ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

CESARE FIBBI

Sulle superficie che contengono un sistema di geodetiche a torsione costante

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 5 (1888), p. 77-164

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1888_1_5__77_0>

SULLE

SUPERFICIE CHE CONTENGONO UN SISTEMA DI GEODETICHE

A TORSIONE COSTANTE

Il prof. Bianchi nella sua Memoria « *Sopra i sistemi tripli ortogonali di Weingarten* » (*), quelli cioè che contengono un sistema di superficie Σ a curvatura costante, osserva in una Nota in fondo al lavoro che se il sistema è a curvatura negativa, ossia se le superficie Σ sono pseudosferiche « le curve C, traiettorie ortogonali del « sistema Σ, uscenti dai punti di una assintotica, hanno « per luogo una superficie S, le cui intersezioni L colle « superficie pseudosferiche Σ, sono assintotiche per le Σ, « e quindi geodetiche per la S », la quale quindi ha un sistema di geodetiche a torsione costante.

Io mi sono proposto in generale lo studio di quella classe di *superficie che hanno un sistema di geodetiche a torsione costante* e che ho chiamato *superficie assintotiche dei sistemi tripli ortogonali di Weingarten*.

(*) Annali di Matematica pura e applicata. Serie II. Tomo XIII.

Però, volendo far questo studio indipendentemente dalla teoria dei sistemi di Weingarten, son partito dalle formole di Codazzi, e da principio, proponendomi la ricerca di quelle superficie più generali, nelle quali, pur esistendo un sistema di geodetiche a torsione costante, questa non è la stessa per ciascuna di esse individualmente considerata, ma varia dall'una all'altra con legge di continuità, ho trovato che esse dipendono da una funzione di due variabili, che soddisfa un' equazione alle derivate parziali del 4.° ordine (*). Queste superficie sono suscettibili di una trasformazione geometrica, la quale potendosi ottenere colla stessa costruzione con cui si trasformano i sistemi di Weingarten (**), ho chiamato, come si fa per essi, *trasformazione di Bäcklund*,

Le superficie trasformate dipendono dall' integrazione di una equazione a differenziali totali (***), che soddisfa alla condizione d' integrabilità, e da una superficie nota se ne possono dedurre, con questa trasformazione, un sistema ∞^2 della medesima specie.

Stabilita così la teoria di queste superficie e della loro trasformazione, i risultati analoghi per quelle superficie che più particolarmente ho chiamato *assintotiche*, si ottengono con tutta facilità, supponendo costante ($=1$) e la stessa per tutte la torsione delle geodetiche del sistema.

Ho studiato poi più particolarmente quelle superficie

(*) §. 2, n.° 3 equazione (9).

(**) L. Bianchi. Memoria citata; §. 9.

(***) §. 3, n.° 5, equazione (13').

assintotiche in cui le traiettorie ortogonali delle geodetiche a torsione costante sono tutti circoli dello stesso raggio, superficie che furono date la prima volta dal prof. Bianchi in una Nota « *Sulle curve a doppia curvatura* » (*) e che ho chiamato *superficie assintotico-cicliche;* e poi quelle più generali in cui le suddette linee, senza ridursi a circoli dello stesso raggio, sono curve a doppia curvatura tutte colla stessa flessione costante, e le ho chiamate *superficie assintotico-ipercicliche.*

Delle superficie assintotico-cicliche mi sono quindi servito per dare una interpretazione geometrica molto semplice della trasformazione di Bäcklund nel caso speciale che essa si riduca alla *trasformazione complementare*.

Finalmente ho dimostrato che le superficie assintotiche dei sistemi di Weingarten sono le superficie più generali possibili, che contengano un sistema di geodetiche a torsione costante.

(*) Giornale di Battaglini; anno 1883.

§. 1.

Formole generali della teoria delle superficie.

1. Siano

$$x=x\,(u\,,\,v)\quad,\quad y=y\,(u\,,\,v)\quad,\quad z=z\,(u\,,\,v)$$

le equazioni di una superficie S riferita ad un doppio sistema di linee coordinate ortogonali $u=\text{cost}$, $v=\text{cost}$, di guisa che il quadrato del suo elemento lineare prenda la forma

$$(1)\qquad ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2,$$

essendo

$$\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = \mathrm{E}\ ,\ \sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0\ ,\ \sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = \mathrm{G}.$$

I coseni di direzione X, Y, Z della normale alla superficie e quelli delle tangenti alle linee coordinate sono fra loro legati dalla relazione

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial x}{\partial v}\ , & \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial y}{\partial v}\ , & \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial x}{\partial u}\ , & \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial y}{\partial u}\ , & \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial z}{\partial u} \\ \mathrm{X}\ , & \mathrm{Y}\ , & \mathrm{Z} \end{vmatrix} = 1$$

dove il determinante gode della proprietà che ogni suo elemento è uguale al reciproco corrispondente. Pongasi inoltre

$$(2)\qquad D=\sum X\frac{\partial^2 x}{\partial u^2},\ D'=\sum X\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v},\ D''=\sum X\frac{\partial^2 x}{\partial v^2};$$

da cui segue ancora, derivando le identità

$$\sum X\frac{\partial x}{\partial u}=0\quad,\quad \sum X\frac{\partial x}{\partial v}=0,$$

che si può scrivere

$$(2')\quad D=-\sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}\ ,\ D'=-\sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}=-\sum\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u},$$
$$D''=-\sum\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Le cinque quantità E, G, D, D', D'' sono funzioni di u, v che non si possono prendere tutte ad arbitrio per una qualunque superficie S, ma fra esse devono sussistere le tre seguenti relazioni conosciute sotto il nome di *formole di Codazzi:*

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{\sqrt{G}}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'}{\sqrt{G}}\right)-\frac{D'}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}-\frac{D}{E}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}=0,\\&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\right)-\frac{D'}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}-\frac{D''}{G}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=0,\\&\frac{D'^2-DD''}{\sqrt{EG}}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right).\end{aligned}\right.$$

Viceversa, se queste tre equazioni sono soddisfatte, esiste una superficie S il cui elemento lineare riferito alle linee u=cost , v=cost prende la forma (1), e le quantità D , D′ , D″ sono date dalle (2) o (2′), e questa superficie è perfettamente determinata a meno di movimenti nello spazio.

2. Le funzioni x, y, z, X, Y, Z delle variabili u, v devono poi soddisfare alle equazioni

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right)=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{D}{\sqrt{E}}X,\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\right)=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{D'}{\sqrt{G}}X,\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\right)=-\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{D''}{\sqrt{G}}X,\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right)=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{D'}{\sqrt{E}}X,\\
&\frac{\partial X}{\partial u}=-\frac{D}{\sqrt{E}}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{D'}{\sqrt{G}}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v},\\
&\frac{\partial X}{\partial v}=-\frac{D''}{\sqrt{G}}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{D'}{\sqrt{E}}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u};
\end{aligned}\right.$$

e alle altre che si ottengono cambiando x in y e in z, X in Y e in Z.

Se si indica con $\frac{1}{r_1}$ la curvatura geodetica, con $\frac{1}{R_1}$ la curvatura normale, con $\frac{1}{\rho_1}$ la curvatura assoluta della linea u=cost e con ω_1 l' angolo che il suo piano osculatore forma col piano tangente alla superficie, si ha

$$(5)\quad \frac{1}{r_1}=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}=\frac{\cos\omega}{\rho_1}\ ,\ \frac{1}{R_1}=\frac{D''}{G}=\frac{\operatorname{sen}\omega_1}{\rho_1}$$

da cui

$$(6)\quad \frac{1}{\rho_1^2}=\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{R_1^2}=\left(\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{D''}{G}\right)^2.$$

Le stesse notazioni adoperando per la linea $v=\text{cost}$ si avrà

$$(5')\quad \frac{1}{r_2}=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=\frac{\cos\omega_2}{\rho_2}\ ,\ \frac{1}{R_2}=\frac{D}{E}=\frac{\operatorname{sen}\omega_2}{\rho_2}.$$

e quindi

$$(6')\quad \frac{1}{\rho_2^2}=\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{R_2^2}=\left(\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{D}{E}\right)^2.$$

Se inoltre $\frac{1}{T_1}$ e $\frac{1}{T_2}$ indicano rispettivamente la torsione delle linee $u=\text{cost}$, $v=\text{cost}$, si ha

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{T_1}&=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{G}{D''}\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)-\frac{D'}{\sqrt{EG}}\\ \frac{1}{T_2}&=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{E}{D}\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)+\frac{D'}{\sqrt{EG}}\,;\end{aligned}\right.$$

le quali, se si pone $ds_1=\sqrt{G}\,dv$, $ds_2=\sqrt{E}\,du$ e s' indica rispettivamente con σ_1 e σ_2 gli angoli che le normali principali delle linee $u=\text{cost}$, $v=\text{cost}$ formano colla normale alla superficie, possono anche scriversi

$$(7')\begin{cases} \dfrac{1}{T_1}=\dfrac{d}{ds_1}\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{R_1}{r_1}\right)-\dfrac{D'}{\sqrt{EG}}=\dfrac{d\sigma_1}{ds_1}-\dfrac{D'}{\sqrt{EG}}=-\dfrac{d\omega_1}{ds_1}-\dfrac{D'}{\sqrt{EG}} \\ \dfrac{1}{T_2}=-\dfrac{d}{ds_2}\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{R_2}{r_2}\right)+\dfrac{D'}{\sqrt{EG}}=-\dfrac{d\sigma_2}{ds_2}+\dfrac{D'}{\sqrt{EG}}=\dfrac{d\omega_2}{ds_2}+\dfrac{D'}{\sqrt{EG}} \end{cases}$$

giacchè $\omega_1+\sigma_1=\omega_2+\sigma_2=\dfrac{\pi}{2}$.

§. 2.

Superficie che contengono un sistema di geodetiche colla torsione costante.

3. Supponiamo che la superficie S definita dalla forma (1) dell'elemento lineare e dalle quantità D , D' , D" sia tale che le linee $v=\text{cost}$ siano geodetiche e per ciascuna di esse, individualmente considerata, la torsione sia costante, ma varii con continuità dall' una geodetica all' altra .

Per avere le formole relative a questa classe di superficie, bisognerà porre $E=1$, con che la seconda delle (7) diventa

$$\frac{D'}{\sqrt{G}}=\frac{1}{T_2}$$

dove T_2 è una funzione della sola v che supporremo finita e continua insieme alla sua derivata prima. Facendo queste sostituzioni nelle formole di Codazzi, esse si riducono alle seguenti:

$$(3') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{\sqrt{G}}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{T_2}\right) - D' \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial D}{\partial v} - 2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{T_2}\right) = 0, \\ \frac{G}{T_2^{\,2}} - D\,D'' = \sqrt{G}\,\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}. \end{aligned} \right.$$

La seconda di queste equazioni ci dice intanto che l'espressione $D\,du + \frac{2\sqrt{G}}{T_2}dv$ è un differenziale esatto, poniamo

$$D\,du + \frac{2\sqrt{G}}{T_2}d\,v = 2\,d\,\varphi$$

ossia

$$D = 2\,\frac{\partial \varphi}{\partial u}\ , \quad \sqrt{G} = T_2\,\frac{\partial \varphi}{\partial v}\ ;$$

con questi valori la prima delle (3'), moltiplicata per $\frac{1}{T_2}$, diventa

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{T_2\sqrt{G}}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{2\,T_2^{\,2}} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2\right);$$

si potrà quindi porre

$$D'' = T_2^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial v}, \quad \frac{1}{2\,T_2^2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 = \frac{\partial \psi}{\partial u}.$$

e allora dalla terza delle (3′) si ricava

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{\frac{1}{T_2^2} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial u^2 \partial v}}{2 \frac{\partial \varphi}{\partial u}};$$

eguagliando finalmente i due valori che così si ottengono per $\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}$, si trova che la funzione φ deve soddisfare alla seguente equazione alle derivate parziali del 4.° ordine

$$\frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{1}{2T_2^2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 \right\} = \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\frac{1}{T_2^2} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial u^2 \partial v}}{2 \frac{\partial \varphi}{\partial u}} \right\}.$$

Abbiamo quindi il risultato:

Se S *è una superficie con un sistema di geodetiche a torsione costante* $= \frac{1}{T_2}$, *essendo* T_2 *una funzione della sola* v, *il quadrato del suo elemento lineare riferito alle geodetiche* v *a torsione costante e alle loro traiettorie ortogonali, e le quantità* D, D′, D″ *sono dati dalle formole*

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} & ds^2 = du^2 + T_2^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 dv^2 \\ & D = 2\frac{\partial \varphi}{\partial u}\,,\ D' = \frac{\partial \varphi}{\partial v}\,,\ D'' = T_2^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v}\left\{\frac{\dfrac{1}{T_2^2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - \dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial u^2 \partial v}}{2\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}}\right\}, \end{aligned}\right.$$

essendo φ *una funzione di* u *e* v *che soddisfa all'equazione alle derivate parziali del* 4.° *ordine*

$$(9)\qquad \frac{\partial}{\partial v}\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{2T_2^2}\right\} = \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\dfrac{1}{T_2^2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - \dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial u^2 \partial v}}{2\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}}\right\}$$

Viceversa, se supponiamo che la funzione φ soddisfi la (9) e che si abbiano le (8), le tre equazioni fondamentali di Codazzi saranno soddisfatte e quindi:

Ad ogni funzione φ *di* u *e* v *che soddisfa la* (9), *corrisponde una ed una sola superficie con un sistema di geodetiche a torsione costante, per la quale si hanno le formole* (8) *che ci forniscono il quadrato del suo elemento lineare e le quantità* D , D' , D''.

Osserviamo ancora che per la superficie S si hanno le formole

$$
(10)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = 2\frac{\partial \varphi}{\partial u} X, \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{T_2}\frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}}\right) = \frac{X}{T_2},\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{T_2}\frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}}\right) = -T_2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + T_2\left\{\frac{\frac{1}{T_2^2}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial u^2\, \partial v}}{2\frac{\partial \varphi}{\partial u}}\right\} X,\\
&\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v}}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} X,\\
&\frac{\partial X}{\partial u} = -2\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{1}{T_2^2}\frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}},\\
&\frac{\partial X}{\partial v} = -\frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}}\left\{\frac{\frac{1}{T_2^2}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial u^2\, \partial v}}{2\frac{\partial \varphi}{\partial u}}\right\}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u},\\
&\frac{1}{r_1} = -\frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v}}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}}, \quad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}}\left\{\frac{\frac{1}{T_2^2}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial u^2\, \partial v}}{2\frac{\partial \varphi}{\partial u}}\right\},\\
&\frac{1}{\rho_1^2} = \frac{1}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2}\left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}\right)^2 + \left\{\frac{\frac{1}{T_2^2}\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial u^2\, \partial v}}{2\frac{\partial \varphi}{\partial v}}\right\}\right]\\
&\frac{1}{r_2} = 0, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{\rho_2} = 2\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad \frac{1}{T_1} = -\frac{1}{T_2}\left(\frac{\frac{\partial \omega_1}{\partial v}}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}} + 1\right).
\end{aligned}
\right.
$$

4. Per mostrare almeno con un esempio l' effettiva esistenza di questa classe di superficie, supponiamo di partire dalla curva definita dalle equazioni

$$x=\frac{\cos\left(\frac{u}{\sqrt{1+m^2}}\right)}{\cos h\left(u+u\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\right)},\quad y=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{u}{\sqrt{1+m^2}}\right)}{\cos h\left(u+u\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\right)},$$

$$z=u-\operatorname{tg} h\left(u+u\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\right),$$

che ha la torsione costante $=\sqrt{1+m^2}$. Essa è l'assintotica di una elicoide pseudosferica del Dini, che ha per profilo meridiano una trattrice di raggio $=1$ e il cui parametro del moto elicoidale è $=m$. Supponendo m variabile e funzione di un parametro v, poniamo $m=\operatorname{sen} h\, v$; avremo allora una superficie S definita dalle formole

$$(11)\quad \begin{cases} x=\dfrac{\cos\left(\dfrac{u}{\cos h v}\right)}{\cos h\,(u+u\operatorname{tg} h\,v)},\quad y=\dfrac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{u}{\cos h\,v}\right)}{\cos h\,(u+u\operatorname{tg} h\,v)}, \\ z=u-\operatorname{tg} h\,(u+u\operatorname{tg} h\,v), \end{cases}$$

il cui elemento lineare prende la forma

$$ds^2=du^2+\frac{u^2}{\cos h^2 v\cos h^2(u+u\operatorname{tg} h\,v)}dv^2$$

Dunque le linee $v=\text{cost}$ sono a torsione costante e geodetiche della superficie S, la quale appartiene quindi alla classe che si considera. Se dalle (11) si elimina il parametro v, si trova

$$x^2 + y^2 + (z-u)^2 = 1;$$

dunque le traiettorie ortogonali delle geodetiche a torsione costante sono tracciate sopra sfere di raggio $=1$ coi centri distribuiti sull' asse delle z.

Notiamo infine che per questa superficie si ha

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{1 + \operatorname{tg} h\, v}{\cos h\,(u + u \operatorname{tg} hv)}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{u}{\cos h^2 v \cos h\,(u + u \operatorname{tg} h\, v)},$$

e quindi

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{1}{\cos h\,(u + u \operatorname{tg} h\, v)}, \quad \cos \varphi = -\frac{\operatorname{sen} h (u + u \operatorname{tg} hv)}{\cos h\,(u + u \operatorname{tg} hv)}$$

§. 3.

Trasformazione delle superficie che hanno un sistema di geodetiche a torsione costante.

5. È noto cho data una curva a torsione costante, se ne possono da essa dedurre infinite altre della stessa specie, come luogo dell' estremo di un segmento di lunghezza costante, eguale o minore del raggio di torsione della curva, che coll'altro estremo si appoggia su ciascun punto della curva, giace nel suo piano osculatore ed è inclinato sulla tangente di un angolo che varia con una

determinata legge (*). Riserbandoci a ritrovare più avanti le formole relative a questa trasformazione, possiamo ora proporci la seguente questione. Data una superficie S con un sistema di linee geodetiche a torsione costante, è possibile applicare a ciascuna di esse la trasformazione accennata e per ciascuna di esse scegliere una delle infinite trasformate, in modo che il loro insieme costituisca una superficie S_1 che le abbia per geodetiche?

A questa domanda si risponde affermativamente nel modo seguente.

Siano x, y, z le coordinate di un punto variabile sulla superficie S; X, Y, Z i coseni di direzione della normale alla superficie; per ogni suo punto si conduca un segmento di lunghezza costante $= k$, posto nel piano osculatore della corrispondente geodetica v a torsione costante e inclinato sulla sua tangente di un angolo θ, che si supporrà funzione dei due parametri u, v; le coordinate x_1, y_1, z_1 dell'estremo di questo segmento saranno date dalle formole

$$(12)\quad \begin{cases} x_1 = x + k\left(\cos\theta \dfrac{\partial x}{\partial u} + \operatorname{sen}\theta\, X\right), \\ y_1 = y + k\left(\cos\theta \dfrac{\partial y}{\partial u} + \operatorname{sen}\theta\, Y\right), \\ z_1 = z + k\left(\cos\theta \dfrac{\partial z}{u} + \operatorname{sen}\theta\, Z\right). \end{cases}$$

(*) L. Bianchi: « Sulle curve a doppia curvatura ». Giornale di Battaglini, anno 1883.

Di qui, derivando una volta rispetto ad u, un' altra rispetto a v, tenendo conto delle formole (10), si trova:

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial u}-k\left\{\left(2\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial x}{\partial u}-\cos\theta X\right)+\frac{\operatorname{sen}\theta}{T_2\frac{\partial\varphi}{\partial v}}\frac{\partial x}{\partial v}\right\},$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial v}+k\left\{\cos\theta\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}-\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\frac{1}{T_2^2}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\partial^3\varphi}{\partial u^2\partial v}}{2\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\right)\right\}\frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{\partial\varphi}{\partial v}}$$

$$-k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial x}{\partial u}-\cos\theta X\right),$$

e analogamente per y_1 e z_1.

Se si vuole intanto che il parametro u rappresenti l' arco delle $v=\text{cost}$ anche sulla superficie S_1, dovrà essere $\sum\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2=1$, ossia θ dovrà soddisfare alla condizione

$$2\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial u}=\operatorname{sen}\theta\left(\frac{T_2\pm\sqrt{T_2^2-k^2}}{k\,T_2}\right);$$

da questa si deduce intanto che affinchè l' angolo θ sia reale deve essere $k\leqq T_2$; si potrà quindi porre $k=T_2\cos\sigma$, con che σ risulterà funzione della sola v; allora la precedente diventa

$$2\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial u}=\operatorname{sen}\theta\left(\frac{1\pm\operatorname{sen}\sigma}{T_2\cos\sigma}\right);$$

e poichè il caso del segno più si deduce da quello del segno meno cambiando σ in $-\sigma$, si potrà dei due segni tenere ad esempio soltanto l' inferiore.

Aggiungendo a questa condizione quella che rende $\sum \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} = 0$, si trova che se la funzione θ soddisfa simultaneamente alle due equazioni

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
&2\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u} = \operatorname{sen}\theta\left(\frac{1-\operatorname{sen}\sigma}{T_2\cos\sigma}\right),\\
&(1+\operatorname{sen}\sigma)\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \operatorname{sen}\sigma\frac{\partial \theta}{\partial v} =\\
&= T_2\cos\sigma\left\{\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\frac{1}{T_2^2}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial^3\varphi}{\partial u^2\,\partial v}}{2\frac{\partial \varphi}{\partial u}}\right) - \cos\theta\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\right\},
\end{aligned}
\right.
$$

l' elemento lineare della superficie S_1 prende la forma

$$ds_1^2 = du^2 + T_2^2\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2 dv^2$$

essendo

$$\Phi = \pm(\varphi + \theta).$$

Osserviamo intanto che in forza della (9) a cui soddisfa la funzione φ, le equazioni (13) sono compatibili, ossia la condizione d' integrabilità dell' equazione a differenrenziali totali

$$
(13')\quad
\begin{aligned}
&d\theta - \left\{\operatorname{sen}\theta\left(\frac{1-\operatorname{sen}\sigma}{T_2\cos\sigma}\right) - 2\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right\}du\\
&-\left\{T_2\operatorname{cotg}\sigma\left[\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\frac{1}{T_2^2}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial^3\varphi}{\partial u^2\partial v}}{2\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\right) - \cos\theta\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\right] - \frac{1+\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\}dv = 0
\end{aligned}
$$

è identicamente soddisfatta; quindi esisterà una funzione $\theta(u, v)$ che la soddisfa, contenente una costante arbitraria.

Per dimostrare ora che la superficie S_1 è della stessa specie della S, osserviamo che in forza delle (13) si può ora scrivere

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} - \operatorname{sen}\theta(1-\operatorname{sen}\sigma)\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial x}{\partial u} - \cos\theta\, X\right) - \frac{\cos\sigma \operatorname{sen}\theta}{T_2\frac{\partial\varphi}{\partial v}}\frac{\partial x}{\partial v};$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = \mp T_2\frac{\partial\Phi}{\partial v}\left\{\cos\sigma\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial x}{\partial u} - \cos\theta\, X\right) + \frac{\operatorname{sen}\sigma}{T_2\frac{\partial\varphi}{\partial v}}\frac{\partial x}{\partial v}\right\},$$

dalle quali si deduce per i coseni di direzione della normale alla superficie S_1

$$X_1 = \mp \operatorname{sen}\theta\,(1-\operatorname{sen}\sigma)\left(\cos\theta\frac{\partial x}{\partial u} + \operatorname{sen}\theta\, X\right)$$
$$\mp \frac{\cos\sigma\cos\theta}{T_2\frac{\partial\varphi}{\partial v}}\frac{\partial x}{\partial v} \mp \operatorname{sen}\sigma\, X.$$

Per la scelta del doppio segno, possiamo ora osservare che supponendo k piccolissimo, ossia facendo tendere σ verso $\frac{\pi}{2}$, le normali nei due punti corrispondenti delle due superficie tendono a diventare parallele; se vogliamo che siano anche dirette nello stesso senso, dovremo scegliere il segno inferiore; quindi riepilogando

$$\Phi = -\varphi - \theta$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} - \operatorname{sen}\theta(1 - \operatorname{sen}\sigma)\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial x}{\partial u} - \cos\theta\, X\right) - \frac{\cos\sigma \operatorname{sen}\theta}{T_2 \frac{\partial\varphi}{\partial v}} \frac{\partial x}{\partial v}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = T_2 \frac{\partial\Phi}{\partial v} \left\{ \cos\sigma \left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial x}{\partial u} - \cos\theta\, X\right) + \frac{\operatorname{sen}\sigma}{T_2 \frac{\partial\varphi}{\partial v}} \frac{\partial x}{\partial v} \right\}$$

$$X_1 = \operatorname{sen}\theta(1 - \operatorname{sen}\sigma)\left(\cos\theta \frac{\partial x}{\partial u} + \operatorname{sen}\theta\, X\right) + \frac{\cos\sigma\cos\theta}{T_2 \frac{\partial\varphi}{\partial v}} \frac{\partial x}{\partial v} + \operatorname{sen}\sigma X.$$

Da queste, tenendo conto delle (10), si deducono poi le altre

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} = 2 \frac{\partial\Phi}{\partial u} X_1 , \quad \frac{\partial}{\partial u}\left\{ \frac{1}{T_2} \frac{\frac{\partial x_1}{\partial v}}{\frac{\partial\Phi}{\partial v}} \right\} = \frac{X_1}{T_2},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left\{ \frac{1}{T_2} \frac{\frac{\partial x_1}{\partial v}}{\frac{\partial\Phi}{\partial v}} \right\} = -T_2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial u\, \partial v} \frac{\partial x_1}{\partial v} + T_2 \left\{ \frac{\frac{1}{T_2^2}\frac{\partial\Phi}{\partial v} - \frac{\partial^3\Phi}{\partial u^2\, \partial v}}{2\frac{\partial\Phi}{\partial u}} \right\} X_1,$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u\, \partial v} = \frac{\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\, \partial v}}{\frac{\partial\Phi}{\partial v}} \frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial\Phi}{\partial v} X_1,$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial u} = -2 \frac{\partial\Phi}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial u} - \frac{1}{T_2^{\,2} \frac{\partial\Phi}{\partial v}} \frac{\partial x_1}{\partial v} ,$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial v} = -\frac{1}{\frac{\partial\Phi}{\partial v}} \left\{ \frac{\frac{1}{T_2^2}\frac{\partial\Phi}{\partial v} - \frac{\partial^3\Phi}{\partial u^2\, \partial v}}{2\frac{\partial\Phi}{\partial u}} \right\} \frac{\partial x_1}{\partial v} - \frac{\partial\Phi}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial u},$$

e per conseguenza

$$D_1 = 2\frac{\partial\Phi}{\partial u}\,,\ D'_1 = \frac{\partial\Phi}{\partial v}\,,\ D''_1 = T_2^2\frac{\partial\Phi}{\partial v}\left(\frac{\frac{1}{T_2^2}\frac{\partial\Phi}{\partial v} - \frac{\partial^3\Phi}{\partial u^2\,\partial v}}{2\frac{\partial\Phi}{\partial u}}\right)$$

ossia la funzione $\Phi(u\,,\,v)$ soddisfa all'equazione alle derivate parziali del 4.º ordine:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{2\,T_2^2}\right\} = \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\frac{1}{T_2^2}\frac{\partial\Phi}{\partial v} - \frac{\partial^3\Phi}{\partial u^2\,\partial v}}{2\frac{\partial\Phi}{\partial u}}\right\}.$$

Si ha così, come avevamo asserito, una trasformazione per la quale da una nota superficie S colle geodetiche a torsione costante, si passa ad un' altra della medesima specie S_1, e la trasformazione è tale che vengono conservate le geodetiche, la loro torsione, il loro arco e le loro traiettorie ortogonali.

Fissata la costante $k = T_2 \cos\sigma$, con questa trasformazione si ottengono dalla S un sistema ∞' di superficie S_1, giacchè θ, come abbiamo osservato, contiene una costante arbitraria.

Per ognuna delle S_1 si hanno poi le formole

$$(14)\qquad \sum \frac{1}{T_2\frac{\partial\varphi}{\partial v}}\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{1}{T_2\frac{\partial\Phi}{\partial v}}\frac{\partial x_1}{\partial v} = \text{sen}\,\sigma\,,\quad \sum\frac{x_1 - x}{T_2\cos\sigma}\frac{\partial x_1}{\partial u} = \cos\theta$$

la prima delle quali ci dice che le tangenti alle linee

u=cost nei punti corrispondenti, ossia le binormali alle geodetiche v=cost, sono inclinate fra loro dell' angolo $\frac{\pi}{2}-\sigma$, e la seconda che il segmento di lunghezza k intercetto fra due punti corrispondenti è egualmente inclinato sulle tangenti alle geodetiche corrispondenti.

Questa osservazione ci permette di asserire che se applichiamo ad una delle S_1 la stessa trasformazione colla stessa costante k, fra le sue trasformate è certamente compresa la superficie iniziale S; in altre parole, le (13) sussistono ancora se si scambia in esse φ con Φ e si pone $\theta-\pi$ in luogo di θ.

Potremo quindi scrivere insieme le equazioni

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}-\frac{\partial \Phi}{\partial u}=\operatorname{sen}\theta\left(\frac{1-\operatorname{sen}\sigma}{T_2\cos\sigma}\right), \tag{15}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}-\operatorname{sen}\sigma\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}= \\ =T_2\cos\sigma\left\{\operatorname{sen}\theta\left(\dfrac{\dfrac{1}{T_2^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}-\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial u^2\partial v}}{2\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}\right)-\cos\theta\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\right\}, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}-\operatorname{sen}\sigma\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}= \\ =T_2\cos\sigma\left\{-\operatorname{sen}\theta\left(\dfrac{\dfrac{1}{T_2^2}\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}-\dfrac{\partial^3\Phi}{\partial u^2\partial v}}{2\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}}\right)+\cos\theta\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v}\right\}. \end{cases} \tag{16}$$

Se a questa trasformazione, per l' analogia che presenta con quella che ha luogo per i sistemi tripli ortogonali di Weingarten (*), si dà il nome di *trasformazione di Bäcklund*, possiamo enunciare il teorema:

Se S è una superficie nota con un sistema di geodetiche a torsione costante, con una trasformazione di Bäcklund a costante k, si possono dedurre da essa ∞' *superficie della medesima specie, e la trasformazione è tale che sono conservate le geodetiche, la loro torsione, il loro arco e le loro traiettorie ortogonali*

Ovvero analiticamente

Se $\varphi(\mathrm{u}, \mathrm{v})$ *è una soluzione dell'equazione* (9) *alle derivate parziali del* 4.° *ordine, e* $\theta(\mathrm{u}, \mathrm{v})$ *una funzione di* u *e* v *soluzione comune delle* (13), *la funzione*

$$\Phi = \pm(\varphi + \theta)$$

è una nuova soluzione della stessa equazione (9).

6. Rispetto poi all'equazione (13') a differenziali totali, osserviamo che se si pone $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = \Lambda$, essa si riduce alla forma (**):

$$(17) \qquad d\Lambda + (a\Lambda^2 + b\Lambda + c)\,du + (a'\Lambda^2 + b'\Lambda + c')\,dv = 0$$

dove a, b, c ; a', b', c' sono funzioni note di u, v definite dalle formole:

(*) L. Bianchi: Sui sistemi tripli ortogonali di Weingarten. *Annali di Matematica*. Serie II. Tomo XIII.

(**) Quest'osservazione fatta sopra un'equazione analoga alla (13'), è dovuta a Bäcklund.

$$a = c = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\ , \quad b = -\frac{1 - \operatorname{sen}\sigma}{T_2 \cos\sigma}$$

$$a' = \frac{1}{2\operatorname{sen}\sigma}\left((1 + \operatorname{sen}\sigma)\frac{\partial \varphi}{\partial v} - T_2 \cos\sigma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v}\right),$$

$$b' = -T_2 \operatorname{cotg}\sigma \left\{ \frac{\frac{1}{T_2{}^2}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial u^2\, \partial v}}{2\frac{\partial \varphi}{\partial u}} \right\},$$

$$c' = \frac{1}{2\operatorname{sen}\sigma}\left((1 + \operatorname{sen}\sigma)\frac{\partial \varphi}{\partial v} + T_2 \cos\sigma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}\right).$$

Se ne è noto un integrale particolare $\Lambda = \Lambda_1$, facendo la posizione $\Lambda = \Lambda_1 + \frac{1}{\Lambda'}$, si riduce alla forma lineare

$$d\Lambda' + (\alpha \Lambda' + \beta)\, du + (\gamma \Lambda' + \delta)\, dv = 0$$

e s' integra con quadrature (*).

Se dunque è nota una trasformata di Bäcklund a costante k di S, tutte le altre si determinano con quadrature. Allora, per quanto abbiamo osservato nel numero precedente, conosciamo un integrale della equazione (13'), corrispondente a ciascuna di queste trasformate, cioè quello che dà la superficie iniziale S; sicchè la successiva applicazione della trasformazione di Bäcklund colla medesima costante k alle nuove superficie ottenute si effettua sempre con quadrature.

(*) L. Bianchi. Lezioni di Geometria Differenziale. Vedi Nota alla pag. 233.

7. Quando sia nota una trasformata particolare di Bäcklund della superficie iniziale S, corrispondente alla soluzione $\theta = \theta_1$ della (13′), la forma del suo integrale generale si ottiene facilmente nel modo seguente. Sottraendo dalla (13′) quella che se ne deduce ponendovi $\theta = \theta_1$, e che si suppone verificata, si ha

$$d\,(\theta - \theta_1) = \frac{1 - \operatorname{sen} \sigma}{T_2 \cos \sigma} \left(\operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \theta_1 \right) du +$$

$$+ T_2 \operatorname{cotg} \sigma \left\{ (\operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \theta_1) \left(\frac{\dfrac{1}{T_2^2} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - \dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial u^2 \partial v}}{2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}} \right) - (\cos \theta - \cos \theta_1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \right\} dv,$$

la quale, se si prende per nuova funzione incognita

$$w = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} \left(\theta - \theta_1 \right)$$

si riduce all' altra

$$dw + \frac{1 - \operatorname{sen} \sigma}{T_2 \cos \sigma} \left(w \cos \theta_1 - \operatorname{sen} \theta_1 \right) du +$$

$$+ T_2 \operatorname{cotg.} \sigma \left\{ (w \cos \theta_1 - \operatorname{sen} \theta_1) \left\{ \frac{\dfrac{1}{T_2^2} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - \dfrac{\partial u^2 \partial v}{\partial^3 \varphi}}{2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}} \right\} \right.$$

$$\left. + (w \operatorname{sen} \theta_1 + \cos \theta_1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \right\} dv = 0.$$

Ora se si pone

$$
(18)\left\{\begin{aligned}
\mathrm{P} &= \frac{1-\operatorname{sen}\sigma}{\mathrm{T}_2\cos\sigma}\cos\theta_1\, du + \\
&+\mathrm{T}_2\operatorname{cotg}\sigma\left\{\cos\theta_1\left(\frac{\frac{1}{\mathrm{T}_2^2}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\partial^3\varphi}{\partial u^2\,\partial v}}{2\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\right)+\operatorname{sen}\theta_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\right\}dv, \\
\mathrm{Q} &= \frac{1-\operatorname{sen}\sigma}{\mathrm{T}_2\cos\sigma}\operatorname{sen}\theta_1\, du + \\
&+\mathrm{T}_2\operatorname{cotg}\sigma\left\{\cos\theta_1\left(\frac{\frac{1}{\mathrm{T}_2^2}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\partial^3\varphi}{\partial u^2\,\partial v}}{2\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\right)-\cos\theta_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\right\}dv,
\end{aligned}\right.
$$

l' equazione precedente prende la forma

$$d\,w + w\,\mathrm{P} - \mathrm{Q} = 0;$$

e poichè P è un differenziale esatto, come lo è $e^{\int \mathrm{P}}\mathrm{Q}$, si vede che $e^{\int \mathrm{P}}$ è un fattore integrante dell'equazione, e che quindi il suo integrale generale è dato da

$$(19)\qquad w = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_1) = e^{-\int \mathrm{P}}\left\{\mathrm{C} + \int e^{\int \mathrm{P}}\mathrm{Q}\right\},$$

essendo C una costante arbitraria.

Osserviamo infine che alle volte nella (13') può tornare utile prendere per funzione incognita la Φ invece della θ, e allora l' equazione si riduce all' altra

$$(13'')\quad \begin{cases} d\,\Phi + \left\{ \left(\dfrac{1-\operatorname{sen}\sigma}{T_2 \cos\sigma}\right) \operatorname{sen}(\Phi+\varphi) + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} \right\} du + \\ \quad + \left\{ T_2 \operatorname{cotg}\sigma \left[\operatorname{sen}(\Phi+\varphi) \left\{ \dfrac{\dfrac{1}{T_2^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u^2 \partial v}}{2\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}} \right\} + \right.\right. \\ \quad \left.\left. + \cos(\Phi+\varphi)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u \partial v} \right] + \dfrac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \right\} dv = 0 \end{cases}$$

e potrebbe anch' essa trasformarsi come la (13') ponendo $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Phi = \Lambda$, e ridursi ad una forma analoga alla (17).

8. Applichiamo la trasformazione di Bäcklund a costante $k=1$ alla superficie definita dalle (11) del numero 4. Si avrà allora.

$$\cos\sigma = \frac{1}{\operatorname{csh} v}\quad ,\quad \text{e quindi}\quad \operatorname{sen}\sigma = \pm \operatorname{tgh} v$$

Scegliendo una prima volta il segno inferiore, si trova che l'equazione (13') ammette l' integrale particolare

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{1}{\cosh\alpha}\quad ,\quad \cos\theta_1 = -\operatorname{tgh}\alpha$$

con

$$\alpha = (1 + \operatorname{tgh} v)\, u \,.$$

Quindi il suo integrale generale sarà

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\theta_1 - \theta) = \frac{\coth v \cosh\alpha}{C-(1+\coth v)\, u}$$

e se si pone

$$\Omega = C - (1 + \coth v)\, u \quad , \quad \beta = \frac{u}{\cosh v}$$

le equazioni della superficie trasformata saranno

$$x_1 = \frac{2\,\Omega}{\cosh \alpha\,(\Omega^2 + \coth^2 v \cosh^2 \alpha)} \times$$
$$\left\{ (\Omega - \operatorname{senh} \alpha \cosh \alpha) \cos \beta - \frac{\cosh^2 \alpha}{\operatorname{senh} v} \operatorname{sen} \beta \right\} ,$$

$$y_1 = \frac{2\,\Omega}{\cosh \alpha\,(\Omega^2 + \coth^2 v \cosh^2 \alpha)} \times$$
$$\left\{ (\Omega - \operatorname{senh} \alpha \cosh \alpha) \operatorname{sen} \beta + \frac{\cosh^2 \alpha}{\operatorname{senh} v} \cos \beta \right\} ,$$

$$z_1 = u - \frac{2\,\Omega}{\cosh \alpha\,(\Omega^2 + \coth^2 v \cosh^2 \alpha)} \times$$
$$\left\{ (\Omega \operatorname{senh} \alpha + \cosh \alpha \right\} .$$

Se invece si prende

$$\operatorname{sen} \sigma = - \operatorname{tgh} v$$

si trova per integrale generale della corrispondente equazione (13''):

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \Phi = \frac{\cosh (C - u \operatorname{tgh} v)}{\operatorname{tgh} v \operatorname{senh} (C + u)} .$$

Sicchè ponendo

$$\Omega_1 = \cosh (C - u \operatorname{tgh} v) \quad , \quad \Omega_2 = \operatorname{tgh} v \operatorname{senh} (C + u)$$

le formole relative alla superficie trasformata saranno

$$x_1 = \frac{2\,\Omega_2}{\cosh v \cosh \alpha\,(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)} \times$$
$$\left\{ (\Omega_2 \cosh v - \Omega_1 \operatorname{senh} v \operatorname{senh} \alpha) \cos \beta - \Omega_1 \cosh \alpha \operatorname{sen} \beta \right\}$$

$$y_1 = \frac{2\,\Omega_2}{\cosh v \cosh \alpha\,(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)} \times$$
$$\left\{ (\Omega_2 \cosh v - \Omega_1 \operatorname{senh} v \operatorname{senh} \alpha) \operatorname{sen} \beta + \Omega_1 \cosh \alpha \cos \beta \right\}$$

$$z_1 = u - \frac{2\,\Omega_2}{\cosh v \cosh \alpha\,(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)} \times$$
$$\left\{ \Omega_2 \cosh v \operatorname{senh} \alpha + \Omega_1 \operatorname{senh} v \right\}.$$

§. 4.

Le superficie assintotiche.

9. Fra le superficie, che contengono un sistema di geodetiche a torsione costante sono particolarmente interessanti quelle nelle quali la torsione delle geodetiche del sistema è la stessa per tutte. La loro esistenza risulta da un' osservazione fatta dal prof. Bianchi in fondo alla sua Memoria: *Sopra i sistemi tripli ortogonali di Weingarten* già citata. Ad ogni sistema triplo ortogonale di Weingarten a curvatura negativa, che contiene cioè un sistema di superficie pseudosferiche, corrispondono due sistemi ∞' di superficie con un sistema di geodetiche a torsione costante, e sono quelle generate dalle assintoti-

che corrispondenti delle superficie pseudosferiche, ovvero, il che è lo stesso, dalle traiettorie ortogonali delle superficie pseudosferiche lungo le loro assintotiche.

Senza occuparci per ora della questione se esistano superficie di questa specie più generali di quelle contenute in quei sistemi tripli ortogonali, potremo dar loro il nome di *superficie assintotiche dei sistemi di Weingarten a curvatura negativa*, o più semplicemente quello di *superficie assintotiche.*

Se si sceglie per unità lineare il raggio di torsione comune alle geodetiche, le formole relative a queste superficie si deducono da quelle del §. 2, ponendovi $T_2=1$. Riassumendo i risultati allora ottenuti, abbiamo quindi:

Se S *é una superficie assintotica, e le sue geodetiche a torsione costante* $=1$ *sono le* v=cost, *il quadrato del suo elemento lineare riferito alle geodetiche* v=cost *e alle traiettorie ortogonali* u=cost, *e le quantità* D, D', D'' *sono dati da*

$$(8') \quad \begin{cases} ds^2 = du^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 dv^2 \\ D=2\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\,, \quad D'=\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\,, \quad D''=\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\left\{\dfrac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}-\dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial u^2\,\partial v}}{2\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}}\right\} \end{cases}$$

essendo φ *una funzione di* u *e* v *che soddisfa all'equazione alle derivate parziali del* 4.° *ordine*

$$(9') \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 = \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}-\dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial u^2\,\partial v}}{2\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}}\right\}.$$

Viceversa:

Ad ogni soluzione φ *della* (9') *corrisponde una ed una sola superficie assintotica, per la quale si hanno le formole* (8') *che ci dànno il quadrato del suo elemento lineare e le quantità* D , D' , D''.

Le (10) poi, se per brevità poniamo d'ora innanzi:

$$\left\{\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\partial^3\varphi}{\partial u^2\partial v}}{2\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\right\}=[\varphi]$$

diventano

$$(10')\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=2\frac{\partial\varphi}{\partial u}X\ ,\quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{\partial\varphi}{\partial v}}\right)=X\,,\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{\partial\varphi}{\partial v}}\right)=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}+[\varphi]X\ ,\quad \frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=\frac{\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}}{\frac{\partial\varphi}{\partial v}}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}X,\\
&\frac{\partial X}{\partial u}=-2\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial v}}\frac{\partial x}{\partial v}\ ,\quad \frac{\partial X}{\partial v}=-\frac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial v}}[\varphi]\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}\\
&\frac{1}{r_1}=-\frac{\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}}{\frac{\partial\varphi}{\partial v}}\ ,\quad \frac{1}{R_1}=\frac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial v}}[\varphi]\ ,\quad \frac{1}{\rho_1^2}=\frac{1}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}\left\{\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\right)^2+[\varphi]^2\right\}\\
&\frac{1}{r_2}=0\ ,\quad \frac{1}{R_2}=\frac{1}{\rho_2}=2\frac{\partial\varphi}{\partial u}\ ,\quad \frac{1}{T_1}=-\frac{\frac{\partial\omega_1}{\partial v}}{\frac{\partial\varphi}{\partial v}}-1\,.
\end{aligned}\right.$$

10. Anche in questo caso, per dare un esempio semplice di superficie di questa classe, partiamo dall' una o dall'altra delle seguenti curve a torsione costante $=1$:

$$x = \cos\sigma \frac{\cos u}{\cosh\left(\frac{1-\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}u\right)},$$

$$y = -\cos\sigma \frac{\operatorname{sen} u}{\cosh\left(\frac{1-\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}u\right)}, \quad z = u - \cos\sigma \operatorname{tgh}\left(\frac{1-\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}u\right);$$

$$x = \cos\sigma \frac{\cos u}{\cosh\left(\frac{1+\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}u\right)},$$

$$y = \cos\sigma \frac{\operatorname{sen} u}{\cosh\left(\frac{1+\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}u\right)}, \quad z = u - \cos\sigma \operatorname{tgh}\left(\frac{1+\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}u\right);$$

ciascuna di esse appartiene ad uno dei due sistemi di assintotiche di un' elicoide pseudosferica del Dini, che ha per profilo meridiano una trattrice di raggio $=\cos\sigma$. Dando alla prima un moto elicoidale col parametro $1+\operatorname{sen}\sigma$, si ottiene la superficie assintotica

$$x_1 = \cos\sigma \frac{\cos\beta_1}{\cosh\alpha_1}, \quad y_1 = -\cos\sigma \frac{\operatorname{sen}\beta_1}{\cosh\alpha_1}, \quad z_1 = u - \cos\sigma \operatorname{tgh}\alpha_1,$$

dove per brevità si è posto

$$\alpha_1 = \frac{1-\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}u - v \quad , \quad \beta_1 = u - v \operatorname{tg}\sigma$$

e il cui elemento lineare è dato da

$$ds_1^2 = du^2 + \frac{1}{\cosh^2 \alpha_1} dv^2 .$$

Se si dà invece alla seconda un moto elicoidale col parametro $= \operatorname{sen} \sigma - 1$, si ottiene l'altra superficie assintotica

$$x_2 = \cos\sigma \frac{\cos\beta_2}{\cosh\alpha_2} \quad , \quad y_2 = \cos\sigma \frac{\operatorname{sen}\beta_2}{\cosh\alpha_2} \quad , \quad z_2 = u - \cos\sigma \operatorname{tgh}\alpha$$

essendo

$$\alpha_2 = \frac{1 + \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} u + v \quad , \quad \beta_2 = u - v \operatorname{tg}\sigma$$

e il cui elemento lineare è

$$ds_2^2 = du^2 + \frac{1}{\cosh^2 \alpha_2} dv^2 .$$

Per ognuna di queste superficie assintotiche elicoidali le traiettorie ortogonali delle geodetiche a torsione costante sono tracciate sopra sfere di raggio costante $= \cos\sigma$, coi centri distribuiti sull' asse.

11. Occupiamoci anzi tutto delle caratteristiche delle superficie assintotiche, e a questo scopo vediamo come da una data curva a torsione costante si possa dedurre, con una costruzione infinitesimale, una superficie assintotica che la contenga come geodetica.

Se C_2 è la curva data a torsione costante, ed essa deve riguardarsi come geodetica di una superficie assintotica, bisognerà che se ne possa dedurre un' altra curva C'_2 colla stessa torsione costante, conducendo da ogni punto della C_2, e nella direzione della sua binormale, un segmento infinitesimo che varierà colla posizione del punto, e la cui estremità descriverà la nuova curva C'_2.

Se dunque

$$x=x(u) \quad , \quad y=y(u) \quad , \quad z=z(u)$$

sono le equazioni della curva C_2 espresse per mezzo del suo arco u, se con

$$\cos\alpha_2 \ , \ \cos\beta_2 \ , \ \cos\gamma_2 \quad ; \quad \cos\xi_2 \ , \ \cos\eta_2 \ , \ \cos\zeta_2 \quad ;$$
$$\cos\lambda_2 \quad , \quad \cos\mu_2 \quad , \quad \cos\nu_2$$

si indicano rispettivamente i coseni di direzione della tangente, della normale principale e della binormale della stessa curva, e se con x', y', z' si indicano le coordinate dei punti della C'_2 dovremo avere per i punti corrispondenti

$$x' = x + \varepsilon f(u) \cos\lambda_2$$

dove ε è una costante infinitesima di cui supporremo che si possano trascurare le potenze superiori alla prima, e $f(u)$ è una funzione dell'arco u della C_2, che andrà determinata in modo che la C'_2 abbia pur essa la medesima torsione costante della C_2. Derivando la precedente rispetto ad u, ed indicando con $\frac{1}{T_2}$ la torsione della C_2, si ha

$$\frac{dx'}{du} = \cos\alpha_2 + \varepsilon f(u)\frac{\cos\xi_2}{T_2} + \varepsilon f'(u)\cos\lambda_2$$

e le altre due analoghe per y' e z'. Ora siccome quadrando e sommando, e trascurando le potenze superiori di ε si ha $du' = du$, si potrà scrivere

$$a) \quad \cos\alpha'_2 = \cos\alpha_2 + \varepsilon f(u)\frac{\cos\xi_2}{T_2} + \varepsilon f'(u)\cos\lambda_2 .$$

Derivando ancora e indicando rispettivamente con $\frac{1}{\rho_2}$, $\frac{1}{\rho'_2}$ le flessioni delle C_2, C'_2, si avrà:

$$\frac{\cos\xi'_2}{\rho'_2} = \frac{\cos\xi_2}{\rho_2} - \varepsilon\,\frac{f(u)}{T_2}\left(\frac{\cos\alpha_2}{\rho_2} + \frac{\cos\lambda_2}{T_2}\right) +$$
$$+ 2\varepsilon f'(u)\frac{\cos\xi_2}{T_2} + \varepsilon f''(u)\cos\lambda_2 ,$$

da cui, trascurando sempre le potenze superiori di ε,

$$b) \qquad \frac{1}{\rho'_2} = \frac{1}{\rho_2} + \frac{2\varepsilon f'(u)}{T_2} ;$$

quindi

$$c) \cos\xi'_2 = \cos\xi_2 - \varepsilon f(u)\frac{\cos\alpha_2}{T_2} + \varepsilon\rho_2\left(f''(u) - \frac{f(u)}{T_2^2}\right)\cos$$

e finalmente

$$d)\quad \cos\lambda'_2 = \cos\lambda_2 - \varepsilon f'(u)\cos\alpha_2 - \varepsilon\rho_2\left(f''(u) - \frac{f(u)}{T_2^2}\right)\cos\zeta_2 .$$

Derivando quest'ultima rispetto ad u, moltiplicandola quindi per $\cos\xi'_2$, sommandola con le analoghe e ponendo la condizione

$$\frac{1}{T'_2} = \frac{1}{T_2},$$

si trova che la funzione $f(u)$ deve soddisfare all'equazione differenziale lineare omogenea del 3.° ordine

$$e)\qquad \left\{\rho_2\left(f''(u) - \frac{f(u)}{T_2^2}\right)\right\}' + \frac{f'(u)}{\rho_2} = 0 .$$

Delle tre costanti arbitrarie che contiene l'integrale generale di questa equazione, una evidentemente è moltiplicativa, e si può quindi porre $= 1$, immaginandola inclusa in ε; scegliendo le altre due in un modo qualunque, e ripetendo sulla C'_2, che così risulta pienamente determinata, la stessa costruzione fatta sulla C_2, e così di seguito, è chiaro che si verrà a costruire una superficie assintotica, in cui le traiettorie ortogonali delle geodetiche a torsione costante avranno per elemento d'arco $ds_1 = \varepsilon f(u)$.

Vogliamo ora calcolare gli elementi relativi a queste curve che indicheremo con C_1. Consideriamo perciò sopra una di esse (fig. 1) i due punti m, m' in cui è incontrata dalle C_2, C'_2 e le due geodetiche G, G' ad essa tangenti nei due punti m, m' facciano fra loro un angolo $d\theta$ incontrandosi in A. Se allora B è il punto in cui C'_2 incontra G', potendosi riguardare il triangolo $m'BA$ come rettilineo, si avrà $m'\hat{B}A = \frac{\pi}{2} + d\theta$, e per la a)

$$\text{sen}\,(d\theta) = -\cos m'\hat{B}A = -\sum \cos\lambda_2 \cos\alpha'_2 = -\varepsilon f'(u);$$

ma essendo $d\theta$ infinitamente piccolo, si potrà scrivere

$$d\theta = -\varepsilon f'(u),$$

e la curvatura geodetica della C_1 nel punto m sarà quindi data da

$$f)\qquad \frac{1}{\gamma_1} = \frac{d\theta}{ds_1} = -\frac{f'(u)}{f(u)}.$$

Sia inoltre Γ_1 (fig. 2) la sezione normale della superficie fatta tangenzialmente alla C_1 nel punto m, essa conterrà dunque anche il punto successivo m' della C_1 e le sue normali in m, m' s'incontreranno nel suo centro di curvatura O, formando fra di loro l'angolo infinitesimo $d\eta$; e poichè la mO coincide colla normale alla superficie, ossia colla normale principale della C_2, e la tangente in m' alla Γ_1 è la stessa che alla C_1, avremo per la d):

$$\text{sen}\,(d\eta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - d\eta\right) = \sum \cos\lambda'_2 \cos\xi_2 = \varepsilon\,\rho_2\left(\frac{f(u)}{T_2^2} - f''(u)\right),$$

quindi la curvatura normale della C_1 è data da

$$g) \qquad \frac{1}{R_1} = \frac{d\,n}{ds_1} = \frac{\rho_2}{f(u)}\left(\frac{f(u)}{T_2^2} - f''(u)\right)$$

da cui segue per la flessione della C_1 la formola

$$h) \qquad \frac{1}{\rho_1^2} = \frac{1}{f^2(u)}\left[f'^2(u) + \rho_2^2\left(\frac{f(u)}{T_2^2} - f''(u)\right)^2\right],$$

come si poteva dedurre anche direttamente osservando che l' angolo di contingenza di della C_1 è dato da

$$\operatorname{sen}^2(d\,i) = \sum(\cos\lambda_2\cos\mu'_2 - \cos\mu_2\cos\lambda'_2)^2 =$$
$$= \varepsilon^2\left[f'^2(u) + \rho_2^2\left(\frac{f(u)}{T_2^2} - f''(u)\right)^2\right].$$

Finalmente ci rimane da calcolare la torsione $\frac{1}{T_1}$ della C_1 nel punto m. Indichiamo perciò con ω_1 l' angolo che la sua normale principale in m fa colla tangente alla C_2. Avremo allora le formole

$$l) \qquad \cos\alpha_1 = \cos\lambda_2\ , \quad \cos\xi_1 = \cos\alpha_2\cos\omega_1 + \cos\xi_2\operatorname{sen}\omega_1\ ,$$
$$\cos\lambda_1 = \cos\xi_2\cos\omega_1 - \cos\alpha_2\operatorname{sen}\omega_1$$

e per conseguenza

$$\frac{1}{T_1} = \sum\cos\xi_1\frac{d\cos\lambda_1}{ds} = -\sum\cos\xi_2\frac{d\cos\alpha_2}{ds_1} - \frac{d\,\omega_1}{ds_1}.$$

Ora poichè i differenziali sono presi spostandosi lungo la C_1, potremo porre a meno d'infinitesimi d'ordine superiore

$$d \cos \alpha_2 = \cos \alpha'_2 - \cos \alpha_2,$$

quindi per la a), avremo

$$m) \qquad \frac{1}{T_1} = -\frac{d\omega_1}{\varepsilon f(u)} - \frac{1}{T_2}.$$

Dalle formole precedenti risulta che presa ad arbitrio una curva C_2 a torsione costante $\frac{1}{T_2}$ e una curva C_1 che la tagli in M_0 in modo che la tangente della seconda coincida colla binormale della prima, la superficie assintotica che contiene la C_2 come geodetica e la C_1 come traiettoria ortogonale è perfettamente determinata.

Infatti se M'_0 è il punto infinitamente vicino ad M_0 sulla C_1 dal quale esce la C'_2, si potrà porre $ds' = M_0M'_0 = \varepsilon$, il che equivale a prendere $f(u) = 1$ nel punto M_0. Ora siccome i coseni $\cos\lambda'_2$, $\cos\mu'_2$, $\cos\nu'_2$ debbono rispettivamente coincidere in M'_0 con

$$\cos \alpha_1 + d \cos \alpha_1 = \cos \lambda_2 + \varepsilon \frac{\cos \xi_1}{\rho_1}$$

$$\cos \beta + d \cos \beta_1 = \cos \mu_2 + \varepsilon \frac{\cos \eta_1}{\rho_1}$$

$$\cos \gamma_1 + d \cos \gamma_1 = \cos \nu_2 + \varepsilon \frac{\cos \zeta_1}{\rho_1}$$

si avrà per la d)

$$\frac{\cos\xi_1}{\rho_1} = -f'(u)\cos\alpha_2 - \rho_2\left(f''(u) - \frac{f(u)}{T_2^2}\right)\cos\xi_2$$

e le altre due analoghe. Poichè inoltre si ha per la 2ª delle l)

$$\sum \cos\xi_1 \cos\alpha_2 = \cos\omega_1 \quad , \quad \sum \cos\xi_1 \cos\xi_2 = \operatorname{sen}\omega_1$$

avremo

$$f'(u) = -\frac{\cos\omega_1}{\rho_1} \quad , \quad \rho_2\left(\frac{f(u)}{T_2^2} - f''(u)\right) = \frac{\operatorname{sen}\omega_1}{\rho_1}$$

e quindi in M_0

$$f(u) = 1 \quad , \quad f'(u) = -\left(\frac{\cos\omega_1}{\rho_1}\right)_0 , \quad f''(u) = \frac{1}{T_2^2} - \left(\frac{\operatorname{sen}\omega_1}{\rho_2\rho_1}\right)_0 ,$$

e la $f(u)$ dovendo soddisfare all'equazione lineare del 3º ordine e), è completamente determinata.

Possiamo quindi enunciare il teorema

Data una curva C_2 *a torsione costante e una curva* C_1 *che l'incontri in un punto* M_0 *in modo che in esso la tangente della* C_1 *coincida colla binormale della* C_2, *esiste una ed una sola superficie assintotica che contiene la* C_2 *come geodetica e la* C_1 *come traiettoria ortogonale.*

12. Ritornando ora alla funzione $f(u)$, per esprimere

analiticamente che essa cambia di forma nel passare da una geodetica ad un'altra, introdurremo in essa un nuovo parametro v, i cui singoli valori determineranno, quando la superficie s' imagini già costruita, la forma della funzione stessa lungo le geodetiche della superficie. E siccome lo stesso dovrà allora ripetersi per la flessione $\frac{1}{\rho_2}$ delle stesse geodetiche, se si sceglie il parametro v in modo che sia $dv = \varepsilon$, la b) ci dice intanto che fra la funzione $f(u, v)$ relativa ad un certo valore del parametro v, la flessione della corrispondente geodetica e di quella infinitamente vicina, esiste la relazione

$$\frac{1}{\rho'_2} - \frac{1}{\rho_2} = \frac{2}{T_2} \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} dv$$

ovvero

$$\frac{\partial \frac{1}{\rho_2}}{\partial v} = \frac{2}{T_2} \frac{\partial f(u, v)}{\partial u};$$

dunque l' espressione $\frac{1}{\rho_2} du + \frac{2}{T_2} f(u, v)\, dv$ è un differenziale esatto, e ponendo

$$\frac{1}{\rho_2} du + \frac{2}{T_2} f(u, v)\, dv = 2\, d\varphi$$

se ne ricaverà

$$\frac{1}{\rho_2} = 2\frac{\partial \varphi}{\partial u} \ , \quad \frac{f(u\,,\,v)}{T_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

e la e) diventa

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 = \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - \dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial u^2 \partial v}}{2\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}}\right\}$$

che è precisamente la (9') del numero 9. E nello stesso modo si vede che posto $\frac{1}{T_2} = 1$, le formole f),g),h),m) che danno la curvatura geodetica, la curvatura normale e l'assoluta e la torsione delle u=cost, coincidono colle corrispondenti (10') del numero 9.

Questi risultati servono così a legittimare la costruzione infinitesimale che abbiamo dato di una superficie assintotica.

§. 5.

La trasformazione di Bäcklund applicata alle superficie assintotiche.

13. Le formole relative alla trasformazione di Bäcklund applicata alle superficie assintotiche, si dedurranno da quelle del §. 3, ponendovi $T_2=1$, e riguardando l'angolo σ come costante. Riassumendo i risultati allora ottenuti possiamo dunque dire:

Se x , y , z sono le coordinate dei punti di una superficie assintotica S espresse per i parametri u e v delle geodetiche a torsione costante e delle traiettorie ortogonali, e la superficie corrisponde alla soluzione φ della (9′), le formole

$$x_1 = x + \cos\sigma\left(\cos\theta\frac{\partial x}{\partial u} + \operatorname{sen}\theta\, X\right)$$

$$y_1 = y + \cos\sigma\left(\cos\theta\frac{\partial y}{\partial u} + \operatorname{sen}\theta\, Y\right)$$

$$z_1 = z + \cos\sigma\left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial u} + \operatorname{sen}\theta\, Z\right)$$

dove θ è una funzione di u e v che soddisfa all'equazione a differenziali totali

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} & d\theta - \left\{\operatorname{sen}\theta\left(\frac{1-\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\right) - 2\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right\} du - \\ & \left\{\operatorname{cotg}\sigma\left[\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - \dfrac{\partial^3\varphi}{\partial u^2\,\partial v}}{2\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}\right) - \cos\theta\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\right] - \frac{1+\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\} dv = 0 \end{aligned}\right.$$

definiscono una nuova superficie assintotica S_1, che chiameremo la *trasformata di Bäcklund* della S.

Il segmento costante $= \cos\sigma$ che unisce due punti corrispondenti è inclinato dello stesso angolo θ sopra ambedue le geodetiche che passano pei suoi estremi. L'integrale della (9′) corrispondente alla nuova superficie assintotica è dato da

$$\Phi = -\theta - \varphi$$

e fra queste tre funzioni avranno luogo le relazioni analoghe alle (15) , (16)

$$(15') \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \Phi}{\partial u} = \operatorname{sen}\theta \frac{1 - \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma},$$

$$(16') \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \operatorname{sen}\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \\ & = \cos\sigma \left\{ \operatorname{sen}\theta \left(\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - \dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial u^2 \partial v}}{2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}} \right) - \cos\theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \right\} \\ & \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \operatorname{sen}\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \\ & = \cos\sigma \left\{ - \operatorname{sen}\theta \left(\frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial v} - \dfrac{\partial^3 \Phi}{\partial u^2 \partial v}}{2 \dfrac{\partial \Phi}{\partial u}} \right) + \cos\theta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Sulla equazione (20) si potrebbe ripetere quanto si disse al numero 6 per la corrispondente (13′), e in particolare le si potrà sostituire la (13″), dove sia posto $T_2 = 1$, quando si prenda per funzione incognita la Φ invece della θ.

14. Nel caso che trattiamo delle superficie assintotiche, ossia di $T_2 = 1$, dalle (16′) e dalla (15′) derivata rispetto a v, si deducono facilmente le altre

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial v} - \dfrac{\partial^3 \Phi}{\partial u^2 \partial v}}{2\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}} = \dfrac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - \dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial u^2 \partial v}}{2\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}} - \operatorname{sen} \theta \dfrac{1 - \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial v} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\right), \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \cos \theta \dfrac{1 - \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial v} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\right); \end{cases}$$

che quadrate e sommate, danno, secondo la notazione introdotta:

$$(22)\quad [\Phi]^2 + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2 = [\varphi]^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2$$

il che dimostra che l' espressione

$$[\varphi]^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2$$

è un *invariante* rispetto alla trasformazione di Bäcklund.

Indicando con $\frac{1}{\rho'_1}$ la flessione delle $u = \text{cost}$ sulla S_1, alla (22) si può dare la forma

$$(22')\qquad \left(\frac{1}{\rho_1'^2} - 1\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{1}{\rho_1^2} - 1\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2$$

Invece le flessioni $\frac{1}{\rho_2}$, $\frac{1}{\rho'_2}$ delle geodetiche corrispondenti a torsione costante, sono legate per la (15′) dalla relazione

$$\frac{1}{\rho'_2} = \frac{1}{\rho_2} - 2 \operatorname{sen} \theta \frac{1 - \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma} .$$

15. Applichiamo la trasformazione di Bäcklund a costante σ ad una delle due superficie assintotiche considerate al numero 10, per esempio alla prima, giacchè la seconda condurrebbe ad analoghi risultati. Le equazioni della superficie iniziale saranno quindi

$$x = \cos \sigma \frac{\cos \beta}{\cosh \alpha}, \; y = - \cos \sigma \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cosh \alpha}, \; z = u - \cos \sigma \operatorname{tgh} \alpha$$

con

$$\alpha = \frac{1 - \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma} u - v \quad , \quad \beta = u - v \operatorname{tg} \sigma,$$

il suo elemento lineare essendo dato da

$$ds^2 = du^2 + \frac{1}{\cosh^2 \alpha} dv^2 .$$

Allora la (20) ammette l' integrale θ_1 definito dalle formole

$$\operatorname{sen} \theta_1 = \frac{1}{\cosh \alpha} \quad , \quad \cos \theta_1 = \operatorname{tgh} \alpha$$

e il suo intregale generale si trova quindi esser dato da

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\theta - \theta_1) = \frac{\cosh \alpha}{\Omega}$$

essendo

$$\Omega = \frac{1 - \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\, u - \frac{v}{\operatorname{sen}\sigma} + C$$

e C una costante arbitraria. Le formole relative alla nuova superficie assintotica sono quindi

$$x_1 = \frac{2\cos\sigma}{\Omega^2 + \cosh^2\alpha}\left\{(\cosh\alpha - \operatorname{sen}\sigma.\Omega\operatorname{senh}\alpha)\cos\beta + \cos\sigma.\Omega\operatorname{senh}\alpha\operatorname{sen}\beta\right\}$$

$$y_1 = -\frac{2\cos\sigma}{\Omega^2 + \cosh^2\alpha}\left\{(\cosh\alpha - \operatorname{sen}\sigma.\Omega\operatorname{senh}\alpha)\operatorname{sen}\beta - \cos\sigma.\Omega\operatorname{senh}\alpha\cos\beta\right\}$$

$$z_1 = u - \frac{2\cos\sigma}{\Omega^2 + \cosh^2\alpha}\left\{\operatorname{senh}\alpha\cosh\alpha + \operatorname{sen}\sigma.\,\Omega\right\}$$

La superficie trasformata corrispondente all' integrale particolare θ_1 si riduce, come si verifica facilmente, all' asse delle z.

Se invece si applicasse alla stessa superficie iniziale la trasformazione di Bäcklund a costante $-\sigma$, si troverebbe come integrale generale della corrispondente equazione (13''):

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Phi = \frac{\operatorname{senh}(C - u\operatorname{tg}\sigma - v)}{\operatorname{sen}\sigma\cosh\left(C - \dfrac{u}{\cos\sigma}\right)}$$

sicchè ponendo

$$\Omega_1 = \operatorname{senh}(C - u\operatorname{tg}\sigma - v)\,,\quad \Omega_2 = \operatorname{sen}\sigma\cosh\left(C - \frac{u}{\cos\sigma}\right),$$

le formole relative alla superficie trasformata saranno

$$x_1 = \frac{2\cos\sigma\,\Omega_2}{\cosh\alpha\,(\Omega_1^2+\Omega_2^2)} \times$$

$$\left\{(\Omega_2 + \operatorname{sen}\sigma.\,\Omega_1 \operatorname{senh}\alpha)\cos\beta - \cos\sigma.\,\Omega_1 \cosh\alpha \operatorname{sen}\beta\right\},$$

$$y_1 = -\frac{2\cos\sigma\,\Omega_2}{\cosh\alpha\,(\Omega_1^2+\Omega_2^2)} \times$$

$$\left\{(\Omega_2 + \operatorname{sen}\sigma.\,\Omega_1 \operatorname{senh}\alpha)\operatorname{sen}\beta + \cos\sigma.\,\Omega_1 \cosh\alpha \cos\beta\right\},$$

$$z_1 = u - \frac{2\cos\sigma\,\Omega_2}{\cosh\alpha\,(\Omega_1^2+\Omega_2^2)}\left\{\operatorname{senh}\alpha\,\Omega_2 - \operatorname{sen}\sigma.\,\Omega_1\right\}.$$

§. 6.

La trasformazione delle curve a torsione costante e le superficie assintotico-cicliche.

16. Supponiamo che la superficie iniziale a cui viene applicata la trasformazione di Bäcklund, si riduca, come caso limite, ad una sola curva a torsione costante $=1$. Da quanto si è veduto per la trasformazione delle superficie assintotiche, si deduce che da una data curva a torsione costante si possono dedurre infinite altre della stessa specie, e precisamente se x, y, z sono le coordinate dei punti della curva iniziale C, espresse per l'arco u, $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$; $(\cos\xi, \cos\eta, \cos\zeta)$; $(\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$ i coseni di direzione della tangente, della normale principale e della binormale, e se x_2, y_2, z_2, $\cos\alpha_2$, ... sono

gli elementi analoghi per la curva trasformata C_2, le formole che servono a passare dall' una all'altra saranno

$$(23)\quad \begin{cases} x_2 = x + \cos\sigma\,(\cos\theta\cos\alpha + \operatorname{sen}\theta\cos\xi), \\ y_2 = y + \cos\sigma\,(\cos\theta\cos\beta + \operatorname{sen}\theta\cos\eta), \\ z_2 = z + \cos\sigma\,(\cos\theta\cos\gamma + \operatorname{sen}\theta\cos\zeta). \end{cases}$$

Da queste con successive derivazioni e coll' applicazione delle formole del Serret, si possono calcolare gli elementi relativi alla nuova curva C_2, ma si possono anche dedurre immediatamente dalle formole già stabilite per le superficie e concludere che

Se θ *è una funzione dell' arco* u *di una curva C a torsione costante* $=1$ *che soddisfa all' equazione differenziale*

$$(24)\qquad \frac{1}{\rho} + \frac{d\theta}{du} = \operatorname{sen}\theta\,\frac{1-\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}$$

(essendo ρ il raggio di flessione della C) *le formole* (23) *definiscono una nuova curva* C_2 *a torsione costante* $=1$, *per la quale si ha*

$$(25)\quad \begin{cases} \cos\alpha_2 = \cos\alpha - \operatorname{sen}\theta\,(1-\operatorname{sen}\sigma)\times \\ \qquad (\operatorname{sen}\theta\cos\alpha - \cos\theta\cos\xi) - \cos\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\lambda, \\ \cos\xi_2 = (1-\operatorname{sen}\sigma)(\cos\theta\cos\alpha + \operatorname{sen}\theta\cos\xi)\operatorname{sen}\theta \\ \qquad - \operatorname{sen}\sigma\cos\xi - \cos\sigma\cos\theta\cos\lambda, \\ \cos\lambda_2 = \cos\sigma\,(\operatorname{sen}\theta\cos\alpha - \cos\theta\cos\xi) - \operatorname{sen}\sigma\cos\lambda, \\ \qquad \dfrac{1}{\rho_2} = \dfrac{1}{\rho} - 2\operatorname{sen}\theta\,\dfrac{1-\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}. \end{cases}$$

16. L' integrale generale della (24) contiene una costante arbitraria, e se θ_1 ne è un integrale particolare, se ne avrà l'integrale generale colla formola

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} (\theta - \theta_1) = e^{-\int P\,du} \left\{ C + \int e^{\int P\,du} Q\,du \right\}$$

essendo

$$P = \frac{1 - \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma} \cos \theta_1 \quad , \quad Q = \frac{1 - \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma} \operatorname{sen} \theta_1 .$$

In ogni caso, potendosi scegliere il valore della costante arbitraria in modo che in ogni punto della curva C l'angolo θ prenda un valore qualunque, si vede che il sistema ∞' di curve C_2, che così si ottengono dalla C, sono le generatrici di una superficie che si può anche considerare come il luogo dei circoli di raggio $= \cos \sigma$, descritti coi centri nei punti della C e giacenti nei corrispondenti piani osculatori. Le equazioni di questa superficie sono le (23) dove si consideri θ ed u come variabili indipendenti, e il suo elemento lineare prende la forma

$$ds^2 = \left\{ 1 + \left(\frac{\cos \sigma}{\rho} - \operatorname{sen} \theta \right)^2 - \operatorname{sen}^2 \sigma \operatorname{sen}^2 \theta \right\} du$$
$$+ 2 \cos \sigma \left(\frac{\cos \sigma}{\rho} - \operatorname{sen} \theta \right) du\, d\theta + \cos^2 \sigma\, d\theta^2 ;$$

cambiando le linee $\theta =$ cost ponendo $\theta = \theta\,(u, v)$, la superficie sarà riferita ai circoli $u =$ cost e alle curve

C_2 $v =$ cost e l' elemento lineare diventa

$$ds^2 = du^2 + 2 \operatorname{sen} \sigma \cos \sigma \operatorname{sen} \theta \frac{\partial \theta}{\partial v} du\, dv + \cos^2 \sigma \left(\frac{\partial \theta}{\partial v}\right)^2 dv^2 .$$

Le linee $v =$ cost tagliano dunque i circoli sotto un angolo variabile il cui coseno è $= \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \theta$, e la loro normale principale è inclinata sulla normale alla superficie di un angolo $= \operatorname{arc\,cos} \dfrac{\cos \sigma}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \sigma \operatorname{sen}^2 \theta}}$.

Finalmente notiamo che siccome cambiando σ in $-\sigma$ la superficie rimane la stessa, perchè generata dagli stessi circoli, essa viene così a contenere due sistemi di linee a torsione costante $= 1$; da ciascun punto della superficie partono due di queste linee inclinate fra loro di un angolo eguale ad arc cos $(1 - 2 \operatorname{sen}^2 \sigma \operatorname{sen}^2 \theta)$.

Le linee $\theta = 0$, $\theta = \pi$ sulla superficie sono gli inviluppi dei circoli $u =$ cost, o si possono costruire tagliando la superficie colla sviluppabile osculatrice della C. Lungo queste curve, le due linee C_2 che escono da ciascuno dei loro punti, la tagliano ortogonalmente, toccandosi fra di loro, e avendo in quei punti la stessa flessione della curva iniziale C.

18. Per dare un esempio della trasformazione di Bäcklund applicata alle curve a torsione costante, supponiamo che la curva C si riduca, come caso limite, ad una retta. Allora la sua flessione è nulla in ogni punto e la torsione indeterminata, ma se per ogni punto di essa si fissa come binormale una retta perpendicolare, la cui direzione varii con una legge determinata, ma arbitraria,

spostandosi lungo la C, anche per la torsione si verrà a fissare un valore per ogni punto della retta.

Infatti, se questa si prende per asse delle z, si avrà:

$$\begin{array}{lll} \cos\alpha = 0 & , \cos\beta = 0 & , \cos\gamma = 1, \\ \cos\lambda = \operatorname{sen}\omega\ , & \cos\mu = \cos\omega\ , & \cos\nu = 0, \\ \cos\xi = \cos\omega\ , & \cos\eta = -\operatorname{sen}\omega\ , & \cos\zeta = 0, \end{array}$$

essendo ω una funzione arbitraria della lunghezza u della retta C, che sta a rappresentare l'angolo della binormale coll' asse delle y. La torsione si calcolerà per esempio dalla relazione $\frac{d\cos\mu}{du} = \frac{1}{T}\cos\eta$, ossia

$$\frac{1}{T} = \omega'(u)\,.$$

Se si vuole adunque che sia $\frac{1}{T} = 1$, basterà prendere $\omega(u) = u + c$ con c costante arbitraria; ma se cominciamo a contare le lunghezze u dall' origine, ossia poniamo $u = z$, e supponiamo che nell' origine la binormale coincida coll' asse y, dovrà essere per $u = 0$, $\cos c = 1$, $\operatorname{sen} c = 0$, e perciò $c = 0$.

L'equazione (24), essendo ora $\frac{1}{\rho} = 0$, darà

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta = e^{\alpha_1} \qquad \text{con} \quad \alpha_1 = \frac{1 - \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\,u - v\,,$$

essendo v la costante che determina le diverse trasformate a torsione costante della C. I circoli di raggio $= \cos\sigma$ generano in questo caso, come profili meridiani, una superficie elicoidale col parametro $= 1$, le cui equazioni, riferite ai circoli $u =$ cost e alle $v =$ cost, sono

$$x = \cos\sigma \frac{\cos u}{\cosh \alpha_1}, \quad y = -\cos\sigma \frac{\operatorname{sen} u}{\cosh \alpha_1}, \quad z = u - \cos\sigma \operatorname{tgh} \alpha_1$$

ovvero, se si cambia σ in $-\sigma$, ossia si riferisce la superficie ai circoli $u =$ cost e all' altro sistema di linee a torsione costante

$$x = \cos\sigma \frac{\cos u}{\cosh \alpha_2}, \quad y = \cos\sigma \frac{\operatorname{sen} u}{\cosh \alpha_2}, \quad z = u - \cos\sigma \operatorname{tgh} \alpha_2$$

con

$$\alpha_2 = \frac{1 + \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} u + v .$$

Le linee a torsione costante di ciascuno dei due sistemi sono congruenti fra loro pel moto elicoidale, e coincidono con quelle da cui siamo partiti al numero 10, ossia sono le assintotiche di un' elicoide pseudosferica del Dini che ha per profilo meridiano una trattrice di raggio $= \cos\sigma$.

19. Ma il caso più interessante della trasformazione delle curve a torsione costante è quello di $\sigma = 0$. Allora le formole per passare dalla curva C alla sua trasformata C_1 sono le seguenti:

$$(23')\quad \begin{cases} x_2 = x + \cos\theta\cos\alpha + \operatorname{sen}\theta\cos\xi\,, \\ y_2 = y + \cos\theta\cos\beta + \operatorname{sen}\theta\cos\eta\,, \\ z_2 = z + \cos\theta\cos\gamma + \operatorname{sen}\theta\cos\zeta\,, \end{cases}$$

dove θ soddisfa all' equazione

$$(24')\qquad \frac{1}{\rho} + \frac{d\theta}{du} = \operatorname{sen}\theta$$

e le altre formole relative alla C_2 sono

$$(25)\quad \begin{cases} \cos\alpha_2 = \cos\alpha - \operatorname{sen}\theta\,(\operatorname{sen}\theta\cos\alpha - \cos\theta\cos\xi) - \operatorname{sen}\theta\cos\lambda, \\ \cos\xi_2 = (\cos\theta\cos\alpha + \operatorname{sen}\theta\cos\xi) + \cos\theta\cos\lambda\,, \\ \cos\lambda_2 = (\operatorname{sen}\theta\cos\alpha + \cos\theta\cos\xi), \\ \qquad \dfrac{1}{\rho_2} = \dfrac{1}{\rho} - 2\operatorname{sen}\theta\,. \end{cases}$$

La superficie luogo di tutte le curve C_2, dedotte colla trasformazione dalla C, diventa in questo caso una superficie assintotica, poichè le C_2 ne sono geodetiche, e si riducono ad un solo sistema, le cui traiettorie ortogonali sono gli stessi circoli di raggio $= 1$, descritti nei piani osculatori della C, coi centri nei punti corrispondenti di essa.

L' elemento lineare della superficie diventa

$$ds^2 = du^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 dv^2,$$

che conferma quanto ora si è detto.

In generale, alle superficie assintotiche, in cui le

$u =$ cost sono tutti circoli di raggio $= 1$, daremo il nome di superficie *assintotico-cicliche*.

Abbiamo quindi il teorema:

Le superficie luogo dei circoli descritti attorno ad ogni punto di una curva a torsione costante $= 1$ *come centro e nel piano osculatore con un raggio* $= 1$, *sono superficie assintotico-cicliche* (*).

20. Per trovare la forma dell' integrale φ della (9') del numero 9 relativa a questa classe di superficie, osserviamo che essendo le $u =$ cost circoli, e perciò curve piane, si dovrà avere per esse $\frac{1}{T_1} = 0$, quindi per l'ultima delle (10')

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial v} = - \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

Di più siccome si ha

$$\sum (x_2 - x) \cos \alpha_2 = \cos \theta$$

ossia la congiungente i punti corrispondenti (x, y, z), (x_2, y_2, z_2) fa angoli eguali con le due curve, e poichè ω_1 è precisamente l' angolo che il segmento $\overline{M M_2}$ (normale principale della $u =$ cost, ossia del circolo) con-

(*) Questo teorema è stato dato per la prima volta dal prof. Bianchi nella Nota già citata: Sulle curve a doppia curvatura; quindi anche da Demartres: Sur les surfaces à génératrices circulaires; Annales de l'école normale supérieure, Paris 1885.

tato da M_2 verso M fa colla tangente alla C_2, avremo $\omega_1 = \theta - \pi$, e però

$$\frac{\partial \theta}{\partial v} = - \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

da cui integrando e indicando con $\psi(u)$ una funzione della sola u:

$$\varphi = - \theta - \psi(u),$$

Questa, derivata rispetto ad u, diventa per la (24')

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = - \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{\rho} - \psi'(u);$$

d' altra parte, dovendo essere $\frac{1}{\rho_2} = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial u}$, si ha per l'ultima delle (25')

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = - \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{2\rho}, \tag{26}$$

che confrontata colla precedente dà

$$\psi'(u) = \frac{1}{2\rho}$$

e quindi

$$\varphi = - \theta - \tfrac{1}{2} \int \frac{du}{\rho}. \tag{26'}$$

Con questo valore della funzione φ si soddisfa, come è facile verificare, all'equazione (9'); possiamo quindi concludere :

Le superficie assintotico-cicliche generate dai circoli di raggio $= 1$ *che hanno i centri nei punti di una curva C a torsione costante* $= 1$ *e sono descritti nei piani osculatori, corrispondono a quegli integrali della* (9') *che hanno la forma*

$$\varphi = -\theta - \tfrac{1}{2}\int \frac{du}{\rho},$$

dove ρ *è il raggio di flessione della C e* θ *soddisfa all' equazione*

$$\frac{1}{\rho} + \frac{\partial \theta}{\partial u} = \operatorname{sen} \theta .$$

21. Se si elimina θ fra le (26), (26'), si può anche dire che ogni superficie della classe considerata corrisponde ad un integrale della (9') della forma

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \operatorname{sen}\left(\varphi + \tfrac{1}{2}\int \frac{du}{\rho}\right) + \frac{1}{2\rho}.$$

Essendo poi $\frac{1}{\rho}$ una funzione arbitraria di u, si potrà dire e facilmente verificare che se $\varphi(u, v)$ soddisfa all' equazione

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \operatorname{sen}(\varphi + F) + F' \tag{27}$$

dove F è una funzione arbitraria di u, essa soddisfa anche alla (9').

Viceversa:

Ogni integrale della (9') *che soddisfi alla* (27) *corrisponde ad una superficie assintotico-ciclica, luogo dei circoli di raggio* $=1$, *descritti nei piani osculatori di una curva a torsione costante* $=1$ *e coi centri nei punti della curva stessa.*

La flessione di questa è poi data da

$$\frac{1}{\rho}=2\,F'(u)\,.$$

Infatti se per mezzo delle (10') si calcolano gli elementi $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{\rho_1}$ relativi alle $u=\text{cost}$, si trova in causa della (27):

$$\frac{1}{r_1}=\frac{\cos\omega_1}{\rho_1}=-\cos(\varphi+F)\,,\ \frac{1}{R_1}=\frac{\operatorname{sen}\omega_1}{\rho_1}=\operatorname{sen}(\varphi+F)\,,$$

quindi $\frac{1}{\rho_1{}^2}=1$, e conseguentemente

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial u}=-\frac{\partial\varphi}{\partial u}-F'\ ,\ \ \frac{\partial\omega_1}{\partial v}=-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,.$$

Le linee $u=\text{cost}$ sono dunque a torsione nulla e a flessione costante $=1$, si riducono cioè a tutti circoli di raggio $=1$. Inoltre se x_2, y_2, z_2 sono le coordinate correnti di una qualunque delle $v=\text{cost}$ e x, y, z quelle della curva C luogo dei centri dei circoli nei punti corrispondenti, si avrà

$$x = x_2 + \cos \omega_1 \cos \alpha_2 + \operatorname{sen} \omega_1 \cos \xi_2 ,$$

$$y = y_2 + \cos \omega_1 \cos \beta_2 + \operatorname{sen} \omega_1 \cos \eta_2 ,$$

$$z = z_2 + \cos \omega_1 \cos \gamma_2 + \operatorname{sen} \omega_1 \cos \zeta_2 ;$$

e siccome l' equazione

$$\frac{1}{\rho_2} + \frac{\partial \omega_1}{\partial u} = \operatorname{sen} \omega_1$$

analoga alla (24') è evidentemente soddisfatta, la C sarà pure a torsione costante eguale ad 1, e la sua flessione, essendo

$$\frac{1}{\rho_2} = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} ,$$

sarà

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_2} - 2 \operatorname{sen} \omega_1 = 2 \mathrm{F}'(u).$$

Se poi si osserva che per la C si hanno formole analoghe alle (25'), si avrà:

$$\cos \lambda = \operatorname{sen} \omega_1 \cos \alpha_2 - \cos \omega_1 \cos \xi_2 ,$$

$$\cos \mu = \operatorname{sen} \omega_1 \cos \beta_2 - \cos \omega_1 \cos \eta_2 ,$$

$$\cos \nu = \operatorname{sen} \omega_1 \cos \gamma_2 - \cos \omega_1 \cos \zeta_2 ,$$

e questi sono precisamente i coseni di direzione della normale al piano del circolo u =cost innalzata per esempio dal punto (x_2 , y_2 , z_2). Dunque il circolo è tracciato nel piano osculatore della curva C, e il teorema è così completamente dimostrato.

22. Finalmente possiamo notare che l'equazione (27) risolve completamente il problema di trovare tutte le superficie assintotico-cicliche, ossia le superficie di questa specie considerate nel teorema del numero 20 sono le più generali possibili.

Infatti per una di queste superficie avendosi $\frac{1}{\rho_1} = 1$, $\frac{1}{T_1} = 0$, sarà intanto

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial v} = -\frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

da cui integrando

$$\omega_1 = -\varphi - F + c \tag{28}$$

essendo F una funzione arbitraria di u e c una costante arbitraria. Per la curvatura geodetica delle $u =$ cost e per la loro curvatura normale si avrà poi

$$\frac{1}{r_1} = \cos \omega_1 = -\frac{\dfrac{\partial^2 \omega_1}{\partial u \, \partial v}}{\dfrac{\partial \omega_1}{\partial v}},$$

$$\frac{1}{R_1} = \operatorname{sen} \omega_1 = \frac{1}{\dfrac{\partial \omega_1}{\partial v}} \left\{ \frac{\dfrac{\partial \omega_1}{\partial v} - \dfrac{\partial^3 \omega}{\partial u^2 \partial v}}{2\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}} \right\}$$

la quale ultima, osservando che dalla prima si ricava:

$$\frac{\partial^3 \omega_1}{\partial u^2 \, \partial v} = \operatorname{sen} \omega_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial u} \frac{\partial \omega_1}{\partial v} + \cos^2 \omega_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial v},$$

diventa

$$2\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\operatorname{sen}\omega_1-\frac{\partial\omega_1}{\partial v}$$

e per la (28)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\operatorname{sen}(c-\varphi-\mathrm{F})+\mathrm{F}'. \tag{27'}$$

Con questo valore di $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ si soddisfa, come col valore (27), all' equazione fondamentale (9'); ma siccome una costante aggiunta alla φ non influisce sulla forma della superficie, e potremo quindi porre $c=\pi$, si vede che la (27') viene così a coincidere con la (27), e la superficie è di quelle considerate precedentemente *c. d. d.*

23. Ogni curva a torsione costante individua una superficie assintotico-ciclica. Se si vuole quella che ha per luogo dei centri dei circoli $u=$ cost una retta, basterà fare $\sigma=0$ nelle formole del numeso 18, o si avrà

$$x=\frac{\cos u}{\cosh(u+v)}\,,\quad y=-\frac{\operatorname{sen} u}{\cosh(u+v)},\quad z=u-\operatorname{tgh}(u+v)$$

che è quindi un'elicoide col parametro del moto elicoidale $=1$, e che ha per profilo meridiano un circolo di raggio $=1$ col centro sull'asse. Le linee $v=$ cost sono le assintotiche della pseudosfera di raggio $=1$.

Da ciascuna di queste linee, che sono tutte congruenti, si potrà dedurre una nuova superficie assintotico-ciclica, integrando l' equazione

$$\frac{2}{\cosh u} + \frac{d\theta}{du} = \operatorname{sen} \theta$$

la quale, ammettendo l'integrale particolare

$$\operatorname{sen} \theta_1 = \frac{1}{\cosh u}\ ,\ \cos \theta_1 = \operatorname{tgh} u$$

corrispondente all' asse delle z, avrà per integrale generale

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\theta_1 - \theta) = \frac{\cosh u}{v - u}$$

e le equazioni della corrispondente superficie saranno quindi

$$x_1 = \frac{2 \cosh u}{(v-u)^2 + \cosh^2 u} \left\{ \cos u - (v-u) \operatorname{sen} u \right\},$$

$$y_1 = - \frac{2 \cosh u}{(v-u)^2 + \cosh^2 u} \left\{ \operatorname{sen} u + (v-u) \cos u \right\},$$

$$z_1 = u - \frac{2 \operatorname{senh} u \cosh u}{(v-u)^2 + \cosh^2 u};$$

l' asse delle z appartiene alla superficie e corrisponde a $v = \infty$.

Se invece si parte dalla curva

$$x = \cos \sigma \frac{\cos u}{\cosh \alpha}\ ,\ y = - \cos \sigma \frac{\operatorname{sen} u}{\cosh \alpha}\ ,\ z = u - \cos \sigma \operatorname{tgh} \alpha$$

con

$$\alpha = \frac{1 - \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma} u$$

l' equazione da integrarsi è

$$\frac{2(1 - \operatorname{sen} \sigma)}{\cos \sigma \cosh \alpha} + \frac{d\theta}{du} = \operatorname{sen} \theta$$

che trasformata, prendendo per funzione incognita la φ, legata alla θ dalla relazione

$$\varphi = -\theta - \tfrac{1}{2}\int \frac{du}{\rho} = -\theta - \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{\cosh \alpha}$$

diventa

$$\cosh \alpha \frac{d\varphi}{du} = \cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{senh} \alpha + \frac{1 - \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma},$$

e ammette l' integrale generale

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \varphi = \frac{e^{\alpha} - e^{v-u}}{1 + e^{\alpha + v - u}}.$$

Finalmente, se si considera la curva a torsione costante $= 1$

$$x = \operatorname{sen} \varepsilon \cos \varepsilon \cos\left(\frac{u}{\cos \varepsilon}\right), \quad y = \operatorname{sen} \varepsilon \cos \varepsilon \operatorname{sen}\left(\frac{u}{\cos \varepsilon}\right),$$

$$z = u \cos \varepsilon$$

elica tracciata sopra un cilindro circolare retto di raggio $= \operatorname{sen} \varepsilon \cos \varepsilon$, essendo ε l' angolo d' inclinazione dell'elica sulle generatrici, l' equazione corrispondente (24') è

$$\operatorname{tg} \varepsilon + \frac{d\theta}{du} = \operatorname{sen} \theta$$

il cui integrale è

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \theta = \frac{1}{\operatorname{tg} \varepsilon} \left\{ 1 + \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \varepsilon} \operatorname{tgh} \tfrac{1}{2} \left(v + u \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \varepsilon} \right) \right\}.$$

§. 7.

Le superficie assintotico-ipercicliche.

24. Possiamo ora domandarci se esistano delle superficie assintotiche più generali di quelle studiate al paragrafo precedente, tali cioè che tutte le linee $u = \text{cost}$, traiettorie ortogonali delle geodetiche a torsione costante, senza ridursi a circoli di raggio $= 1$, abbiano tutte la stessa flessione costante $= 1$.

A tale domanda si risponde affermativamente osservando che l' equazione fondamentale (9'), moltiplicata per $2\,[\varphi]$, si riduce alla forma

$$\frac{\partial}{\partial u} \left\{ [\varphi]^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 \right\} = 0,$$

ovvero integrando rispetto ad u, ed indicando con $f(v)$ una funzione arbitraria di v:

$$\left(\frac{1}{\rho^2} - 1\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 = f(v),$$

dalla quale, essendo $\frac{\partial \varphi}{\partial v} \lessgtr 0$, e potendosi scegliere $f(v)=0$, si deduce il teorema

Se una linea u $=$ cost *di una superficie assintotica* S *è a flessione costante* $=1$, *tutte le altre sono pure a flessione costante* $=1$, *e la corrispondente soluzione* φ *dell' equazione* (9') *soddisfa all' altra*

$$[\varphi]^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \, \partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2. \tag{29}$$

A queste superficie più generali delle assintotico-cicliche potremo dare il nome di superficie *assintotico-ipercicliche*.

25. Indicando al solito con ω_1 l' angolo che la normale principale della u = cost fa in ogni punto con la geodetica v = cost, si avrà per una superficie assintotico-iperciclica S

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} \cos \omega_1 = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \, \partial v}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} \operatorname{sen} \omega_1 = [\varphi]; \tag{30}$$

dalle quali formole è facile dedurre con successive derivazioni le altre

$$\frac{\partial(\varphi+\omega_1)}{\partial v} \cos \omega_1 = -\frac{\partial^2(\varphi+\omega_1)}{\partial u \, \partial v}, \quad \frac{\partial(\varphi+\omega_1)}{\partial v} \operatorname{sen} \omega_1 = [\varphi+\omega_1] \tag{30'}$$

sicchè se si pone

$$\Phi = -\varphi - \omega_1$$

la funzione Φ soddisferà all'equazione (29) e conseguentemente anche alla (9'). Dunque ad essa corrisponderà una nuova superficie assintotico-iperciclica S_1, per la quale l'angolo Ω_1 che la normale principale della $u = \text{cost}$ fa in ogni punto colla geodetica $v = \text{cost}$, è dato da

$$\Omega_1 = \omega_1 - \pi .$$

Vedremo più avanti qual è la dipendenza geometrica delle due superficie S e S_1. Intanto osserviamo che eliminando $\cos\omega_1$ dalla prima delle (30) e dalla prima delle (30') si ha

$$2\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial\omega_1}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\omega_1}{\partial u\,\partial v}=0$$

ovvero

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\omega_1}{\partial v}\right\}=0;$$

quindi integrando, e indicando con $f(v)$ una funzione della sola v

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\omega_1}{\partial v}\right\}=f(v),$$

la quale, poichè per le linee $u = \text{cost}$ di una superficie assintotica si ha sempre $-\dfrac{1}{T_1}=\dfrac{\frac{\partial\omega_1}{\partial v}}{\frac{\partial\varphi}{\partial v}}$, ci permette di enunciare il teorema:

Se una linea u=cost *di una superficie assintotico-iperciclica si riduce a un circolo di raggio* =1, *tutte le altre sono pure circoli di raggio* = 1, *e la superficie si riduce ad una assintotico-ciclica.*

26. Rispetto poi alla trasformazione di Bäcklund applicata ad una superficie assintotico-iperciclica S, osserviamo che la relazione

$$\left(\frac{1}{\rho_1'^2}-1\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2=\left(\frac{1}{\rho_1^2}-1\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2$$

dimostrata al numero 14 ci dice

Ogni superficie assintotico-iperciclica si cangia per trasformazioni di Bäcklund in superficie della medesima specie.

Indicando poi in questo caso con ω_1' la funzione analoga alla ω_1 per la superficie trasformata, le formole (21) del numero 14 ci dànno

$$-\operatorname{sen}\omega_1'=\frac{\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\omega_1+(1-\operatorname{sen}\sigma)\operatorname{sen}\theta\cos(\theta-\omega_1)-\cos\sigma\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\sigma\cos(\theta-\omega_1)},$$

$$-\cos\omega_1'=\frac{-\operatorname{sen}\sigma\cos\omega_1-(1-\operatorname{sen}\sigma)\cos\theta\cos(\theta-\omega_1)+\cos\sigma\cos\theta}{1-\cos\sigma\cos(\theta-\omega_1)},$$

dalle quali, derivando rispetto a v, risulta

$$\frac{\partial\theta}{\partial v}+\frac{\partial\omega_1'}{\partial v}=\frac{\operatorname{sen}\sigma}{1-\cos\sigma\cos(\theta-\omega_1)}\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}-\frac{\partial\omega_1}{\partial v}\right)$$

che per la prima delle (16′) numero 12 può anche ridursi all' altra

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{\partial \omega_1'}{\partial v} = - \frac{\operatorname{sen} \sigma}{1 - \cos\sigma \cos(\theta - \omega_1)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \omega_1}{\partial v} \right) .$$

Dunque se

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \omega_1}{\partial v} = 0 ,$$

anche

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{\partial \omega_1'}{\partial v} = 0 ,$$

ossia

Le superficie assintotico-cicliche si cangiano per trasformazioni di Bäcklund in superficie della medesima natura

§ 8.

La trasformazione complementare.

27. Vogliamo ora vedere come si comporta la trasformazione di Bäcklund applicata alle superficie assintotiche nel caso speciale in cui sia $\sigma = 0$. Come si fa pei sistemi di Weingarten a curvatura negativa, questa si chiamerà *trasformazione complementare.*

Se S è una superficie assintotica corrispondente alla soluzione φ dell' equazione fondamentale (9'), la sua trasformata complementare S_1 sarà definita dalle formole

$$x_1 = x + \cos\theta \frac{\partial x}{\partial u} + \operatorname{sen}\theta \, X ,$$

$$y_1 = y + \cos\theta \frac{\partial y}{\partial u} + \operatorname{sen}\theta \, Y ,$$

$$z_1 = z + \cos\theta \frac{\partial z}{\partial u} + \operatorname{sen}\theta \, Z ,$$

dove θ è una funzione di u e v che soddisfa le equazioni

$$(31)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \operatorname{sen}\theta\,[\varphi] - \cos\theta\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v}, \\ &2\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial u} = \operatorname{sen}\theta \end{aligned} \right.$$

e la soluzione della (9′) corrispondente alla trasformata complementare sarà data da

$$\Phi = -\varphi - \theta\,.$$

Bisogna però osservare che la seconda delle (31) è una conseguenza della prima, come si verifica facilmente derivando questa rispetto ad u, e tenendo conto della (9′) a cui soddisfa φ.

Sicchè per quelle superficie assintotiche in cui si abbia

$$[\varphi]^2 + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\right)^2 > \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2$$

ossia le linee $u = \text{cost}$ siano a flessione > 1, o almeno per quella porzione di superficie in cui tale condizione è soddisfatta, si avranno in generale due valori per θ, e quindi due trasformate S_1.

Per ciascuna di esse si avrà poi

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} - \operatorname{sen}\theta\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial x}{\partial u} - \cos\theta\, X\right) - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\frac{\partial\varphi}{\partial v}}\frac{\partial x}{\partial v},$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{\partial\Phi}{\partial v}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial x}{\partial u} - \cos\theta\, X\right)$$

$$X_1 = \operatorname{sen}\theta\left(\cos\theta\frac{\partial x}{\partial u} + \operatorname{sen}\theta\, X\right) + \frac{\cos\theta}{\frac{\partial\varphi}{\partial v}}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Alla nuova superficie S_1 si potrà ancora applicare la trasformazione complementare, poichè la relazione

$$\left(\frac{1}{\rho_1^2} - 1\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{1}{\rho'^2_1} - 1\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2$$

ci dice che anche la S_1 hâ le linee $u =$ cost a flessione > 1, e poichè il segmento costante $= 1$ che unisce due punti corrispondenti delle superficie S, S_1 fa angoli eguali con le due geodetiche a torsione costante che passano per i suoi estremi, si potrà dire che delle due trasformate complementari della S_1 una coincide colla iniziale S e l' altra è una nuova superficie assintotica. Così proseguendo con successive trasformazioni complementari, si costruirà dalla superficie nota S un'intera serie di superficie assintotiche

$$\ldots\ldots S_{-1}\,,\; S_{-2}\,,\; S\,,\; S_1\,,\; S_2\,,\; \ldots\,,$$

che si estende all' infinito da una parte e dall' altra. Dunque:

Da ogni nota superficie assintotica colla torsione *delle geodetiche* $=1$, *e colla flessione delle traiettorie ortogonali* >1, *possono dedursi, senza calcoli d' integrazione, infinite nuove superficie della medesima specie .*

28. La prima delle (31), per essere

$$[\varphi] = \frac{\operatorname{sen} \omega_1}{\rho_1} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \quad , \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \, \partial v} = \frac{\cos \omega_1}{\rho_1} \frac{\partial \varphi}{\partial v} ,$$

diventa

$$\rho_1 = \cos (\theta - \omega_1) ,$$

dalla quale, mentre si deduce nuovamente che affinchè θ sia reale deve essere $\frac{1}{\rho_1} > 1$, si trae la seguente semplice costruzione dei punti della superficie trasformata, corrispondenti a quelli della superficie iniziale.

Per ciascun punto della S come centro, s' immagini costruito un circolo di raggio $=1$ giacente nel piano osculatore della geodetica $v = \cos$t; il piano del circolo contiene, oltre la tangente della $v =$cost, la normale principale della $u=$cost, rette inclinate fra loro dell'angolo ω_1. Se dal centro di curvatura della $u =$ cost, che per ipotesi deve essere interno al circolo, si conduce una perpendicolare al raggio che passa per esso, i due punti d'incontro che si ottengono sulla circonferenza appartengono ciascuno ad una delle due trasformate di S.

Ripetendo la stessa costruzione per tutti i circoli descritti lungo una linea $u=$cost, è chiaro che la trasformata della $u =$ cost sarà una linea tracciata sopra una superficie canale luogo delle sfere di raggio $= 1$ avente per direttrice la stessa $u = \text{cost}$. Ed è facile persuadersi che questa linea è precisamente uno degli spigoli di regresso della superficie canale.

Infatti se con x, y, z si indicano le coordinate di una curva gobba a flessione > 1 espresse in funzione del suo arco, con x_1, y_1, z_1 le coordinate correnti della superficie canale che l'ha per direttrice, l'equazione della superficie stessa sarà

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 = 1$$

e i punti dello spigolo di regresso si otterranno combinando questa equazione colle altre

$$(x_1 - x)\cos\alpha + (y_1 - y)\cos\beta + (z_1 - z)\cos\gamma = 0,$$

$$(x_1 - x)\cos\xi + (y_1 - y)\cos\eta + (z_1 - z)\cos\zeta = \rho_1,$$

la prima delle quali è l'equazione del piano normale alla curva e la seconda quella di un piano normale alla normale principale e distante dal punto x, y, z della lunghezza ρ_1. Si ottengono dunque due spigoli di regresso i cui punti si costruiscono precisamente come quelli della trasformata della linea $u = \text{cost}$. Dunque:

Il luogo degli spigoli di regresso del sistema ∞' *di superficie canali inviluppo delle sfere di raggio* $= 1$ *coi centri distribuiti lungo le linee* u $=$ cost *di una superficie assintotica* S *colla torsione delle geodetiche* $= 1$, *costituisce le due trasformate complementari della superficie* S.

Dalle equazioni precedenti, scambiando x , y , z con x_1 , y_1 , z_1 si deduce che se si costruisce la superficie canale che ha per direttrice uno degli spigoli di regresso di quella già costruita, uno dei suoi due spigoli di regresso coincide colla direttrice della prima. Ossia, come già si è trovato, se della superficie trasformata della S si costruiscono le due trasformate complementari, una di esse coincide coll' iniziale S.

Ritornando all' equazione

$$\rho_1 = \cos (\theta - \omega_1) ,$$

si vede subito che se $\rho_1 = 1$, ossia se la superficie S è assintotico-iperciclica, si ha per θ l'unico valore $\theta = \omega_1$, e perciò un' unica trasformata complementare S_1 corrispondente alla funzione

$$\Phi = - \varphi - \omega_1$$

che è generata dalle curve luogo dei centri di curvatura delle u=cost della S. Questo risultato, che serve a completare quello ottenuto al numero 25 del paragrafo 7, si può enunciare col teorema:

Ogni superficie assintotico-iperciclica S *ha una superficie assintotico-iperciclica coniugata* S_1 *che è il luogo dei centri di curvatura delle sue linee* u *a flessione costante. Inversamente la coniugata di* S_1 *è la* S.

Se la S è una superficie assintotico-ciclica, la sua coniugata S_1 si riduce al luogo dei centri dei circoli.

29. Nel sistema ∞^2 di circoli costruiti al numero precedente, consideriamo quei sistemi ∞' che hanno i

centri distribuiti lungo le linee $v =$ cost della superficie assintotica S. Ciascuno di questi sistemi dà luogo ad una superficie assintotico-ciclica che ha per direttrice una $v =$ cost. La geodetica a torsione costante della superficie trasformata corrispòndente alla geodetica $v =$ cost della superficie iniziale sarà evidentemente una delle geodetiche a torsione costante della superficie assintotico-ciclica che ha per direttrice la linea v, e siccome questa linea è geodetica per ambedue le superficie, esse si toccheranno lungo questa geodetica, quindi:

Le superficie assintotico-cicliche che hanno per direttrici le geodetiche a torsione costante di una superficie assintotico S *ammettono un inviluppo costituito da due falde che sono le due trasformate complementari della superficie* S .

§. 9.

Le superficie assintotiche e i sistemi tripli ortogonali di Weingarten a curvatura negativa.

30. Abbiamo già notato al paragrafo 4 che le superficie assintotiche, ossia quelle superficie che contengono un sistema di geodetiche tutte colla stessa torsione costante $= 1$, s' incontrano nello studio dei sistemi tripli ortogonali di Weingarten a curvatura negativa, di quei sistemi cioè che contengono un sistema di superficie pseudosferiche di raggio $= 1$; e precisamente esse hanno per traiettorie ortogonali delle geodetiche a torsione costante le

curve C, traiettorie ortogonali delle superficie pseudosferiche lungo le singole assintotiche, e per geodetiche le assintotiche secondo cui tagliano le successive superficie pseudosferiche.

Ora è utile giungere a questo stesso risultato per via analitica, e per questo rammenteremo che se 2φ è l'angolo che in ogni punto fanno fra di loro le assintotiche delle superficie pseudosferiche di un sistema di Weingarten, questo è definito dalla seguente forma del suo elemento lineare (*):

$$(32)\qquad ds^2 = \cos^2\varphi\, du^2 + \text{sen}^2\varphi\, dv^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2 dw^2$$

dove le $w = \text{cost}$ sono le superficie pseudosferiche, e φ soddisfa alle equazioni a derivate parziali

$$(33)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} = \text{sen}\,\varphi\cos\varphi\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial w}\right) = \cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial w} + \frac{1}{\text{sen}\,\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\,\partial w},\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\text{sen}\,\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\,\partial w}\right) = \text{sen}\,\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial w} - \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial w},\\
&\frac{\partial^3\varphi}{\partial u\,\partial v\,\partial w} = \frac{\cos\varphi}{\text{sen}\,\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\,\partial w} - \frac{\text{sen}\,\varphi}{\cos\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial w};
\end{aligned}\right.$$

che sono 3 sole indipendenti, potendosi la terza dedurre come conseguenza dalle prime due.

(*) L. Bianchi. Sopra i sistemi tripli ortogonali di Weingarten, num. 4.

Se s'introduce la flessione $\frac{1}{\rho}$ delle curve C traiettorie ortogonali delle $w =$ cost, definita dalla relazione

$$(34)\left(\frac{1}{\rho^2}-1\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial w}\right)^2+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial v \partial w}\right)^2-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)^2$$

le (33) prendono la forma semplice

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}=\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\left(\frac{1}{\rho^2}-1\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)^2\right\}=0,\quad \frac{\partial}{\partial v}\left\{\left(\frac{1}{\rho^2}-1\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)^2\right\}=0\,.$$

Poniamo

$$u+v=2\alpha\quad,\quad u-v=2\beta;$$

allora le linee $\alpha =$ cost , $\beta =$ cost su ciascuna superficie pseudosferica sono le linee assintotiche e α , β i loro archi. E poichè le equazioni precedenti trasformate con queste coordinate diventano

$$(23')\begin{cases}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\left(\dfrac{1}{\rho^2}-1\right)\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial w}\right)^2\right\}=0,\ \dfrac{\partial}{\partial\beta}\left\{\left(\dfrac{1}{\rho^2}-1\right)\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial w}\right)^2\right\}=0,\end{cases}$$

mentre la (34) si trasforma nell'altra:

$$\left(\frac{1}{\rho^2}-1\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2=\left(\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial w}-\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial\alpha^2\,\partial w}}{2\dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha}}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\,\partial w}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial w}-\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial\beta^2\,\partial w}}{2\dfrac{\partial\varphi}{\partial\beta}}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta\,\partial w}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2$$

si deduce che le (33) trasformate con le coordinate α e β diventano

$$(33)''\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\\&\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial w}-\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial\alpha^2\,\partial w}}{2\dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha}}\right),\\&\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2=\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial w}-\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial\beta^2\,\partial w}}{2\dfrac{\partial\varphi}{\partial\beta}}\right)\end{aligned}\right.$$

e l'elemento lineare (32) prende la forma

$$(32')\quad ds^2=du^2+2\cos2\varphi\,d\alpha\,d\beta+d\beta^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2dw^2.$$

E questo ci permette evidentemente di concludere che le superficie $\alpha=\text{cost}$, $\beta=\text{cost}$ sono superficie assintotiche.

31. Proponiamoci ora la questione: *se ogni superficie assintotica si possa inserire in un sistema di Weingarten a curvatura negativa.*

Per questo premettiamo la dimostrazione del seguente teorema:

Date due curve colla stessa torsione costante che s'incontrano in un punto, avendo in esso lo stesso piano osculatore, esse individuano una superficie pseudosferica che le contiene come assintotiche (*).

Siano C_α, C_β le due curve, la cui torsione supporremo $=1$; sia M_0 il punto comune e θ_0 l'angolo formato dalle loro tangenti in quel punto, α e β siano rispettivamente i loro archi, contati per esempio dal punto M_0; $\frac{1}{\rho_\alpha}$, $\frac{1}{\rho_\beta}$ le loro flessioni. Allora se supponiamo che la superficie esista, e indichiamo con θ l'angolo che in ogni punto fanno le assintotiche fra di loro, si ha come è noto (**):

$$\frac{1}{\rho_\alpha} = -\left(\frac{\partial \theta}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = -f(\alpha)\ ,\quad \frac{1}{\rho_\beta} = -\left(\frac{\partial \theta}{\partial \beta}\right)_{\beta=0} = -F(\beta),$$

avendo indicato con $f(\alpha)$ una funzione della sola α, e

(*) Cfr. S. Lie, Archiv for Mathematik og Naturvidenscab, Christiania, 1879 p. 306; Bäcklund, « Om ytor med konstant negativ krökning »; Annali della Università di Lund, T. XIX, p. 19.

(**) Vedi p. es: L. Bianchi: « Lezioni di Geometria differenziale » pag. 227.

con $F(\beta)$ una funzione della sola β, mentre θ come funzione di α, β soddisfa all'equazione a derivate parziali

$$(36) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial\alpha\partial\beta} = \operatorname{sen} \theta .$$

Pongasi

$$(37) \quad \theta(\alpha, \beta) = \theta_0 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\right)_0 \alpha + \left(\frac{\partial\theta}{\partial\beta}\right)_0 \beta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2}\right)_0 \alpha^2 + \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)_0 \alpha\beta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2}\right)_0 \beta^2 + \ldots,$$

dove l'indice zero indica che si deve porre $\alpha = 0$, $\beta = 0$ nelle corrispondenti funzioni fra parentesi. I coefficienti della serie verranno quindi determinati in forza delle (35) e della relazione

$$\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)_0 = \operatorname{sen} \theta_0$$

dalle formole

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\right)_0 = f_0(\alpha), \quad \left(\frac{\partial\theta}{\partial\beta}\right)_0 = F_0(\beta),$$

$$\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2}\right)_0 = f_0'(\alpha), \quad \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\partial\beta}\right)_0 = \operatorname{sen}\theta_0, \quad \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2}\right)_0 = F'_0(\beta)$$

$$\left(\frac{\partial^3\theta}{\partial\alpha^3}\right)_0 = f_0''(\alpha), \quad \left(\frac{\partial^3\theta}{\partial\alpha^2\partial\beta}\right)_0 = f_0(\alpha)\cos\theta_0,$$

$$\left(\frac{\partial^3\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta^2}\right)_0 = F_0(\beta)\cos\theta_0, \quad \left(\frac{\partial^3\theta}{\partial\beta^3}\right)_0 = F_0''(\beta),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Ora, poichè la (37) derivata rispetto ad α e β diventa

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial\alpha\partial\beta} = \operatorname{sen}\theta_0 + \left(\frac{\partial \operatorname{sen}\theta}{\partial \alpha}\right)_0 \alpha + \left(\frac{\partial \operatorname{sen}\theta}{\partial \beta}\right)_0 \beta +$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \operatorname{sen}\theta}{\partial \alpha^2}\right)_0 \alpha^2 + \left(\frac{\partial^2 \operatorname{sen}\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)_0 \alpha\,\beta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \operatorname{sen}\theta}{\partial \beta^2}\right)_0 \beta^2 + \dots$$

si vede che la funzione $\theta(\alpha, \beta)$ definita dalla (37) stessa soddisfa la (36), epperò la superficie pseudosferica, se esiste, è perfettamente determinata.

Meno facile è la dimostrazione dell'effettiva esistenza della superficie, perchè essa, almeno dal lato analitico, si riduce alla dimostrazione dell'esistenza di una funzione che soddisfa alla (36) colle condizioni (35) ai limiti, problema che, dato lo stato attuale della teoria delle equazioni a derivate parziali, sembra difficile potersi risolvere. Qui la dimostrazione è ridotta, ma con poco vantaggio, a quella della convergenza della serie (37).

Del teorema precedente si può dare la seguente dimostrazione geometrica infinitesimale, priva però di quel carattere di rigore che si richiede in simili ricerche.

Sia data la curva C_α a torsione costante $= 1$, e ad essa si applichi una *trasformazione infinitesimale di Bäcklund*, cioè colla costante $k = \cos\sigma$ infinitamente piccola. Se $\frac{1}{\rho'_\alpha}$ è la flessione della curva trasformata C'_α, si ha (n.° 16):

$$\frac{1}{\rho_\alpha} + \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = \operatorname{sen} \theta \, \frac{\cos \sigma}{1 + \operatorname{sen} \sigma} ,$$

$$\frac{1}{\rho'_\alpha} - \frac{1}{\rho_\alpha} = -2 \operatorname{sen} \theta \, \frac{\cos \sigma}{1 + \operatorname{sen} \sigma} .$$

Passando al limite per $\sigma = \frac{\pi}{2}$, se si pone fuori del limite $\cos \sigma = d\beta$, la seconda di queste equazioni ci dà

$$\frac{\frac{1}{\rho'_\alpha} - \frac{1}{\rho_\alpha}}{d\beta} = -\operatorname{sen} \theta \ , \ \text{ovvero} \ \frac{d \frac{1}{\rho_\alpha}}{d\beta} = -\operatorname{sen} \theta ,$$

e poichè la prima al limite diventa $\frac{1}{\rho_\alpha} = -\frac{d\theta}{d\alpha}$, si conclude che se l' angolo θ si riguarda come funzione dei parametri α e β, esso soddisfa all' equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \, \partial \beta} = \operatorname{sen} \theta .$$

La nuova curva C'_α sarà perfettamente determinata quando nel punto M_0 della C_α si attribuisca a θ il valore θ_0, angolo secondo il quale essa taglia la C_β; ripetendo sulla C'_α la stessa costruzione e così di seguito, è chiaro che il luogo delle curve C_α è una superficie pseudosferica di raggio $= 1$, la quale ha per assintotiche le curve C_α e C_β.

32. Ritornando ora alla questione proposta al principio del numero precedente, essa si risolve affermativamente mediante il teorema:

Una superficie assintotica S_α *può sempre inserirsi in un numero infinito di sistemi di Weingarten, ciascuno dei quali è perfettamente determinato quando alla data superficie* S_α *si aggiunga un'altra superficie assintotica* S_β *che abbia comune con essa una curva* C_0 *traiettoria ortogonale delle geodetiche a torsione costante.*

Questo teorema è una conseguenza immediata di quello del n.° precedente e dell'altro (*):

Una superficie pseudosferica Σ *e una curva* C_0 *uscente da un suo punto* M_0 *normalmente alla superficie, individua uno ed un solo sistema di Weingarten, al quale appartiene la superficie* Σ, *e che fra le curve* C *ortogonali alle superficie pseudosferiche del sistema contiene la curva data* C_0.

Infatti le due curve a torsione costante C_α e C_β delle due superficie assintotiche S_α e S_β che escono dal punto M_0 della curva C_0, determinano una superficie pseudosferica, e questa insieme alla curva C_0 individua un sistema di Weingarten; e pel teorema del numero 11, le superficie assintotiche di esso che passano per le curve C_α e C_β coincidono necessariamente colle S_α e S_β.

Partendo dalla superficie S_α, il sistema di Weingar-

(*) L. Bianchi. « Sopra i sistemi tripli ortogonali di Weingarten » §, 5, n.° 11.

ten individuato da essa e dalla S_β, può anch' esso costruirsi con successive trasformazioni infinitesimali di Bäcklund. Infatti sia $\varphi(\alpha, w)$ l'integrale dell'equazione

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\left(\frac{1}{\rho^2}-1\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2\right\}=0, \tag{38}$$

corrispondente alla superficie S_α. Applicando a questa la trasformazione di Bäcklund a costante $k=\cos\sigma$ infinitamente piccola, la funzione φ' corrispondente alla superficie trasformata S'_α, soddisfa alle equazioni

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi'}{\partial\alpha}-\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=-\operatorname{sen}\theta\,\frac{\cos\sigma}{1+\operatorname{sen}\sigma}\;.\\ &\frac{\partial\varphi}{\partial w}-\frac{\partial\varphi'}{\partial v}\operatorname{sen}\sigma=\cos\sigma\left\{\operatorname{sen}\theta\left|\left(\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial w}-\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial\alpha^2\,\partial w}}{2\dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha}}\right)-\cos\theta\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial w}\right\}\right.\\ &\varphi'=-\varphi-\theta\,.\end{aligned}\right. \tag{39}$$

Ora, passando al limite per $\sigma=\frac{\pi}{2}$, supponendo φ' funzione finita e continua dell' angolo σ, si avrà $\lim\theta=-2\varphi$, e la prima delle (39) se si pone $\cos\sigma=d\beta$, diventerà

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta}=\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\,. \tag{40}$$

La seconda invece, quando il suo primo membro si scriva sotto la forma

$$\frac{\partial \varphi}{\partial w} - \frac{\partial \varphi'}{\partial w} + (1 - \operatorname{sen} \sigma) \frac{\partial \varphi'}{\partial w}$$

diventa al limite

$$(41) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta \, \partial w} = - \left\{ \operatorname{sen} \theta \left(\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial w} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha^2 \, \partial w}}{2 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}} \right) - \cos \theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \, \partial w} \right\}.$$

Osserviamo inoltre che le equazioni

$$\left(\frac{\frac{\partial \varphi'}{\partial w} - \frac{\partial^3 \varphi'}{\partial \alpha^2 \, \partial w}}{2 \frac{\partial \varphi'}{\partial \alpha}} \right) = \left(\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial w} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha^2 \, \partial w}}{2 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}} \right) - \operatorname{sen} \theta \frac{\cos \sigma}{1 + \operatorname{sen} \sigma} \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial w} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial \alpha \, \partial w} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \, \partial w} + \cos \theta \frac{\cos \sigma}{1 + \operatorname{sen} \sigma} \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial w} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right)$$

dimostrate al n.° 14, diventano al limite per $\sigma = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial w} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha^2 \, \partial w}}{2 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}} \right) = - \operatorname{sen} \theta \frac{\partial \varphi}{\partial w}, \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \, \partial w} \right) = \cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial w};$$

moltiplicando la prima per $\left(\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial w} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha^2 \, \partial w}}{2 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}} \right)$ e la seconda per $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \, \partial w}$, e sommando tenendo conto della (41), si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \left(\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial w} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha^2 \partial w}}{2 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \, \partial w} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w} \right)^2 \right\} = 0$$

ossia

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \left(\frac{1}{\rho^2} - 1 \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w} \right)^2 \right\} = 0 . \tag{42}$$

Per determinare completamente la funzione φ, che contiene, come θ, una costante arbitraria, basterà assoggettarla alla condizione che in ogni punto della curva C_β della superficie S_β si abbia $2\varphi = -\theta$, essendo θ l' angolo secondo cui le trasformate della C_α tagliano la C_β. Ora, siccome le equazioni (38), (40), (42) a cui soddisfa φ come funziono di α, β, w coincidono colle (33′) del numero (30), il sistema triplo costruito, ponendo

$$\alpha + \beta = u \quad , \quad \alpha - \beta = v$$

si trasformerà in un sistema triplo ortogonale di Weingarten a curvatura negativa, che conterrà le due superficie assintotiche S_α e S_β.

33. Per determinare un sistema di Weingarten a curvatura negativa, prendiamo le due superficie assintotiche

$$
S_\alpha)\left\{\begin{aligned}
&x_1=\cos\sigma\frac{\cos\beta_1}{\cosh\alpha_1},\ y_1=-\cos\sigma\frac{\operatorname{sen}\beta_1}{\cosh\alpha_1},\ z_1=\alpha-\cos\sigma\operatorname{tgh}\alpha_1\\
&\alpha_1=\frac{1-\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\alpha-w,\ \beta_1=\alpha-w\operatorname{tg}\sigma;
\end{aligned}\right.
$$

$$
S_\beta)\left\{\begin{aligned}
&x_2=\cos\sigma\frac{\cos\beta_2}{\cosh\alpha_2},\ y_2=\cos\sigma\frac{\operatorname{sen}\beta_2}{\cosh\alpha_2},\ z_2=\beta-\cos\sigma\operatorname{tgh}\alpha_2\\
&\alpha_2=\frac{1+\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\beta-w,\ \beta_2=\beta+w\operatorname{tg}\sigma;
\end{aligned}\right.
$$

che hanno a comune la curva

$$
x=\cos\sigma\frac{\cos(w\operatorname{tg}\sigma)}{\cosh w},\ y=\cos\sigma\frac{\operatorname{sen}(w\operatorname{tg}\sigma)}{\cosh w},\ z=\cos\sigma\operatorname{tgh}w,
$$

traiettoria ortogonale delle loro geodetiche a torsione costante.

Il corrispondente sistema di Weingarten si può, in questo caso semplice, costruire dando all'insieme delle due superficie elicoidali S_α, S_β un moto elicoidale di parametro $=-\operatorname{sen}\sigma$, intorno all'asse comune. Infatti se si fa eseguire questo movimento alla superficie S_α), si ottiene il sistema triplo $\alpha=\text{cost}$, $t=\text{cost}$, $w=\text{cost}$ definito dalle formole

$$
\xi=\cos\sigma\frac{\cos(\beta_1-t)}{\cosh\alpha_1},\ \eta=-\cos\sigma\frac{\operatorname{sen}(\beta_1-t)}{\cosh\alpha_1},\ \zeta=\alpha-t\operatorname{sen}\sigma-\cos\sigma\operatorname{tgh}\alpha_1.
$$

Se si pone $t=\dfrac{2\beta}{1-\operatorname{sen}\sigma}$ e si cambiano le superficie $\alpha=\text{cost}$, ponendo $\alpha+\dfrac{1+\operatorname{sen}\sigma}{1-\operatorname{sen}\sigma}\beta$ al posto di α, le precedenti diventano

$$(43)\quad \xi = \cos\sigma \frac{\cos\omega_2}{\cosh\omega_1},\ \eta = -\cos\sigma\frac{\operatorname{sen}\omega_2}{\cosh\omega_1},\ \zeta = \alpha+\beta-\cos\sigma \operatorname{tgh}\omega_1,$$

dove si ha

$$(44)\quad \omega_1 = \frac{1-\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\alpha + \frac{1+\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\beta - w\ ,\ \omega_2 = \alpha-\beta-w\operatorname{tg}\sigma$$

e questo sistema triplo contiene evidentemente la superficie S_β corrispondente ad $\alpha=0$. Ponendo ora

$$\alpha+\beta = u \quad , \quad \alpha-\beta = v$$

le (44) diventano

$$(44')\qquad \omega_1 = \frac{u}{\cos\sigma} - v\operatorname{tg}\sigma - w\ ,\ \omega_2 = v - w\operatorname{tg}\sigma$$

e le (43) definiscono un sistema triplo ortogonale di Weingarten a curvatura negativa $=1$, che contiene due sistemi di elicoidi pseudosferiche del Dini e un sistema di sfere.

La forma dell' elemento lineare dello spazio è data da

$$ds^2 = \frac{1}{\cosh^2\omega_1}\left\{\operatorname{senh}^2\omega_1\,du^2 + dv^2 + dw^2\right\}.$$

Dott. Cesare Fibbi.