Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Rodolfo Bettazzi

Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili reali

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 5 (1888), p. 1-47

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1888_1_5__1_0>

SULLA
RAPPRESENTAZIONE ANALITICA
DELLE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI REALI

ESTRATTO DALLA TESI DI LAUREA

DEL

D.r RODOLFO BETTAZZI

Il chiariss. Prof. Dini, nel suo libro: « Serie di Fourier ed altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale », espone un metodo col quale si può sviluppare una funzione di una variabile reale, data in un certo intervallo nel quale soddisfa a certe condizioni, in una serie i cui termini siano funzioni date. Il processo che egli segue è in sostanza il seguente. Sotto convenienti condizioni per le funzioni $f(x)$ e $\varphi(x, h)$ dimostra la formula

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a f(x)\,\varphi(x, h)\,dx = f(0) \lim_{h=\infty} \int_0^a \varphi(x, h)\,dx\,;$$

indi se la funzione $\varphi(x, h)$ è tale che sia:

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a \varphi(x, h)\,dx = G$$

con G indipendente da a, finito e diverso da zero, pone sotto forma di serie il secondo membro della relazione

$$f(0) = \frac{1}{G} \lim_{h=\infty} \int_0^a f(x)\, \varphi(x\,, h)\, dx\,,$$

che si deduce dalla precedente, e la quale mediante trasformazioni di coordinate può darci il valore di $f(x)$ in un punto qualunque dell' intervallo in cui vale la formula stessa. Dando poi alla funzione $\varphi(x\,, h)$ forme convenienti, egli mostra come per i termini di questa serie si possano prendere a priori delle funzioni speciali, purchè soggette a certe determinate condizioni.

Il medesimo processo è suscettibile di essere applicato al caso generale delle funzioni di più variabili reali e ci dà per esse analoghi resultati. Scopo della presente nota è appunto di mostrare questa applicazione, limitatamente peraltro alla prima parte del metodo, senza occuparci cioè della forma che prenderà la serie che rappresenta la nostra funzione; con che potremo giungere all'importante teorema: « Ogni funzione finita e continua di n variabili « reali, definita in un certo campo finito, ha sempre in « questo campo infinite rappresentazioni analitiche ».

Richiamerò dapprima alcune proprietà degli integrali multipli, riferendomi a quanto in proposito ho esposto nella mia nota « Sul concetto di derivazione e d'integrazione delle funzioni di più variabili reali » la quale sta pubblicandosi nel Giornale di Matematiche del Prof. Battaglini.

I.

1. Si chiama *integrale assoluto* esteso ad un campo C ad n dimensioni di una funzione $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ di n variabili, finita in tutto quel campo C in cui essa è data, il limite della somma *n-pla*

$$\Sigma f_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_n} \omega_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_n},$$

dove $f_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_n}$ è un valore qualunque compreso fra il limite superiore e l' inferiore dei valori della funzione $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ nell'elemento di spazio $\omega_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_n}$ che appartiene al sistema in cui è stato diviso l' intero campo C mediante gli spazî ad $(n-1)$ dimensioni $x_1 = \text{cost}$, $x_2 = \text{cost}$, ... $x_n = \text{cost}$, essendo il limite preso all' impiccolire in un modo qualunque delle quantità $\omega_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_n}$; e s' indica con

$$\int \int_C \dots \int f(x_1, x_2, \dots x_n)\, dx_1\, dx_2, \dots dx_n.$$

Si dimostra che condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ sia atta all' integrazione assoluta in un campo C è che sia zero il limite della somma *n—pla*

$$\Sigma\, D_{\nu_1, \nu_2 \dots \nu_n} \omega_{\nu_1, \nu_2 \dots \nu_n}$$

dove $D_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n}$ è l'oscillazione della funzione $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ nello spazio $\omega_{\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_n}$ essendo il limite preso all'impiccolire in un modo speciale qualunque degli spazî ω. Si dimostra ancora che quando una funzione $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ è atta all' integrazione n—*pla* assoluta in un campo C, ed è anche atta all' integrazione n—*pla* ordinaria nel campo stesso, il valore dell' integrale calcolato colle due definizioni è lo stesso (*).

Dell' integrale assoluto possiamo dimostrare alcune proprietà le quali ci torneranno utili in seguito.

2. Se $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ è una funzione finita ed atta all' integrazione n—*pla* assoluta in un campo C dato, in questo campo è pure atta all'integrazione assoluta la funzione $f_1(x_1, x_2 \ldots x_n)$ dei suoi valori assoluti, e si ha, in valore assoluto:

$$\int\int_C \ldots \int f(x_1, x_2 \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \leq$$

$$\int\int_C \ldots \int f_1(x_1, x_2 \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n .$$

— Se $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$, $\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ sono due funzioni finite ed atte all'integrazione assoluta n—*pla* in un medesimo campo C, nel quale si abbia sempre $f(x_1, x_2 \ldots x_n) \leq \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)$, avremo

(*) V. mia nota citata: §§. 13, 14.

$$\int\int_C \cdots \int f(x_1, x_2 \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \leq$$
$$\int\int_C \cdots \int \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n .$$

— Se in un dato campo C la funzione $\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ è finita ed atta all' integrazione n—*pla* assoluta e lo stesso accade per $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ o almeno per il prodotto $f(x_1, x_2 \ldots x_n)\, \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)$, con $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ numericamente inferiore a un numero finito, indicando respettivamente con $f_1(x_1, x_2 \ldots x_n)$, $\varphi_1(x_1, x_2 \ldots x_n)$ le funzioni dei valori assoluti di $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$, $\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ e con L il limite superiore dei valori di $f_1(x_1, x_2 \ldots x_n)$ nel campo C, allora, essendo il prodotto $f_1(x_1, x_2 \ldots x_n)$. $\varphi_1(x_1, x_2 \ldots x_n)$ atto all'integrazione n—*pla* assoluta nel campo C, si ha:

$$\int\int_C \cdots \int f(x_1, x_2 \ldots x_n)\, \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \leq$$
$$\int\int_C \cdots \int f_1(x_1, x_2 \ldots x_n)\, \varphi_1(x_1, x_2 \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n ,$$

e quindi anche:

$$(1) \quad \int\int_C \cdots \int f(x_1, x_2 \ldots x_n)\, \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \leq$$
$$L \int\int_C \cdots \int \varphi_1(x_1, x_2 \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n .$$

— Sotto le medesime condizioni e di più ammesso che $\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ nel campo ove si considera abbia sempre il medesimo segno, se L ed l sono i limiti superiore ed inferiore di $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ nel campo dato, allora, poichè negli integrali

$$\int\int_C \cdots \int [L - f(x_1, x_2 \ldots x_n)]\, \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n) dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

$$\int\int_C \cdots \int [f(x_1, x_2 \ldots x_n) - l]\, \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

le differenze $L - f(x_1, x_2 \ldots x_n)$, $f(x_1, x_2 \ldots x_n) - l$ non sono mai negative e quindi i due integrali hanno il medesimo segno di $\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ o sono zero, avremo le disuguaglianze

$$L \int\int_C \cdots \int \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \gtreqless$$

$$\int\int_C \cdots \int f(x_1, x_2 \ldots x_n)\, \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \gtreqless$$

$$l \int\int_C \cdots \int \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

avendo luogo i segni superiori o gl' inferiori secondochè $\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ dove non è zero è positiva o negativa.

In generale si potrà scrivere:

$$(2) \quad \int\int_C \cdots \int f(x_1, x_2 \ldots x_n)\, \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \bar{f} \int\int_C \cdots \int \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

essendo $\bar{f}$ un conveniente valore compreso fra il limite superiore e l'inferiore dei valori della funzione $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ nel campo dato (questi valori limiti inclusi).

3. Se la funzione φ nel campo in cui è data è sempre finita e φ_0 è il limite superiore dei suoi valori assoluti o un numero maggiore, essendo allora $\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n) + \varphi_0$ sempre positiva o nulla, la formula precedente darà:

$$\int\int_C \cdots \int f \varphi \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n = \int\int_C \cdots \int f(\varphi + \varphi_0) \, dx_1 dx_2 \ldots dx_n -$$
$$-\varphi_0 \int\int_C \cdots \int f \, dx_1 . dx_2 \ldots dx_n = \bar{f} \int\int_C \cdots \int \varphi \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n +$$
$$+\varphi_0 \bar{f} \int\int_C \cdots \int dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n - \varphi_0 \bar{f}' \int\int_C \cdots \int dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n$$

cioè

$$\int\int_C \cdots \int f \varphi \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n = \tag{3}$$
$$\bar{f} \int\int_C \cdots \int \varphi \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n + \theta \, \varphi_0 \, C_0 \, D,$$

essendo C_0 il valore dell'integrale $\int\int_C \cdots \int dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n$ (il quale esiste sempre, se per il campo C supponiamo verificata l'ordinaria condizione al contorno (*)), D la

(*) V. mia nota § 12. Questa condizione (la quale limita alquanto la natura del contorno del campo per togliere ogni ambiguità sul modo massima oscillazione della funzione f nel campo C , $\bar{f}$ un valore conveniente di $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ preso fra il suo limite superiore e l' inferiore e θ un numero determinato compreso fra 0 ed 1 (questi limiti inclusi).

4. Passiamo ora a vedere quale espressione debba sostituirsi all' integrale assoluto, quando in esso si faccia un cambiamento di variabili indipendenti, sostituendo alle $x_1, x_2 \ldots x_n$ le altre variabili $\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_n$ legate alle prime da n equazioni della forma

$$x_i = x_i(\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_n),$$

nelle quali supporremo per semplicità che le funzioni del secondo membro siano finite e continue insieme alle loro derivate parziali del primo ordine almeno nel campo che si considera, e il determinante funzionale formato colle derivate di $x_1, x_2 \ldots x_n$ rispetto a $\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_n$ sia differente da zero per tutto, fuorchè al più in un numero finito di punti speciali.

Limitiamoci per semplicità d' esposizione al caso dell'integrale doppio assoluto delle funzioni di due variabili; il caso generale si tratterà in modo simile.

---

di prendere i valori degli spazi $\vartheta_{\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_n}$ che sono al contorno, nel calcolo del valore degli integrali multipli) è che la somma di quelli fra gli spazi $\delta x_1 \, \delta x_2 \ldots \delta x_n = \omega_{\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_n}$ in cui si divide il campo, che sono intersecati dal contorno, tenda allo zero, comunque impiccoliscano le $\delta x_1, \delta x_2 \ldots \delta x_n$.

In tutto quello che segue, anche quando non sia esplicitamente detto, supporremo che i campi di cui è parola verifichino sempre questa condizione.

Consideriamo allora l'in tegrale $\int_{C_1}\int dx\,dy$ esteso a un campo qualunque C_1 che sia compreso nel campo C e che sodisfi al contorno alle solite condizioni ed a quelle per l'integrabilità ordinaria, le quali verranno sempre verificate se il contorno di C_1 è formato da elementi $\rho = \text{cost}$. Questo integrale esisterà e sarà anche eguale all'integrale preso successivamente prima p. es. rispetto ad y e poi rispetto ad x. Allora si sa, per il teorema di Jacobi (*), che se $D = D(\rho_1, \rho_2)$ indica il determinante funzionale formato colle derivate delle x, y prese rispetto a ρ_1, ρ_2 sarà:

$$\int\int dx\,dy = \int\int D\,d\rho_1\,d\rho_2,$$

dove gl'integrali sono nei due membri calcolati come integrali semplici successivi ed i limiti dell' integrale del secondo membro sono convenientemente dedotti da quelli del primo membro. Siccome ora, per la ipotesi fatta circa le relazioni che legano le x, y colle ρ_1, ρ_2, sarà D una funzione continua di ρ_1, ρ_2, essa sarà anche atta all' integrazione assoluta nel campo dato rispetto a queste variabili, e l'integrale assoluto coinciderà con quello ordinario; talchè la relazione precedente sussiste anche fra gl' integrali assoluti estesi al campo C_1, cioè

$$\int_{C_1}\int dx\,dy = \int_{C_\rho}\int D\,d\rho_1\,d\rho_2,$$

(*) V. Dini — Lezioni di Analisi Infinitesimale.

ove C_ρ indica il campo C_1 su cui è stata fatta la trasformazione di coordinate.

Ciò posto, supponiamo la funzione $f(x, y)$ definita in un campo C nel quale essa è atta all' integrazione assoluta rispetto alle variabili x ed y. Dividiamo questo campo in rettangoli ω per mezzo di parallele agli assi x, y ed in quadrangoli curvilinei ω_ρ per mezzo di linee ρ_1=cost, ρ_2=cost. Se L, L_ρ indicano i limiti superiori dei valori della funzione data rispettivamente nei punti di ω e di ω_ρ e se consideriamo tutti i quadrangoli del sistema ρ contenuti *per intero* in un dato rettangolo ω, sarà per essi:

$$\Sigma \, L_\rho \, \omega_\rho \leq L \, \Sigma \, \omega_\rho \leq L \, \omega + a \, M,$$

se M è il limite superiore dei valori assoluti della funzione f nell' intero campo, ed a quel che rimane di ω, quando se ne sono tolti tutti i quadrangoli ω_ρ che esso contiene per intero. Ma se d indica un numero più grande di tutte le rette inscrittibili nei quadrangoli ω_ρ dell' intero campo C, ed h, k sono le lunghezze dei lati del rettangolo ω, sarà:

$$\Sigma \, L_\rho \, \omega_\rho < L \, \omega + 2 \, d \, (h+k) \, M.$$

Scrivendo questa relazione per tutti i rettangoli ω del campo e sommando, nel primo membro comparisce la somma relativa a tutti i quadrangoli ω_ρ del campo, tranne quelli al contorno del campo e quelli che giacciono lungo i lati del sistema ω. Dai primi si può prescindere, perchè la somma dei termini corrispondenti al diminuire di ω_ρ tende a zero, come è facile vedere a causa delle condizioni che sempre supponiamo verificate circa il contorno del campo C; aggiungendo i secondi si ottiene:

$$\Sigma\, L_\rho\, \omega_\rho < \Sigma\, L\, \omega + 4\, d\, (Pn + Qm)\, M,$$

dove P e Q indicano due numeri eguali o superiori alle lunghezze dei lati di un rettangolo parallelo agli assi circoscritto al campo totale C, ed m, n indicano il numero delle parti in cui si dividono i lati di questo rettangolo per ottenere, conducendo dai punti di divisione le parallele agli assi, il sistema di rettangoli ω. Prendendo d sufficientemente piccolo, cioè avendo sufficientemente impiccolite le ω_ρ, potremo scrivere:

$$\Sigma\, L_\rho\, \omega_\rho < \Sigma\, L\, \omega + \sigma$$

con σ piccolo a piacere. Così se l_ρ, l indicano i limiti inferiori dei valori della funzione $f(x, y)$ negli spazi ω_ρ, ω, sarà anche:

$$\Sigma\, l_\rho\, \omega_\rho > \Sigma\, l\, \omega - \sigma;$$

e sottraendo questa relazione dalla precedente,

$$\Sigma\, D'_\rho\, \omega_\rho < \Sigma\, D'\, \omega + 2\,\sigma,$$

dove D'_ρ, D' indicano le oscillazioni della funzione $f(x, y)$

nei respettivi spazî ω_ρ, ω. E poichè essendo per ipotesi la funzione $f(x, y)$ atta all'integrazione assoluta rispetto ad x, y nel campo dato si ha che $\lim \Sigma D' \omega = 0$ quando il limite sia preso all' impiccolire delle ω, sarà anche:

$$\lim \Sigma D_\rho' \omega_\rho = 0$$

allorchè le ω_ρ tendono a zero in un modo qualunque; giacchè prese le ω abbastanza piccole perchè sia $\Sigma D' \omega < \frac{\sigma_1}{2}$ e poi le ω_ρ anch'esse tanto piccole che sia $2\sigma < \frac{\sigma_1}{2}$, avremo, quando le ω_ρ sono di questo grado di piccolezza e anche più piccole:

$$0 \leq \Sigma D_\rho' \omega_\rho < \sigma_1,$$

e σ_1 è piccolo a piacere. Potendosi poi scrivere, per le relazioni precedenti:

$$\Sigma l \omega - \sigma < \Sigma l_\rho \omega_\rho \leq \Sigma L_\rho \omega_\rho < \Sigma L \omega + \sigma,$$

e potendosi σ rendere piccolo a piacere quando, fissate le ω, s'impiccoliscano le ω_ρ, siccome per ipotesi esistono e sono eguali i limiti di $\Sigma l \omega$, $\Sigma L \omega$ presi all' impiccolire di ω, avremo che esisteranno e saranno eguali i limiti di $\Sigma l_\rho \omega_\rho$, $\Sigma L_\rho \omega_\rho$ presi all'impiccolire comunque delle ω_ρ.

Possiamo quindi intanto concludere che esiste il

$$\lim \Sigma f_\rho \, \omega_\rho$$

dove f_ρ è un valore qualunque compreso fra il limite superiore e l'inferiore dei valori della funzione f nel quadrangolo ω_ρ e che questo limite è eguale al valore dell'integrale

$$\int_C\int f(x\,, y)\, dx\, dy$$

esteso al campo dato C.

Osserviamo ora che, per la definizione stessa di area, si ha:

$$\omega_\rho = \int\int dx\, dy,$$

essendo l'integrale del secondo membro esteso ad un campo limitato da due coppie di linee $\rho_1 = \text{cost}$, $\rho_2 = \text{cost}$. Ma, per quanto si è dimostrato, per ogni campo C_1 compreso nel campo C si ha:

$$\int_{C_1}\int dx\, dy = \int_{C_\rho}\int \mathrm{D}\, d\,\rho_1\, d\,\rho_2\,;$$

se per C_1 prendiamo dunque un campo ω_ρ compreso fra le linee ρ_1 , $\rho_1 + \Delta\,\rho_1$, ρ_2 , $\rho_2 + \Delta\,\rho_2$, sarà:

$$\omega_\rho = \int_{\omega_\rho}\int \mathrm{D}\, d\rho_1\, d\rho_2 = \bar{\mathrm{D}}_\rho \int_{\omega_\rho}\int d\rho_1\, d\rho_2 = \bar{\mathrm{D}}_\rho\, \Delta\,\rho_1\, \Delta\,\rho_2\,,$$

dove $\overline{D}_\rho$, per quanto si è detto al §. 2, è un valore conveniente compreso fra il limite superiore e l'inferiore dei valori di D nel quadrangolo ω_ρ. Avremo per conseguenza:

$$\Sigma f_\rho \omega_\rho = \Sigma f_\rho \overline{D}_\rho \Delta \rho_1 \Delta \rho_2,$$

e quindi:

$$\lim_{\omega_\rho = 0} \Sigma f_\rho \omega_\rho = \lim_{\Delta \rho_1 \Delta \rho_2 = 0} \Sigma f_\rho \overline{D}_\rho \Delta \rho_1 \Delta \rho_2,$$

quando per $\overline{D}_\rho$ in ogni successivo sistema di valori di $\Delta \rho_1 \Delta \rho_2$ si prenda un valore conveniente. Ma D è funzione continua di ρ_1 e ρ_2; quindi, per il teorema di Cantor, può scomporsi il campo C in aree ω_ρ tanto piccole che in ciascuna di esse l'oscillazione di D sia minore di σ, numero piccolo a piacere; se quindi $D_{\rho_1 \rho_2}$ indica un valore qualunque compreso fra il limite superiore e l'inferiore di D in ω_ρ sarà:

$$\Sigma f_\rho D_{\rho_1 \rho_2} \Delta \rho_1 \Delta \rho_2 - \Sigma f_\rho \overline{D}_\rho \Delta \rho_1 \Delta \rho_2 < \sigma \Sigma f_\rho \Delta \rho_1 \Delta \rho_2 \leq \sigma M \Sigma \Delta \rho_1 \Delta \rho_2$$

e perciò la differenza del primo membro può rendersi piccola a piacere all'impiccolire di σ e quindi di ω_ρ, cioè:

$$\lim_{\Delta \rho_1 \Delta \rho_2 = 0} \Sigma f_\rho D_{\rho_1 \rho_2} \Delta \rho_1 \Delta \rho_2 = \lim_{\Delta \rho_1 \Delta \rho_2 = 0} \Sigma f_\rho \overline{D}_\rho \Delta \rho_1 \Delta \rho_2 = \lim_{\omega_\rho = 0} \Sigma f_\rho \omega_\rho$$

È quindi evidente che esiste il limite della somma doppia:

$$\Sigma (f \mathrm{D}) \, \Delta \rho_1 \, \Delta \rho_2$$

dove $(f\mathrm{D})$ è un valore qualunque compreso fra il limite superiore e l' inferiore del prodotto $f(\rho_1 \rho_2) \, \mathrm{D}(\rho_1 \rho_2)$ nello spazio $\Delta \rho_1 \, \Delta \rho_2$ e che questo limite è eguale al valore di $\lim \Sigma f_\rho \, \omega_\rho$ e quindi al valore di $\int_\mathrm{C}\int f \, dx \, dy$ — ossia finalmente può dirsi che

$$(4) \qquad \int_\mathrm{C}\int f \, dx \, dy = \int_{\mathrm{C}\rho}\int f \, \mathrm{D} \, d\rho_1 \, d\rho_2 ,$$

dove gl' integrali dei due membri sono integrali assoluti, che è la formula che cercavamo.

Nel caso generale delle funzioni di n variabili, se s' indica con $\mathrm{D}(\rho_1 , \rho_2 \ldots \rho_n)$ il determinante funzionale della trasformazione, si dimostra in modo perfettamente identico la formula analoga:

$$(5) \qquad \int\int_\mathrm{C} \ldots \int f(x_1 , x_2 \ldots x_n) \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \int_{\mathrm{C}\rho}\int \ldots \int f(\rho_1 \cdot \rho_2 \ldots \rho_n) \, \mathrm{D}(\rho_1 , \rho_2 \ldots \rho_n) \, d\rho_1 \, d\rho_2 \ldots d\rho_n ,$$

dove $f(\rho_1 , \rho_2 \ldots \rho_n)$ indica la trasformata della funzione $f(x_1 , x_2 \ldots x_n)$ in coordinate $\rho_1 , \rho_2 \ldots \rho_n$: e questo teorema non è altro che un' estensione del teorema di

Jacobi sul cangiamento di variabili indipendenti negli integrali multipli, fatta per il caso degl' integrali multipli assoluti.

II.

5. Sia $\varphi(x_1\,, x_2 \ldots x_n\,, h)$ una funzione che per ogni valore finito di h sia atta all'integrazione assoluta in un campo C ad n dimensioni nel quale essa è definita come funzione delle n variabili $x_1\,, x_2 \ldots x_n$ e si mantenga tale anche al crescere indefinito di h; di più per ogni valore finito di h sia finita in tutto il campo C, eccetto in un intorno del punto $(0\,, 0 \ldots 0)$, nel quale prenda anche valori crescenti al crescere di h. Si consideri allora l' integrale n—*plo* assoluto:

$$\int\int_C \cdots \int f(x_1\,, x_1 \ldots x_n)\, \varphi(x_1\,, x_2 \ldots x_n\,, h)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

esteso ad un campo finito C che non contenga l'origine, ma che del resto si estenda comunque nella porzione di spazio ad n dimensioni in cui sono soddisfatte le condizioni precedenti. Per un campo qualunque ω che non contenga l' origine e nel quale per conseguenza la funzione φ è sempre inferiore ad un numero finito, potremo applicare la formula (3) del §. 3 e scrivere:

$$\int\int_\omega \cdots \int f\varphi\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \bar{f}_\omega \int\int_\omega \cdots \int \varphi\, d\omega + \theta' \varphi_{0,\omega}\, D_\omega \omega_1\,,$$

dove $d\omega$ indica l'elemento $dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ di spazio, f_ω un valore conveniente compreso fra il limite superiore e l'inferiore in ω della funzione f, la quale si suppone finita in tutto C, D_ω l'oscillazione di f in ω, $\varphi_{0,\omega}$ il limite superiore dei valori assoluti della funzione φ nel campo ω, θ' un valore conveniente compreso fra 0 ed 1 (questi limiti incl.) ed ω_1 non è che il valore dell'integrale $\int\int\ldots\int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ esteso al campo ω. Allora siccome nel campo C, le variabili x_1, x_2.., x_n varieranno negli intervalli respettivi $(a_1,b_1),(a_2,b_2)\ldots(a_n,b_n)$, si dividano questi intervalli respettivamente in $m_1,m_2\ldots m_n$ parti qualunque; immaginando per ciascuno dei punti di divisione costruiti i respettivi spazi ad $(n-1)$ dimensioni $x_1 = \text{cost}$, $x_2 = \text{cost} \ldots x_n = \text{cost}$, che passano per essi, verremo a scomporre il campo C in tanti elementi ω_1 di spazio ad n dimensioni o loro porzioni (*) in ciascuno dei quali varrà la formula precedente: sommando tutte le equazioni che così si ottengono, si ha:

$$(1) \qquad \int\int_C\ldots\int f\varphi\, dx_1 dx_2\ldots dx_n = \Sigma f_\omega \int\int_\omega\ldots\int \varphi\, d\omega + \theta\varphi_0 \Sigma D_\omega \omega_1,$$

dove le somme che quì compariscono sono somme n—*ple*,

(*) Questi elementi di spazio sono i corrispondenti dei rettangoli e dei parallelepipedi in cui, nelle ordinarie coordinate cartesiane, si scompone un campo a due o tre dimensioni mediante rette o piani paralleli agli assi o ai piani coordinati.

θ è compreso fra 0 ed 1 (questi limiti incl.) e φ_0 è il limite superiore dei valori assoluti della funzione φ in tutto il campo C. Ora poichè si ammette che la funzione f sia atta all'integrazione *n—pla* assoluta nel campo C, e che quindi si abbia in esso (§. 1.)

$$\lim_{m_1=\infty \dots m_n=\infty} \Sigma\, D_\omega\, \omega_1=0\ ,$$

quando m_1, $m_2 \dots m_n$ siano sufficientemente grandi l'ultimo termine della (1) sarà minore di σ, numero piccolo a piacere, poichè φ_0 è finito. Avendo poi supposta la funzione f finita in tutto il campo, in modo da poter porre, qualunque sia ω, $\overline{f}_\omega < A$, con A numero finito, ammettendo che per ogni porzione p del campo C che si possa estendere anche fino al contorno di esso si abbia:

$$(2)\qquad \lim_{h=\infty} \int\int_p \dots \int \varphi\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n=0,$$

allora scelti valori convenientemente grandi per i numeri m_1, $m_2 \dots m_n$, come già si è osservato, e dati ad essi questi valori, in modo che nel primo termine del secondo membro della (1) comparisca la somma di un numero *fisso* e *finito* di termini, a causa della (2) potremo prendere h tanto grande che ogni termine della somma del secondo membro sia minore di σ A e quindi per valori sufficientemente grandi di h si può rendere il secondo membro della (1), e perciò anche il primo membro, piccolo a piacere, cioè si ha il teorema:

« Se la funzione $\varphi(x_1, x_2 \dots x_n, h)$ per valori co-
« munque grandi di h e per ogni sistema di valori di
« $x_1, x_2 \dots x_n$, compreso nel campo C ad n dimensioni
« che non contiene l'origine, si mantiene minore in valore
« assoluto di una quantità finita φ_0, e per ogni porzione
« p del campo dato (che può estendersi fino al contor-
« no) si ha:

$$\lim_{h=\infty} \int \int_p \dots \int \varphi(x_1, x_2 \dots x_n, h)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n = 0,$$

« allora, quando $f(x_1, x_2 \dots x_n)$ sia una funzione finita
« ed atta all' integrazione assoluta nel campo C, avremo
« che:

$$(3) \quad \lim_{h=\infty} \int \int_C \dots \int f(x_1, x_2 \dots x_n) \varphi(x_1, x_2 \dots x_n, h)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n = 0 \text{ »}.$$

In quello che segue supporremo sempre che la funzione φ, presa come si è detto in principio del paragrafo precedente, soddisfaccia alla (2), dimodochè ogni qualvolta la $f(x_1, x_2 \dots x_n)$ sia atta all'integrazione assoluta, avrà luogo la (3).

6. Supponiamo ora che l' origine $(0, 0 \dots 0)$ sia nell' interno o sul contorno di un campo C ad n dimensioni, nel quale la funzione $f(x_1, x_2 \dots x_n)$ sia atta all'integrazione assoluta, e nel punto $(0, 0 \dots 0)$ sia anche continua. Escludendo allora questo punto con un intorno ε piccolo a piacere ma diverso da zero, e indicando con C'_0

il rimanente campo, avremo:

$$\int\int_{C_0}\cdots\int f\varphi dx_1 dx_2\dots dx_n = \int\int_{C_0'}\cdots\int [f-f_0]\varphi dx_1 dx_2\dots dx_n +$$

$$+\int\int_{\varepsilon}\cdots\int [f-f_0]\varphi dx_1 dx_2\dots dx_n + f_0\int\int_{C_0}\cdots\int \varphi dx_1 dx_2\dots dx_n$$

essendo f_0 il limite, che per ipotesi esiste, dei valori di $f(x_1, x_2 \dots x_n)$ quando $x_1, x_2 \dots x_n$ si avvicinano a zero nel campo dato C_0. Ora se le due funzioni f, φ, che si sono supposte atte all' integrazione assoluta e la prima anche finita in tutto il campo, soddisfano alle condizioni di validità della formula (3), avremo che il primo integrale del secondo membro tende a zero per $h=\infty$; se poi si suppone $\varphi(x_1, x_2 \dots x_n, h)$ atta all'integrazione assoluta nel campo C_0 anche ridotta alla funzione $\varphi_1(x_1, x_2 \dots x_n, h)$ dei suoi valori assoluti, allora quando ε è sufficientemente piccolo, essendo in tutto ε, per la continuità ammessa, $f-f_0<\sigma$, sarà per la formola (1) del §. 2:

$$\int\int_{\varepsilon}\cdots\int [f-f_0]\varphi dx_1 dx_2\dots dx_n < \sigma\int\int_{\varepsilon}\cdots\int \varphi_1 dx_1 dx_2\dots dx_n;$$

talchè se l'integrale $\int\int_{\varepsilon}\dots\int \varphi_1 dx_1 dx_2 \dots dx_n$ è sempre inferiore ad un numero finito anche all'indefinito crescere di h, tenderà a zero anche il secondo integrale del secondo membro, e si potrà quindi enunciare il teorema:

« Se la funzione $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n, h)$ per valori co-
« munque grandi di h e per ogni sistema di valori di
« $x_1, x_2, \ldots x_n$ compresi in un campo C' che non con-
« tiene l'origine si mantiene in valore assoluto inferiore
« ad una quantità finita, e per ogni porzione del campo
« C' è verificata la (2), e di più l'integrale

« $\int\int_\varepsilon\ldots\int \varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_n, h)\, dx_1\, dx_2, \ldots dx_n$ della
« funzione dei valori assoluti di $\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n, h)$ esteso
« ad un intorno dell'origine esiste e resta sempre minore
« di un numero finito anche al crescere di h, allora
« essendo $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ una funzione atta all'integra-
« zione assoluta nel campo dato C_0 il quale contenga nel-
« l'interno o sul contorno l'origine $(0, 0 \ldots 0)$ e nel
« quale essa avvicinandosi al punto $(0, 0 \ldots 0)$ tenda
« verso il valore f_0, avremo la formula:

$$(4)\ \lim_{h=\infty}\int\int_{C_0}\ldots\int f(x_1, x_2 \ldots x_n)\, \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n, h) dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= f_0 \lim_{h=\infty}\int\int_{C_0}\ldots\int \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n, h)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \text{ »}$$

— Se la funzione $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ senza essere continua nel punto $(0, 0 \ldots 0)$ fosse tale che condotti per questo punto un numero finito di campi ad $(n-1)$ dimensioni venisse con essi a dividersi il campo in m campi parziali $C_1, C_2 \ldots C_m$ in ciascuno dei quali essa sia continua in quel punto, eccetto al più lungo i campi ad $(n-1)$ dimensioni che abbiamo costruiti, la formula precedente varrà per ciascuno di essi, purchè in tutti i punti di ciascuno dei campi ε_s che si ottengono dalla porzione d' intorno del punto $(0, 0 \ldots 0)$ compreso nel campo parziale C_s escludendo da esso il pezzo di contorno, lungo il quale la funzione non è continua, mediante campi piccoli a piacere ma la cui piccolezza non influisce su quella di ε_s, sia

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) - f_{0,s} < \sigma,$$

essendo $f_{0,s}$ il valore che prende la funzione f nel punto $(0, 0 \ldots 0)$ del campo parziale C_s; poichè in tal caso la mancanza di continuità lungo il contorno dei campi parziali equivale ad un cambiamento del valore della funzione lungo campi ad $(n-1)$ dimensioni negli integrali precedenti in cui si supponga la funzione f continua in tutto C_s, il che non altera il valore degl'integrali stessi. Sommando le formule che così vengono ad ottenersi, risulterà in tal caso:

$$(5) \qquad \lim_{h=\infty} \int \int_{C_0} \ldots \int f \varphi \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n =$$
$$= \sum_1^m f_{0,s} \lim_{h=\infty} \int \int_{C_s} \ldots \int \varphi \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n$$

7. Possiamo ora cercare come deve modificarsi la formula (4) per il caso in cui il punto $(0, 0 \ldots 0)$ sia un punto di discontinuità. Ci limiteremo a studiare punti di discontinuità speciali, che godono della proprietà seguente: che cioè, preso un sistema di coordinate $u, v_1, v_2 \ldots v_{n-1}$

tali che per $u=0$ sia $x_1=0$, $x_2=0$ ... $x_n=0$ e viceversa (*), per ogni sistema di valori $v_1=\text{cost}$, $v_2=\text{cost}$ ... $v_{n-1}=\text{cost}$, la funzione trasformata $f_0(u, v_1, v_2 \ldots v_{n-1})$ quando u s' avvicina a zero tenda verso un limite determinato. Questi punti potremo indicarli col nome di *punti di continuità semplice secondo u*. L' insieme dei limiti verso cui tende la funzione per $u=0$ per ogni sistema di valori $v_1=\text{cost}$, $v_2=\text{cost}$ ... $v_{n-1}=\text{cost}$ costituisce una funzione $\psi(v_1, v_2 \ldots v_{n-1})$ di $n-1$ variabili definita per ogni sistema di valori che le v possono prendere senza uscire dal campo, e potremo chiamarla *la funzione dei valori di $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ nel punto $u=0$* (**).

Supporremo ora che il campo d'integrazione contenga il punto di continuità semplice (che ora prenderemo per origine delle coordinate) nell'interno. Ammettendo anche che la funzione f possa avere nel campo C_0 altri di questi punti di continuità semplice, supporremo che il punto $(0, 0 \ldots 0)$ sia isolato, cioè non sia punto limite di punti simili nel campo dato C_0. Per la funzione $\psi(v_1, v_2 \ldots v_{n-1})$ dei valori di f nel punto $u=0$, richiederemo che sia atta all'integrazione assoluta in un campo C_n' ad $n-1$ dimensioni formato dall' insieme dei sistemi di valori che pos-

(*) Di tali sistemi di coordinate ne esistono effettivamente; e ne daremo più tardi un esempio, il quale è analogo alle coordinate polari nel piano e nello spazio.

(**) Il sig. Du Bois Reymond nella sua memoria « Bemerkungen über die verschiedene Werthe etc. (Borchardt-Journ: Bd. 70) » studia questi punti per il caso delle funzioni di due variabili; e, nel caso che la funzione dei valori sia continua, egli dà loro il nome di Stetigvieldeutigkeitspunkte.

sono prendere le coordinate v per u=cost nel campo C_0. Abbiamo, come nei casi precedenti, da esaminare l'integrale:

$$\int\int_{C_0}\cdots\int f\varphi\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \int\int_{C_0'}\int f\varphi\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n + \\ + \int\int_{C}\cdots\int f\varphi\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n\,,$$

essendo C_0 il campo totale, C un intorno del punto $(0\,,\,0\,\ldots\,0)$ che prenderemo limitato da $u=u_1$=cost con u_1 piccolo a piacere (poichè evidentemente per le ipotesi fatte sul sistema di coordinate $u\,,\,v_1\,,\,v_2\,\ldots\,v_{n-1}$ il campo ad $(n-1)$ dimensioni $u=$cost limita un campo che contiene l'origine all'interno) e C_0' essendo il campo rimanente. Ora siccome il limite dell'integrale

$$\int\int_{C_0'}\cdots\int f\varphi\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

preso per $h=\infty$ è eguale a zero, perchè C_0' non contiene l'origine e la funzione f si suppone atta all'integrazione assoluta in C_0 (§. 5.), basterà cercare il limite per $h=\infty$ di

$$\int\int_{C}\cdots\int f\varphi\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n\,,$$

il quale evidentemente deve risultare indipendente da u_1

essendo tali il primo membro e il limite del primo termine del secondo membro.

Per esaminare questo integrale, facciamo in esso un cangiamento di variabili, prendendo per nuove coordinate le u, v_1, $v_2 \ldots v_{n-1}$, per il che supporremo che le formule che ci danno le x in funzione delle nuove variabili soddisfino alle condizioni che abbiamo indicate per la validità del teorema del §. 4. Allora, in forza di questo teorema, se $D(u, v_1, v_2 \ldots v_{n-1})$ indica il determinante funzionale della trasformazione, $f(u, v_1, v_2 \ldots v_{n-1}), \varphi_0(u, v_1, v_2 \ldots v_{n-1}, h)$ quello che divengono le funzioni f e φ operando in esse questa trasformazione, avremo:

$$\int\int_C \cdots \int f(x_1, x_2 \ldots x_n)\, \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n, h)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n =$$

$$\int\int_{C'_u} \int dv_1\, dv_2 \ldots dv_{n-1} \int_0^{u_1} f_0(u, v_1 \ldots v_{n-1}) \varphi_0(u, v_1 \ldots v_{n-1}, h) D(u, v_1 \ldots v_{n-1}) du,$$

potendosi, come ho già notato, un integrale assoluto calcolare anche come integrale ordinario successivamente prima rispetto ad alcune e poi rispetto ad altre variabili, quando per le funzioni da integrare questo secondo integrale abbia un significato, ipotesi che quì supporremo verificata. L' integrale del secondo membro della formula precedente potrà anche scriversi:

$$\int\int_{C'_u} \cdots \int \psi\, dv_1 \ldots dv_{n-1} \int_0^{u_1} \varphi_0\, D\, du +$$

$$+ \int\int_{C'_u} \cdots \int dv_1 \ldots dv_{n-1} \int_0^{u_1} [f_0 - \psi]\, \varphi_0\, D\, du$$

Ora se per la funzione $f(x_1, x_2 \dots x_n)$ si pone la condizione che $f_0(u, v_1, v_2 \dots v_{n-1})$ tenda verso $\psi(v_1, v_2 \dots v_{n-1})$ uniformemente, in modo cioè che scelta σ piccola a piacere esista un valore u_1 di u diverso da zero e tale che quando sia in valore assoluto $u < u_1$ e per ogni sistema di valori per $v_1, v_2 \dots v_{n-1}$ compresi nel campo C sia $f_0 - \psi < \sigma$, tornando a trasformare il secondo degli integrali ora scritti in coordinate cartesiane, si vede che esso si mantiene inferiore a

$$\sigma \int \int_C \dots \int \varphi_1 \, dx_1 \, dx_2 \dots dx_n ,$$

essendo $\varphi_1(x_1, x_2 \dots x_n, h)$ la funzione dei valori assoluti, la quale si suppone atta all' integrazione assoluta almeno in un intorno dell' origine, e quindi in tutto il campo essendo la funzione φ finita nel rimanente spazio.

Se dunque per la funzione φ si ammettono le medesime condizioni del paragrafo precedente, e quindi quel valore è piccolo a piacere anche al crescere indefinito di h, si ha che il limite per $h = \infty$ dell'integrale

$$\int \int_C \dots \int f \varphi \, dx_1 \dots dx_n$$

si riduce a quello dell' integrale

$$\int \int_{C'_u} \dots \int \psi \, dv_1 \dots dv_{n-1} \int_0^{u_1} \varphi_0 \, \mathrm{D} \, du,$$

e quindi si può dire che:

« Se la funzione $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ nel punto $(0, 0 \ldots 0)$
« ha la continuità semplice secondo u, essendo
« $u, v_1, v_2 \ldots v_{n-1}$ un sistema di coordinate tali che
« per $u = 0$ sia $x_1 = 0, x_2 = 0 \ldots x_n = 0$ e viceversa,
« e che di più per esse si verifichino le condizioni ne-
« cessarie per la validità del teorema del §. 4, o se la
« funzione $\psi(v_1, v_2 \ldots v_{n-1})$ dei valori di f nel punto $(0,0\ldots0)$
« è finita ed atta all'integrazione assoluta nel campo C'_u
« ad $n-1$ dimensioni definito da $u=$cost, allora essendo
« verificate per f e φ le medesime condizioni del teorema
« precedente più quella che la funzione $f_0(u, v_1, v_2 \ldots v_{n-1})$
« tenda uniformemente ai valori corrispondenti di
« $\psi(v_1, v_2 \ldots v_{n-1})$ nel campo C'_u e l'altra che il pro-
« dotto $f_0(u,v_1,v_2\ldots v_{n-1})\varphi_0(u,v_1,v_2\ldots v_{n-1},h)D(u,v_1\ldots v_{n-1})$
« sia atto all'integrazione semplice rispetto ad u fra 0
« ed u_1, potrà scriversi la formula:

$$(6) \lim_{h=\infty} \int\int_{C_0}\cdots\int f(x_1, x_2 \ldots x_n)\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n, h)dx_1\, dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \lim_{h=\infty} \int\int_{C'_u}\cdots\int \psi(v_1,v_2\ldots v_{n-1})dv_1\ldots dv_{n-1}\int_0^{u_1} \varphi_0(v_1,v_2\ldots v_{n-1},h)D(u,v_1\ldots v_{n-1})du$$

« dove C_0 è un campo che contiene l'origine all'interno,
« C'_u è il campo ad $(n-1)$ dimensioni in cui possono
« variare le v nel campo dato quando $u = u_1$, u_1 è un
« valore convenientemente piccolo, e $D(u, v_1 \ldots v_{n-1})$
« indica il determinante funzionale della trasformazione
« di coordinate ».

È evidente che in questa formula l'integrale $n-p$'o del secondo membro si può anche considerare esteso all' intero campo C_0, poichè la differenza nei due casi è un' espressione che a causa della formula (3) è zero.

8. Sotto certe ipotesi speciali per la funzione $\varphi(x_1, x_2 \dots x_n, h)$, la formula (6) può porsi sotto una forma più semplice.

Si prendano per $u, v_1, v_2 \dots v_{n-1}$ le coordinate $\rho, \theta_1, \theta \dots \theta_{n-1}$ legate alle $(x_1, x_2 \dots x_n)$ dalle relazioni:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \rho \cos \theta_1 \\
x_2 &= \rho \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 \\
x_3 &= \rho \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_3 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{n-2} &= \rho \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 \dots \operatorname{sen} \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2} \\
x_{n-1} &= \rho \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 \dots \operatorname{sen} \theta_{n-3} \operatorname{sen} \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \\
x_n &= \rho \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 \dots \operatorname{sen} \theta_{n-3} \operatorname{sen} \theta_{n-2} \operatorname{sen} \theta_{n-1}
\end{aligned}
$$

Esse sono analoghe alle ordinarie coordinate polari (che ne sono un caso particolare) e verificano tutte le condizioni imposte alle $u, v_1, v_2 \dots v_{n-1}$. Il determinante funzionale della trasformazione si trova eguale a

$$D(\rho, \theta_1 \dots \theta_{n-1}) = \rho^{n-1} \operatorname{sen}^{n-2} \theta_1 \operatorname{sen}^{n-3} \theta_2 \dots \operatorname{sen}^2 \theta_{n-3} \operatorname{sen} \theta_{n-2}$$

e per conseguenza il secondo membro della (6) prende ora la forma:

$$)\lim_{h=\infty}\int\int_{C'_\rho}\cdots\int\psi(\theta_1\ldots\theta_{n-1})d\theta_1\ldots d\theta_{n-1}\int_0^{\rho_1}\varphi_0(\rho,\theta_1\ldots\theta_{n-1},h)\rho^{n-1}\mathrm{sen}^{n-2}\theta_1\ldots\mathrm{sen}\,\theta_{n-2}($$

Supponiamo che la funzione $\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n, h)$ sia tale che esista il

$$\lim_{h=\infty}\int_0^{\rho_1}\varphi_0(\rho\,,\,\theta_1\,,\,\theta_2\,\ldots\,\theta_{n-1}\,,h)\,\rho^{n-1}\,d\rho$$

e sia indipendente da $\rho_1, \theta_1 \ldots \theta_{n-1}$, cioè sia una quantità costante B, e l' integrale

$$\int_0^{\rho_1}\varphi_0(\rho\,,\,\theta_1\,,\,\theta_2\ldots\theta_{n-1}\,,\,h)\,\rho^{n-1}\,d\rho$$

tenda ad essa uniformemente in tutto il campo C'_ρ. Allora si vede facilmente che, essendo i limiti dell' integrale (6') indipendenti da h, a causa delle condizioni precedenti possiamo in esso al limite dell' integrale sostituire l' integrale del limite della quantità sotto il segno (*), cioè potremo scrivere la (6) sotto la forma:

(*) È evidente che se per $h=h_1$ (o per $h=\infty$) si ha:

$$\lim F\,(v_1\,,v_2\ldots v_{n-1},\,h) = \Phi\,(v_1\,,v_2\,\ldots v_{n-1})$$

e la funzione F è atta all' integrazione assoluta rispetto alle variabili $v_1, v_2 \ldots v_{n-1}$ in un campo C ad $(n-1)$ dimensioni qualunque sia h,

$$\lim_{h=\infty}\int\int_{C_0}\ldots\int f\varphi\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= B\int\int_{C'\rho}\ldots\int \psi \operatorname{sen}^{n-2}\theta_1 \ldots \operatorname{sen}\theta_{n-2} d\theta_1\, d\theta_2 \ldots d\theta_{n-1} .$$

Se ora si osserva che a causa della convergenza uniforme dell' integrale verso il suo limite si ha:

$$\int\int_{C'\rho}\ldots\int B \operatorname{sen}^{n-2}\theta_1 \ldots \operatorname{sen}\theta_{n-2}\, d\theta_1\, d\theta_2 \ldots d\theta_{n-1} =$$

$$= \lim_{h=\infty}\int\int_{C'\rho}\ldots\int \operatorname{sen}^{n-2}\theta_1 \ldots \operatorname{sen}\theta_{n-2} d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1} \int_0^{\rho_1} \varphi_0\, \rho^{n-1} d\rho =$$

$$= \lim_{h=\infty}\int\int_{C_0}\ldots\int \varphi(x_1 \ldots x_n , h)\, dx_1 \ldots dx_n ,$$

---

e nel medesimo tempo è atta all'integrazione assoluta anche la funzione Φ, se la F tende alla Φ uniformemente, preso h sufficientemente prossimo ad h_1 (o sufficientemente grande) sarà in valore assolut :

$$\int\int_C\ldots\int (F-\Phi)\, dv_1 \ldots dv_{n-1} < \sigma \int\int_C\ldots\int dv_1 \ldots dv_{n-1} ,$$

cioè il limite del primo membro preso per $h=h_1$ (o per $h=\infty$) è lo zero ; ossia

$$\lim\int\int_C\ldots\int F(v_1 \ldots v_{n-1}, h)\, dv_1 \ldots dv_{n-1} = \int\int_C\ldots\int \Phi(_1 \ldots, v_{n-1}) dv_1 \ldots dv_{n-1} =$$

$$= \int\int_C\ldots\int \lim F(v_1 \ldots v_{n-1}, h)\, dr_1 \ldots dv_{n-1}$$

come si voleva dimostrare .

e se si pone

$$\psi_1 = \frac{\int\int_{C'_\rho}\cdots\int \psi(\theta_1, \theta_2 \ldots \theta_n) \operatorname{sen}^{n-2}\theta_1 \ldots \operatorname{sen}\theta_{n-2}\, d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1}}{\int\int_{C'_\rho}\cdots\int \operatorname{sen}^{n-2}\theta_1 \ldots \operatorname{sen}\theta_{n-2}\, d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1}}$$

potremo evidentemente scrivere la formula:

$$(7) \quad \lim_{h=\infty} \int\int_{C_0}\cdots\int f(x_1, x_2 \ldots x_n)\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n, h)dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \psi_1 \lim_{h=\infty} \int\int_{C_0}\cdots\int \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n, h)\, dx_1 \ldots dx_n$$

Nel sistema di coordinate ρ, θ_1, $\theta_2 \ldots \theta_{n-1}$ ora introdotte, se l'origine è, come si è supposto, in un punto interno al campo, le variabili θ_1, $\theta_2 \ldots \theta_{n-1}$ possono variare tutte fra 0 e π, eccetto θ_{n-1} che varia fra 0 e 2π; e se si considera il campo ad $(n-1)$ dimensioni definito nel nostro spazio ad n dimensioni da $\rho = \rho_1 =$ cost. (il quale è analogo alla circonferenza nel piano ed alla sfera nello spazio ordinario), si trova che:

$$\rho_1^{n-1} \operatorname{sen}^{n-2}\theta_1 \operatorname{sen}^{n-3}\theta_2 \ldots \operatorname{sen}^2\theta_{n-3} \operatorname{sen}\theta_{n-2}\, d\theta_1\, d\theta_2 \ldots d\theta_{n-1}$$

è l' elemento del suo spazio in coordinate θ_1, $\theta_2 \ldots \theta_{n-1}$; si vede quindi che nella formula (7) la quantità ψ_1 indica la media dei valori di $\psi(\theta_1, \theta_2 \ldots \theta_{n-1})$ nel campo C'_ρ.

E siccome si ha anche:

$$\int\int_{C'_\rho}\cdots\int \psi(\theta_1, \theta_2 \ldots \theta_{n-1})\, d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1} =$$

$$= \lim_{\rho=0} \int\int_{C'_\rho}\cdots\int f_0(\rho, \theta_1 \ldots \theta_{n-1})\, d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1}$$

perchè per la validità della (6) e quindi della (7) si è supposta la convergenza uniforme di f_0 verso ψ, ne viene che la quantità ψ_0 è il limite, calcolato per $\rho=0$, della media dei valori che la funzione $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ prende nel campo ad $(n-1)$ dimensioni $\rho = \text{cost} = \rho_1$.

III.

9. Vediamo ora come nel caso in cui valgano le formule (4), (6), (7) si possa dedurre lo sviluppo in serie di una funzione $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ di n variabili.

La funzione $\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n, h)$ considerata fin quì supporremo più generalmente che contenga anche n nuove variabili $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$; considereremo cioè la funzione $\varphi(x_1 \ldots x_n, \alpha_1 \ldots \alpha_n, h_m)$ dove h_m sono numeri positivi crescenti sino all' infinito con m, numero intero e positivo. Questa funzione, dovendo godere di tutte le proprietà generali stabilite nel capitolo precedente per la funzione φ, la prenderemo tale che in campi qualunque C_1 che non contengano l'origine, facenti parte di un certo campo dipendente in generale dai valori di $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, si mantenga, per ogni valore finito di m, numericamente inferiore ad una quantità finita che può variare con questi campi; di più gl' integrali

$$\int\int_{C_1}\cdots\int \varphi(x_1\,,\,\ldots\,x_n\,,\,\alpha_1\,,\,\ldots\,\alpha_n\,,\,h_m)\,dx_1\,dx_2\,\ldots\,dx_n$$

estesi a questi campi tendano a zero al crescere di m, mentre gl' integrali

$$\int\int_{\varepsilon}\cdots\int \varphi(x_1\,,\,\ldots\,x_n\,,\,\alpha_1\,,\,\ldots\,\alpha_n\,,\,h_m)\,dx_1\,\ldots\,dx_n\,,$$

dove ε è un intorno comunque piccolo che comprende nel suo interno l'origine, al crescere di m tendano verso una quantità finita diversa da zero $G(\alpha_1\,,\alpha_2\,,\,\ldots\,\alpha_n)$ indipendente da ε.

La funzione $f(x_1\,,x_2\,,\ldots\,x_n)$ da considerarsi sia data in un certo campo ad n dimensioni C_0 nel quale sia finita ed atta all' integrazione assoluta anche moltiplicata per la funzione $\varphi(x_1-\alpha_1\,,\ldots x_n-\alpha_n\,,\,\alpha_1\,,\ldots\,\alpha_n,\,h_m)$, e le quantità $\alpha_1\,,\,\alpha_2\,,\,\ldots\,\alpha_n$ possano assumere tutti i valori del campo C_0, inclusi quelli del contorno. I campi C_1 di cui si è fatto parola, supporremo che, per ogni sistema di valori di $\alpha_1\,,\,\alpha_2\,,\,\ldots\,\alpha_n$, possano prendersi comunque nel campo che risulta dal campo C_0 trasportando l'origine in $(\alpha_1\,,\alpha_2\,,\ldots\,\alpha_n)$ (*), purchè non comprendano nè all'interno

(*) In quello che segue, parlando di un simile campo, non staremo a ripetere come si ottenga dal campo C_0 dato. Questo notiamo perchè nè sul contorno questa nuova origine, e che di questo campo possa far parte anche tutto o parte del contorno di C_0. Questo giustifica l' aver detto in principio che il modo di prendere i campi C_1 poteva dipendere da $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$.

Ora, siccome dobbiamo cercare lo sviluppo in serie della funzione $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$, cominceremo collo sviluppare in serie il primo membro delle (4), (6), (7) del Cap. II; ed allora, mediante le formule stesse, avremo lo sviluppo del valore della funzione $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ nel punto che abbiamo preso per origine, o della media dei valori in questo punto.

A tale scopo si consideri la serie:

$$(1)\ \frac{1}{G(\alpha_1 \ldots \alpha_n)} \int\int_{C_0} \cdots \int f(x_1 \ldots x_n)\varphi(x_1-\alpha_1, \ldots x_n-\alpha_n, \alpha_1 \ldots \alpha_n, h_0)\, dx_1 \ldots dx_n$$

$$+\frac{1}{G(\alpha_1 \ldots \alpha_n)}\sum_1^\infty \int\int_{C_0} \cdots \int f(x_1 \ldots x_n) \left\{ \varphi(x_1-\alpha_1, \ldots x_n-\alpha_n, \alpha_1, \ldots \alpha_n, h_m)\right.$$

$$\left. -\varphi(x_1-\alpha_1 \ldots x_n-\alpha_n, \alpha_1 \ldots \alpha_n, h_{m-1}) \right\} dx_1 \ldots dx_n$$

Siccome la somma dei suoi primi m termini è data da

$$\frac{1}{G(\alpha_1 \ldots \alpha_n)} \int\int_{C_0} \cdots \int f(x_1 \ldots x_n)\varphi(x_1-\alpha_1 \ldots x_n-\alpha_n, \alpha_1 \ldots \alpha_n, h_m)\, dx_1 \ldots dx_n$$

---

quando diremo *campo* C_0, e l'origine sia stata posta in $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$, non debba intendersi quello che si otterrebbe col formare attorno alla nuova origine un campo identico a C_0 e situato rispetto ad $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ come C_0 lo è rispetto all' origine $(0, 0 \ldots 0)$; ma bensì quello che risulta da C_0 trasportando l' origine in $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$. Quando ci si voglia riferire al vero campo C_0, useremo la parola *campo originario*.

avremo che la somma della serie, quando esiste, sarà il limite di questo termine preso per $m=\infty$; e potremo calcolarlo servendosi delle formule fondamentali (4) e (7) del Capitolo precedente, nei casi in cui queste sono applicabili.

Si ponga

$$x_1-\alpha_1=u_1\ ,\ x_2-\alpha_2=u_2\ ,\ \ldots\ x_n-\alpha_n=u_n\ ;$$

allora diverrà origine delle nuove coordinate u il punto di coordinate $x_1=\alpha_1$, ... $x_n=\alpha_n$ appartenente al campo originario C_0 e che supporremo per ora interno al campo stesso. La somma delle serie è data in tal caso da:

$$\frac{1}{G(\alpha_1..\alpha_n)}\lim_{m=\infty}\int\int_{C_0}\cdots\int f(\alpha_1+u_1\ldots\alpha_n+u_n)\,\varphi(u_1\ldots u_n,\alpha_1\ldots\alpha_n,h_m)\,du_1\ldots du_n=$$

$$=\frac{1}{G(\alpha_1..\alpha_n)}\lim_{m=\infty}\left[\int\int_{C_0-\varepsilon}\cdots\int f(\alpha_1+u_1\ldots\alpha_n+u_n)\varphi(u_1..u_n,\alpha_1..\alpha_n,h_m)du_1..du_n+\right.$$

$$\left.+\int\int_{\varepsilon}\cdots\int f(\alpha_1+u_1\ldots\alpha_n+u_n)\varphi(u_1\ldots u_n\ ,\ \alpha_1\ldots\alpha_n,h_m)du_1\ldots du_n\right]$$

dove ε rappresenta un campo piccolissimo qualunque, intorno dell'origine, la quale cade nel suo interno. Allora poichè $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$, $\varphi(x_1, \ldots x_n, \alpha_1 \ldots \alpha_n, h_m)$ sono atte all'integrazione assoluta nel campo originario, per la formula (3) del Cap. II. il limite del primo integrale del secondo membro è zero; se di più la funzione φ soddisfa a quelle condizioni colle quali, in relazione colle condizioni cui soddisfa $f(x_1 \ldots x_n)$, è applicabile la formula

(4) (Cap. II.), quando il punto $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ è un punto di continuità, si avrà evidentemente che la somma della serie è data da $f(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$.

Dunque si può concludere intanto che per tutti i punti $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ interni al campo originario in cui è data la funzione e nei quali essa è continua, la serie (1) costruita precedentemente rappresenta il valore della funzione nel punto $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$.

10. Cerchiamo ora quali resultati si ottengono quando il punto $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$, nel quale supporremo ancora la continuità, giaccia sul contorno del campo originario.

Anche in tal caso la somma della serie potrà scriversi sotto la forma:

$$\frac{1}{G(\alpha_1 .. \alpha_n)} \lim_{m=\infty} \left[\int \int_{C_0 - \varepsilon} \ldots \int f(\alpha_1 + u_1 .. \alpha_n + u_n) \varphi(u_1 .. u_n, \alpha_1 .. \alpha_n, h_m) du_1 .. du_n + \right.$$
$$\left. + \int \int_{\varepsilon} \ldots \int f(\alpha_1 + u_1 \ldots \alpha_n + u_n)\, \varphi(u_1 \ldots u_n, \alpha_1 \ldots \alpha_n, h_m)\, du_1 \ldots du_n \right],$$

intendendo peraltro che ε sia un intorno dell'origine che contiene questa sul contorno, poichè ora l'origine appartiene al contorno di C_0. Allora, anche in tal caso, il primo integrale ha per limite lo zero a causa della (3) del Capitolo precedente; l'altro, per la (4) del medesimo capitolo, avrà per limite:

$$\frac{1}{G(\alpha_1 .. \alpha_n)} f(\alpha_1 \ldots \alpha_n) \lim_{m=\infty} \int \int_{\varepsilon} \ldots \int \varphi(u_1 \ldots u_n, \alpha_1 \ldots \alpha_n, h_m) du_1 \ldots du_n$$

essendo $f(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ il valore della funzione nel punto $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ del contorno, nel quale si è supposta continua.

In tal caso dunque la serie ci dà il valore della funzione all' infuori del fattore

$$\frac{1}{G(\alpha_1 .. \alpha_n)} \lim_{m=\infty} \int \int_{C_\varepsilon} \ldots \int \varphi(u_1 \ldots u_n, \alpha_1 \ldots \alpha_n, h_m) du_1 \ldots du_n,$$

il quale dovrà riuscire indipendente da ε, ma varierà a seconda della forma del contorno del campo e dei diversi punti di questo contorno stesso.

11. Passiamo al caso il cui il punto $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$, supposto ora interno al campo originario, è per la funzione $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ un punto di continuità semplice secondo ρ nel sistema di coordinate, ρ, θ_1, $\theta_2 \ldots \theta_{n-1}$ del §. 8.

Presa ancora a considerare la somma dei primi m termini della serie (1) e ripetendo i ragionamenti precedenti, si concluderà che la somma della serie è ancora

$$\lim_{m=\infty} \frac{1}{G(\alpha_1 .. \alpha_n)} \int \int_\varepsilon \ldots \int f(\alpha_1 + u_1 \ldots \alpha_n + u_n) \varphi(u_1 \ldots u_n, \alpha_1 \ldots \alpha_n, h_m) du_1 \ldots du_n$$

essendo ε un campo piccolo a piacere che comprende nel suo interno il punto $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$. Allora se si suppone che per le funzioni f e φ siano verificate le condizioni accennate al §. 8. per la validità della (7), se $\psi(\theta_1, \theta_2 \ldots \theta_{n-1})$ è la funzione dei valori di $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ nel punto $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ e se s'indica con A il valore dell'integrale

$$\int\int_{C'_\rho}\cdots\int \operatorname{sen}^{n-2}\theta_1 \operatorname{sen}^{n-3}\theta_2 \ldots \operatorname{sen}^2\theta_{n-3} \operatorname{sen}\theta_{n-2}\, d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1}.$$

esteso al campo a $(n-1)$ dimensioni C'_ρ di cui è parola al §. 8, in forza della (7) stessa la somma della serie in questo punto è:

$$\psi_1 = \frac{1}{A}\int\int_{C'_\rho}\cdots\int \psi(\theta_1 .. \theta_{n-1}) \operatorname{sen}^{n-2}\theta_1 \operatorname{sen}^{n-3}\theta_2 .. \operatorname{sen}\theta_{n-2}\, d\theta_1 .. d\theta_{n-1}$$

Quindi in un punto di continuità semplice secondo ρ la serie ha per somma il limite per $\rho_1 = 0$ della media dei valori che la funzione prende sopra il campo ad $(n-1)$ dimensioni $\rho = \text{cost} = \rho_1$.

Riassumendo, si vede quindi che, quando sono soddisfatte convenienti condizioni per le funzioni f e φ, la serie (1) che abbiamo costruito ha un significato in tutti i punti di continuità assoluta e di continuità semplice secondo ρ interni al campo originario, ed in essi rappresenta il valore della funzione o una media dei suoi valori. La serie ha anche un significato per i punti di continuità del contorno, ma in essi non rappresenta in generale la funzione stessa; resta incertezza per i punti di discontinuità assoluta all' interno e sul contorno e per quelli di continuità semplice al contorno. Per avere un espressione analitica che, anche per i punti di continuità del contorno, abbia per valore il valore della funzione, potremmo prendere a considerare un campo C_0'' il quale comprendesse nel suo interno il campo C_0 ed il contorno di questo: indi, immaginando una funzione $f_1(x_1 \ldots x_n)$ la quale nell' interno di C_0 e sul suo contorno coincidesse con $f(x_1 \dots x_n)$ e nel rimanente spazio del campo C_0^0 fosse arbitraria, purchè tale da essere continua nei punti del contorno C_0 e da soddisfare in tu[illegible] alle condizioni indicate precedentemente, potremmo cercare coi metodi esposti lo sviluppo in serie della funzione $f_1(x_1, x_2 \dots x_n)$; e poichè la serie che così si ottiene nei punti di continuità di f_1 *interni* a C_0^0 rappresenta la funzione, ci rappresenterebbe il valore di f_1, e per conseguenza di f, anche nei punti del contorno di C_0.

11. Ricerchiamo ora se delle funzioni $\varphi(x_1, x_2 \dots x_n, \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n, h_m)$ che ci conducano ai resultati dei paragrafi precedenti ne esistano o no.

È facile vedere che esistono sempre funzioni φ che soddisfano alle condizioni richieste dai teoremi dei §§. 6, 7, 8, mediante le quali saranno dunque sviluppabili tutte le funzioni $f(x_1, x_2 \dots x_n)$ che nel campo dato C_0 soddisfano alla sola condizione di essere atte all'integrazione assoluta, salvo a fare per i punti di discontinuità e per quelli del contorno le osservazioni già accennate.

Si consideri la funzione

$$\varphi(x_1 \dots x_n, \alpha_1 \dots \alpha_n, h_m) = h_m\, e^{-h_m \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^n}},$$

dove si stabilisca di prendere per il radicale dell' esponente il segno positivo. Essa in qualunque campo finito che non comprende l'origine è finita, prende nell'intorno dell' origine anche valori crescenti al crescere di h_m, e per h_m finita è anche atta all' integrazione assoluta in qualunque campo, poichè è continua. Di più, usando le coordinate $\rho, \theta_1, \theta_2 \dots \theta_{n-1}$ che già introducemmo al §. 8 e calcolando il suo integrale n—*plo* assoluto esteso a un intorno $\rho = \cos t = \rho_1$ dell'origine, in cui sia ρ_1 piccolo a piacere, se si rammenta che in questo intorno le variabili $\theta_1, \theta_2 \dots \theta_{n-2}$ variano da 0 a π e θ_{n-1} da 0 a 2π e che il determinante funzionale della trasformazione delle x nelle $\rho, \theta_1, \theta_2 \dots \theta_{n-1}$ è

$$\rho^{n-1} \operatorname{sen}^{n-2} \theta_1 \operatorname{sen}^{n-3} \theta_2 \dots \operatorname{sen}^2 \theta_{n-3} \operatorname{sen} \theta_{n-2},$$

e notando infine che, a causa delle formule di trasformazione (§. 8.), si ha:

$$\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2,$$

resulta che quell'integrale, il quale in questo caso può anche calcolarsi come un integrale ordinario essendo continua la funzione da integrarsi, è dato da

$$\int_0^{2\pi} d\theta_{n-1} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta_{n-2} d\theta_{n-2} \dots \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{n-2}\theta_1 d\theta_1 \int_0^{\rho_1} \rho^{n-1} h_m e^{-h_m \rho^n} d\rho = \frac{A\left(1 - e^{-h_m \rho_1^n}\right)}{n},$$

avendo dato ad A il medesimo significato che nel paragrafo precedente. È quindi evidente che il limite di quell'integrale, preso per $m = \infty$, per qualunque valore di ρ_1 diverso da zero è $\frac{A}{n}$, dove A è evidentemente una quantità finita, costante e diversa da zero. L'integrale

$$\int\int_C \cdots \int h_m e^{-h_m \sqrt{(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^n}} dx_1 dx_2 \ldots dx_n ,$$

esteso ad un campo C che non comprende l' origine, ha per limite lo zero; poichè se ρ' è un valore minore del più piccolo valore che nel campo C prende ρ nel sistema di coordinate ρ , θ_1 , $\theta_2 \ldots \theta_{n-1}$, sarà in tutto C

$$e^{-h_m \rho^n} < e^{-h_m \rho'^n}$$

anche in valore assoluto; quindi avremo, anche in valore assoluto:

$$\int\int_C \cdots \int h_m e^{-h_m \rho^n} dx_1 .. dx_n \leq h_m e^{-h_m \rho'^n} \int\int_C \cdots \int dx_1 .. dx_n$$

e l' espressione del secondo membro tende a zero per $m=\infty$. Notando poi che la funzione dei valori assoluti coincide in questo caso con la funzione stessa e che quindi l' integrale della funzione dei valori assoluti esteso ad un intorno dell' origine si mantiene sempre finito anche al crescere di m, potremo concludere che la funzione φ ora considerata soddisfa a tutte le condizioni richieste per l' applicazione della (4) del §. 6, quando per la funzione $f(x_1 , x_2 \ldots x_n)$ si richieda la sola condizione che sia finita ed atta all' integrazione assoluta nel campo in cui è data. Si vede chiaramente come soddisfi anche a quelle richieste per la validità della (7) del §. 8, poichè si ha:

$$\int_0^{\rho_1} h_m e^{-h_m \rho^n} \rho^{n-1} d\rho = \frac{1 - e^{-h_m \rho_1^n}}{n}$$

e quindi il limite per $m = \infty$ di questo integrale è $\frac{1}{n}$, quantità costante, e l'integrale stesso tende uniformemente a questo limite.

Evidentemente alle medesime condizioni soddisfa la funzione più generale

$$h_m \varphi_m e^{-h_m \varphi_m \sqrt{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^n}},$$

dove φ_m è funzione solo di $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, positiva, finita e che non si accosta a zero più di un certo numero per tutti i valori di $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ nel campo in cui è data $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$.

Un' altra classe di funzioni che soddisfino a tutte le condizioni precedenti è data da:

$$\frac{h_m \varphi_m}{1 + h^2_m \varphi^2 m (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^n},$$

dove φ_m gode ancora delle proprietà ora esposte. Per esse infatti si ha evidentemente che:

$$\int_0^{2\pi} d\theta_{n-1} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \theta_{n-2}\, d\theta_{n-2} \ldots \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{n-2} \theta_1\, d\theta_1 \int_0^{\rho_1} \frac{h_m \varphi_m \rho^{n-1} d\rho}{1 + h_m^2 \varphi m^2 \rho^{2n}} =$$

$$= \frac{A}{n} \operatorname{arctang} h_m \varphi_m \rho_1^n,$$

e quindi il limite dell' integrale per $m = \infty$ è $\frac{\pi A}{2n}$. Di più l' integrale

$$\int\int_C \cdots \int \frac{h_m \varphi_m}{1 + h_m^2 \varphi_m^2 (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^n} \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n$$

esteso ad un campo C che non comprende l' origine ha per limite lo zero come per la funzione precedente, e la funzione dei valori assoluti coincide ancora colla funzione stessa. Le condizioni per la validità della (7) del §. 8. sono pure verificate, poichè

$$\int_0^{\rho_1} \frac{1 + h^2_m \varphi^2_m {}^2 \rho^{n-1}}{1 + h^2_m \varphi^2_m \rho^{2n}} d\rho = \frac{\operatorname{arctang} h_m \varphi_m \rho_1^n}{n}$$

e perciò il suo limite per $m = \infty$ è $\frac{\pi}{2n}$, indipendente quindi da ρ_1, e l'integrale tende ad esso uniformemente.

Si può quindi concludere che qualunque funzione $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ data in un campo C_0 qualunque in cui soddisfa alla condizione di essere atta all'integrazione assoluta, potrà in tutto quel campo svilupparsi in serie di una delle forme seguenti:

$$\frac{n}{A} \sum_0^\infty \int\int_{C_0} \cdots \int f(x_1 \ldots x_n) \Big[h_m \varphi_m e^{-h_m \varphi_m [\sqrt{(x_1 - \alpha_1)^2 + \ldots + (x_n - \alpha_n)^2}]^n} - h_{m-1} \varphi_{m-1} e^{-h_{m-1} \varphi_{m-1} [\sqrt{(x_1 - \alpha_1)^2 + \ldots + (x_n - \alpha_n)^2}]^n} \Big] dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n,$$

$$\frac{2n}{\pi A}\sum_0^\infty \int\int_{C_0}\cdots\int f(x_1 \ldots x_n)\left[\frac{h_m\,\varphi_m}{1+h_m{}^2\varphi_m{}^2[(x_1-\alpha_1)^2+\ldots+(x_n-\alpha_n)^2]^n}-\right.$$

$$\left.-\frac{h_{m-1}\,\varphi_{m-1}}{1+h_{m-1}{}^2\,\varphi_{m-1}{}^2\,[(x_1-\alpha_1)^2+\ldots+(x_n-\alpha_n)^2]^n}\right]dx_1\,dx_2\,\ldots\,dx_n\,,$$

in ciascuna delle quali sia posto $h_{-1}=0$. Questi sviluppi in ogni punto di continuità interno al campo daranno il valore della funzione $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ in quel punto: nei punti di continuità semplice, le due serie avranno per somma il valore

$$\psi_1=\frac{1}{A}\int_0^{2\pi}d\theta_{n-1}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta_{n-2}\,d\theta_2\ldots\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^{n-2}\theta_1\,\psi(\theta_1\,,\theta_2\ldots\theta_{n-1})\,d\theta_1\,,$$

che non è altro che la media dei valori che la funzione $\psi(\theta_1\,,\theta_2\ldots\theta_n)$ (la funzione dei valori nel punto che si considera) prende per $\rho=0$, cioè anche il limite preso per $\rho=0$ della media dei valori che la funzione data prende nel campo ad $(n-1)$ dimensioni $\rho=$cost, supposta l' origine nel punto considerato.

Per i punti del contorno non possiamo in generale asserire nulla circa la somma di queste serie e lo stesso si dica pei punti di discontinuità assoluta, per i quali neanche si sa se esse hanno un significato.

Se ci limitiamo alle funzioni $f(x_1\,,x_2\ldots x_n)$ finite e continue in tutto il campo, siccome esse in quel campo sono atte all' integrazione assoluta, potremo applicar loro il teorema; e ponendo mente all' arbitrarietà delle funzioni φ_m e delle quantità h_m che compariscono nell'espressioni precedenti, potremo concludere:

« Le funzioni $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ di n variabili reali « date arbitrariamente in un campo finito qualunque C_0, « purchè in esse siano finite e continue, hanno sempre « infinite espressioni analitiche che valgono per ogni « punto del campo, eccetto al più per i punti del con- « torno ».

Pisa, Marzo 1884.