots, x_{6k}$ e sulle $x_{6k+1}, \dots, x_{8k}$ non cambia neppure la forma di $T_{35}f$: sicchè dopo di ciò si avrà

$$T_{57}f = \sum_1^k{}_\lambda\, a_\lambda\, (W_{\lambda,\, k+\lambda} - W_{2k+\lambda,\, 3k+\lambda})\,.$$

Ma ora dovendo essere

$$(T_{57}\,(T_{56}\,T_{57})) = 4\,T_{56}f\,,$$

deve pure essere $a_\lambda = \pm 1$. Ma se ora fosse per es. $a_1 = -1$ basterebbe fare la sostituzione

$$x'_{2(i-1)k+1} = x_{2(i-1)k+2}\ ,\quad x'_{2(i-1)k+2} = -x_{2(i-1)k+1}\quad (i = 1, \dots, 4)\,,$$

lasciando inalterate le altre variabili per rendere $a_1 = 1$, senza cambiare altro. Possiamo dunque supporre tutte le $a_\lambda = 1$, e quindi

$$T_{57}f = \sum_1^k{}_\lambda\, (S_{2\lambda-1,\, 2k+2\lambda-1} - S_{2\lambda,\, 2k+2\lambda} - S_{4k+2\lambda-1,\, 6k+2\lambda-1} + S_{4k+2\lambda,\, 6k+2\lambda})\,.$$

Così intanto è trovata la forma normale del G_{21} formato dalle $T_{ik}f$ $(i, k = 1, \dots, 7)$, poichè le altre rotazioni si ottengono da quelle scritte con semplici alternate.

84. Supponiamo ora $r > 7$ e cerchiamo la forma normale della $T_{78}f$. Dovendo essa essere permutabile con tutte le rotazioni sopra scritte meno che con $T_{57}f$, rispetto a cui deve appartenere al fattore 2, si avrà

$$T_{78}f = \sum_1^k{}_{\lambda\mu}\, a_{\lambda\mu}\, (Y_{\lambda\mu} + Y_{k+\lambda,\, k+\mu} + Y_{2k+\lambda,\, 2k+\mu} + Y_{3k+\lambda,\, 3k+\mu})\,.$$

Se ora consideriamo la parte

$$\sum_1^k{}_{\lambda\mu}\, a_{\lambda\mu}\, Y_{\lambda\mu}\,,$$

essa lascia fermo uno spazio di equazioni del tipo

$$\sum_1^k{}_\lambda\, m_\lambda\, x_{2\lambda-1} = 0 \quad , \quad \sum_1^k{}_\lambda\, m_\lambda\, x_{2\lambda} = 0\,.$$

Se ne deduce che facendo una stessa sostituzione sulle $x_1, x_2, \ldots, x_{2k-1}$ e sulle $x_2, x_4, \ldots, x_{2k}$ si può rendere quella parte del tipo

$$\frac{1}{2} \sum_1^k{}_\lambda\, a_\lambda\, \mathrm{Y}_{\lambda\lambda}\,.$$

Se la stessa sostituzione, che vien fatta così sulle $x_1, \ldots, x_{2k}$, si fa anche sulle $x_{2k+1}, \ldots, x_{4k}$, sulle $x_{4k+1}, \ldots, x_{6k}$, sulle $x_{6k+1}, \ldots, x_{8k}$ si rende

$$\mathrm{T}_{78}f = \sum_1^k{}_\lambda\, a_\lambda\, (\mathrm{S}_{2\lambda-1,\,2\lambda} + \mathrm{S}_{2k+2\lambda-1,\,2k+2\lambda} + \mathrm{S}_{4k+2\lambda-1,\,4k+2\lambda} + \mathrm{S}_{6k+2\lambda-1,\,6k+2\lambda})$$

senza alterare la forma del G_{21}. Inoltre come sopra si trova che deve essere $a_\lambda = \pm 1$; si può dunque porre

$$\mathrm{T}_{78}f = \left(\sum_1^{k_1}{}_\lambda - \sum_{k_1+1}^{k}{}_\lambda\right)(\mathrm{S}_{2\lambda-1,2\lambda} + \mathrm{S}_{2k+2\lambda-1,2k+2\lambda} + \mathrm{S}_{4k+2\lambda-1,4k+2\lambda} + \mathrm{S}_{6k+2\lambda-1,6k+2\lambda}).$$

Con ciò è trovata la forma normale del G_{28}, che ha per rotazioni le $\mathrm{T}_{ik}f$ $(i, k = 1, \ldots, 8)$ ed esaurita la questione nel caso di $r \leq 8$.

85. Supponiamo ancora $r > 9$: dovrà essere intanto

$$\mathrm{T}_{89}f = \sum_1^{k_1}{}_\lambda \sum_{k_1+1}^{k}{}_\mu\, a_{\lambda\mu}\, (\mathrm{X}_{\lambda\mu} + \mathrm{X}_{k+\lambda,\,k+\mu} + \mathrm{X}_{2k+\lambda,\,2k+\mu} + \mathrm{X}_{3k+\lambda,\,3k+\mu})\,.$$

Ora consideriamo la parte

$$\sum_1^{k_1}{}_\lambda \sum_{k_1+1}^{k}{}_\mu\, a_{\lambda\mu}\, \mathrm{S}_{2\lambda-1,\,2\mu-1}\,,$$

ed osserviamo che sulle $x_1, x_3, \ldots, x_{2k-1}$ si può fare qualunque sostituzione, chè facendo la stessa sostituzione sulle $x_2, x_4, \ldots, x_{2k}$, e poi facendo sulle $x_{2ik+1}, \dots, x_{2(i+1)k}$ $(i = 1, 2, 3)$ la stessa sostituzione che sulle $x_1, \dots, x_{2k}$, non cambia neppure la forma del G_{28}. Perciò alla parte suddetta si può dare la forma

$$\sum\nolimits_\lambda a_\lambda \, S_{2\lambda-1, 2k_1+2\lambda-1}$$

e quindi deve essere intanto $k = 2k_1$, dopo di che si vede facilmente, che $a_\lambda = \pm 1$, ma che si può supporre $a_\lambda = 1$. Con ciò si viene ad avere

$$T_{89} = \sum_1^{k_1}{}_\lambda \, (X_{\lambda, k_1+\lambda} + X_{2k_1+\lambda, 3k_1+\lambda} + X_{4k_1+\lambda, 5k_1+\lambda} + X_{6k_1+\lambda, 7k_1+\lambda}) \, .$$

Se è ancora $r > 9$ si ha subito che deve essere

$$T_{ik}f = \left(\sum_1^{k_1}{}_{\lambda\mu} \pm \sum_{k_1+1}^{2k_1}{}_{\lambda\mu} \right) a_{\lambda\mu} \, (X_{\lambda\mu} + X_{k+\lambda, k+\mu} + X_{2k+\lambda, 2k+\mu} + X_{3k+\lambda, 3k+\mu})$$
$$(i, k > 8) \quad .$$

dove si deve prendere il segno $-$, se dei due indici uno è $= 9$, il segno $+$ nel caso contrario. Come sopra si osservi che sulle $x_1, \dots, x_{2k-1}$ si può fare qualunque sostituzione senza alterare la forma del G_{36} già trovato: inoltre si osservi che le rotazioni

$$\overline{T_{ik}f} = \sum_1^{k_1}{}_{\lambda\mu} \, a_{\lambda\mu} \, S_{2\lambda-1, 2\mu-1} \quad (i, k = 9, \dots, r)$$

formano un $G_{\frac{(r-9)(r-8)}{2}}$ della solita composizione. Ora se noi supponiamo di conoscere la forma dei $G_{\frac{r(r-1)}{2}}$ per $r \leq 8s$, da questa deduciamo quella che si ha nel caso di $r \leq 8(s+1)$: infatti in questo caso diamo alle $T_{12}f$, $T_{23}f$, $T_{34}f$, $T_{45}f$, $T_{56}f$, $T_{67}f$; $T_{78}f$, $T_{89}f$ la forma veduta. Allora le $T_{ik}f$ $(i, k > 9)$ formeranno un gruppo ed avranno la forma vista: dedottene le $\overline{T_{ik}f}$, a queste potremo dare una forma nota per la ipotesi ora fatta, che si conosca la forma normale del gruppo nel caso di $r \leq 8s$. Ma allora sarà nota anche la forma delle $T_{ik}f$ $(i, k > 8)$ e quindi anche quella di tutto il gruppo. Ora siccome per $r \leq 8$ conosciamo già la forma normale se ne deduce quella per il caso di $r \leq 16$, da questa si deduce quella per $r \leq 24$, e così via. Con ciò è esaurita la nostra questione.

Se si fa la sostituzione

$$
\begin{aligned}
x_{2\lambda-1} &= x'_{\lambda} \;, & x'_{2\lambda} &= x'_{k_1+\lambda} \;, \\
x_{2k+2\lambda-1} &= -x'_{2k_1+\lambda} \;, & x_{2k+2\lambda} &= x'_{3k_1+\lambda} \;, \\
x_{4k+2\lambda-1} &= -x'_{4k_1+\lambda} \;, & x_{4k+2\lambda} &= x'_{5k_1+\lambda} \;, \\
x_{6k+2\lambda-1} &= x'_{6k_1+\lambda} \;, & x_{6k+2\lambda} &= x'_{7k_1+\lambda} \;, \\
x_{2k_1+2\lambda-1} &= x'_{8k_1+\lambda} \;, & x_{2k_1+2\lambda} &= x'_{9k_1+\lambda} \;, \\
x_{2k+2k_1+2\lambda-1} &= -x'_{10k_1+\lambda} \;, & x_{2k+2k_1+2\lambda} &= x'_{11k_1+\lambda} \;, \\
x_{4k+2k_1+2\lambda-1} &= -x'_{12k_1+\lambda} \;, & x_{4k+2k_1+2\lambda} &= x'_{13k_1+\lambda} \;, \\
x_{6k+2k_1+2\lambda-1} &= x'_{14k_1+\lambda} \;, & x_{6k+2k_1+2\lambda} &= x'_{15k_1+\lambda} \;,
\end{aligned}
$$

$$(\lambda = 1, \ldots, k_1)$$

tale forma si ottiene facilmente: la tralasciamo ora per brevità, riserbandoci di scriverla per disteso in fine.

86. Veniamo ora al caso di $k > t$, e supponiamo dapprima, che ci sia nel gruppo una rotazione non permutabile con $R_{34}f$: allora al solito potran darsi due casi o essa è permutabile con $R_{12}f$ o no. Dimostriamo, che se avviene il primo caso si rientra in uno di quelli già trattati. Nel caso detto, la rotazione Sf si può per la solita ragione supporre permutabile con $R_{13}f$: di più per il n. 76 dovrà essere allora permutabile anche con $R''_{12}f$ ed $R''_{13}f$. In conseguenza colle notazioni del n. 84 dovrà essere

$$
\begin{aligned}
Sf = \sum_{1}^{t}{}_{\lambda} \sum_{t+1}^{k}{}_{\mu} \Big\{ & \alpha_{\lambda\mu} (X_{\lambda\mu} + X_{k+\lambda,\, k+\mu} + X_{2k+\lambda,\, 2k+\mu}) + \\
& + \beta_{\lambda\mu} (Y_{\lambda\mu} + Y_{k+\lambda,\, k+\mu} + Y_{2k+\lambda,\, 2k+\mu}) \Big\} + \sum_{1}^{2t}{}_{\lambda} \sum_{1}^{p}{}_{\mu} a_{\lambda\mu} \, S_{6k+\lambda,\, 6k+2t+\mu} \,.
\end{aligned}
$$

Ora alla parte $\sum_\lambda \sum_\mu (\gamma_{\lambda\mu} X_{\lambda\mu} + \beta_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu})$ con una sostituzione ortogonale sulle variabili $x_1, \ldots, x_{2t}$ ed una sulle variabili $x_{2t+1}, \ldots, x_{2k}$ si può dare la forma $\sum_{1}^{q}{}_\lambda \, \alpha_\lambda X_{\lambda, t+\lambda}$, dove q è il più piccolo dei numeri t e $k-t$. Pur di variare convenientemente le altre variabili, non cambia la forma del G_{15}: sicchè in conclusione si può supporre

$$Sf = \sum_{1}^{q}{}_\lambda \gamma_\lambda (X_{\lambda, t+\lambda} + X_{k+\lambda, k+t+\lambda} + X_{2k+\lambda, 2k+t+\lambda}) + \sum_{1}^{2t}{}_\lambda \sum_{1}^{p}{}_\mu a_{\lambda\mu} S_{6k+\lambda, 6k+2t+\mu} .$$

Ed ora posto

$$Tf = \frac{1}{4} (S (R''_{34} S)) ,$$

si ha

$$Tf = \sum_{1}^{q}{}_\lambda \alpha^2_\lambda (Y_{\lambda\lambda} + Y_{k+\lambda, k+\lambda} + Y_{2k+\lambda, 2k+\lambda} - Y_{t+\lambda, t+\lambda} - Y_{k+t+\lambda, k+t+\lambda} - Y_{2k+t+\lambda, 2k+t+\lambda})$$
$$+ \sum_{1}^{2t}{}_{\lambda\mu} b_{\lambda\mu} S_{6k+\lambda, 6k+\mu} + \sum_{1}^{p}{}_{\lambda\mu} c_{\lambda\mu} S_{6k+2t+\lambda, 6k+2t+\mu}$$

La Tf deve essere permutabile con $R_{12}f$, $R'_{12}f$, $R''_{12}f$ ed $R''_{34}f$, e si deve comporre di due parti una permutabile con $R_{34}f$, l'altra rispetto ad $R_{34}f$ stesso appartenente al fattore 2, poichè tanto Sf che $(R''_{34} S)$ rispetto ad $R_{34}f$ appartengono al fattore 1. La seconda parte deve essere del G_{15} (n. 76), e per le condizioni dette or ora non può differire da $R''_{34}f$; ne viene che in Tf devono essere tutte le α^2_λ uguali e di più deve essere $q = t = k-t$, e le $b_{\lambda\mu}$ sono pure nulle salvo le $b_{2\lambda-1, 2\lambda}$, che devono essere $= -\alpha^2_\lambda$. Per quest'ultima ragione occorre sia

$$\sum_{1}^{p}{}_\mu (a_{2\lambda, \mu} a_{2\nu, \mu} + a_{2\lambda-1, \mu} a_{2\nu-1, \mu}) = 0 \ , \ \sum_{1}^{p}{}_\mu (a_{2\lambda, \mu} a_{2\nu-1, \mu} - a_{2\nu, \mu} a_{2\lambda-1, \mu}) = 0$$
$$(\lambda, \nu = 1, \ldots, t ; \lambda \neq \nu)$$

e queste relazioni ci dicono, che con una sostituzione ortogonale sulle sole $x_{6k+2t+1}, \ldots, x_{6k+2t+p}$ si può rendere

$$Sf = \sum_{1}^{t}{}_\lambda \gamma_\lambda (X_{\lambda, t+\lambda} + X_{k+\lambda, k+t+\lambda} + X_{2k+\lambda, 2k+t+\lambda}) + \sum_{1}^{2t}{}_\lambda a_\lambda S_{6k+\lambda, 6k+t+\lambda} ,$$

e per quanto sopra dovrà essere

$$a_{2\lambda-1}^2 + a_{2\lambda}^2 = 2\alpha .$$

Ma di più devono essere tutte le a uguali in valore assoluto, perchè altrimenti nel gruppo minimo che contiene la Sf ed il G_{15} si troverebbe un G_8 corrispondente ad un valore di k minore di quello considerato. Potendosi d'altra parte cambiare a volontà il segno di a_λ e potendosi dividere per α la Sf ne viene che si può supporre in particolare

$$Sf = \left(\sum_1^{t_1}{}_\lambda - \sum_{t_1+1}^{t}{}_\lambda\right) (X_{\lambda,\, t+\lambda} + X_{k+\lambda,\, k+t+\lambda} + X_{2k+\lambda,\, 2k+t+\lambda}) + \sum_1^t{}_\lambda\, X_{3k+\lambda,\, 3k+t+\lambda} .$$

Per conseguenza rammentando che $k = 2t$ per quanto sopra, si ha

$$T_1 f = \left((S\,(R_{14} S))\, R_{34}\right) = \sum_1^{2k}{}_\lambda\, (-1)^\lambda\, S_{2k+\lambda,\, 6k+\lambda} .$$

Se si cerca il gruppo minimo cui appartiene quest'ultima rotazione, ed il $G_8 \equiv (R_{ik} f,\ R'_{ik} f,\ R''_{ik} f;\ i, k = 1, 2, 3)$ si trova un G_{15}, che ha ancora la forma canonica (purchè si cambi segno alle variabili $x_{6k+2\lambda-1}$ $(\lambda = 1, \dots, k)$), e che corrisponde al caso di $t = k$, cioè ad un caso già trattato completamente.

87. Possiamo dunque supporre, che nel gruppo non ci sia nessuna rotazione permutabile con una sola delle rotazioni $R_{12} f$, $R_{34} f$, nel qual caso il ragionamento del n. 82 ci dimostra, che il gruppo dato ha per rotazioni infinitesime quelle di un $G_{\frac{r(r-1)}{2}} \equiv (T_{ik}\, (i, k = 1, \dots, r;\ i \neq k))$ di composizione

$$(T_{ik}\, T_{lm}) = 2 \left\{ -\varepsilon_{il}\, T_{km} f + \varepsilon_{im}\, T_{kl} f + \varepsilon_{kl}\, T_{im} f - \varepsilon_{km}\, T_{il} f \right\}$$
$$(i, k, l, m = 1, \dots, r;\ i \neq k;\ l \neq m) ,$$

e quelle di un sottogruppo di rotazioni permutabili con quelle di quel $G_{\frac{r(r-1)}{2}}$. Se mettiamo questo in relazione con quanto abbiamo visto nei numeri precedenti e osserviamo che per il n. 79 i G_{15} rientrano nei $G_{\frac{r(r-1)}{2}}$ ora menzionati, si ha che ogni gruppo di rotazioni che non contiene un G_{21} come quelli considerati al paragrafo precedente, ma che contiene un G_{15} di quelli del n. 77 o contiene un G_{r^2-1} o un $G_{\frac{r(r-1)}{2}}$ e di più per rotazioni infinitesime del gruppo si posson prendere quelle di quel G_{r^2-1} o di quel $G_{\frac{r(r-1)}{2}}$ e quelle di un sottogruppo del gruppo, tutte permutabili con le precedenti. A questo sottogruppo, se esso contiene ancora un G_{15} dei detti, si può applicare ancora la stessa conclusione e così seguitare finchè non si arriva ad un sottogruppo che non contenga nessun G_{15} e quindi abbia per rotazioni infinitesime quelle di varii G_8, G_{10}, G_3 e quelli di un sottogruppo abeliano, tali che le rotazioni di ciascuno di questi sottogruppi sien permutabili con tutte quelle degli altri. Siccome i G_8 per la composizione e per la forma rientrano nei gruppi del tipo dei G_{r^2-1}, ed i G_{10} ed i G_3 hanno la stessa composizione dei gruppi del tipo del $G_{\frac{r(r-1)}{2}}$, così ne viene che

Ogni gruppo di rotazioni, che non contiene G_{21} *della composizione* (51), *ha per rotazioni infinitesime quelle di varii sottogruppi del tipo dei* G_{r^2-1} $(r \neq 4)$ *trovati al n. 81, quelle di varii sottogruppi del tipo dei* $G_{\frac{r(r-1)}{2}}$ *della composizione* (53) *ed infine quelle di un sottogruppo abeliano: e questi sottogruppi son tali, che le rotazioni di ciascuno di essi son permutabili con tutte quelle degli altri.*

Mettendo in relazione questo con quanto abbiamo visto al n. 82 otteniamo

Ogni gruppo di rotazioni ha per rotazioni quelle di varii sottogruppi del tipo dei $G_{r(2r+1)}$ *visti al n. 75, quelle di varii sottogruppi del tipo dei* G_{r^2-1} *trovati al n. 81* $(r \neq 4)$, *quelle di varii sottogruppi del tipo dei* $G_{\frac{r(r-1)}{2}}$ *della composizione* (53) *ed infine quelle di un sottogruppo abeliano: e questi sottogruppi son tali che le rotazioni di ciascuno di essi son permutabili con tutte quelle degli altri.*

88. Con il teorema precedente è completamente esaurita la ricerca delle composizioni dei gruppi di rotazioni: resta ora a vedere qual'è la forma normale di questi gruppi. Cominciamo dal veder quella di un $G_{\frac{r(r-1)}{2}}$, come quello del numero precedente: ora con un leggiero

cambiamento di notazioni dalle (XIII) e dalle formule del n. 86 si ha

$$\mathrm{T}_{12}f = \sum_1^t {}_\lambda \left(\mathrm{S}^{(1)}_{6t+2\lambda-1,\,6t+2\lambda} - \mathrm{S}^{(1)}_{4t+2\lambda-1,\,4t+2\lambda} - \mathrm{S}^{(1)}_{2t+2\lambda-1,\,2t+2\lambda} + \mathrm{S}^{(1)}_{2\lambda-1,\,2\lambda}\right) + \\ + 2\sum_1^{t_1} {}_\lambda\, \mathrm{S}^{(2)}_{2\lambda-1,\,2\lambda}\,.$$

Le altre rotazioni infinitesime del gruppo, dovendo rispetto a $\mathrm{T}_{12}f$ appartenere o al fattore 0 o al fattore 2, saran somma di due parti una che opera solo sulle $x^{(1)}$ ed una che opera solo su altre variabili. Le parti, che agiscono sulle sole $x^{(1)}$ formano un gruppo come quelli determinati nei nn. 83-86, e di esse è inutile occuparsi. Si può dunque limitarsi al caso in cui $t = 0$, in cui tralasciando l'indice (2) in alto, perchè inutile, e ponendo

$$x_{2(i-1)k+2\lambda-1} = x'_{(2i-1)k+\lambda}\ , \quad x_{2(i-1)k+2\lambda} = x'_{2ik+\lambda}$$
$$(i = 1, 2, 3, 4;\ \lambda = 1, \dots, k)$$

si ha per le (XIII) e per il n. 86

$$\mathrm{T}_{il}f = 2\sum_1^k {}_\lambda\, \mathrm{S}_{(i-1)k+\lambda,\,(l-1)k+\lambda} \qquad (i, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6)\,.$$

Se ora $r > 6$, $\mathrm{T}_{17}f$ deve essere permutabile con le $\mathrm{T}_{il}f\ (i, l = 2, \dots, 6)$ e quindi essere del tipo

$$\mathrm{T}_{17}f = \sum_1^k {}_\lambda \sum_1^p {}_\mu\, a_{\lambda\mu}\, \mathrm{S}_{\lambda,\,6k+\mu} + \\ + \sum_1^k {}_{\lambda\mu}\, b_{\lambda\mu}\, (\mathrm{S}_{k+\lambda,\,k+\mu} + \mathrm{S}_{2k+\lambda,\,2k+\mu} + \dots + \mathrm{S}_{5k+\lambda,\,5k+\mu})$$

ma d'altra parte deve appartenere al fattore 2 rispetto a $\mathrm{T}_{12}f$, quindi $b_{\lambda\mu} = 0$, $(\lambda, \mu = 1, \dots, k)$. Ma ora siccome

$$\big(\mathrm{T}_{17}\,(\mathrm{T}_{12}\,\mathrm{T}_{17})\big) = 4\,\mathrm{T}_{12}f,$$

e quindi

$$\sum_1^p {}_\mu\, a_{\lambda\mu}\, a_{\nu\mu} = 4\,\varepsilon_{\lambda\nu} \qquad (\lambda, \nu = 1, \dots, k)\,,$$

vuol dire che con una sostituzione ortogonale sulle sole $x_{6k+1}, \dots,$ x_{7k+p} si posson rendere tutte le $a_{\lambda\mu}$ con indici diversi, nulle.

D'altra parte disponendo del segno delle stesse variabili si varia anche quello delle $a_{\lambda\mu}$, che si posson perciò supporre tutte positive. Si ha allora

$$\mathrm{T}_{17}f = 2\sum_{1}^{k}{}_{\lambda}\, \mathrm{S}_{\lambda, 6k+\lambda}$$

e quindi la forma scritta sopra per le $\mathrm{T}_{il}f\,(i, l=1, \dots, 6)$ si può estendere anche al caso in cui uno dei due indici sia $= 7$.

Analogamente si ha che in generale si può porre

$$\mathrm{T}_{il}f = 2\sum_{1}^{k}{}_{\lambda}\, \mathrm{S}_{(i-1)k+\lambda, (l-1)k+\lambda} \qquad (i, l = 1, \dots, r; i \neq l).$$

89. Veniamo ora ad indicare come si può trovare la forma normale dei gruppi di rotazioni: cominciamo dal supporre, che nel gruppo non ci sia nessun $\mathrm{G}_{\frac{r(r-1)}{2}}$ dei soliti ($r > 5$), ma che ci sia qualche gruppo come il G_{r^2-1} del n. 81, chè il caso non ci sien neanche di questi l'abbiamo già trattato nel paragrafo precedente. Supponiamo inoltre di conoscere la forma normale nel caso in cui ci sien nel gruppo solo $\alpha - 1$ di quei G_{r^2-1} e cerchiamo quella nel caso ce ne sien α. Siccome per $\alpha - 1 = 0$ ciò è vero, viene ad esser così esaurito il caso da noi fatto. Se c'è un tal gruppo potremo dargli la forma normale (XII): ogni rotazione permutabile con quelle del G_{r^2-1} si compone di due parti, una che opera solo sulle variabili su cui opera il G_{r^2-1}, l'altra che opera solo su altre variabili. Queste seconde parti formano un gruppo, che contiene al massimo $\alpha - 1$ gruppi del tipo dei G_{r^2-1}, e quindi se ne conosce la forma normale. Basterà dunque occuparsi solo delle prime parti: se $\mathrm{T}f$ è una di queste, dovendo essa esser permutabile con il G_{r^2-1} deve essere

$$\mathrm{T}f = \sum_{1}^{r}{}_{i} \sum_{1}^{k}{}_{\lambda\mu} \left(\alpha_{\lambda\mu}\, \mathrm{X}_{(i-1)k+\lambda, (i-1)k+\mu} + \beta_{\lambda\mu}\, \mathrm{Y}_{(i-1)k+\lambda, (i-1)k+\mu}\right).$$

Ora se sulle $x_1, \dots, x_{2k}$ facciamo una sostituzione ortogonale qualunque non cambia la forma delle $\mathrm{R}_{il}f\,(i, l=1, \dots, r)$, purchè la stessa sostituzione si faccia anche sulle $x_{2k+1},\dots,x_{4k}$, sulle $x_{4k+1},\dots,x_{6k}$, sulle $x_{2(r-1)k+1},\dots,x_{2rk}$. Se noi dunque consideriamo le rotazioni, che si ottengono dalle precedenti dando ad i solo il valore 1, e la rotazione $\sum_{1}^{k}{}_{\lambda}\, S_{2\lambda-1,2\lambda}$ esse formano un gruppo, che contiene al massimo $\alpha-1$ dei gruppi del tipo del G_{r^2-1} e che perciò ha forma nota. La stessa sostituzione, che occorre fare sulle variabili $x_1,\dots,x_{2k}$ per ridurre quel gruppo a forma normale facciamo ancora sugli altri gruppi di variabili sopra citati: con questo la rotazione $\sum_{1}^{k}{}_{\lambda}\, S_{2k+2\lambda-1,2k+2\lambda}$ si riduce ad una forma nota analoga perfettamente a quella a cui si è ridotta la $\sum_{1}^{k}{}_{\lambda}\, S_{2\lambda-1,2\lambda}$ e le $R_{il}f$ restano inalterate, onde è nota perfettamente la forma del gruppo.

90. Infine dobbiamo considerare anche il caso ci sien dei gruppi del tipo dei $G_{\frac{r(r-1)}{2}}$ della composizione (53). Come al principio del numero precedente vediamo, che supponendo sia nota la forma del gruppo nel caso ci sien solo $\alpha-1$ di tali gruppi, per dedurne quella nel caso ce ne sieno α basterà limitarsi alle parti che operan sulle variabili su cui opera il $G_{\frac{r(r-1)}{2}}$ considerato. Anzi come al n. 88 si vede, che basterà considerare i due casi particolari, quello esaminato ai nn. 83-86 e quello per cui si è trovata la forma normale al n. 88. Questo secondo caso si tratta subito. Infatti allora data al $G_{\frac{r(r-1)}{2}}$ la forma canonica quelle parti avran tutte la forma

$$\sum_{1}^{r}{}_{i} \sum_{1}^{k}{}_{\lambda\mu}\, a_{\lambda\mu}\, S_{(i-1)k+\lambda,\,(i-1)k+\mu}\,.$$

Alle parti $\sum_{1}^{k}{}_{\lambda\mu}\, a_{\lambda\mu}\, S_{\lambda\mu}$ diamo la forma normale nota: per questo occorre una certa sostituzione ortogonale sulle $x_1,\dots,x_k$. Se questa supponiamo fatta anche sulle $x_{k+1},\dots,x_{2k};\dots;$ sulle $x_{(r-1)k+1},\dots,x_{rk}$ non cambia la forma del $G_{\frac{r(r-1)}{2}}$ e quella delle parti considerate si ottiene allora premettendo a quella trovata una sommatoria rispetto ad i, come quella che figura sopra.

Passiamo all'altro caso: se $r=6$ si rientra per il n. 86 nel caso dei G_{r^2-1} trattato sopra; se $r<6$ il caso è stato già trattato, onde basta limitarsi al caso di $r\geq 7$, e cominciamo dal caso di $r=7$: allora la parte delle altre rotazioni che agiscono sulle variabili che figurano sulle rotazioni del G_{21}, cui si suppone data la forma normale, devono essere del tipo:

$$\sum_1^k{}_{\lambda\mu}\; a_{\lambda\mu}\;(X_{\lambda\mu}+X_{k+\lambda,\,k+\mu}+X_{2k+\lambda,\,2k+\mu}+X_{3k+\lambda,\,3k+\mu})$$

onde conosciuta quella delle parti $\sum_1^k{}_{\lambda\mu}\; a_{\lambda\mu}\; S_{2\lambda-1,\,2\mu-1}$ se ne deduce subito quella di quelle parti. D'altra parte siccome variando in modo qualunque le $x_1, x_3, \ldots, x_{2k-1}$ pur di variare convenientemente anche le altre variabili non cambia la forma del G_{21}, così ne viene, che a queste parti si può dare la forma normale come se quel G_{21} non ci fosse.

Se poi è $r\geq 8$ le parti sopra dette e le T_{il} $(i, l>9)$ saran del tipo

$$\left(\sum_1^{k_1}{}_{\lambda\mu}+\sum_{k_1+1}^{2k_1}{}_{\lambda\mu}\right)\; a_{\lambda\mu}\;(X_{\lambda\mu}+X_{k+\lambda,\,k+\mu}+X_{2k+\lambda,\,2k+\mu}+X_{3k+\lambda,\,3k+\mu})$$

per conseguenza conosciute le parti $\sum_1^{k_1}{}_{\lambda\mu}\; a_{\lambda\mu}\; S_{2\lambda-1,\,2\mu-1}$ saran conosciute tutte quelle rotazioni: d'altra parte siccome pur di variar convenientemente le altre variabili si può sulle $x_1, x_3, \ldots, x_{2k_1-1}$ fare qualunque sostituzione senza variare la forma delle $T_{il}f$ $(i, l=1, \ldots, 8)$ e della $T_{89}f$ così si potrà dare a queste parti una forma, che non dipende altro che da esse. Se dunque supponiamo di conoscere la forma dei gruppi con meno parametri di quelli del gruppo considerato la forma di queste parti è nota, e perciò lo è anche quella del gruppo considerato.

§ 11

Riassunto

91. Riassumiamo qui i risultati ottenuti precedentemente.

Relativamente alla composizione dei gruppi di rotazioni la questione è risolta completamente dal teorema seguente:

Ogni gruppo (reale) di rotazioni ha per rotazioni infinitesime quelle di varii sottogruppi (reali), tali che le rotazioni di uno qualunque di questi gruppi son permutabili con tutte quelle degli altri. Tali sottogruppi possono essere dei 4 tipi seguenti:

1.° Gruppi abeliani.

2.° $G_{\frac{r(r-1)}{2}}$ $(r \neq 4)$, *tali che prese convenientemente le rotazioni generatrici ed indicatele con* $R_{ik}f$ $(i, k = 1, \dots, r;\ i \neq k)$ $(R_{ik}f = -R_{ki}f)$ *il gruppo ha la composizione*

$$(R_{ik}\,R_{lm}) = 2\left\{-\varepsilon_{il}\,R_{km}f + \varepsilon_{im}\,R_{kl}f + \varepsilon_{kl}\,R_{im}f - \varepsilon_{km}\,R_{il}f\right\}$$

$$(i, k, l, m = 1, \dots, r;\ i \neq k;\ l \neq m).$$

3.° G_{r^2-1}, *tali che prese convenientemente le rotazioni generatrici del gruppo ed indicatele con* $R_{ik}f$, $R'_{ik}f$, $R''_{1k}f$ $(i, k = 1, \dots, r)$ $(R_{ik}f = -R_{ik}f;\ R'_{ik}f = R'_{ki}f)$, *e ponendo* $R''_{ik}f = R_{1k}f - R_{1i}f$ *il gruppo ha la composizione*

$$(R_{ik}\,R''_{ik}) = 2\,R'_{ik}f,\ (R''_{ik}\,R'_{ik}) = 2\,R_{ik}f,\ (R'_{ik}\,R_{ik}) = 2\,R''_{ik}f,\ (R''_{ik}\,R''_{lm}) = 0,$$

$$(R_{ik}\,R_{lm}) = -\varepsilon_{il}\,R_{km}f + \varepsilon_{im}\,R_{kl}f + \varepsilon_{kl}\,R_{im}f - \varepsilon_{km}\,R_{il}f,$$

$$(R_{ik}\,R'_{lm}) = -\varepsilon_{il}\,R'_{km}f + \varepsilon_{im}\,R'_{kl}f - \varepsilon_{kl}\,R'_{im}f + \varepsilon_{km}\,R'_{il}f,$$

$$(R'_{ik}\,R'_{lm}) = -\varepsilon_{il}\,R_{km}f - \varepsilon_{im}\,R_{kl}f - \varepsilon_{kl}\,R_{im}f - \varepsilon_{km}\,R_{il}f,$$

$$(R_{ik}\,R''_{lm}) = (\varepsilon_{il} - \varepsilon_{im} - \varepsilon_{kl} + \varepsilon_{km})\,R'_{ik}f,\ (R'_{ik}\,R''_{lm}) = (-\varepsilon_{il} + \varepsilon_{im} + \varepsilon_{kl} - \varepsilon_{km})\,R_{ik}f,$$

$$(i, k, l, m = 1, \dots, r;\ i \neq k;\ l \neq m).$$

4.º $G_{r(2r+1)}$, *tali che si posson prendere le rotazioni generatrici in modo che indicatele con* $R_{12}^{(i)}f$, $R_{23}^{(i)}f$, $R_{13}^{(i)}f$, $R_{p}^{(i\,l)}f$ $(p=1,2,3,4;$ $i, l=1,\dots,r;$ $i \neq l)$ $(R_p^{(i\,l)}f = -R_p^{(l\,i)}f)$ *il gruppo hà la composizione*

$$(R_{12}^{(i)}R_{23}^{(k)}) = 2\,\varepsilon_{ik}\,R_{13}^{(i)}f\,,\quad (R_{12}^{(i)}R_{13}^{(k)}) = -2\,\varepsilon_{ik}\,R_{23}^{(i)}f\,,\quad (R_{23}^{(i)}R_{13}^{(k)}) = 2\,\varepsilon_{ik}\,R_{12}^{(i)}f\,,$$

$$(R_{12}^{(k)}R_{1}^{(i\,l)}) = (\varepsilon_{ik}-\varepsilon_{lk})\,R_{2}^{(i\,l)}f\,,\quad (R_{23}^{(k)}R_{1}^{(i\,l)}) = (\varepsilon_{ik}-\varepsilon_{lk})\,R_{3}^{(i\,l)}f\,,$$
$$(R_{13}^{(k)}R_{1}^{(i\,l)}) = (\varepsilon_{ik}-\varepsilon_{lk})\,R_{4}^{(i\,l)}f,$$

$$(R_{12}^{(k)}R_{2}^{(i\,l)}) = -(\varepsilon_{ik}-\varepsilon_{lk})\,R_{1}^{(i\,l)}f\,,\quad (R_{23}^{(k)}R_{2}^{(i\,l)}) = -(\varepsilon_{ik}+\varepsilon_{lk})\,R_{4}^{(i\,l)}f\,,$$
$$(R_{13}^{(k)}R_{2}^{(i\,l)}) = (\varepsilon_{ik}+\varepsilon_{lk})\,R_{3}^{(i\,l)}f,$$

$$(R_{12}^{(k)}R_{3}^{(i\,l)}) = (\varepsilon_{ik}+\varepsilon_{lk})\,R_{4}^{(i\,l)}f\,,\quad (R_{23}^{(k)}R_{3}^{(i\,l)}) = -(\varepsilon_{ik}-\varepsilon_{lk})\,R_{1}^{(i\,l)}f\,,$$
$$(R_{13}^{(k)}R_{3}^{(i\,l)}) = -(\varepsilon_{ik}+\varepsilon_{lk})\,R_{2}^{(i\,l)}f,$$

$$(R_{12}^{(k)}R_{4}^{(i\,l)}) = -(\varepsilon_{ik}+\varepsilon_{lk})\,R_{3}^{(i\,l)}f\,,\quad (R_{23}^{(k)}R_{4}^{(i\,l)}) = (\varepsilon_{ik}+\varepsilon_{lk})\,R_{2}^{(i\,l)}f\,,$$
$$(R_{13}^{(k)}R_{4}^{(i\,l)}) = -(\varepsilon_{ik}-\varepsilon_{lk})\,R_{1}^{(i\,l)}f,$$

$$(R_{p}^{(i\,l)}R_{q}^{(m\,s)}) = 0\,,\quad (R_{p}^{(i\,l)}R_{p}^{(i\,m)}) = -R_{p}^{(l\,m)}f\,,\quad R_{1}^{(i\,l)}R_{p}^{(i\,m)}) = -R_{p}^{(l\,m)}f,$$

$$(R_{2}^{(i\,l)}R_{3}^{(i\,m)}) = R_{4}^{(l\,m)}f,\quad (R_{2}^{(i\,l)}R_{4}^{(i\,m)}) = -R_{3}^{(l\,m)}f,\quad (R_{3}^{(i\,l)}R_{4}^{(i\,m)}) = R_{2}^{(l\,m)}f$$

$$(R_{1}^{(i\,l)}R_{2}^{(i\,l)}) = R_{12}^{(i)}f - R_{12}^{(l)}f\,,\quad (R_{1}^{(i\,l)}R_{3}^{(i\,l)}) = R_{13}^{(i)}f - R_{13}^{(l)}f\,,$$
$$(R_{1}^{(i\,l)}R_{4}^{(i\,l)}) = R_{23}^{(i)}f - R_{23}^{(l)}f$$

$$(R_{2}^{(i\,l)}R_{3}^{(i\,l)}) = -R_{23}^{(i)}f - R_{23}^{(l)}f\,,\quad (R_{2}^{(i\,l)}R_{4}^{(i\,l)}) = R_{13}^{(i)}f + R_{13}^{(l)}f\,,$$
$$(R_{3}^{(i\,l)}R_{4}^{(i\,l)}) = -R_{12}^{(i)}f - R_{12}^{(l)}f$$

$$(k, i, l, m, s = 1,\dots,r\,;\ i \neq l \neq m \neq s\,;\ p, q = 1,\dots,4).$$

92. Quanto alla forma normale di questi gruppi di rotazioni nel caso, che il gruppo contenga uno solo dei sottogruppi indicati sopra abbiamo trovato che:

a) nel caso essa sia un G_s abeliano, indicatene le rotazioni generatrici con $R_i f$ $(i=1,\dots,s)$ si può dargli la forma

$$R_i f = \sum_{1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_{\lambda}\, a_{i\lambda}\, S_{2\lambda-1,2\lambda} \qquad (i=1,\dots,s)$$

essendo n il numero delle variabili.

b) nel caso sia invece un G_{r^2-1}, come quelli indicati sopra al n. 3, si può dargli la forma

$$R_{il}f = \sum_1^{2k}{}_{\lambda}\, S_{2(i-1)k+\lambda,\,2(l-1)k+\lambda}\,,$$

$$R'_{il}f = \sum_1^{k}{}_{\lambda}\, (S_{2(i-1)k+2\lambda-1,\,2(l-1)k+2\lambda} - S_{2(i-1)k+2\lambda,\,2(l-1)k+2\lambda-1})\,,$$

$$R''_{il}f = \sum_1^{k}{}_{\lambda}\, (S_{2(l-1)k+2\lambda-1,\,2(l-1)k+2\lambda} - S_{2(i-1)k+2\lambda-1,\,2(i-1)k+2\lambda})\,,$$

$$(i, l = 1, \ldots, r\,;\ i \neq l).$$

c) nel caso il gruppo sia un $G_{r(2r+1)}$ come quelli indicati sopra al n. 4, si può dargli la forma

$$R_{12}^{(i)}f = \sum_1^{2h}{}_{\lambda}\, S_{4(i-1)h+2\lambda-1,\,4(i-1)h+2\lambda}\,,$$

$$R_{23}^{(i)}f = \sum_1^{h}{}_{\lambda}\, (S_{4(i-1)h+4\lambda-3,\,4(i-1)h+4\lambda} + S_{4(i-1)h+4\lambda-2,\,4(i-1)h+4\lambda-1})\,,$$

$$R_{13}^{(i)}f = \sum_1^{h}{}_{\lambda}\, (S_{4(i-1)h+4\lambda-3,\,4(i-1)h+4\lambda-1} - S_{4(i-1)h+4\lambda-2,\,4(i-1)h+4\lambda})\,,$$

$$R_1^{(il)}f = \sum_1^{4h}{}_{\lambda}\, S_{4(i-1)h+\lambda,\,4(l-1)h+\lambda}\,,$$

$$R_2^{(il)}f = \sum_1^{2h}{}_{\lambda}\, (S_{4(i-1)h+2\lambda-1,\,4(l-1)h+2\lambda} - S_{4(i-1)h+2\lambda,\,4(l-1)h+2\lambda-1})\,,$$

$$R_3^{(il)}f = \sum_1^{h}{}_{\lambda}\, (S_{4(i-1)h+4\lambda-3,\,4(l-1)h+4\lambda-1} - S_{4(i-1)h+4\lambda-2,\,4(l-1)h+4\lambda} - S_{4(i-1)h+4\lambda-1,\,4(l-1)h+4\lambda-3} + S_{4(i-1)h+4\lambda,\,4(l-1)h+4\lambda-2})\,,$$

$$R_4^{(il)}f = \sum_1^{h}{}_{\lambda}\, (S_{4(i-1)h+4\lambda-3,\,4(l-1)h+4\lambda} + S_{4(i-1)h+4\lambda-2,\,4(l-1)h+4\lambda-1} - S_{4(i-1)h+4\lambda-1,\,4(l-1)h+4\lambda-2} - S_{4(i-1)h+4\lambda,\,4(l-1)h+4\lambda-3})\,,$$

$$(i, l = 1, \ldots, r\,;\ i \neq l).$$

d) nel caso, che il gruppo sia un $G_{\frac{r(r-1)}{2}}$ $(r \neq 4)$, come quelli indicati sopra nel n. 2, bisogna distinguere varii casi:

1.° Se $r=3$ al G_3 si può dare la forma

$$R_{12}f = \frac{1}{2}\left\{\sum_1^{p_1}{}_\lambda \sum_1^{u_\lambda}{}_i\, 2i \sum_1^{k_\lambda}{}_\mu\, Y^{(\lambda)}_{(i-1)k_\lambda+\mu,\,(i-1)k_\lambda+\mu} + \sum_{p_1+1}^{p_2}{}_\lambda \sum_0^{u_\lambda}{}_i\,(1+2i)\sum_1^{2k_\lambda}{}_\mu\, Y^{(\lambda)}_{2ik_\lambda+\mu,\,2ik_\lambda+\mu}\right.$$

$$R_{23}f = \sum_1^{p_1}{}_\lambda \sum_1^{k_\lambda}{}_\mu \left\{\sqrt{2u_\lambda(u_\lambda+1)}\; S^{(\lambda)}_{2\mu,\,2u_\lambda k_\lambda+\mu} + \right.$$

$$\left. + \sum_1^{u_\lambda-1}{}_i \sqrt{u_\lambda(u_\lambda+1)-i(i+1)}\; X^{(\lambda)}_{(i-1)k_\lambda+\mu,\,ik_\lambda+\mu}\right\} + \sum_{p_1+1}^{p_2}{}_\lambda \sum_1^{k\lambda}{}_\mu \left\{(u_\lambda+1)\, W^{(\lambda)}_{2\mu-1,\,2\mu} + \right.$$

$$\left. + \sum_0^{u_\lambda-1}{}_i \sqrt{(u_\lambda+1)^2-(i+1)^2}\; (X^{(\lambda)}_{2ik_\lambda+2\mu-1,\,2(i+1)k_\lambda+2\mu-1} + X^{(\lambda)}_{2ik_\lambda+2\mu,\,2(i+1)k_\lambda+2\mu})\right\},$$

$$R_{13}f = \sum_1^{p_1}{}_\lambda \sum_1^{k_\lambda}{}_\mu \left\{\sqrt{2u_\lambda(u_\lambda+1)}\; S^{(\lambda)}_{2\mu-1,\,2u_\lambda k_\lambda+\mu} - \sum_1^{u_\lambda-1}{}_i \sqrt{u_\lambda(u_\lambda+1)-i(i+1)}\; Y^{(\lambda)}_{(i-1)k_\lambda+\mu,\,ik_\lambda+\mu}\right.$$

$$+ \sum_{p_1+1}^{p_2}{}_\lambda \sum_1^{k_\lambda}{}_\mu \left\{(u_\lambda+1)\; Z^{(\lambda)}_{2\mu-1,\,2\mu} - \right.$$

$$\left. - \sum_0^{u_\lambda-1}{}_i \sqrt{(u_\lambda+1)^2-(i+1)^2}\; (Y^{(\lambda)}_{2ik_\lambda+2\mu-1,\,2(i+1)k_\lambda+2\mu} + Y_{2ik_\lambda+2\mu,\,2(i+1)k_\lambda+2\mu})\right\}.$$

2.° Se $r=5$ al G_{10} si può dare la forma

$$R_{12}f = 2\sum_1^{s}{}_\lambda\, S^{(1)}_{\lambda,\,s+\lambda} + \sum_1^{4k}{}_\lambda\, S^{(2)}_{2\lambda-1,\,2\lambda}\,, \quad R_{23}f = 2\sum_1^{s}{}_\lambda\, S^{(1)}_{s+\lambda,\,2s+\lambda} + \sum_1^{2k}{}_\lambda\, W^{(2)}_{2\lambda-1,\,2\lambda}\,,$$

$$R_{13}f = 2\sum_1^{s}{}_\lambda\, S^{(1)}_{\lambda,\,2s+\lambda} + \sum_1^{2k}{}_\lambda\, Z^{(2)}_{2\lambda-1,\,2\lambda}\,,$$

$$R_{24}f = 2\sum_1^{u+v}{}_\lambda\, S^{(1)}_{s+\lambda,\,3s+\lambda} + 2\sum_1^{u}{}_\lambda\,(S^{(1)}_{u+v+\lambda,\,2s+u+v+\lambda} - S^{(1)}_{2u+v+\lambda,\,2s+2v+v+\lambda}) +$$

$$+ \left(\sum_1^{k}{}_\lambda - \sum_{k+1}^{2k}{}_\lambda\right) Z^{(2)}_{2\lambda-1,\,2\lambda}\,,$$

$$R_{14}f = 2\sum_1^{u+v}{}_\lambda\, S^{(1)}_{\lambda,\,3s+\lambda} - 2\sum_1^{u}{}_\lambda\,(S^{(1)}_{s+u+v+\lambda,\,2s+u+v+\lambda} - S^{(1)}_{s+2u+v+\lambda,\,2s+2u+v+\lambda}) +$$

$$+ \left(-\sum_1^{k}{}_\lambda + \sum_{k+1}^{2k}{}_\lambda\right) W^{(2)}_{2\lambda-1,\,2\lambda}\,,$$

$$\mathrm{R}_{34}f = 2\sum_1^{u+v}{}_\lambda\ \mathrm{S}^{(1)}_{2s+\lambda,\,3s+\lambda} - 2\sum_1^{u}{}_\lambda\ (\mathrm{S}^{(1)}_{u+v+\lambda,\,s+u+v+\lambda} - \mathrm{S}^{(1)}_{2u+v+\lambda,\,s+2u+v+\lambda}) +$$
$$+\left(-\sum_1^{2k}{}_\lambda + \sum_{2k+1}^{4k}{}_\lambda\right)\mathrm{S}^{(2)}_{2\lambda-1,\,2\lambda}\,,$$

$$\mathrm{R}_{25}f = 2\sum_1^{v}{}_\lambda\ \mathrm{S}^{(1)}_{s+\lambda,\,3s+u+v+\lambda} + \sqrt{2}\sum_1^{u}{}_\lambda\ (\mathrm{S}^{(1)}_{s+v+u+\lambda,\,3s+v+\lambda} - \mathrm{S}^{(1)}_{v+\lambda,\,2s+v+u+\lambda} -$$
$$- \mathrm{S}^{(1)}_{v+u+\lambda,\,2s+v+\lambda} + \mathrm{S}^{(1)}_{s+v+2u+\lambda,\,3s+v+\lambda} + \mathrm{S}^{(1)}_{v+\lambda,\,2s+v+2u+\lambda} + \mathrm{S}^{(1)}_{v+2u+\lambda,\,2s+v+\lambda}) +$$
$$+ \sum_1^{k}{}_\lambda\ (\mathrm{W}^{(2)}_{2\lambda-1,\,2k+2\lambda-1} - \mathrm{W}^{(2)}_{2\lambda,\,2k+2\lambda})\,,$$

$$\mathrm{R}_{15}f = 2\sum_1^{v}{}_\lambda\ \mathrm{S}^{(1)}_{\lambda,\,3s+u+v+\lambda} + \sqrt{2}\sum_1^{u}{}_\lambda\ (\mathrm{S}^{(1)}_{v+u+\lambda,\,3s+v+\lambda} - \mathrm{S}^{(1)}_{s+v+\lambda,\,2s+v+u+\lambda} +$$
$$+ \mathrm{S}^{(1)}_{s+v+u+\lambda,\,2s+v+\lambda} + \mathrm{S}^{(1)}_{v+2u+\lambda,\,3s+v+\lambda} - \mathrm{S}^{(1)}_{s+v+\lambda,\,2s+v+2u+\lambda} - \mathrm{S}^{(1)}_{s+v+2u+\lambda,\,2s+v+\lambda}) +$$
$$+ \sum_1^{k_1}{}_\lambda\ (\mathrm{Z}^{(2)}_{2\lambda-1,\,2k+2\lambda-1} - \mathrm{Z}^{(2)}_{2\lambda,\,2k+2\lambda})\,,$$

$$\mathrm{R}_{35}f = 2\sum_1^{v}{}_\lambda\ \mathrm{S}_{2s+\lambda,\,3s+u+v+\lambda} + \sqrt{2}\sum_1^{u}{}_\lambda\ (\mathrm{S}^{(1)}_{2s+v+u+\lambda,\,3s+v+\lambda} + \mathrm{S}^{(1)}_{v+u+\lambda,\,s+v+\lambda} +$$
$$+ \mathrm{S}^{(1)}_{v+\lambda,\,s+v+u+\lambda} + \mathrm{S}^{(1)}_{2s+v+2u+\lambda,\,3s+v+\lambda} - \mathrm{S}^{(1)}_{v+2u+\lambda,\,s+v+\lambda} - \mathrm{S}^{(1)}_{v+\lambda,\,s+v+2u+\lambda}) -$$
$$- \sum_1^{k}{}_\lambda\ (\mathrm{X}^{(2)}_{2\lambda-1,\,2k+2\lambda} + \mathrm{X}^{(2)}_{2\lambda,\,2k+2\lambda-1})\,,$$

$$\mathrm{R}_{45}f = 2\sum_1^{v}{}_\lambda\ \mathrm{S}_{3s+\lambda,\,3s+u+v+\lambda} + \sqrt{2}\sum_1^{u}{}_\lambda\ (\mathrm{S}^{(1)}_{v+\lambda,\,v+u+\lambda} + \mathrm{S}^{(1)}_{s+v+\lambda,\,s+v+u+\lambda} +$$
$$+ \mathrm{S}^{(1)}_{2s+v+\lambda,\,2s+v+u+\lambda} + \mathrm{S}^{(1)}_{v+\lambda,\,v+2u+\lambda} + \mathrm{S}^{(1)}_{s+v+\lambda,\,s+v+2u+\lambda} + \mathrm{S}^{(1)}_{2s+v+\lambda,\,2s+v+2u+\lambda}) -$$
$$- \sum_1^{k}{}_\lambda\ (\mathrm{Y}^{(2)}_{2\lambda-1,\,2k+2\lambda} + \mathrm{Y}^{(2)}_{2\lambda,\,2k+2\lambda-1})\,.$$

3.º Infine se $r > 5$, si può porre

$$\mathrm{R}_{il}f = \mathrm{S}_{il}f + \mathrm{T}_{il}f \quad (i, l = 1, \ldots, r;\ i \neq l)$$

e poi dare alle $S_{il}f$ la forma

$$S_{il}f=\sum_1^s{}_\lambda\ S^{(1)}_{(i-1)s+\lambda,\,(l-1)s+\lambda}\qquad (i,\,l=1\,,\dots,r\,;\ i\neq l).$$

Quanto alle $T_{il}f$, se è $\frac{r\,(r-1)}{2}=8s+u$ con $1\leq u\leq 8$, si può intanto porre

$$T_{12}f=\sum_1^{k_1}{}_\lambda\ \sum_0^7{}_l\ S_{2lk_1+\lambda,\,(2l+1)k_1+\lambda}\,,$$

$$T_{8t+1,8t+2}f=\sum_1^{k_{t+1}}{}_\lambda\ \sum_0^{15}{}_{i_1,\dots,i_{t-1}}\left(\sum_0^7{}_{i_t}-\sum_8^{15}{}_{i_t}\right)\sum_0^7{}_l$$
$$S_{i_1k_1+\dots+i_tk_t+2lk_{t+1}+\lambda,\ i_1k_1+\dots+i_tk_t+(2l+1)k_{t+1}+\lambda}\,,$$
$$(t=1\,,\,\dots\,,\,s-1)$$

$$T_{8t+3,8t+4}f=\sum_1^{k_{t+1}}{}_\lambda\ \sum_0^{15}{}_{i_1,\dots,i_t}\ \sum_0^3{}_l\ \sum_0^1{}_{l_1}$$
$$(-1)^{l+1}\ S_{i_1k_1+\dots+i_tk_t+(4l+2l_1)k_{t+1}+\lambda,\ i_1k_1+\dots+i_tk_t+(4l+2l_1+1)k_{t+1}+\lambda}\,,$$

$$T_{8t+5,8t+6}f=\sum_1^{k_{t+1}}{}_\lambda\ \sum_0^{15}{}_{i_1,\dots,i_t}\ \sum_0^7{}_l$$
$$(-1)^l\ S_{i_1k_1+\dots+i_tk_t+2lk_{t+1}+\lambda,\ i_1k_1+\dots+i_tk_t+(2l+1)k_{t+1}+\lambda}\,,$$

$$T_{8t+7,8t+8}f=\sum_1^{k_{t+1}}{}_\lambda\ \sum_0^{15}{}_{i_1,\dots,i_t}\ \sum_0^1{}_{l,\,l_1,\,l_2}$$
$$(-1)^{l+l_1+l_2}S_{i_1k_1+\dots+i_tk_t+(8l+4l_1+2l_2)k_{t+1}+\lambda,\ i_1k_1+\dots+i_tk_t+(8l+4l_1+2l_2+1)k_{t+1}+\lambda}\,,$$

$$T_{8t+1,8t+3}f=\sum_1^{k_{t+1}}{}_\lambda\ \sum_0^{15}{}_{i_1,\dots,i_t}\ \sum_0^3{}_l\ \sum_0^1{}_{l_1}$$
$$(-1)^{l+l_1+1}\ S_{i_1k_1+\dots+i_tk_t+(4l+l_1)k_{t+1}+\lambda,\ i_1k_1+\dots+i_tk_t+(4l+l_1+2)k_{t+1}+\lambda}\,,$$

$$T_{8t+3,8t+5}f=\sum_1^{k_{t+1}}{}_\lambda\ \sum_0^{15}{}_{i_1,\dots,i_t}\ \sum_0^1{}_{l,\,l_1,\,l_2}$$
$$(-1)^{l_2+1}\ S_{i_1k_1+\dots+i_tk_t+(8l+l_1+2l_2)k_{t+1}+\lambda,\ i_1k_1+\dots+i_tk_t+(8l+l_1-2l_2+6)k_{t+1}+\lambda}\,,$$

$$T_{8t+5,8t+7}f = \sum_{1}^{k_{t+1}}\lambda \sum_{0}^{15}{}_{i_1,\dots,i_t} \sum_{0}^{3}{}_l \sum_{0}^{1}{}_{l_1}$$
$$(-1)^{l+1}\, S_{i_1k_1+\dots+i_tk_t+(4l+l_1)k_{t+1}+\lambda,\; i_1k_1+\dots+i_tk_t+(4l+l_1+2)k_{t+1}+\lambda}\,,$$

$$T_{8t+8,8t+9}f = \sum_{1}^{k_{t+1}}\lambda \sum_{0}^{15}{}_{i_1,\dots,i_t} \sum_{0}^{7}{}_l$$
$$S_{i_1k_1+\dots+i_tk_t+lk_{t+1}+\lambda,\; i_1k_1+\dots+i_tk_t+(l+8)k_{t+1}+\lambda}\,,$$
$$(t=0\,,\dots,\,s-1)$$

dove
$$k_{t-1} = 16\,k_t \quad (t=1\,,\dots,\,s-1).$$

Da queste si ricavano, con le alternate, tutte le $T_{ik}f$ $(i,k \leq 8s)$: bisogna ora distinguere varii casi a seconda del valore di u.

α) Se $u=1$ il gruppo è già determinato.

β) Se $u=2$ si ha inoltre

$$T_{8s+1,8s+2}f = \sum_{1}^{k_{s+1}}\lambda \sum_{0}^{15}{}_{i_1,\dots,i_{s-1}} \left(\sum_{0}^{7}{}_{i_s} - \sum_{8}^{15}{}_{i_s}\right)$$
$$S_{i_1k_1+\dots+i_sk_s+\lambda,\; i_1k_1+\dots+i_sk_s+k_{s+1}+\lambda} \quad (k_s = k_{s+1})\,.$$

γ) Se $u=3$ si ha invece

$$T_{8s+1,8s+2}f = \sum_{1}^{2k_{s+1}}\lambda \sum_{0}^{15}{}_{i_1,\dots,i_{s-1}} \left(\sum_{0}^{7}{}_{i_s} - \sum_{8}^{15}{}_{i_s}\right)$$
$$S_{i_1k_1+\dots+i_sk_s+\lambda,\; i_1k_1+\dots+i_sk_s+2k_{s+1}+\lambda}\,,$$

$$T_{8s+2,8s+3}f = \sum_{1}^{k_{s+1}}\lambda \sum_{0}^{15}{}_{i_1,\dots,i_s} \sum_{0}^{1}{}_l$$
$$(-1)^l\, S_{i_1k_1+\dots+i_sk_s+lk_{s+1}+\lambda,\; i_1k_1+\dots+i_sk_s+(l+2)k_{s+1}+\lambda}\,,$$
$$(k_s = 4k_{s+1})$$

δ) Se $u=4$ si hanno le due precedenti ed inoltre

$$T_{8s+3,8s+4}f = \left(\sum_{1}^{2k_{s+2}}\lambda - \sum_{2k_{s+2}+1}^{2k_{s+1}}\lambda\right) \sum_{0}^{15}{}_{i_1,\dots,i_s}$$
$$S_{i_1k_1+\dots+i_sk_s+\lambda,\; i_1k_1+\dots+i_sk_s+2k_{s+1}+\lambda}\,\cdot$$
$$(k_{s+2} \leq k_{s+1})$$

ε) Il caso di $u=5$, si ha dal seguente di $u=6$, tralasciando la $T_{8s+5,8s+6}f$.

ξ) Nel caso di $u=6$ si hanno oltre le solite anche le seguenti

$$T_{8s+1,8s+2}f=\sum_{1}^{k_{s+1}}\lambda\sum_{0}^{15}{}_{i_1,\dots,i_{s-1}}\left(\sum_{0}^{7}{}_{i_s}-\sum_{8}^{15}{}_{i_s}\right)\sum_{0}^{3}{}_{l}$$
$$S_{i_1k_1+\dots+i_sk_s+2lk_{s+1}+\lambda,\ i_1k_1+\dots+i_sk_s+(2l_s+1)k_{s+1}+\lambda}\ ,$$

$$T_{8s+3,8s+4}f=\sum_{1}^{k_{s+1}}\lambda\sum_{0}^{15}{}_{i_1,\dots,i_s}\sum_{0}^{1}{}_{l,l_1}$$
$$(-1)^{l+1}S_{i_1k_1+\dots+i_sk_s+(4l+2l_1)k_{s+1}+\lambda,\ i_1k_1+\dots+i_sk_s+(4l+2l_1+1)k_{s+1}+\lambda}\ ,$$

$$T_{8s+5,8s+6}f=\sum_{1}^{k_{s+1}}\lambda\sum_{0}^{15}{}_{i_1,\dots,i_s}\sum_{0}^{3}{}_{l}$$
$$(-1)^{l}\ S_{i_1k_1+\dots+i_sk_s+lk_{s+1}+\lambda,\ i_1k_1+\dots+i_sk_s+(l+1)k_{s+1}+\lambda}\ ,$$

$$T_{8s+1,8s+3}f=\sum_{1}^{k_{s+1}}\lambda\sum_{0}^{15}{}_{i_1,\dots,i_s}\sum_{0}^{1}{}_{l,l_1}$$
$$(-1)^{l+l_1+1}\ S_{i_1k_1+\dots+i_sk_s+(4l+l_1)k_{s+1}+\lambda,\ i_1k_1+\dots+i_sk_s+(4l+l_1+2)k_{s+1}+\lambda}\ ,$$

$$T_{8s+3,8s+5}f=\sum_{1}^{k_{s+1}}\lambda\sum_{0}^{15}{}_{i_1,\dots,i_s}\sum_{0}^{1}{}_{l,l_1}$$
$$(-1)^{l_1+1}\ S_{i_1k_1+\dots+i_sk_s+(l+2l_1)k_{s+1}+\lambda,\ i_1k_1+\dots+i_sk_s+(l_1-2l_2+6)k_{s+1}+\lambda}\ ,$$

con $k_s=8k_{s+1}$.

ζ) Se $u=7$ si ha oltre queste, anche l'altra

$$T_{8s+5,8s+7}f=\sum_{1}^{k_{s+1}}\lambda\sum_{0}^{15}{}_{i_1,\dots,i_s}\sum_{0}^{1}{}_{l,l_1}$$
$$(-1)^{l+1}\ S_{i_1k_1+\dots+i_sk_s+(4l+l_1)k_{s+1}+\lambda,\ i_1k_1+\dots+i_sk_s+(4l+l_1+2)k_{s+1}+2}\ ,$$

η) Infine se $u=8$ oltre queste si ha anche l'altra

$$T_{8s+7,8s+8}f=\left(\sum_{1}^{k_{s+2}}\lambda-\sum_{k_{s+2}+1}^{k_{s+1}}\lambda\right)\sum_{0}^{15}{}_{i_1,\dots,i_s}\sum_{0}^{1}{}_{l,l_1}$$
$$(-1)^{l+l_1}\ S_{i_1k_1+\dots+i_sk_s+(4l+2l_1)k_{s+1}+\lambda,\ i_1k_1+\dots+i_sk_s+(4l+2l_1+1)k_{s+1}+\lambda}\ .$$
$$(k_{s+2}\leq k_{s+1})$$

Esaurito così il caso, che il gruppo contenga un solo sottogruppo di quelli di cui al numero precedente, tralasciamo il caso più generale, questo dando luogo a numerosissimi sottocasi, che non sarebbe facile numerare tutti, finchè n è indeterminato: rimandiamo per essi a quel che abbiamo visto ai nn. 58-63, 68, 75, 88-90.

93. Come esempio diamo qui i gruppi di rotazioni su $n \leq 6$ variabili.

Per $n=2$ si ha il solo $G_1 \equiv S_{12}$; per $n=3$ si ha quel G_1, ed il $G_3 \equiv (S_{12}, S_{23}, S_{13})$.

Per $n=4$ si hanno i seguenti

1) Il $G_1 \equiv a S_{12} + b S_{34}$, 2) il $G_2 \equiv (S_{12}, S_{34})$, 3) il $G_3 \equiv (S_{12}, S_{13}, S_{23})$, 4) il $G_3 \equiv (S_{12}+S_{34}, S_{13}-S_{24}, S_{14}+S_{23})$, 5) il $G_4 \equiv (S_{12}+S_{34}, S_{13}-S_{24}, S_{14}+S_{23}, S_{12}-S_{34})$, 6) il $G_6 \equiv (S_{ik}, i, k=1, \ldots, 4)$.

Per $n=5$ oltre i precedenti si hanno gli altri

7) il $G_3 \equiv (S_{12}+2S_{34}, \sqrt{3}\, S_{25}+S_{12}+S_{24}, \sqrt{3}\, S_{15}-S_{14}+S_{23})$

8) il $G_4 \equiv (S_{12}, S_{13}, S_{23}, S_{45})$

9) il $G_{10} \equiv \big(S_{ik}, (i, k=1, \ldots, 5; i \neq k)\big)$.

Per $n=6$ oltre i gruppi ultimamente numerati dal 3 al 7 e 9 van messi gli altri

1') il $G_1 \equiv (a S_{12}+b S_{34}+c S_{56})$, 2') il $G_2 \equiv (a_1 S_{12}+b_1 S_{34}, a_2 S_{12}+b_2 S_{56})$

10) il $G_3 \equiv (S_{12}, S_{34}, S_{56})$, 11) il $G_3 \equiv (S_{12}+S_{34}, S_{25}+S_{46}, S_{15}+S_{36})$

8') il $G_4 \equiv (S_{12}+S_{34}, S_{13}-S_{24}, S_{14}+S_{23}, a(S_{12}-S_{34})+b S_{56})$

12) il $G_4 \equiv (S_{12}+S_{34}, S_{25}+S_{46}, S_{15}+S_{36}, S_{13}+S_{24}+S_{56})$

13) il $G_5 \equiv (S_{12}+S_{34}, S_{13}-S_{24}, S_{14}+S_{23}, S_{12}-S_{34}, S_{56})$

14) il $G_6 \equiv (S_{12}, S_{13}, S_{23}, S_{45}, S_{56}, S_{46})$

15) il $G_7 \equiv (S_{12}, S_{13}, S_{23}, S_{14}, S_{24}, S_{34}, S_{56})$

16) il $G_8 \equiv (S_{13}+S_{24}, S_{15}+S_{26}, S_{35}+S_{46}, S_{14}-S_{23}, S_{16}-S_{25}, S_{36}-S_{45}, S_{12}-S_{34}, S_{12}-S_{56})$

17) il $G_9 \equiv$ (il G_8 precedente e la rotazione $S_{12}+S_{34}+S_{56}$)

18) il $G_{15} \equiv (S_{ik}\ (i, k=1, \ldots, 6; i \neq k))$.

Se si considerano solo sostituzioni ortogonali a determinante $+1$ (cfr. n. 3) ai gruppi, che abbiamo trovato bisogna aggiungere nel caso di $n=4$ il $G_3 \equiv (S_{12} - S_{34}, S_{24} + S_{13}, S_{14} - S_{23})$ ed il G_4 che ha per rotazioni quelle del precedente G_3 e la $S_{12} + S_{34}$.