ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SCIPIONE RINDI

Delle superficie polari inclinate

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 3 (1883), p. 171-206

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1883_1_3__171_0>

DELLE

SUPERFICIE POLARI INCLINATE

ESTRATTO DELLA TESI DI ABILITAZIONE

PRESENTATA ALLA R. SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

DAL

DOTT. SCIPIONE RINDI

Nel *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 2.ᵉ Série, t. II, 1878, si trova una memoria di *Ed. Dewulf* intitolata: *Essai d' une théorie géométrique des polaires inclinées*. Dewulf chiama *polare inclinata* di un punto P rispetto ad una curva C il luogo di un punto M, la cui retta polare ordinaria rispetto a C fa un angolo costante α col raggio vettore P M, e dopo avere stabiliti i fondamenti di questa teoria, ne fa eleganti applicazioni alla ricerca di alcune proprietà importanti dei fasci di curve, delle sviluppate oblique, e finalmente al caso particolare delle coniche.

In questo lavoro ho tentato di estendere la teoria delle polari inclinate alle superficie, e di esaminare poi particolarmente il caso delle superficie del 2.° ordine.

DELLE POLARI INCLINATE

I. Chiamiamo *polare inclinata* di un punto P (*polo*), per un angolo dato α, rispetto ad una superficie fondamentale S^n generale dell'ordine n, il luogo di un punto M il cui piano polare rispetto ad S^n fa l'angolo α col raggio vettore P M.

II. I piani polari (*) dei punti di una retta arbitraria r rispetto ad S^n formano una sviluppabile della classe $n-1$; quindi ve ne sono $\mu(n-1)$ che toccano una curva della classe μ; dunque il luogo dei punti i cui piani polari toccano una curva C_μ della classe μ è una superficie dell' ordine $\mu(n-1)$. Ma i piani inclinati di uno stesso angolo sopra una retta t sono tutti tangenti ad una conica K^2_∞ situata nel piano E_∞, perciò : il luogo dei punti i cui piani polari fanno l' angolo α con una retta fissa è una superfieie $S^{2(n-1)}$ dell' ordine $2(n-1)$. Qualunque sia t e qualunque sia il valore di α, il piano E_∞ appartiene sempre al sistema dei piani inclinati

(*) Quando in seguito diremo *polare prima* e *piano polare* senz' altra specificazione si deve sempre intendere polare prima ordinaria e piano polare ordinario rispetto alla superficie fondamentale generale dell' ordine n.

di α sopra t, o in altre parole una retta si può considerare come inclinata di un angolo qualunque sopra E_∞; onde la superficie trovata $S^{2(n-1)}$ passa per gli $(n-1)^3$ centri di S^n. Inoltre osservando che il piano all'∞ deve considerarsi come piano tangente doppio alla conica $K^2{}_\infty$, se si prende una retta arbitraria per uno dei poli Q del piano all'∞, due delle intersezioni di questa colla superficie trovata $S^{2(n-1)}$ della retta t, devono essere riunite in Q, ossia la superficie trovata ha nei centri di S^n altrettanti punti doppi.

Osserviamo pure che il luogo dei poli dei piani inclinati di un angolo costante φ sopra un piano dato σ è pure una superficie $S^{2(n-1)}$ e avente le stesse proprietà di quella trovata, giacchè tutti questi piani sono inclinati di $\frac{\pi}{2} - \varphi$ sulla normale a σ.

III. Prendiamo ora una retta arbitraria p; ogni suo punto x determina un raggio vettore Px e quindi una superficie $S^{2(n-1)}$ luogo dei punti i cui piani polari fanno l'angolo α con Px; chiamiamo y le $2(n-1)$ intersezioni di p con $S^{2(n-1)}$, ogni punto y ha un piano polare η rispetto ad S^n; le rette che passano per P e sono inclinate di α sopra il piano η formano un cono del 2.° grado che incontra la retta p in due punti x. La corrispondenza è dunque $[2, 2(n-1)]$, e vi sono $2n$ punti uniti. Onde il luogo in questione è una superficie dell'ordine $2n$.

Presa ora una retta t arbitraria passante pel polo P, le sue intersezioni colla polare inclinata, fuori del punto P, sono i $2(n-1)$ punti di t, i cui piani polari fanno con t l'angolo α (§. II.). Dunque due intersezioni di t colla polare inclinata sono riunite in P, ossia questa ha in P un punto doppio. Ora quando anche una delle $2(n-1)$ ulteriori intersezioni cade in P, la retta diviene osculatrice nel punto doppio, e deve anche essere inclinata di α sul piano polare di P. Dunque:

« La polare inclinata di un polo P rispetto ad una
« superficie d' ordine n è una superficie dell'ordine $2n$,
« che ha nel polo un punto doppio, il cui cono osculatore
« è formato dalle rette inclinate di α sul piano polare
« di P ».

Se ne conclude

« I piedi delle oblique condotte da un punto ad una
« superficie d' ordine n ed inclinate su di essa di uno
« stesso angolo stanno sopra una curva dell' ordine
« $2n^2$ ».

Osserviamo qui che il cono osculatore nel punto doppio P della polare inclinata è il luogo dei punti le cui polari inclinate passano per P, poichè per un punto qualunque R di questo cono il raggio vettore R P fa l' angolo α col piano polare di P. Si può chiamare questo cono, il *cono polare inclinato* del punto P con denominazione analoga a quella di *Dewulf* per le curve piane (*). Si vede facilmente che il luogo dei punti i cui coni polari inclinati passano per un dato punto R è la polare inclinata di R.

Se $\alpha = 0$ prendiamo ancora una retta p. Ogni punto x determina un raggio vettore Px. Il luogo dei punti i cui piani polari sono parallelli a Px è la polare prima del punto all'∞ di Px; se indichiamo con y le $n-1$ intersezioni di essa con p, si vede pure che ogni punto y determina un piano polare η; ma le rette per P parallele ad η formano un piano che taglia p in un sol punto x. La corrispondenza è dunque adesso $[1, n-1]$ e vi sono n punti uniti, cioè la polare inclinata in questo caso si riduce ad una superficie dell' ordine n.

(*) Dewulf. Mem. cit. p. 377.

Ogni retta t che passa per P incontra altrove questa polare inclinata negli $n-1$ punti d' intersezione della retta stessa colla polare prima del suo punto all'∞. Onde una intersezione di t colla polare inclinata cade sempre in P. Quando anche uno degli altri $n-1$ punti cade in P la retta t diviene tangente alla polare inclinata e deve essere anche parallela al piano polare di P. Dunque chiamando *polare parallela* la polare inclinata per $\alpha=0$, si ha che :

« La polare parallela è una superficie dell' ordine n « che passa pel polo e il cui piano tangente nel polo è « parallelo al piano polare di esso ».

La intersezione di questa colla superficie fondamentale consta della curva di contatto del cono tangente che ha il vertice in P, e della curva piana intersezione di S^n con E_∞. Si vede inoltre che il piano tangente nel polo P alla polare parallela è il luogo dei punti le cui polari parallele passano per P. Chiamiamo questo piano il *piano polare parallelo* di P ed osserviamo che si vedrebbe facilmente che il luogo dei punti i cui piani polari paralleli passano per un punto dato è la polare parallela di questo punto.

Se $\alpha=\frac{\pi}{2}$ (*) consideriamo la stella Σ dei piani che passano per P. Ogni piano τ di questa stella sega E_∞ secondo una retta t_∞ la quale ha un polo T_∞ rispetto a C^2_∞ (circolo immaginario all'∞). Ogni punto T_∞ ha una polare prima rispetto ad S^n, e variando il piano τ le polari prime dei punti T_∞ generano una rete R^{n-1} pro-

(*) Di questa dimostrazione geometrica sono debitore alla gentilezza del mio carissimo maestro Prof Riccardo De Paolis. Io era giunto allo stesso resultato analiticamente.

jettiva a Σ. Presa ora una retta r per P, i piani per r formano un fascio F e i punti T_∞ corrispondenti ai piani per r stanno sopra la retta s_∞, polare del punto all'∞ di r rispetto a C^2_∞; le polari prime dei punti T_∞ formano quel fascio F^{n-1} che nella rete R^{n-1} corrisponde al fascio F di Σ. Ogni punto della curva base di F^{n-1} è dunque tale che il suo piano polare contiene la retta s_∞, cioe è normale ad r. Ora un punto P nel quale la retta r e la curva base del fascio corrispondente s' incontrano ha il piano polare normale al raggio vettore. La polare inclinata di un punto per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ si riduce dunque al luogo delle intersezioni delle curve basi dei fasci corrispondenti in due reti projettive degli ordini 1 ed $n-1$. Questa è una curva dell'ordine $1+(n-1)^2+n-1=n^2-n+1$ (*), che passa per le basi delle due reti, cioè per P e per gli $(n-1)^3$ poli del piano E_∞. La retta che unisce P al suo punto infinitamente vicino sopra questa curva è tangente alla curva, e deve pure essere normale al piano polare di P. Quindi

« Per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ la polare inclinata si riduce ad una « curva dell' ordine n^2-n+1 che passa pel polo e la « cui tangente nel polo è normale al piano polare di « esso ».

Chiameremo questa curva la *curva polare normale* di P rispetto ad S^n.

La tangente in P a questa curva è il luogo dei punti le cui curve polari normali passano per P e si può chiamare la *retta polare normale* di P. Osserviamo inoltre

(*) *Cremona. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen*. Berlin 1870, p. 107

come da ciò che precede resulta che la curva polare normale di un dato punto è il luogo dei punti le cui rette polari normali passano per questo punto.

Gli $n(n^2-n+1)$ punti d'intersezione della curva trovata colla superficie fondamentale sono i piedi delle normali alla superficie condotte da P. E poichè la curva passa per P, il cono che la projetta da questo punto è dell'ordine $n(n-1)$. Onde

« Da un punto si possono condurre ad una superficie
« d'ordine n, $n(n^2-n+1)$ normali (*) e queste stanno
« sopra un cono dell'ordine $n(n-1)$ ».

La curva C^{n^2-n+1}, e come conseguenza il numero delle normali per un punto ad una superficie dell'ordine n, le proprietà di questa curva esposte di sopra e qualche altra ancora erano state trovate per altra via da *Steiner* (Crelle's Journal f. d. Math. Bd. XLIX. pp. 344-45). Quì lo Steiner (p. 346) dice anche che *Terquem* (**) trovò il primo che 6 normali si possono condurre da un punto ad una quadrica e che queste stanno sopra un cono del 2.° grado.

IV. Poniamo che nella ricerca del §. III la retta arbitraria p passi per un polo Q del piano E_∞. Qualunque sia P e qualunque sia il raggio Px la $S^{2(n-1)}$ di questò raggio, ossia la superficie luogo dei punti i cui piani

(*) Sturm (Math. Ann. Bd. VII. pag. 567) trova questo numero sotto la forma $n+m+r$, dove m è la classe ed r la classe della sezione piana di S^n; questa forma dà il numero delle normali anche quando la S^n non è generale.

(**) Nella memoria citata dello *Sturm* a pag 572 si trova una nota nella quale è detto che *Terquem* il primo (Journal de Liouville. Série I. t. V. p. 175) trovò il numero delle normali per un punto ad una superficie generale. Nella stessa nota sono pure date altre indicazioni bibliografiche relative allo stesso argomento.

polari fanno l'angolo α col raggio stesso (*) ha in Q un punto doppio (§. II), e quindi in Q cadono due punti uniti della corrispondenza $[2\ ,\ 2(n-1)]$ del §. III cioè Q è un punto doppio per la polare inclinata.

Poi supponiamo che p sia una retta del piano all'∞. Poichè la $S^{2(n-1)}$ è la stessa per tutte le rette parallele fra loro, si vede che qualunque sia il polo P, se l'angolo α rimane invariato, la corrispondenza di *Chasles* sopra p rimane identicamente la stessa, e conseguentemente si hanno sempre gli stessi punti uniti; onde se α non varia, qualunque sia il polo, una retta arbitraria del piano E_∞ incontra sempre la polare inclinata negli stessi $2\,n$ punti. Dunque:

« Le polari inclinate di tutti i punti dello spazio
« hanno negli $(n-1)^3$ centri della superficie fondamen-
« tale altrettanti punti doppi e passano tutte per una
« curva fissa d' ordine $2\,n$ situata nel piano E_∞ ».

Si vede pure facilmente quando $\alpha=0$ che le polari parallele passano tutte per gli $(n-1)^3$ centri di S^n, è inoltre passano tutte per la sezione di S^n col piano E_∞, poichè per ogni punto di questa il piano polare (tangente in quel punto alla S^n) è parallelo al raggio vettore, qualunque sia P.

Se $\alpha=\frac{\pi}{2}$, qualunque sia il polo, la curva del §. III passa per gli $(n-1)^3$ centri di S^n e per gli n^2-n+1 punti fissi di E_∞, che hanno la stessa retta polare rispetto alla sezione di quel piano colla S^n e rispetto a C^2_∞. Ossia le curve polari normali di tutti i punti dello spazio hanno gli asintoti respettivamente paralleli (**).

(*) In seguito diremo qualche volta per brevità, *la* $S^{2(n-1)}$ *di una retta*, per indicare questo luogo, ed anche: *la* $S^{2(n-1)}$ *di un piano* per indicare il luogo dei punti i cui piani polari fanno un angolo dato col piano,

(**) Steiner. Mem. cit. pp. 343 e 345.

Se il polo è un punto P_∞ di E_∞ la polare inclinata consta del piano E_∞ (contato due volte) e della superficie d'ordine $2(n-1)$, luogo dei punti i cui piani polari fanno l'angolo α colla direzione determinata da P_∞. La polare parallela consta di E_∞ e della polare prima di P_∞. La curva polare normale di P_∞ si spezza nella curva piana d'ordine n (*) polare inclinata per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ di P_∞ rispetto alla sezione di S^n con E_∞, e nella curva d'ordine $(n-1)^2$ luogo dei punti i cui piani polari passano per la retta polare di P_∞ rispetto al circolo immaginario C^2_∞.

V. Supponiamo fisso il polo P e variabile l'angolo α; avremo un certo sistema di polari inclinate. Preso un punto arbitrario R dello spazio, il raggio PR fa un angolo determinato α' col piano polare di R; quindi una sola superficie del sistema (quella determinata da P e da α') passa per R. Onde:

« Le polari inclinate di un punto fisso, al variare di « α formano un fascio ».

VI. Consideriamo le polari inclinate di tutti i punti dello spazio per lo stesso valore di α. Abbiamo veduto che ogni punto determina una polare inclinata. Dunque esse formano un sistema ∞^3. Presi tre punti arbitrari A, B, C dello spazio, il luogo dei punti le cui polari inclinate passano per A è un cono del 2.° grado, cioè il cono polare inclinato di A (§. III.) e similmente per B e per C.

Dunque vi saranno 8 poli le cui polari inclinate passano per A, B, C. O in altre parole:

« Le polari inclinate di tutti i punti dello spazio for- « mano un sistema ∞^3 d' indice 8 ».

(*) Dewulf. Mem. cit. §. II.

Le polari inclinate dei punti di una retta r formano un sistema d' indice 2, poichè il cono polare inclinato di un punto arbitrario dello spazio taglia r in due punti. Tutte queste superficie oltre a passare per gli $(n-1)^3$ centri di S^n e per una curva fissa d' ordine $2n$ del piano E_∞ passano anche evidentemente per i $2(n-1)$ punti in cui la $S^{2(n-1)}$ della retta r taglia la retta stessa. Questi $2(n-1)$ punti fissi di r si possono chiamare i *punti polari inclinati* della retta, con denominazione usata da Dewulf nel piano (*).

Quando il polo scorrendo sopra r viene a cadere in uno di questi $2(n-1)$ punti, la retta r resulta inclinata di α sul piano polare di esso, e quindi (§. III.) osculatrice nel punto doppio alla polare inclinata. Se il polo cade nel punto all' ∞ di r, i raggi vettori sono tutti paralleli ad r, e quindi la $S^{2(n-1)}$ di r fa parte della polare inclinata; l'altra parte è il piano E_∞ contato due volte.

Se $\alpha=0$, osservisi che i piani polari paralleli di tre punti arbitrarj dello spazio, cioè i piani tangenti in quei punti alle loro respettive polari parallele, determinano un solo punto. Dunque

« Le polari parallele di tutti i punti dello spazio for-
« mano un sistema lineare ∞^3 ».

Le polari parallele dei punti di una retta r formano un fascio, poichè il piano polare parallelo di un punto arbitrario taglia r in un solo punto.

VII. Chiamiamo *polare inclinata* di una retta t (*retta polare*) il luogo di un punto M il cui piano polare è inclinato di un angolo costante φ sul piano vettore tM.

(*) Mem. cit. §. IX.
Osserviamo ancora che per ciascuna delle rette che passano per un punto fisso O_1 i $2(n-1)$ punti polari inclinati sono le intersezioni ulteriori colla polare inclinata di O_1, oltre le 2 riunite in O_1.

Presa una retta d arbitraria nello spazio ogni suo punto x determina un piano vettore $t\,x$. Ora il luogo dei punti i cui piani polari fanno l'angolo φ con $t\,x$, è una superficie $S^{2(n-1)}$ (§. II.) che incontrerà d in $2(n-1)$ punti y. Ogni punto y determina un piano polare η e per p passano 2 piani inclinati di φ sopra η, i quali tagliano d in 2 punti x. La corrispondenza fra x ed y è $[2, 2(n-1)]$ e vi sono $2n$ punti uniti. Se d si prende in modo che incontri la retta t, il piano vettore $t\,x$, qualunque sia il punto x, coincide sempre col piano $t\,d$. La $S^{2(n-1)}$ del piano $t\,d$ taglia d in $2(n-1)$ punti, dunque le altre 2 intersezioni di d colla polare inclinata sono riunite nel punto d'incontro delle rette t, d. La retta t dunque è doppia per la superficie trovata. Se si fa scorrere un punto N sopra questa superficie in modo da avvicinarsi indefinitamente ad un punto D della retta t, il piano vettore t N si avvicinerà indefinitamente ad uno dei due piani tangenti nel punto biplanare D, e dovrà sempre mantenersi inclinato di φ sul piano polare di N; e questa proprietà dovrà aver luogo anche al limite quando N cade in D. Si può quindi affermare che:

« La polare inclinata di una retta è una superficie « dell'ordine $2n$ che contiene la retta come retta doppia, e i due piani tangenti in ciascun punto della « retta doppia sono inclinati di φ sul piano polare di « questo punto ».

I due piani tangenti coincidono per quei punti della retta t, il cui piano polare è inclinato di φ sopra t. Dunque vi sono $2(n-1)$ punti uniplanari.

Si deduce da ciò che precede che

« Il luogo dei punti nei quali i piani passanti per « una retta fissa tagliano una data superficie d'ordine « n sotto un angolo costante è una curva d'ordine $2n^2$

« che ha n punti doppi nelle n intersezioni della retta « colla superficie ».

D' onde resulta che una sezione di S^n fatta con un piano σ passante per t, e conseguentemente una sezione piana qualunque, possiede $2n^2 - 2n = 2n(n-1)$ punti nei quali il piano della sezione taglia la superficie sotto un angolo dato φ. Questi punti sono anche le intersezioni della sezione piana colla superficie $S^{2(n-1)}$ del piano σ, per l' angolo φ.

Se $\varphi = \frac{\pi}{2}$ la polare inclinata di t si può chiamare *polare normale*. Prendiamo ancora una retta arbitraria d. Ogni punto x di d determina un piano vettore tx, che taglia il piano E_∞ secondo una retta t_∞; i piani normali a tx passano pel punto T_∞ polo di t_∞ rispetto a C^2_∞; dunque i loro poli stanno sopra la polare prima di T_∞, che taglia la retta d in $n-1$ punti y. Ogni punto y ha un piano polare che dermina un piano per t normale ad esso, e quindi un punto x di d. La corrispondenza è $[1, n-1]$, e si hanno n punti uniti. Prendendo la d in modo da incontrare la retta t si vede facilmente che un punto unito della corrispondenza, cioè un punto della polare normale, cade nella intersezione di quelle due rette; ossia la superficie polare normale contiene la retta t. Inoltre quando un punto N muovendosi sopra la polare normale si avvicina indefinitamente ad un punto V di t, il piano vettore che si mantiene sempre normale al piano polare di N, si avvicina indefinitamente al piano tangente in V. Si conclude:

« La polare normale di una retta è una superficie « dell' ordine n che contiene la retta, e il cui piano « tangente in ciascun punto di quella è normale al piano « polare del punto stesso ».

La curva di ordine n^2, intersezione di questa superficie colla fondamentale, è la curva luogo dei piedi delle normali che incontrano t; l'ordine di essa fu già trovato da Sturm (*) sotto la forma $n+r$, che serve anche quando S^n non è generale. Sturm ha trovato pure nella stessa memoria la classe e alcune proprietà di questa curva.

Quando $\varphi=0$, osserviamo che gli $n-1$ punti d'intersezione di t colla polare prima del suo punto all'∞ hanno i loro piani polari paralleli a t e quindi sono punti del luogo. Inoltre un piano qualunque σ passante per t incontra il piano all'∞ secondo una retta s_∞; la curva base del fascio delle polari prime dei punti di S_∞ incontra in $(n-1)^2$ punti il piano σ. Dunque ogni piano per t ha col luogo cercato $1-n+(n-1)^2=n(n-1)$ intersezioni; vale a dire, chiamando questo luogo *curva polare parallela* della retta t,

« La curva polare parallela di una retta è dell'or-
« dine $n(n-1)$ ed incontra la retta in $n-1$ punti ».

Le $n^2(n-1)=n(n-1)^2+n(n-1)$ intersezioni di essa colla S^n sono gli $n(n-1)$ punti di contatto dei piani tangenti per t, e gli $n(n-1)$ punti comuni alla sezione di S^n con E_∞ ed alla curva polare prima rispetto ad essa del punto all'∞ di t.

La curva polare parallela di una retta t è evidentemente il luogo dei punti i cui piani polari paralleli passano per t.

VIII. Facendo passare la retta arbitraria d presa al principio del §. precedente per un centro Q di S^n ed osservando che questo è punto doppio per la $S^{2(n-1)}$ di un piano qualunque, avremo che in Q cadono due punti uniti della corrispondenza $[2, 2(n-1)]$ trovata nel §.

(*) Mem. cit. p. 567.

stesso, cioè la polare inclinata ha ivi un punto doppio. E poichè ciò sussiste qualunque sia la retta polare, si può dire che:

« Le polari inclinate di tutte le rette dello spazio « hanno negli $(n-1)^3$ centri di S^n altrettanti punti « doppi ».

Così pure osservando che il piano E_∞ si può riguardare come inclinato di un angolo qualunque sopra un piano qualunque, si ha:

« Le superficie polari normali, e le curve polari pa- « rallele di tutte le rette dello spazio passano per gli « $(n-1)^3$ centri di S^n ».

IX. Presa una retta fissa t, ogni punto P dello spazio determina un piano polare, il quale fa un angolo determinato col piano vettore P t. Dunque

« Le polari inclinate di una retta al variare di φ « formano un fascio.

X. Se la polare inclinata di una retta s deve passare per un punto A, il piano polare di A deve essere inclinato di φ sul piano vettore sA, cioè la retta s deve essere tangente al cono polare inclinato del punto A. Dunque per quattro punti dello spazio passeranno tante polari inclinate di rette quante sono le tangenti comuni a 4 coni del 2.° grado. Ma le tangenti ad un cono del 2.° grado formano un complesso particolare del 2.° grado e le rette comuni a 4 complessi del 2.° grado sono 32. Quindi

« Le polari inclinate di tutte le rette dello spazio « formano un sistema ∞^4 d' indice 32 ».

Per $\varphi = \frac{\pi}{2}$, se la polare normale di una retta s deve passare per un punto arbitrario P dello spazio, è necessario che s incontri la normale p condotta da P al suo piano polare, cioè appartenga al complesso del 1.° grado costituito dalle rette che incontrano p. Ma quattro complessi del 1.° grado hanno 2 rette comuni, onde 2 polari normali passano per 4 punti arbitrari dello spazio, ossia

« Le polari normali di tutte le rette dello spazio for-
« mano un sistema ∞^4 d' indice 2 ».

XI. Abbiasi una curva gobba C^ν, e cerchiamo la classe dell' inviluppo dei piani π condotti dai punti di questa curva parallelamente ai respettivi piani polari, cioè l'inviluppo dei piani polari paralleli dei punti di C^ν. Il luogo dei punti i cui piani polari paralleli passano per un punto P dato arbitrariamente nello spazio è la polare parallela di P (§. III), dunque per P passano tanti piani π dell' inviluppo quante sono le intersezioni della polare parallela di P colla curva C^ν. Cioè

« L' inviluppo cercato è una sviluppabile della classe
« $n\nu$ »,

Ogni punto di una generatrice di questa sviluppabile appartiene ai piani polari paralleli di due punti infinitamente vicini della curva, quindi la sviluppabile stessa è anche il luogo dei punti le cui polari parallele toccano C^ν.

Se la curva data è l' intersezione completa $C^{n_1 n_2}$ di di due superficie degli ordini n_1, n_2 ricordiamo che le polari parallele d'una retta arbitraria r formano un fascio dell' ordine n (§. VI), e quindi ve ne sono $n_1\ n_2\ (n_1+n_2+n-4)$ (*) tangenti a $C^{n_1 n_2}$, ossia questo è il numero delle intersezioni di r coll' inviluppo. Onde:

« In questo caso l' inviluppo cercato è dell' ordine
« $n_1 n_2 (n_1+n_2+n-4)$ ».

(*) Cremona. Grundzüge p. 117.

Per $\nu=1$, cioè quando C^ν è una retta s, si ha una sviluppabile della classe n e dell' ordine $2(n-1)$. Per ciascuna delle $n-1$ intersezioni di s colla polare prima del suo punto all' ∞ il piano polare è parallelo ad s. Quindi vi sono $n-1$ piani dell' inviluppo che passano per s, ossia per ogni punto di s si ha un solo piano variabile dell' inviluppo. Onde la sviluppabile trovata è universale, e perciò conoscendone la classe e l'ordine se ne potrebbero determinare tutte le singolarità ordinarie (*). Le rette tangenti a questa sviluppabile formano un complesso del grado n. Infatti quelle che stanno in un piano inviluppano la sezione della sviluppabile (curva della classe n); quelle che passano per un punto costituiscono gli n piani tangenti della sviluppabile passanti per esso (cono particolare del grado n). Per ciascuna di queste rette la curva polare parallela incontra la retta s, perchè per ciascuna di esse passa un piano π parallelo al piano polare del punto πs. Onde:

« Le rette le cui curve polari parallele incontrano una « retta fissa formano un complesso del grado n ».

Allora intendendo per *indice* di un sistema ∞^r di curve gobbe il numero di quelle che incontrano r rette fisse, e osservando che 4 complessi del grado n hanno $2n^4$ rette comuni, si ha un altro resultato da aggiungersi a quelli del §. X:

« Le curve polari parallele di tutte le rette dello spa- « zio formano un sistema ∞^4 d' indice $2n^4$ ».

XII. Si abbia ancora una curva C^ν e cerchiamo il luogo generato dalle rette condotte dai punti di C^ν normalmente ai respettivi piani polari (rette polari normali). Presa una retta arbitraria r ogni punto B di C^ν deter-

(*) *Salmon*. Analytic Geometry of three dimensions. Dublin 1862. p. 238.

mina un piano vettore B r, il quale diviene perpendicolare al piano polare β di B quando la normale condotta da B a β incontra la retta r. Dunque vi saranno tante rette del luogo che incontrano r, quante sono le intersezioni di C^ν colla polare normale di r, cioè $n\ \nu$. Inoltre si osservi che per ogni punto di C^ν passa una sola generatrice del luogo perchè ogni punto ha un solo piano polare e una sola normale sopra di esso. Dunque:

« Il luogo cercato è una rigata del grado $n\ \nu$ che « contiene semplicemente la curva C^ν ».

Per ogni punto della retta polare normale di un punto dato Q si ha la proprietà che la sua curva polare normale passa pel punto Q; dunque la rigata trovata precedentemente è il luogo dei punti le cui curve polari normali incontrano C^ν.

Se $\nu=1$ si ottiene che:

« I punti le cui curve polari normali incontrano una « retta fissa stanno sopra una superficie rigata del gra- « do n ».

Ciò permette di aggiungere il seguente resultato a quelli del §. VI.

« Le curve polari normali di tutti i punti dello spa- « zio formano un sistema ∞^3 d' indice n^3 ».

XIII. Ogni punto di una curva C^ν ha una polare inclinata per un dato angolo φ. Variando P sopra C^ν la polare inclinata inviluppa una certa superficie. Un punto P dell' inviluppo deve esser tale che per esso passino le polari inclinate di due punti consecutivi $P_1\ P_2$ di C^ν, cioè tale che il suo cono polare inclinato sia tangente in P_1 a C^ν. Considerando le tangenti di C^ν e le loro polari inclinate per l' angolo φ, un punto Q dell' inviluppo di queste ha la proprietà di appartenere alle polari inclinate di due tangenti consecutive $t_1\ t_2$ di C^ν. Dunque queste tangenti dovranno toccare il cono polare inclinato di Q, e poichè esse sono infinitamente vicine, questo cono dovrà toccare C^ν nel punto di contatto di t_1. Onde l' inviluppo delle polari inclinate delle tangenti di C^ν è ancora il luogo dei punti i cui coni polari inclinati toccano C^ν.

Possiamo concludere:

« L' inviluppo delle polari inclinate dei punti di una « curva per un dato angolo, è lo stesso di quello delle « polari inclinate delle sue tangenti per lo stesso angolo, « ed è il luogo dei punti, i cui coni polari inclinati sono « tangenti alla curva ».

Ne discende immediatamente che l'inviluppo del sistema ∞ d' indice 3 delle polari inclinate dei punti di una retta è la polare inclinata della retta stessa.

Si abbia una curva C_ρ della classe ρ e un punto P_1 sopra di essa. Ogni punto M della polare parallela di P_1 ha la proprietà che il suo piano polare parallelo passa per P_1. Se M è anche comune alla polare parallela del punto P_2 consecutivo a P_1, quel piano passerà anche per P_2, cioè conterrà la tangente in P_1 alla curva. Onde l' inviluppo delle polari parallele dei punti di una curva è il luogo dei punti i cui piani polari paralleli sono tangenti alla curva stessa.

Ma i piani polari paralleli dei punti di una retta generano una sviluppabile della classe n (§. XI) la quale ha $n\,\rho$ piani tangenti comuni colla curva C_ρ. Dunque l' inviluppo cercato è dell' ordine $n\,\rho$. Consideriamo la sezione dell'inviluppo trovato col piano E_∞. Un punto P di questa deve esser tale che il piano condotto per esso parallelamente al suo piano polare sia tangente alla curva. Quindi è necessario anzitutto che P sia situato sopra l'intersezione del suo piano polare col piano E_∞, cioè sia un punto della curva C^n_∞ sezione di E_∞ colla superficie fondamentale.

Ogni punto Q di questa sezione è ρ^{plo} per l'inviluppo, poichè per la tangente in Q a C_{∞}^{n} passano ρ piani tangenti a C_{ρ}. Dunque si può concludere:

« L' iuviluppo delle polari parallele dei punti di una « curva della classe ρ, ossia il luogo dei punti i cui « piani polari paralleli toccano la curva, è una superficie « dell' ordine $n\,\rho$ che ha per curva ρ^{pla} la sezione del « piano E_{∞} colla superficie fondamentale ».

Abbiamo veduto che le polari parallele di due punti infinitamente vicini P_1 P_2 di C_{ρ}. si tagliano secondo una curva i cui punti hanno la proprietà che i loro piani polari paralleli passano per la tangente in P_1 a C_{ρ}. Dunque l'inviluppo trovato coincide colla superficie generata dalle curve polari parallele delle tangenti di C_{ρ}.

Se ν è l' ordine di C_{ρ} si può enunciare il seguente teorema:

« Vi sono $n\,\nu\,\rho$ punti di una curva dell'ordine ν e « della classe ρ tali che il piano condotto per ciascuno « di essi parallelamente al respettivo piano polare tocca « la curva ».

La sezione dell' inviluppo trovato colla superficie fondamentale S^n è una curva dell'ordine $n^2\,\rho$. Se da questa togliamo la curva C_{∞}^{n} contata ρ volte, resta una curva dell' ordine $n(n-1)\,\rho$, luogo dei punti per ciascuno dei qnali il piano ivi tangente ad S^n tocca anche C_{ρ}. Questo risultato poteva anche ottenersi osservando che i piani tangenti ad S^n lungo una sezione piana generano una sviluppabile della classe $n(n-1)$ la quale ha $n(n-1)\,\rho$ piani tangenti comuni con C_{ρ}.

Se invece di una curva C_{ρ} si prende una retta p, ρ è $=0$; ma allora le polari parallele dei punti di p formano un fascio (§. VI) La curva base C^{n^2} di questo fascio consta:

1.° Della curva $C^{n(n-1)}$ polare parallela di p, perchè il piano polare parallelo di un suo punto qualunque contiene la retta p.

2.° Della curva C^n_∞, perchè per essa passano le polari parallele di tutti i punti dello spazio (§. IV).

Si abbia ancora una curva C^ν dell' ordine ν, e sia ρ la sua classe. Il sistema ∞ delle polari normali delle sue tangenti è d' indice ρ, come si potrebbe facilmente dedurre da ciò che si è detto nel §. X. Questo sistema inviluppperà una certa superficie.

Se t_1 t_2 sono due tangenti consecutive, e Q un punto della intersezione delle loro polari normali, i piani t_1 Q, t_2 Q devono essere normali al piano polare di Q; ossia l' inviluppo è anche il luogo dei punti tali che le loro rette polari normali incontrano la curva. Questo inviluppo contiene la curva data, perchè la polare normale di una retta contiene la retta stessa, e quindi il punto comune a t_1, t_2 è un punto dell' inviluppo. Presa una retta arbitraria d le normali condotte respettivamente dai suoi punti sui loro piani polari generano una rigata del grado n (§. XII) la quale è incontrata dalla curva data in $n\,\nu$ punti. Dunque:

« L' inviluppo delle polari normali delle tangenti di « una curva dell' ordine ν, od anche il luogo dei punti « le cui rette polari normali incontrano la curva è una « superficie dell'ordine $n\,\nu$, che contiene la curva stessa ».

Ne segue che:

« I punti di una superficie dell' ordine n, pei quali « le rette ivi normali alla superficie incontrano una « curva dell' ordine ν, stanno sopra una curva dell' or- « dine $n^2\,\nu$ ».

La superficie rigata generata dalle normali lungo questa curva dell' ordine $n^2\,\nu$ cioè dalle normali che incontrano la C^{ν}, può trovarsi con metodo analogo a quello seguito da *Sturm* nella memoria citata, pel caso di $\nu=1$. S' indichi con m la classe, con r la classe della sezione piana della superficie S^n dell' ordine n. La rigata generata dalle normali nei punti di una sezione piana di S^n è del grado $n+r$ (*); vi sono quindi $\nu(n+r)$ normali che incontrano C^{ν} e i cui piedi stanno in un piano arbitrario; questo numero è l'ordine della curva B luogo dei piedi delle normali che incontrano C^{ν}.

La rigata generata dalle normali nei punti della linea di contatto del cono tangente K che ha per vertice un punto arbitrario, è del grado $r+m$ (**); onde $\nu(r+m)$ normali nei punti di questa curva di contatto incontrano C^{ν}, cioè per un punto arbitrario passa questo numero di piani tangenti ad S^n in punti di B, ossia la sviluppabile circoscritta ad S^n lungo la curva B è della classe $\nu(r+m)$; questa è dunque la classe della sezione fatta da E_{∞} nella sviluppabile, e quindi anche l' ordine della curva polare reciproca di questa sezione rispetto al circolo immaginario C^2_{∞}. Questa curva polare reciproca e la B si corrispondono univocamente; quindi applicando un teorema di Chasles (***) le congiungenti dei punti corrispondenti, cioè

(*) Sturm. Mem. cit. p. 567.

(**) Sturm. Ivi.

(***) Comptes rendus. V. 62. p. 581.

« Si l'on a dans l'espace deux courbes, gauches on planes, $U_m\ U_{m'}$, « d' ordres m et m', dont les points a, a' se déterminent individuelle- « ment et se correspondent anharmoniquement, les droites $a\ a'$ qui « joignent ces points deux à deux, forment une surface d'ordre $m+m'$ ».

Questo teorema però è vero anche quando le due curve non sono razionali, purchè i loro punti si possano far corrispondere individualmente, cioè purchè le due curve sieno dello stesso genere. Per es. nel caso al quale lo ha applicato lo Sturm (mem. cit.) le due curve non sono necessariamente razionali.

le normali ad S^n nei punti di B, generano una rigata del grado $\nu\,(n+2\,r+m)$. Se la S^n è generale questo numero si può scrivere $\nu\,n^3$.

Ricordiamo che ogni punto della intersezione delle polari normali di due tangenti infinitamente vicine $t_1\ t_2$ di C^ν ha la proprietà che la sua retta polare normale passa pel punto di contatto di t_1. Di quì si trae che l'inviluppo trovato di sopra coincide colla superficie generata delle curve polari normali dei punti di C^ν. Come caso particolare:

« Le curve polari normali dei punti di una retta « (punteggiata) generano la polare normale della retta ».

XIV. Sia dato un fascio di rette di centro U e nel piano ω. Il cono polare inclinato di un punto arbitrario R per un dato angolo φ, sega il piano ω secondo una conica alla quale si possono condurre due tangenti per U. Così vi sono due rette $t_1\ t_2$ del fascio tali che i piani vettori t_1 R , t_2 R sono inclinati di φ sul piano polare di R, ossia tali che le loro polari inclinate per l'angolo φ passano pel punto R. Quindi:

« Le polari inclinate delle rette di un fascio formano « un sistema ∞ d'indice 2 ».

Presa una retta t_1 del fascio e la sua infinitamente vicina t_2, un punto Q della intersezione delle loro polari inclinate ha la proprietà che i piani vettori t_1 Q , t_2 Q infinitamente vicini sono inclinati di uno stesso angolo φ sopra il piano polare di Q, cioè il cono polare inclinato di Q è tangente in U a t_1. Quindi facendo ruotare la retta t_1 si vede che l'inviluppo della sua polare inclinata è il luogo dei punti i cui coni polari inclinati passano per U, cioè la polare inclinata di U. Dunque:

« L'inviluppo delle polari inclinate delle rette di un « fascio, è la polare inclinata (per lo stesso angolo) del « centro del fascio ».

Osservando che il resultato è indipendente dalla posizione del piano ω, purchè questo passi per U, si può dire più generalmente:

« Le polari inclinate delle rette di una stella inviluppano tutte una stessa superficie, che è la polare inclinata del centro della stella ».

Se $\varphi = \frac{\pi}{2}$ notiamo che le polari normali delle rette del fascio dato formano un fascio. Infatti un punto arbitrario R dello spazio determina un piano polare ρ, e se R non è sulla curva polare normale di U vi ha un solo piano π che passa per la retta U P ed è normale a ρ, il quale taglia il piano ω secondo una sola retta del fascio. La curva base del fascio di queste polari normali è il luogo dei punti N per ognuno dei quali tutti i piani vettori determinati da N e dalle diverse rette del fascio dato sono normali al piano polare di N. Onde questa curva base si spezza;

1.° Nella curva C^{n^2-n+1} polare normale del centro del fascio.

2.° Nella intersezione C^{n-1} del piano del fascio colla polare prima del punto all'∞ comune alle rette normali a quel piano.

La seconda curva incontra la prima nelle n^2-n+1 intersezioni di questa col piano del fascio e varia col piano stesso, mentre la prima resta fissa quando è fisso il centro.

Ora osserviamo che le polari normali delle rette di una stella formano una rete, poichè due punti arbitrari dello spazio determinano due piani polari, e una sola retta della stella incontra le normali condotte respettivamente dai due punti sui loro piani polari. Avremo quindi :

« Le polari normali della retta di una stella formano « una rete ed hanno tutte a comune una curva d'ordine « n^2-n+1, la curva polare normale del centro della « stella ».

Se $\varphi=0$, le curve polari parallele delle rette del fascio di centro U, e situato nel piano ω generano una superficie; un punto qualunque R di essa deve esser tale che si possa condurre per U un piano che contenga R e sia parallelo al piano polare di R; ma perchè ciò avvenga è necessario che il raggio vettore U R sia parallelo al piano polare di R onde la superficie cercata è la polare parallela di U. Poi osservando che il resultato non dipende dalla posizione di ω, ma solo dal centro U, si può dire che

« Le curve polari parallele delle rette di una stella « generano la polare parallela del centro della stella ».

XV. Se il polo P è un punto della superficie fondamentale S^n, si può ripetere senza alterazione la dimostrazione del §. III, vale a dire la polare inclinata è ancora dell' ordine $2\,n$ ed ha un punto doppio in P. Il cono osculatore nel punto doppio è formato dalle rette inclinate di α sul piano tangente in P ad S^n. Onde:

« I piedi delle oblique inclinate di un angolo costante « sopra una superficie d'ordine n e passanti per un punto « P di essa stanno sopra una curva d' ordine $2\,n^2$ che « ha un punto doppio in P, e per conseguenza le obli- « que stesse formano un cono dell'ordine $2(n^2-1)$ ».

Per $\alpha=0$ si può dimostrare ancora come nel §. III che si ha una superficie d'ordine n. Il piano tangente ad essa in P coincide col piano ivi tangente alla S^n. Quindi la intersezione della polare parallela colla S^n ha in P un punto doppio. Le rette che passano per P e incontrano altrove sotto l'angolo 0 la S^n debbono dunque costituire un cono dell' ordine $n^2—2$. Questo si spezza nel cono d'ordine n che projetta la sezione C^n_∞, e in quello d' ordine $n(n—1)—2$ generato dalle rette che passano per P e toccano altrove S^n.

Per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ la dimostrazione data nel §. III pure non varia. Onde da un punto P di una superficie d' ordine n si posson condurre $n^2—n+1$ normali alla superficie, compresa quella che è normale in P.

CASO PARTICOLARE

DI $n=2$

I. Se la superficie fondamentale è una quadrica S^2, la polare inclinata di un punto P per un angolo dato α è una superficie del 4.° ordine S^4 con due punti doppi, l'uno nel polo P, l'altro nel centro O di S^2. Il cono osculatore in P è formato dalle rette inclinate di α sul piano diametrale coniugato ad O P.

Si può assegnare un modo per costruire questa superficie. Tiriamo una retta qualunque r pel polo P. Questa determina insieme con O un piano diametrale O r; chiamiamo r' il diametro coniugato ad O r. Per r' passano 2 piani π_1 π_2 inclinati di α sopra r. I diametri p_1 p_2 coniugati respettivamente a π_1 π_2 incontrano evidentemente la retta r, perchè giacciono nel piano O r, e le due intersezioni M_1 M_2 sono punti della superficie cercata, giacchè il piano polare di uno di essi per es. di M_1 è parallelo al piano diametrale coniugato al diametro O M, ossia è inclinato di α sul raggio vettore P M_1.

Se $\alpha=0$ la polare parallela rispetto alla quadrica fondamentale S^2 è un altra quadrica che passa per P per O e per la sezione di E_∞ con S^2. Il piano tangente ad essa nel polo P dovendo essere parallelo al piano polare di P rispetto ad S^2, sarà parallelo al piano diametrale coniugato al diametro O P. La quadrica polare parallela si può immaginare generata dalla intersezione di una retta che passa per P col piano diametrale coniugato alla sua direzione.

Consideriamo una sezione fatta con un piano per O P, e chiamiamo Q , R le intersezioni di O P colla conica K^2, sezione di S^2. Se prendiamo un raggio qualunque r per P, il diametro di K^2 coniugato alla direzione di r incontra r in un punto M′ della sezione della polare parallela. Da Q tiriamo una parallela a P M′ che incontrerà in M la conica K^2 e congiungiamo M con R. Inoltre tiriamo M M′ che incontrerà O P in S. Poichè di due corde supplementari l' una è parallela al diametro coniugato alla direzione dell' altra, R M è parallela ad O M′ e i triangoli Q R M, P O M′ sono simili; ma anche i due triangoli SQM , SPM′ sono simili, avremo dunque

$$\frac{SQ}{SP}=\frac{SM}{SM'}=\frac{MQ}{M'P}=\frac{RQ}{QP}$$

e il punto S è fisso sopra O P.

Le due coniche sono dunque omotetiche, e i centri d' omotetia S ed S′ sono sulla retta O P. S è determinato dalla relazione

$$\frac{SP}{SQ}=\frac{QP}{RQ};$$

si vedrebbe facilmente che l' altro è determinato dalla relazione

$$\frac{S' P}{S' R} = \frac{O P}{R P}.$$

Facendo ruotare il piano secante attorno ad O P si può concludere che

« La polare parallela di un punto è una quadrica omo-« tetica alla quadrica fondamentale ».

La qnadrica polare parallela si può dunque costruire per punti per mezzo di una omotetìa i cui elementi caratteristici sono individuati da P e da S^3.

Il ragionamento precedente suppone che la quadrica fondamentale abbia il centro a distanza finita. Se S^2 è un *paraboloide ellittico* od *iperbolico*, la O P non è altro che la parallela all'asse di S^2 condotta per P. Chiamiamo R il punto d'intersezione a distanza finita di questa retta con S^2, e immaginiamo un piano secante π per P R, che taglierà S^2 secondo una parabola K^2 avente l' asse parallelo a P R. La sezione di π colla polare parallela si può costruire così: conducendo un raggio t per P e trovando l'intersezione di questo col diametro conjugato alla direzione di t potremo condurre per R una parallela a t che incontrerà la parabola K^2 in un altro punto M; dal punto di mezzo U di R M condurremo una parallela a P R, che incontrerà il raggio t in un punto M' della polare parallela. Tiriamo M M' che incontrerà in S la P R. Allora osserviamo che

$$\frac{S P}{P R} = \frac{S M'}{M' M} = \frac{S P}{M' U} = \frac{P M'}{U M} = \frac{P M'}{R U}$$

ma

$$P M' = R U$$

Facendo ruotare attorno a P R il piano π, si può dunque concludere che il centro d' omotetìa del paraboloide fondamentale e della polare parallela è determinato dalla relazione

$$S P = P R$$

e il rapporto d'omotetia $\frac{S M}{S M'} = 2$. Dunque se la quadrica fondamentale S^2 ha il centro all'∞, la quadrica polare parallela si può costruire nel modo seguente molto semplice. Si conduce dal polo P una parallela all'asse di S^2 che incontrerà S^2 a distanza finita in un punto R. Dalla parte opposta ad R si prende un segmento $P S = P R$. Allora basta dividere per metà i raggi vettori che da S vanno a punti di S^2 per avere altrettanti punti della polare parallela.

Da ciò che precede, od anche dall' osservare che la polare parallela contiene la sezione di E_∞ colla superficie fondamentale, resulta evidentemente che

« La quadrica polare parallela è della stessa specie « della fondamentale ».

Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ la curva polare normale è in questo caso una cubica gobba che passa pel polo P pel centro O di S^2 e pei 3 punti d'intersezione degli assi di S^2 con E_∞. La tangente in P è normale al piano diametrale coniugato a P O.

Questa cubica si può costruire nel modo seguente. Conduciamo un piano π per O P, che taglierà S^2 secondo una conica K^2 col centro in O, e sia p il diametro coniugato a π. Il piano σ condotto per p perpendicolarmente a π sega π secondo un diametro s di K^2. Conduciamo per P una perpendicolare ad s; l' intersezione di questa perpendicolare col diametro coniugato ad s rispetto a K^2 è il terzo punto d' intersezione di π colla curva cercata, oltre i due O e P. Infatti il piano diametrale coniugato ad O M e perciò anche il piano polare di M è perpendicolare al raggio vettòre P M. Così facendo ruotare il piano π attorno ad O P si può costruire per punti la cubica polare normale.

Il punto M cade in O quando il diametro s è normale a P O. Ma allora il diametro M O coniugato ad s rispetto a K^2 diviene tangente in O alla cubica. Onde

« La cubica polare normale ha per tangente in O il « diametro coniugato al piano diametrale normale a PO».

I tre punti di E_∞ che hanno la stessa retta polare rispetto alla sezione di E_∞ con S^2 e rispetto al circolo immaginario C^n_∞ sono reali.

Infatti se la S^2 ha il centro a distanza finita essi sono le tre intersezioni di E_∞ cogli assi di S^2. Se S^2 ha il centro all'∞ uno dei tre punti in questione è il punto all'∞ dell'asse di S^2. Per gli altri due punti, osserviamo che le direzioni principali sono le stesse per tutte le coniche sezioni di S^2 coi piani normali all' asse, e queste direzioni determinano due punti R_∞ R'_∞ di E_∞, che sono quelli cercati, poichè il piano polare di ciascuno di essi, per es. di R_∞ è normale al raggio vettore P R_∞. Sappiamo ora che la cubica polare normale deve contenere quei tre punti di E_∞, Dunque:

« La cubica polare normale è sempre una *iperbole* « *cubica*, che ha i tre asintoti paralleli agli assi della « quadrica S^2, quando questa ha il centro a distanza « finita; e se il centro è all'∞, un asintoto è parallelo « all' asse di S^2, e gli altri due paralleli alle direzioni « principali delle sezioni normali all' asse ».

Se S^2 è una superficie di rivoluzione, osserviamo che il piano polare di un punto qualunque T_∞ della retta t_∞ comune a tutti i piani dei circoli paralleli, è normale alla direzione determinata da T_∞. Quindi:

« In questo caso la cubica si scompone nella retta t_∞
« e in una conica ».

Questa conica dovendo avere per tangente in P la retta t normale al piano polare di P e dovendo passare per O giace nel piano O t, ossia nel piano meridiano determinato da P, che chiameremo π. Se si chiama D^2 la intersezione di π con S^2, si vede che la conica in questione non è altro che la curva polare inclinata per $\alpha = 90^0$ del polo P rispetto alla conica D^2; ma questa qualunque sia la natura di D^2 è sempre una iperbole equilatera che ha gli asintoti paralleli agli assi di D^2 (*). Dunque:

« La conica cercata e sempre una *iperbole equila-*
« *tera* situata nel piano meridiano che passa pel polo e
« cogli asintoti l'uno parallelo l'altro perpendicolare
« all' asse di rivoluzione ».

Questa conica si sa costruire perchè si conoscono due dei suoi punti (P ed O), le tangenti in essi e la direzione degli asintoti; si può anche costruire come luogo delle intersezioni dei raggi corrispondenti nei due fasci projettivi di raggi, il primo col centro in P, il secondo col centro in O e formato dai diametri respettivamente coniugati alle direzioni normali ai raggi del primo fascio.

II. Il luogo dei punti i cui piani polari rispetto ad S^2 fanno un angolo φ con un piano fisso σ (particolarizzando i resultati del §. II della 1.ª parte) si trova essere un cono del 2.° ordine col vertice in O. Però questo luogo si può anche trovare direttamente osservando che i poli di

(*) Dew. §. XXVII.

tutti i piani paralleli ad uno stesso piano diametrale τ sono i punti del diametro coniugato a τ. Onde se si costruisce il cono che ha il vertice in O ed è inviluppato dai piani inclinati dell'angolo φ sul piano π, il luogo cercato sarà il cono formato dai diametri coniugati a questi piani.

La polare inclinata di una retta t rispetto ad S^2 è una superficie del 4.° ordine che contiene t come retta doppia ed ha un punto doppio nel centro O di S^2. La sezione di questa superficie con un piano π per t consta della retta t contata due volte, e di una conica. Questa conica si può costruire osservando che essa è l'intersezione di π col cono trovato di sopra. In questo modo si ha una costruzione per punti della polare inclinata di una retta.

Il piano O t taglia la polare inclinata secondo t contata due volte, e secondo due altre rette, che sono i diametri coniugati ai piani diametrali inclinati di φ sopra O t, e passanti per il diametro coniugato ad O t.

Per $\varphi = \frac{\pi}{2}$ si ha che la polare normale della retta t è una superficie rigata del 2.° ordine che passa per t. Questa passa per i tre punti all'∞ V_1 V_2 V_3 che determinano la direzione degli assi principali di S^2, e pel punto all'∞ T_∞ della retta t, poichè contiene tutta questa retta.

Inoltre se si chiama t'_∞ la polare di T_∞ rispetto al circolo immaginario all'∞, e T'_∞ il polo di t'_∞ rispetto alla sezione di S^2 col piano all'∞, si vede che la polare normale passa anche per T'_∞, perchè il piano polare di T'_∞ rispetto ad S^2 passa per t'_∞, ossia è normale a t, e perciò anche al piano vettore $t\,T'_\infty$. Si hanno così 5 punti del piano all'∞, che determinano la conica sezione di questo piano colla polare normale di t. Di questi punti ve ne saranno 3 in linea retta soltanto nel caso che la retta t

sia normale ad una delle direzioni principali, poichè soltanto in questo caso T_∞ è in linea retta con due dei punti $V_1 V_2 V_3$. È poi facile dimostrare che se T_∞ è in linea retta con due dei punti V, anche T'_∞ deve stare sulla stessa retta. Supponiamo per es. che T_∞ sia sulla ret a $V_1 V_2$, t'_∞ passerà per V_3, poichè V_3 è il polo di $V_1 V_2$ rispetto al circolo immaginario. Allora T'_∞ sarà sulla retta $V_1 V_2$, poichè V_3 è anche il polo di $V_1 V_2$ rispetto alla sezione di S^2. Similmente si dimostrerebbe che se T'_∞ è in linea retta con dne dei punti V, anche T_∞ stà sulla medesima retta. Ma se 3 dei 5 punti sopraddetti sono in linea retta la sezione di E_∞ colla polare normale si spezza in 2 rette. Dunque:

« La polare normale di una retta t rispetto ad S^2 è
« un iperboloide ad una falda. Se t è normale alla di-
« rezione di un asse di S^2, è invece un paraboloide iper-
« bolico ».

Facciamo passare un piano τ per t; i punti di questo piano i cui piani polari sono normali al piano stesso appartengono anche al piano polare del punto all' ∞ comune alle rette normali a τ. Dunque se si conduce dal centro O di S^2 una retta p normale al piano τ, il piano diametrale coniugato a p taglia τ secondo una generatrice della polare normale. Così si può costruire la polare normale come luogo delle intersezioni dei piani corrispondenti nei due fasci projettivi, l' uno avente per asse la retta t, l'altro avente per asse il diametro coniugato al piano diametrale normale a t, e formato dai piani diametrali coniugati respettivamente alle normali ai piani del primo fascio.

Se t giace in uno dei piani diametrali principali di S^2, gli assi dei due fasci proiettivi s' incontrano e la polare normale è un cono.

Per $\varphi=0$ la curva polare parallela di t è una conica che incontra la retta t nel punto T in cui questa è tagliata dal piano diametrale τ coniugato alla sua direzione. Conducendo un piano σ per t, una intersezione di questo colla curva polare parallela è T, l'altra è il punto in cui il piano σ è tagliato dal diametro coniugato ad esso, poichè il piano polare di questo punto è parallelo a σ. Dunque:

« La conica polare parallela della retta t è situata « nel piano diametrale τ coniugato alla direzione di t ».

Da ciò che precede resulta che questa conica si può costruire mediante due fasci proiettivi situati nel piano τ: Se si chiama D^2 la sezione di τ con S^2, i fasci proiettivi sono, l'uno col centro in T, l'altro col centro in O e formato dai diametri di D^2 coniugati respettivamente ai raggi del primo fascio.

Con dimostrazione analoga a quella fatta nel §. I si vedrebbe che la conica generata da quei due fasci proiettivi è omotetica a D^2. Ossia:

« La conica polare parallela d'una retta t è omote- « tica alla conica sezione di S^2 col piano diametrale co- « niugato alla direzione di t ».

Lucca, Giugno 1882.