Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Ferdinando Aschieri

Sopra un complesso del 2.° grado

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 1 (1871), p. 133-156

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1871_1_1__133_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

SOPRA UN COMPLESSO

DEL 2.° GRADO

1. Per amore di chiarezza, e brevità premetto le seguenti osservazioni, e notazioni.

L' equazione

$$Xx+Yy+Zz+Tt=0$$

riferita a un tetraedro fondamentale i cui piani siano definiti dalle equazioni:

$$x=0 \quad , \quad y=0 \quad , \quad z=0 \quad , \quad t=0,$$

rappresenta un punto p o un piano P, secondochè si considerano in essa le X, Y, Z, T, o le x, y, z, t come variabili. Nel primo caso le x, y, z, t costanti sono le coordinate del punto p; nel secondo caso le X, Y, Z, T costanti sono le coordinate del piano P.

In generale denoterò colle lettere P, o Π i piani dello spazio, e con P_r, Π_r intenderò unitamente un piano di coordinate X_r, Y_r, Z_r, T_r o $\Xi_r, \Upsilon_r, Z_r, T_r$: invece colle lettere p, o π indicherò i punti dello spazio, e con p_r o π_r intenderò unitamente un punto di coordinate x_r, y_r, z_r, t_r, o $\xi_r, \eta_r, \zeta_r, \tau_r$.

Quando una retta venga riguardata come congiungente due punti p_α, p_β, la chiamerò $r_{\alpha\beta}$, o $p_\alpha p_\beta$, e le sue coordinate saranno le seguenti:

$$f_{\alpha\beta}=y_\alpha z_\beta-z_\alpha y_\beta,\ g_{\alpha\beta}=z_\alpha x_\beta-x_\alpha z_\beta,\ h_{\alpha\beta}=x_\alpha y_\beta-y_\alpha x_\beta,$$
$$l_{\alpha\beta}=x_\alpha t_\beta-x_\beta t_\alpha\ ,\ m_{\alpha\beta}=y_\alpha t_\beta-y_\beta t_\alpha\ ,\ n_{\alpha\beta}=z_\alpha t_\beta-z_\beta t_\alpha;$$

e si avrà la relazione:

$$(1)\qquad f_{\alpha\beta}l_{\alpha\beta}+g_{\alpha\beta}m_{\alpha\beta}+h_{\alpha\beta}n_{\alpha\beta}=0.$$

Invece se una retta verrà riguardata come intersezione di due piani P_α,P_β, la chiamerò $R_{\alpha\beta}$, o $P_\alpha P_\beta$, e le sue coordinate saranno le seguenti:

$$F_{\alpha\beta}=Y_\alpha Z_\beta-Z_\alpha Y_\beta\ ,\ G_{\alpha\beta}=Z_\beta X_\alpha-X_\alpha Z_\beta\ ,$$
$$H_{\alpha\beta}=X_\alpha Y_\beta-Y_\alpha X_\beta\ ,\ L_{\alpha\beta}=X_\beta T_\alpha-X_\alpha T_\beta\ ,$$
$$M_{\alpha\beta}=Y_\alpha T_\beta-Y_\beta T_\alpha\ ,\ N_{\alpha\beta}=Z_\alpha T_\beta-Z_\beta T_\alpha\ ,$$

e si avrà

$$(1)\qquad F_{\alpha\beta}L_{\alpha\beta}+G_{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}+H_{\alpha\beta}N_{\alpha\beta}=0\ .$$

E quando si abbia

$$(2)\qquad \frac{F_{\alpha\beta}}{l_{\alpha\beta}}=\frac{G_{\alpha\beta}}{m_{\alpha\beta}}=\frac{H_{\alpha\beta}}{n_{\alpha\beta}}=\frac{L_{\alpha\beta}}{f_{\alpha\beta}}=\frac{M_{\alpha\beta}}{g_{\alpha\beta}}=\frac{N_{\alpha\beta}}{h_{\alpha\beta}},$$

le rette $r_{\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta}$ coincideranno; e se invece si avrà

$$(2)' \quad F_{\alpha\beta}f_{\alpha\beta}+G_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}+H_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}+L_{\alpha\beta}l_{\alpha\beta}+ \\ M_{\alpha\beta}m_{\alpha\beta}+N_{\alpha\beta}n_{\alpha\beta}=0,$$

le rette $r_{\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta}$ si incontreranno.

Ciò posto, dimostrerò subito un teorema il quale mi condurrà alla formazione di un complesso di 2.° grado (*) del quale principalmente mi occuperò in questo scritto.

2. Teorema: « Tutte le rette r, R dello spazio le quali « incontrano 4 piani dati P_1, P_2, P_3, P_4, ordinatamente « in punti π_1, π_2, π_3, π_4 formanti un rapporto anarmonico « $(\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4)=K$, essendo K una costante data, costitui- « scono un complesso (Θ, θ) di 2.° grado ».

Sia r, o $p'p''$ una retta qualunque dello spazio le cui coordinate indichiamo con f, g, h, l, m, n. Rappresentiamo con P_1', P_1'', P_2', P_2''... ciò che divengono i primi membri delle equazioni dei piani P_1, P_2, P_3, P_4, quando in luogo delle coordinate del punto variabile p si sostituiscono respettivamente quelle dei punti p', p''. Allora uno qualunque π_r dei punti $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ avrà le sue coordinate $\xi_r, \eta_r, \zeta_r, \tau_r$ espresse per le formole:

$$\xi_r : \eta_r : \zeta_r : \tau_r = x'P''_r - x''P'_r : y'P''_r - y''P'_r : \\ z'P''_r - z''P'_r : t'P''_r - t''P'_r .$$

Ora, il rapporto anarmonico di quattro punti è uguale al rapporto anarmonico dei 4 piani che si possono determi-

(*) È noto che in generale per complesso di grado n s'intende il sistema triplamente infinito di rette le cui coordinate omogenee soddisfano a una equazione omogenea di grado n.

nare con essi, e una retta qualunque dello spazio; quindi in particolare il rapporto anarmonico $(\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4)$ sarà eguale a quello dei 4 piani:

$$x-\frac{\xi_1}{\eta_1}y=0\ ,\ x-\frac{\xi_2}{\eta_2}y=0\ ,\ x-\frac{\xi_3}{\eta_3}y=0\ ,\ x-\frac{\xi_4}{\eta_4}y=0,$$

e si avrà come è noto;

$$(\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4)=\frac{\xi_1\eta_3-\eta_1\xi_3}{\xi_3\eta_2-\xi_2\eta_3}:\frac{\xi_1\eta_4-\xi_4\eta_1}{\xi_4\eta_2-\xi_2\eta_4};$$

ossia, sostituendo per le ξ, e η le loro espressioni:

$$(\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4)=\frac{P'_1P_3''-P_3'P_1''}{P_3'P_2''-P_3''P_2'}:\frac{P_1'P_4''-P_4'P_1''}{P_4'P_2''-P_4'P_2''};$$

e quindi le coordinate della retta r dovranno soddisfare alla relazione:

$$\begin{gathered}(P_1P_3''-P_3'P_1'')(P_1'P_2''-P_4''P_2')=\\ K(P_1'P_4''-P_1'P_3'')(P_3'P_1''-P_3''P_2'),\end{gathered}$$

la quale ponendo

$$\begin{aligned}\Theta_{13}&=F_{13}f+G_{12}g+H_{13}h+L_{13}l+M_{13}m+N_{13}n,\\ \Theta_{42}&=F_{42}f+G_{42}g+H_{42}h+L_{42}l+M_{42}m+N_{42}n,\\ \Theta_{14}&=F_{14}f+G_{14}g+H_{14}h+L_{14}l+M_{14}m+N_{14}n,\\ \Theta_{32}&=F_{32}f+G_{32}g+H_{32}h+L_{32}l+M_{32}m+N_{32}n,\end{aligned}$$

si riduce alla seguente:

$$(3)\qquad \Theta=\Theta_{13}\Theta_{42}-K\Theta_{14}\Theta_{32}=0$$

che è una equazione omogenea e del 2.° grado rispetto alle coordinate $f, g, h\ldots.$ delle rette r e che resta della stessa forma $\theta = o$ quando si introducano le coordinate $F, G, H\ldots.$ delle rette stesse considerate come intersezioni di piani; e ci fa perciò concludere che tutte le rette che noi consideriamo formano un complesso di secondo grado, come appunto avevamo enunciato.

3. Reciprocamente si vede che:

« Tutte le rette dello spazio che con quattro punti fissi « p_1, p_2, p_3, p_4 determinano ciascuna un fascio di 4 piani « avente un rapporto anarmonico eguale a una costante « data formano un complesso di 2.° grado.

4. Passiamo ora a fare uno studio del complesso di cui abbiamo parlato. Incominceremo dall'osservare che qualunque sia il punto p' dello spazio di cui si cerca il cono Σ' corrispondente, l'equazione $\Theta = o$ che lo rappresenta è identicamente soddisfatta dalle coordinate dei punti p_1, p_2, p_3, p_4 che sono i vertici opposti ai piani P_1, P_2, P_3, P_4 nel tetraedro formato da questi piani, e perciò si conclude che « ogni « cono del complesso è circoscritto al tetraedro formato dai « 4 punti dati ».

Invece considerando l'equazione $\theta = o$ che lo rappresenta nelle coordinate $F, G, H\ldots$ e che si ottiene dalla $\Theta = o$ sostituendo alle $\Theta_{12}\ldots$ le quantità corrispondenti Θ_{12}, che vengono da esse sostituendo alle corrispondenti di punti f, g, $h\ldots$, le coordinate di piani F, G, $H\ldots$, ec. si vede subito che qualunque sia il piano fisso P' di cui si cerca la curva b' corrispondente, essa è soddisfatta dalle coordinate de'piani P_1, P_2, P_3, P_4; e perciò si conclude che « ogni « curva σ' del complesso è inscritta al quadrilatero formato « dalle 4 rette intersezioni del piano della curva coi quattro « piani del tetraedro dato ».

Supponendo poi che il punto p' di cui si cerca il cono corrispondente sia sopra una faccia del tetraedro, per il teorema precedente si potrà dire che « Ai punti dei piani del « tetraedro corrispondono coni che si riducono a coppie di

« piani: uno di questi piani sarà il piano del tetraedro in « cui si è preso il punto, e l' altro sarà un piano che « passa pel punto preso e pel vertice opposto al piano del « tetraedro su cui giace il punto ».

Similmente poi si potrà dire che « Ai piani passanti « per i vertici del tetraedro corrispondono coniche che si « riducono a coppie di punti. Uno di questi punti è il « vertice del tetraedro per cui passa il piano preso, l' altro « è un punto del piano del tetraedro opposto al vertice « suddetto ».

5. È facile ora di vedere che « Se non si danno a K « i valori 0, 1, ∞, i punti dei piani del tetraedro sono i « soli punti dello spazio cui corrispondono coni del complesso « che si riducono a due piani ».

Infatti se per un punto p fuori dei piani del tetraedro il cono Σ corrispondente si riduce a due piani, questi dovranno essere i piani condotti per p ad una delle coppie di spigoli opposti del tetraedro. Ora se questi spigoli opposti fossero i due $(P_1 P_2)$, $(P_3 P_4)$, indicando, con $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ i punti in cui una generatrice r del sistema dei due piani incontra rispettivamente i piani P_1, P_2, P_3, P_4 del tetraedro, si vede subito che in questo caso dovrebbe necessariamente essere $K = 1$ in causa della coincidenza de' punti $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$.

Similmente se si prende la coppia di piani determinati dal punto p e dalla coppia $(P_1 P_3)$, $(P_2 P_4)$, oppure la coppia di piani determinati da p e dalla coppia P_2P_3 , P_1P_4 di spigoli opposti del tetraedro, si giunge a dover dare a K necessariamente i valori 0, od ∞.

Dunque finchè K non ha uno dei valori particolari 1, 0, ∞ non può darsi il caso che esistano coni del complesso che si decompongano in due piani fuori de' coni che corrispondono ai punti dei piani del tetraedro $P_1P_2P_3P_4$. Medesimamente si vede, che finchè K non ha uno dei valori particolari 1, 0, ∞ non può darsi il caso che esistano curve del complesso che si decompongono in due punti fuori di quelle che corrispondono ai piani passanti per i vertici del tetraedro suddetto.

Osservazione — Notiamo che in virtù della relazione identica:

$$(3') \quad \Theta_{12}\Theta_{34}+\Theta_{13}\Theta_{42}+\Theta_{14}\Theta_{23}=0,$$

o della analoga nelle θ, si vede chiaramente che per i valori speciali di $K=1,\ 0,\ \infty$, il complesso (Θ,θ) si scompone rispettivamente nelle coppie di complessi del 1.° grado

$$(\Theta_{12}\Theta_{34}\ ,\ \theta_{34}\theta_{12})\ ,\ (\Theta_{13}\Theta_{42}\ ,\ \theta_{13}\theta_{42})\ ,\ (\Theta_{14}\Theta_{23}\ ,\ \theta_{14}\theta_{23})$$

Ciascuna coppia poi di questi complessi ha per assi una diversa coppia di spigoli opposti del tetraedro, e tutti questi complessi sono speciali, vale a dire le rette di ciascuno di essi incontrano l'asse.

6. Notiamo poi che per la relazione (3') e per la sua analoga nelle θ, se si pone $K=\dfrac{a-c}{b-c}$, le equazioni del complesso (Θ,θ) possono mettersi sotto la forma

$$a\Theta_{12}\Theta_{34}+b\Theta_{13}\Theta_{42}+c\Theta_{14}\Theta_{23}=0,$$
$$a\theta_{12}\theta_{34}+b\theta_{13}\theta_{42}+c\theta_{14}\theta_{23}=0.$$

Se poi si prende per tetraedro fondamentale quello dei 4 piani, o quello dei 4 punti dati, le equazioni del complesso (Θ,θ) assumono la forma:

$$(4) \quad \Theta= afl+bmg+enh=0$$
$$(4)' \quad \theta= a\mathrm{FL}+b\mathrm{MG}+e\mathrm{NH}=0$$

ove le $f,g,h\ldots$ F,G,H... esprimono in queste equazioni le coordinate delle rette r,R qualsivogliano nel complesso in discorso; e noi per agevolare lo studio del complesso (Θ,θ)

faremo uso delle equazioni così ridotte (4) e (4'), oppure delle equivalenti

$$(5)\quad \Theta = mg + Kfl = o,$$

$$(5)'\quad \theta = MG + KFL = o.$$

7. Prima di passare ad esporre le proprietà speciali di cui gode il complesso (Θ, θ), faccio alcune digressioni.

Supponiamo che uno dei piani dati, per es. P_4, sia il piano all'infinito, e gli altri tre siano rispettivamente i piani coordinati $x = o$, $y = o$, $z = o$ nell'ordinario sistema delle coordinate cartesiane; allora si avrà (§. 4) la proprietà che:

« Tutti i coni del complesso passano per l'origine, e « tutte le curve del medesimo sono tangenti al piano all' ∞, « e come tali sono tutte parabole ».

Di più osservando che l'equazione (5) del complesso, si può ora porre sotto la forma

$$(6)\quad s\rho = Kr\sigma,$$

ove le s, r, ρ, δ, sono le costanti che determinano una retta nelle equazioni:

$$x = rz + \rho,$$
$$y = sz + \sigma,$$

si troverà facilmente il modo di costruire una retta qualunque del complesso. Infatti se chiamiamo m il segmento intercetto fra l'origine e l'asse della z dalla projezione di una retta del complesso sul piano xz, e con n l'analogo segmento intercetto dalla projezione della stessa retta sul piano yz, l'equazione (6) si traduce nella seguente:

$$m - Kn = o$$

la quale ci dice che:

« I segmenti intercetti fra l'origine e l'asse z dalle

« projezioni delle rette del complesso sui piani yz , xz,
« formano due serie di segmenti in omografia: epperò anche
« i punti d'incontro delle projezioni suddette coll' asse z
« formano su quest' asse due punteggiate omografiche che
« godono anche della proprietà di essere simili giacchè
« i segmenti determinati dai punti corrispondenti sono pro-
« porzionali ». Costruite perciò sull'asse z le due serie omografiche una retta qualunque condotta per un punto dell'una sul piano yz, e un' altra retta condotta per il corrispondente nell' altra sul piano zx, sono le projezioni di una retta del complesso.

Notiamo bene che anche se i tre piani a distanza finita presi per piani coordinati fossero ortogonali l'equazione di (Θ,θ) conservano la medesima forma.

8. Molte questioni conducono alla considerazione di sistemi di rette rappresentati da equazioni della forma (5) (5)', oppure (4) (4)'. Questi sistemi ammettono così molti e svariati modi di generazione.

Così per esempio è facile di vedere che l'insieme di tutte le rette che fanno un angolo retto colle loro polari reciproche rispetto alla superficie di 2.° ordine

$$(7) \qquad \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1$$

costituisce un complesso del 2.° grado che è appunto quello che ora studiamo.

Prendiamo infatti una retta p_1p_2; indicando con ρ la distanza dei punti p_1,p_2, che hanno per coordinate x_1,y_1,z_1 x_2,y_2,z_2 e con λ,μ,ν gli angoli che la retta p_1p_2 fa cogli assi avremo:

$$\cos\lambda=\frac{x_1-x_2}{\rho}\,,\ \cos\mu=\frac{y_1-y_2}{\rho}\,,\ \cos\nu=\frac{z_1-z_2}{\rho}\,.$$

Inoltre la polare p_1p_2 sarà la retta intersezione dei due piani:

$$bcxx_1+acyy_1+abzz=abc,$$
$$bcxx_2+acyy_2+abzz_2=abc;$$

e i coseni degli angoli che questa polare fa cogli assi saranno proporzionali ai determinanti

$$a^2bc\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad , \quad b^2ca\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \quad , \quad c^2ab\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix};$$

quindi scrivendo che l' angolo delle due rette polari reciproche deve essere retto, e indicando con $f, g, h \ldots$, o F, G, H . . . le coordinate della retta $r=p_1p_2$ o $R=P\,P_2$, si avranno le relazioni (4) (4)' e si conchiuderà come dicevamo sopra che:

« Le rette dello spazio che colle loro polari reciproche « fanno un angolo retto, formano un complesso di 2.° grado « che è il medesimo di quello che formano tutte le rette « dello spazio che incontrano i tre piani principali della « superficie e il piano all'infinito in punti formanti un rap- « porto anarmonico eguale ad $\dfrac{a-c}{b-c}$.

Segue quindi che: « per tutte le superficie di 2.° ordine « i cui semi-assi sodisfano alla relazione:

$$a-c=K(b-c)$$

« essendo K una costante data, il complesso delle rette le « cui polari formano con esse un angolo retto, è sempre il « medesimo per ciascuna superficie della serie ».

9. Dal teorema precedente risulta subito che le normali alla superficie (7) fanno parte del complesso (Θ,θ). Questo poi si può anche dimostrare nel modo seguente. Esprimiamo le coordinate di un punto qualunque della superficie in funzione di due parametri arbitrarii u,v, ciò che possiamo fare ponendo:

$$x=\sqrt{a}\,\mathrm{sen}\,u\ \mathrm{sen}\,v \ , \ y=\sqrt{b}\,\mathrm{sen}\,u\ \mathrm{sen}\,v \ , \ z=\sqrt{c}\cos u$$

Le equazioni della normale alla superficie nel punto di coordinate x, y, z saranno le seguenti:

$$\frac{\xi - \sqrt{a}\,\mathrm{sen}u\cos v}{\dfrac{\mathrm{sen}u\cos v}{\sqrt{a}}} = \frac{\zeta - \sqrt{c}\cos u}{\dfrac{\cos u}{\sqrt{c}}}$$

$$\frac{\eta - \sqrt{b}\,\mathrm{sen}u\,\mathrm{sen}v}{\dfrac{\mathrm{sen}u\,\mathrm{sen}v}{\sqrt{b}}} = \frac{\xi - \sqrt{c}\cos u}{\dfrac{\cos u}{\sqrt{c}}}$$

e quindi se:

$$r = \frac{\sqrt{c}\,\mathrm{sen}u\cos v}{\sqrt{a}\cos u} \qquad s = \frac{\sqrt{c}\,\mathrm{sen}u\,\mathrm{sen}v}{\sqrt{b}\cos u}$$

$$\rho = \frac{a-c}{\sqrt{a}}\,\mathrm{sen}u\cos v \qquad \sigma = \frac{b-c}{\sqrt{b}}\,\mathrm{sen}u\,\mathrm{sen}v$$

r, s, ρ, σ saranno le coordinate della normale che consideriamo; e quindi eliminando fra queste le u, v, la relazione

$$s\rho = \frac{a-c}{b-c} r\sigma$$

che essendo appunto l'equazioni del complesso (Θ, θ) ci mostra ciò che si voleva provare.

Osservazione — Conservando il nome di assi di una superficie del 2.° ordine alle rette dello spazio che fanno un angolo retto colle loro polari reciproche si può dire, per ciò che precede, che:

« Le normali ad una superficie del 2.° ordine condotte « per un punto dello spazio fanno parte del cono di 2.° « ordine che passa per l'origine luogo degli assi della « superficie medesima e ha il vertice in quel punto ».

« Le normali ad una superficie di 2.° ordine che giacciono « in un piano dello spazio sono tangenti alla parabola invi-

« luppo degli assi della superficie che giacciono in quel « piano.

10. Prima di venire allo studio del complesso (Θ,θ) nel caso generale dei 4 piani a distanza finita, facciamo un'altra considerazione.

« È noto che una tangente qualsivoglia di una cubica « gobba incontra 4 piani osculatori fissi in punti formanti « per ciascuna tangente un rapporto anarmonico costante ».

Egli è perciò facile il prevedere che nel complesso (Θ,θ) (comunque siano i piani P_1,P_2,P_3,P_4) si potranno sempre isolare delle serie semplicemente infinite delle sue rette formanti delle superficie sviluppabili del 4.° ordine di cui una cubica gobba sarà spigolo di regresso; e noi ci proponiamo ora di trovare effettivamente la forma delle coordinate di queste serie di rette nel caso sempre che uno dei piani dati sia il piano all'infinito, e così verremo al tempo stesso a dare una nuova prova della esistenza di queste serie di rette.

Per questo osserviamo che l'inviluppo dei piani rappresentati dalla equazione:

$$(8) \quad \frac{x}{a_1+u}+\frac{y}{b_1+u}+\frac{z}{c_1+u}=1,$$

ove u è un parametro variabile e a_1,b_1,c_1 sono tre costanti una delle quali può prendersi arbitrariamente perchè è arbitraria l'origine di u, è una superficie sviluppabile del 4.° ordine il cui spigolo di regresso è appunto la curva gobba che ha fra i piani osculatori i piani coordinati e il piano all'infinito, e quindi la nostra questione si riduce a determinare con un sol parametro le coordinate r, s, ρ e σ di quelle rette del complesso (Θ,θ) delle quali due infinitamente vicine giacciono in un piano della forma (8).

Per questo osserviamo che siccome la retta

$$x=rz+\rho, \quad y=sz+\sigma,$$

deve giacere nel piano (8), dovremo intanto avere le seguenti equazioni:

$$(9)\qquad \frac{r}{a_1+u}+\frac{s}{b_1+u}+\frac{1}{c_1+u}=o,\quad \frac{\rho}{a_1+u}+\frac{\sigma}{b_1+u}=1.$$

Inoltre questa retta e la sua infinitamente vicina devono giacere nello stesso piano; quindi supponendo le r, s, ρ, σ funzioni del parametro u, le equazioni (9) dovranno coesistere con quelle che se ne deducono cangiando $r,s\ldots$ in $r+dr$, $s+ds,\ldots$; e perciò dovremo avere anche le equazioni seguenti:

$$(10)\qquad \frac{r'}{a_1+u}+\frac{s'}{b_1+u}=o,\quad \frac{\rho'}{a_1+u}+\frac{\sigma'}{b_1+u}=o,$$

ove le $r',s'\ldots$ indicano le derivate di r, $s\ldots$ considerate come funzioni di u; e ora con queste e colle (9) e (6) potremo determinare facilmente i valori cercati di r, s, ρ e σ.

Osserviamo infatti dapprima che le equazioni (10) per esser soddisfatte richiedono che si abbia:

$$r'=(a_1+u)\varphi(u),\quad \rho'=(a_1+u)\psi(u),$$
$$s'=-(b_1+u)\varphi(u),\quad \sigma'=-(b_1+u)\psi(u),$$

essendo $\varphi(u)$, e $\psi(u)$ certe funzioni di u.

Integrando per parti, la prima di queste ci darà:

$$r_1=(a+u)\int\varphi(u)\,du-\int\left\{\int\varphi(u)\,du\right\}du\,;$$

quindi ponendo

$$\int\left\{\int\varphi(u)\,du\right\}du=\mathrm{F},$$

si potrà prendere intanto

$$r=\mathrm{F}'(a_1+u)-\mathrm{F}.$$

Analogamente se indichiamo con λ e μ due costanti arbitrarie e poniamo

$$G=\int\left\{\int\psi(u)\,du\right\}du,$$

si troverà

$$s=-F'(b+u)+F-\lambda,$$
$$\rho=G'(a_1+u)-G,$$
$$\sigma=-G'(b_1+u)+G-\mu,$$

e così abbiamo determinato la forma delle funzioni r,s,ρ,σ in modo da soddisfare alle equazioni differenziali (10).

Ma queste funzioni debbono soddisfare anche alle equazioni (9), quindi sostituendo in queste si avranno due altre relazioni e con queste determineremo subito F e G; e ora, trovati F e G, le precedenti ci daranno per r, s, ρ, σ i valori seguenti:

$$(11)\quad\begin{cases} r=\dfrac{c_1-b_1}{b_1-a_1}\left(\dfrac{a_1+u}{c_1+u}\right)^2, & s=\dfrac{a_1-c_1}{b_1-a_1}\left(\dfrac{b_1+u}{c_1+u}\right)^2 \\[2ex] \rho=-\dfrac{(a_1+u)^2}{b_1-a_1}, & \sigma=\dfrac{(b_1+u)^2}{b_1-a_1}\,; \end{cases}$$

e così abbiamo pienamente determinate le coordinate delle rette generatrici della sviluppabile inviluppo del piano (8), e per la nostra questione non resta più che da determinare le costanti a_1,b_1,c_1 in modo che queste rette appartengono al complesso (Θ,θ).

Per questo esprimeremo che i valori trovati (12) di r, s, ρ, e σ devono soddisfare alla equazione (6) del complesso, e così si troverà che i valori delle costanti a_1,b_1 e c_1 devono soddisfare all'unica relazione

$$(12)\qquad \frac{a_1-c_1}{b_1-c_1}=K;$$

quindi ricordando che una delle costanti a_1, b_1 e c_1 può prendersi a piacere e che le cubiche gobbe che hanno un piano osculatore all'infinito sono le parabole gobbe, si potranno ora enunciare le seguenti proprietà:

1.ª « Colle rette del complesso si può formare una serie « semplicemente infinita di sistemi semplicemente infiniti di « rette tangenti a altrettante parabole gobbe, e le coordinate « delle rette di ciascun sistema sono date dalle formole (11) « ove a una delle quantità a_1, b_1, c_1 può darsi sempre uno « stesso valore e le altre due soddisfano alla (12) ».

2.ª « Tra gli assi della superficie di 2.° ordine (7) ve ne « ha una serie semplicemente infinita tangenti alla parabola « gobba spigolo di regresso della sviluppabile inviluppo del « piano

$$\frac{x}{a+u}+\frac{y}{b+u}+\frac{z}{c+u}=1;$$

« e le coordinate delle rette di queste serie vengono date « dalle formole (11) quando in queste formole per a_1, b_1, c_1 « si pongano le a, b, c ».

11. Ritornando ora allo studio del complesso (Θ,θ), osserveremo che le equazioni di esso possono ritenersi come il risultato dell'eliminazione delle arbitrarie λ e μ fra i due sistemi di equazioni:

$$\begin{array}{r|l} \lambda\mu=-K, & \lambda\mu=-K, \\ \Theta_\lambda=m+\lambda f=0, & \theta_\lambda=G+\lambda L=0, \\ \Theta_\mu=g+\mu l=0, & \theta_\mu=M+\mu F=0 \end{array}$$

oppure fra i due:

$$\begin{array}{r|l} \lambda\mu=-K, & \lambda\mu=-K, \\ \Theta'_\lambda=m+\lambda l=0, & \theta_\lambda=G+\lambda F=0, \\ \Theta'_\mu=g+\mu f=0, & \theta'_\lambda=M+\mu L=0. \end{array}$$

Ora ciascuna delle seguenti coppie di equazioni:

$$\Theta_\lambda=\theta_\lambda=0, \Theta_\mu=\theta_\mu=0, \Theta'_\lambda=\theta'_\lambda=0, \Theta'_\mu=\theta'_\lambda=0$$

rappresenta un complesso di primo grado per ogni valore di λ o di μ; e al variare delle λ,μ rappresenta una serie semplicemente infinita di complessi di 1.° grado. Ma per la relazione che deve aver luogo fra le λ e μ, le due serie $(\Theta_\lambda,\theta_\lambda)$, (Θ_μ,θ_μ), oppure le due serie $(\Theta'_\lambda,\theta_\lambda)$, $(\Theta'_\mu,\theta'_\mu)$ sono tali che ad ogni complesso dell' una serie corrisponde un unico e determinato complesso nell'altra e viceversa, quindi le due serie si possono dire due fasci omografici di complessi lineari.

Ma le rette di una congruenza intersezione di due complessi omologhi nell'uno o nell'altro sistema di due fasci omografici sono rette del complesso (Θ,θ); dunque si può dire che:

« Le rette del complesso in discorso si possono in due « modi diversi riguardare come le rette appartenenti alle in- « finite congruenze secondo cui s' incontrano le infinite « coppie di complessi corrispondenti in due serie omogra- « fiche di complessi del 1.° grado».

Ciò equivale a dire che ogni cono del complesso può in due modi diversi considerarsi come luogo delle rette comuni a due fasci projettivi di piani. Nell' un modo gli assi dei fasci projettivi sono le rette condotte del punto preso ai vertici (y,z,t), (x,y,z) del tetraedro medesimo.

E così pure ogni curva del complesso può riguardarsi come inviluppo delle rette congiungenti i punti corrispondenti di due punteggiate omografiche, e ciò in due maniere diverse.

12. In ciascuno poi di questi sistemi omografici di complessi le due serie che lo compongono sono serie di complessi speciali. Consideriamo ad esempio il primo sistema omografico $(\Theta_\lambda, \theta_\lambda,)$, $(\Theta_\mu,)$ (*).

(*) Per l'intelligenza di ciò che segue, vedasi Battaglini: Nota sopra i complessi di primo grado. *Gior. di Mat. di Napoli, tom. VI.*

Uno qualunque (λ) de' complessi della prima serie è tale che tutte le sue rette incontrano la retta determinata dalla intersezione dei due piani:

$$y=0, \quad t_{\lambda z}=t+\lambda z.$$

Uno qualunque (μ) dei complessi della serie (Θ_μ, θ_μ) è tale che tutte le sue rette incontrano la retta intersezione dei piani:

$$x=0, \quad t_{\mu z}=z-\mu t=0,$$

quindi gli assi dei complessi dell' una e dell' altra serie formano ne' piani $y=0$, $x=0$ due fasci φ_λ, φ_μ di rette aventi rispettivamente i loro centri nei vertici (y,t,z), (x,t,z) del tetraedro fondamentale; e questi due fasci sono projettivi per la relazione $\lambda\mu=-K$. Due raggi corrispondenti sono le direttrici di una congruenza di due complessi omologhi nelle serie omografiche considerate; e una retta qualunque che incontri due raggi corrispondenti dei due fasci appartiene al complesso (Θ,θ).

Segue quindi che se si possono costruire i due fasci φ_λ, φ_μ, si potranno determinare i coni e le curve del complesso.

Questa costruzione è facile ad ottenersi dietro le seguenti osservazioni. I due fasci $\varphi\lambda$, φ_μ determinano sullo spigolo xy del tetraedro due serie omografiche di punti; e queste serie omografiche sono anche determinate dalle intersezioni dello spigolo xy coi due fasci di piani

$$z-\mu t=0 \qquad z+\frac{1}{\lambda}t=0$$

che sono projettivi a causa della relazione $\lambda\mu=-K$.

Ora il rapporto anarmonico de' quattro piani

$$z=0\ ,\ t=0\ ,\ z-\mu t=0\ ,\ z+\frac{1}{\lambda}t=0$$

è $-\mu\lambda$; quindi poichè $\lambda\mu = -K$, concludesi che questo rapporto anarmonico avrà anch'esso il valore K, e in conseguenza la costruzione delle due punteggiate determinate sullo spigolo xy potrà farsi nel modo seguente. Si conduca per lo spigolo zt un piano arbitrario, e si determini il punto p d'intersezione di esso piano collo spigolo xy. Ciò fatto, coi metodi della geometria superiore si costruisca il 4.° punto p' che coi tre punti (x,y,z), (t,y,z) e p dà un rapporto anarmonico eguale a K. La coppia di punti p, p' sarà una coppia di punti corrispondenti nelle due punteggiate, e unendoli coi rispettivi vertici dei fasci $\varphi_\lambda, \varphi'_\mu$ si otterranno due raggi corrispondenti di quei fasci; e così seguitando a determinare coppie di punti corrispondenti nelle due punteggiate, resteranno determinate altrettante coppie di raggi corrispondenti dei fasci φ_λ, φ_μ, e rimarranno così costruiti i fasci medesimi.

Costruiti questi fasci per avere il cono corrispondente ad un punto p basterà condurre le rette che passano per p e incontrano le diverse coppie di raggi corrispondenti nei due fasci φ_λ, φ_μ. Cinque delle rette così condotte basteranno per la determinazione del cono.

Invece per la curva σ corrispondente a un piano P basta costruire le punteggiate che determinano sul piano P i due fasci φ_λ, φ_μ. Le rette congiungenti la coppia di punti corrispondenti saranno le tangenti della linea σ, e cinque di queste rette basteranno per determinare la linea σ.

Qualora occorra si potranno anche ottenere le rette del complesso che sono situate in un piano P, e passano per un punto p preso in esso piano, o in altri termini le tangenti condotte per p alla linea σ corrispondente a P. Perciò si unirà il punto p colle due punteggiate omografiche sezioni del piano P coi fasci φ_λ, φ_μ e si formeranno così due fasci omografici concentrici. I raggi doppi di questi fasci saranno le rette richieste.

Si ottengono costruzioni simili considerando invece l'altro sistema omografico formato dalle due serie $(\Theta'_\lambda, \theta'_\lambda)$, nel quale le rette delle infinite congruenze secondo cui s'incontrano le diverse coppie di complessi omologhi sono pure le rette del complesso.

13. Prendiamo ora due punti fissi $p_m(x_m, y_m, z_m, t_m)$, $p_n(x_n, y_n, z_n, t_n)$; si avrà che «La superficie del 2.° ordine « $\Sigma_{m,n}$ locale dei vertici dei coni del complesso rispetto ai « quali le rette che congiungono i loro vertici coi due punti « fissi p_m, p_n sono rette conjugate armoniche è circoscritta « al tetraedro dei 4 piani dati e passa pei due punti fissi « p_m, p_n » giacchè si trova facilmente che ponendo

$$m_m = yz_m - y_m z, \ldots .$$

l'equazione della detta locale $\Sigma_{m,n}$ è la seguente:

$$\Sigma_{mn} = (m_m g_n + m_n g_m) + K(f_m l_n + f_n l_m) = 0.$$

Similmente considerando i due piani fissi P_m, P_n si ha che: « La superficie di seconda classe $\sigma_{m,n}$ inviluppo del « piano P cui corrispondono curve rispetto alle quali le « intersezioni dei due piani fissi P_m, P_n con P sono conju- « gate armoniche, è inscritta al tetraedro fondamentale, « ed è toccata dai piani fissi P_m, P_n ».

14. Ciò posto consideriamo gli 8 punti:

p_m	di coordinate	x_m,	y_m,	z_m,	t_m,
p'_m	»	x_m,	$-y_m$,	$-z_m$,	t_m,
p''_m	»	$-x_m$,	y_m,	$-z_m$,	t_m,
p'''_m	»	$-x_m$,	$-y_m$,	z_m,	t_m,
p_{1m}	»	$-x_m$,	y_m,	z_m,	t_m,
$p_1'{}_m$	»	x_m,	y_m,	z_m,	$-t_m$,
$p_1''{}_m$	»	x_m,	$-y_m$,	z_m,	t_m,
$p_1'''{}_m$	»	x_m,	y_m,	$-z_m$,	t_m,

dei quali i primi 4 formano un tetraedro Δ_1 reciproco del tetraedro fondamentale Δ rispetto a ciascuno dei quattro punti rimanenti, e viceversa gli ultimi quattro formano un tetraedro Δ' reciproco di Δ rispetto ai vertici di Δ_1.

Per ognuno dei tetraedri Δ_1, e Δ' si ha la proprietà che la locale $\Sigma_{m,n}$ corrispondente a due vertici è la stessa di quella che corrisponde ai due rimanenti, per modo che accoppiando due a due i vertici di Δ_1 e Δ' si hanno per ciascuno di questi tetraedri rispettivamente le tre locali:

$$\begin{array}{l|l}
\Sigma'_m = t_m x_m y z - x t y_m z_m = 0, & \Sigma'_{1,m} = t_m x_m y z + x t y_m z_m = 0, \\
\Sigma''_m = y_m t_m z x - z_m x_m y t = 0, & \Sigma''_{1,m} = y_m t_m z x + z_m x_m y t = 0, \\
\Sigma'''_m = z_m t_m x y - x_m y_m z t = 0, & \Sigma'''_{1,m} = z_m t_m x y + x_m y_m z t = 0,
\end{array}$$

e queste locali sono a due a due conjugate armoniche.

Ora gli otto punti in discorso sono tali che datone uno sono *unici* e *individuati* gli altri sette, e tutti insieme formano una figura che può dirsi *il quadrigono dello spazio*, e di cui essi possono dirsi i *vertici*, e i tetraedri Δ', e Δ_1 i *tetraedri corrispondenti*; quindi si può dire che « Dato un « tetraedro Δ e un quadrigono nello spazio, il luogo dei ver- « tici dei coni circoscritti a Δ e che dividono armonicamente « uno dei lati di un tetraedro del quadrigono, è una super- « ficie del secondo ordine che è anche il luogo dei vertici « dei coni analoghi che dividono armonicamente il lato « opposto del tetraedro considerato; inoltre questa superficie « è inscritta a un quadrilatero gobbo formato coi lati di Δ, « e a un quadrilatero gobbo formato coi lati del tetraedro « considerato del quadrigono ».

15. Similmente considerando 8 piani di coordinate analoghe si avrà una figura correlativa del quadrigono, e si formeranno con questi piani due tetraedri δ_1, e δ' che saranno reciproci di Δ, l'uno rispetto ai piani dell'altro. Combinando due a due i piani di δ_1 e δ', avremo per ciascun tetraedro soltanto tre inviluppi distinti $\sigma'_m, \sigma''_m, \sigma'''_m$ pel

primo, e $\sigma'_{1,m}$, $\sigma''_{1,m}$, $\sigma'''_{1,m}$ pel 2.° le cui equazioni risulteranno da quelle delle locali corrispondenti $\Sigma'_{m,n}$ sostituendo alle coordinate di punti le coordinate dei piani, e avremo il teorema correlativo seguente « Dato un tetrae-« dro Δ e un quadrigono di piani, l'inviluppo dei piani delle « coniche inscritte a Δ e conjugate armoniche rispetto ad « un dìedro formato coi piani di uno dei tetraedri del quadri-« gono è una superficie di seconda classe che è anche l'invi-« luppo dei piani delle coniche analoghe conjugate al diedro « formato coi piani rimanenti del tetraedro considerato; e « inoltre questa superficie è inscritta a uno dei quadrilateri « gobbi formato coi lati di Δ, e a uno dei quadrilateri for-« mati coi lati del tetraedro considerato nel quadrigono « dato ».

Osservazione — Se il punto p che individua il quadrigono di punti (p) e il piano P che individua il quadrigono di piani (P), sono fra loro armonici rispetto a Δ, allora anche gli altri punti di (p) sono armonici rispetto a Δ coi corrispondenti piani di (P), e i tetraedri dei due quadrigoni coincidono uno ad uno corrispondentemente, e le locali Σ_m, Σ''_m coincidono cogli inviluppi corrispondenti σ'_m , σ''_m (*).

16. Considerando ora la serie dei complessi (Θ,θ) che si ottengono dal complesso $(\Theta,\theta)_K$ dando a K tutti i valori reali, si trova una proprietà relativa alle locali o agli inviluppi di un quadrigono qualsivoglia (p) e (P); relativa cioè ad ogni superficie di 2.° grado inscritta ad uno qualsiasi dei tre quadrilateri gobbi formati coi lati del tetraedro dei 4 piani dati.

È facile infatti di verificare che prendendo l'equazione di una qualsivoglia di tali superficie, e formando le coordinate della retta polare di una retta data rispetto a queste

(*) Relativamente al quadrigono, veggasi una nota del Prof. Beltrami — Estensione allo spazio dei teoremi relativi alle coniche di 9 punti (Giornale di Napoli Vol. I.).

superficie, se le coordinate della retta data soddisfano all'equazione di (Θ,θ) ci sodisfano pure quelle della polare, e quindi si conclude che « Ogni complesso (Θ,θ) della serie « $(\Theta,\theta)_K$ ha per polare se medesimo rispetto ad ogni super- « ficie di 2.° grado inscritta ad uno qualsiasi dei quadrilateri « formati coi lati del tetraedro dei quattro piani dati ».

17. Finalmente osservando che se si prendono i vertici opposti ai quattro piani del tetraedro dato Δ e si forma il complesso (Θ',θ') correlativo del complesso (Θ,θ), l'equazione del nuovo complesso non cangia, si conclude che « Ogni complesso della serie $(\Theta,\theta)_K$ ha per polare reciproco « se medesimo rispetto a tutte le superficie di secondo grado « conjugate al tetraedro dato ».

18. Terminerò col dare la formazione di un altro complesso di secondo grado, di cui il precedente diventa un caso particolare quando la relazione anarmonica fra i quattro punti π_1,π_2,π_3,π_4 diviene armonica.

La formazione del complesso si fa dietro il teorema seguente:

« L'insieme di tutte le rette (R,r) dello spazio che « incontrano due superficie di second'ordine S_1,S_2 ordinata- « mente in punti formanti un sistema armonico costituisce « un complesso di secondo grado ».

Siano le due superficie riferite al tetraedro conjugato comune, e rappresentate dalle equazioni:

$$S_1=X_1x^2+Y_1y^2+Z_1z^2+T_1t^2=o,$$
$$S_2=X_2x^2+Y_2y^2+Z_2z^2+T_2t^2=o.$$

Prendiamo una retta qualunque R, o PP' e indichiamo con F, G, H . . . le sue coordinate. Eliminando z e t fra le equazioni dei piani P,P' otterremo,

$$z=-\frac{Lx+My}{N}t=-\frac{Fy-Gx}{N};$$

e sostituendo questi valori nelle equazioni di S_1, e S_2, avremo le due relazioni:

$$x^2\left(X_1+\frac{Z_1L^2+T_1G^2}{N^2}\right)+y^2\left(Y_1+\frac{Z_1M^2+T_1F^2}{N^2}\right)$$
$$+2xy\frac{Z_1LM-T_1FG}{N^2}=o,$$

$$x^2\left(X_2+\frac{Z_2L^2+T_2G^2}{N^2}\right)+y^2\left(Y_2+\frac{Z_2M^2+T_2F^2}{N^2}\right)$$
$$+2xy\frac{Z_2LM-T_2FG}{N^2}=o$$

alle quali debbono soddisfare le coordinate dei punti d'incontro della retta R con S_1 e S_2.

Ma d'altra parte le relazioni stesse rappresentano ciascuna due piani che passano per lo spigolo xy del tetraedro fondamentale; quindi i quattro punti d'incontro della retta R colle due superficie S_1 e S_2 saranno armonici se lo sarà il fascio di questi quattro piani, e perciò dovrà aversi, come è noto, la equazione:

$$\Omega=(X_1T_2+X_2T_1)F^2+(Y_1T_2+Y_2T_1)G^2+(Z_2T_1+T_2Z_1)H^2+$$
$$(Y_1Z_2+Y_2Z_1)L^2+(X_1Z_2+X_2Z_1)M^2+(Z_1Y_2+Z_2Y_1)N^2=o,$$

la quale essendo omogenea e del secondo grado resta della stessa forma quando alle coordinate F, G. . . si sostituiscono le f, g. . . e rappresenta un complesso del secondo grado.

19. Reciprocamente «se si prendono due superficie S_1', S_2' « di seconda classe, l'insieme delle rette dello spazio tali « che i quattro piani tangenti alle due superficie che pas- « sano per esse formano un fascio armonico di piani, costi- « tuiscono un complesso del secondo grado ».

In questo caso; se riferiamo le due superficie al tetraedro coniugato, le loro equazioni sono della forma:

$$S_1' = x_1 X^2 + y_1 Y^2 + z_1 Z^2 + t_1 T^2 = 0,$$
$$S_2' = x_2 X^2 + y_2 Y^2 + z_2 Z^2 + t_2 T^2 = 0;$$

ed il complesso (Ω', ω') formato colle rette che godono della proprietà suddetta ha per equazioni:

$$\Omega' = (x_1 t_2 + x_2 t_1) f^2 + (y_1 t_2 + y_2 t_1) g^2 + (z_1 t_2 z_2 t_1) h^2 + (y_1 z_2 + y_2 z_1) l^2 + (x_1 z_2 + x_2 z_1) m^2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2) n^2 = 0,$$

$$\omega' = (x_1 t_2 + x_2 t_1) L^2 + (y_1 t_2 + y_2 t_1) M^2 + (z_1 t_2 + z_2 t_1) N^2 + (y_1 z_2 + y_2 z_1) F^2 + (x_1 z_2 + x_2 z_1) G^2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2 X^2 = 0.$$

FERDINANDO ASCHIERI.

Pisa, Luglio 1869.