ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

DANIEL FLIPO

Charge stationnaire d'une file d'attente à rejet. Cas de plusieurs serveurs

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 93, série *Probabilités et applications*, nº 8 (1989), p. 79-104

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1989__93_8_79_0>

CHARGE STATIONNAIRE D'UNE FILE D'ATTENTE A REJET

CAS DE PLUSIEURS SERVEURS

Daniel FLIPO

Résumé : La première partie de ce travail (section II) est consacrée à la construction et à l'étude d'un espace de probabilité $\tilde{\Omega}$ (resp. $\bar{\Omega}$) sur lequel la charge stationnaire (resp. son réordonnement) d'un organe de service à s serveurs $G|G|s|0$ peut être définie de manière unique.
La seconde partie (section III) concerne l'application au cas indépendant $GI|GI|s|0$: des condtions suffisantes sont données pour l'existence et l'unicité de la charge stationnaire (ou de son réordonnement) sur l'espace de probabilité initial Ω .

I. INTRODUCTION

On étudie la charge stationnaire $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_s)$ aux instants d'arrivée d'un client, d'un organe de service à s serveurs $G|G|s|0$, système où tout client ne trouvant à son arrivée aucun serveur libre renonce au service. Si plusieurs serveurs sont libres à l'arrivée d'un client on convient d'affecter celui-ci au serveur d'indice le plus petit. On sait (cf. |2|) que même dans le cas $s = 1$, cette charge ne peut pas en général, être construite sur l'espace de Palm $(\Omega,\mathcal{A},P,\theta)$ de mesures ponctuelles chargeant l'origine, aussi construisons nous une extension $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{A}},\tilde{P},\tilde{\theta})$ de cet espace : les éléments de $\tilde{\Omega}$ sont de la forme $(\omega;i_1, \dots ,i_s)$ où $\omega \in \Omega$ et $(i_1, \dots ,i_s) \in \mathbb{N}^s$; pour tout k compris entre 1 et s, i_k (appelé indice du client en service au guichet k à l'instant 0) est le nombre de clients arrivés à l'organe de service après lui et jusqu'à l'instant 0 inclus, ou 0 si le serveur k est libre à l'instant 0_-. On construit l'ensemble $H_s(\omega)$ des valeurs possibles de $(i_1, \dots ,i_s)$ et $\tilde{\Omega} = \{(\omega;i_1, \dots ,i_s) \mid (i_1, \dots ,i_s) \in H_s(\omega)\}$. On montre (proposition 2) que sur $\tilde{\Omega}$ l'équation définissant la charge stationnaire Γ a une solution unique, et que $\tilde{\Omega}$ est le plus petit espace possédant cette propriété : tout autre espace permettant de construire Γ se projette sur $\tilde{\Omega}$. On donne un encadrement du cardinal de $H_s(\omega)$ (proposition 3), et une condition suffisante pour qu'il n'y ait jamais deux serveurs libres simultanément (proposition 4).

On adopte ensuite le point de vue du client pour qui il est indifférent d'être servi par tel ou tel serveur. Ce point de vue conduit à ne considérer que les réordonnements de la charge Γ. En considérant les réordonnements des $(i_1, \dots ,i_s)$ de $H_s(\omega)$, nous obtenons (proposition 5) une extension de $(\bar{\Omega},\bar{\mathcal{A}},\bar{P},\bar{\theta})$ sur laquelle l'équation de la charge réordonnée a une solution unique, extension qui est également la plus petite possible. Les méthodes employées ici permettent de construire le vecteur des charges stationnaires des serveurs et son réordonnement, alors que les travaux antérieurs (BOROVKOV |1|, LISEK |4|) ne s'intéressaient qu'aux lois du réordonnement.

Dans la deuxième partie nous appliquons les résultats précédents au cas indépendant $GI|GI|s|0$. On donne des conditions suffisantes simples pour que les extensions $\tilde{\Omega}$ (Proposition 7) ou $\bar{\Omega}$ (Proposition 8) soient isomorphes à Ω, et donc que le vecteur aléatoire charge stationnaire de l'organe de service existe et soit unique sur l'espace Ω lui-même. Les conditions données sont moins restrictives que celles formulées par JOFFE et NEY |3| pour obtenir l'existence d'une loi stationnaire pour la charge Γ .

II. CONSTRUCTION DE L'EXTENSION

Soient σ et τ deux v.a. strictement positives, intégrables sur l'espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{A},P)$ muni d'une bijection θ bi-mesurable préservant P et ergodique. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite des instants d'arrivée définie par $T_0 = 0$, $T_{n+1} = T_n + \tau o\theta^n$ $(n \in \mathbb{Z})$, et $N = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varepsilon_{T_n}$ le processus ponctuel des arrivées (description de Palm).
Le service demandé par le client arrivant à l'instant T_n $(n \in \mathbb{Z})$ est $\sigma o\theta^n$ si au moins un des s serveurs est libre, et 0 sinon. Lorsque plusieurs serveurs sont libres à l'arrivée d'un client, celui-ci choisit le serveur d'indice le plus petit parmi ceux qui sont libres.

La charge stationnaire des serveurs, si elle existe sur Ω, est un vecteur aléatoire $\Gamma : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+^s$ solution de l'équation

$$(1) \qquad \Gamma o\, \theta = (\Gamma + \sum_{i=1}^{s} \sigma\, 1_{A_i} e_i - \tau u)^+$$

où $(e_1,e_2, \dots ,e_s)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^s$, $u = \sum_{i=1}^{s}{}' e_i$ et

$$A_i = (\omega \in \Omega \mid \Gamma_i(\omega) = 0 \text{ et } \forall j < i \quad \Gamma_j(\omega) > 0)$$

Comme dans le cas à un seul serveur cette équation peut avoir 0, 1, ou plusieurs solutions, aussi chercherons nous à construire une extension $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{A}},\tilde{P},\tilde{\theta})$ de $(\Omega,\mathcal{A},P,\theta)$.
$\tilde{\Omega}$ sera une partie de $\Omega \times \mathbb{M}^s$ où $\mathbb{M}^s$ est l'ensemble des s-uples de $\mathbb{N}^s$ dont toutes les composantes non nulles sont deux à deux distinctes , plusieurs composantes pouvant éventuellement être nulles. On choisira $\tilde{\Omega}$ de telle façon que l'équation

$$(2) \qquad \tilde{\Gamma} o\, \tilde{\theta}(\tilde{\omega}) = (\tilde{\Gamma}(\tilde{\omega}) + \sum_{i=1}^{s} \sigma(\omega)\, 1_{\tilde{A}_i}(\tilde{\omega})\, e_i - \tau(\omega)\, u)^+$$

où $\tilde{A}_i = (\omega \in \tilde{\Omega} \mid \tilde{\Gamma}_i(\tilde{\omega}) = 0 \text{ et } \forall j < i \quad \tilde{\Gamma}_j(\tilde{\omega}) > 0)$

admette une solution unique.

Posons

$$\nu(\omega) = \text{Inf } (n > 0 \mid \sum_{k=0}^{n-1} \tau o\theta^k(\omega) \geq \sigma(\omega)) \quad \text{ou} \quad +\infty$$

et $$d = \text{P.G.C.D.}(n > 0 \mid P(\nu=n) > 0)$$

et notons L_s l'application de $\Omega \times \mathbb{M}^s$ dans $\mathbb{M}^s$ définie par

$$L_s(\omega;i_1,i_2, \dots ,i_s) = (i'_1, \dots ,i'_s) \quad \text{où pour tout } k \ (1 \leq k \leq s)$$

$$i'_k = \begin{cases} 0 \text{ si } (\nu o\theta^{-i_k} (\omega) \leq i_k + 1) \text{ ou si } (\exists p < k \quad i_p = i_k = 0) \\ i_k + 1 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

L'application $L_s(\omega) : \mathbb{M}^s \longrightarrow \mathbb{M}^s$ fait correspondre à la suite $(i_1, \dots ,i_s)$ des indices des clients en service à $T_o = 0$, la suite $(i'_1, \dots ,i'_s)$ des indices des clients en service à l'instant T_1. On définit par récurrence la suite $(L_s^m(\omega))_{m\geq 1}$ des applications qui à la suite des indices des clients en service à T_{-m} font correspondre la suite des indices des clients en service à $T_o = 0$:

$$L_s^1(\omega) = L_s(\theta^{-1}\omega; \cdot)$$

$$\forall m \geq 1 \quad L_s^{m+1}(\omega) = L_s^m(\omega) \circ L_s(\theta^{-m-1}\omega; \cdot)$$

On pose enfin $\quad H_s^m(\omega) = L_s^m(\omega;\mathbb{M}^s)$.

<u>Lemme 1</u> Sauf sur un ensemble négligeable invariant par θ que nous jetterons une fois pour toutes, la suite $(H_s^m(\omega))_{m\geq 1}$ est une suite décroissante de parties finies non vides de $\mathbb{M}^s$, dont l'intersection $H_s(\omega)$ a un cardinal constant noté h_s dans la suite.

Remarquons, avant d'aborder la démonstration,que $H_s(\omega)$ représente l'ensemble des valeurs possibles des suites d'indices $(i_1, \dots ,i_s)$ des clients susceptibles d'être en service à l'instant $T_o = 0$ en régime stationnaire.

<u>Démonstration</u> : Rappelons que l'événement $E^c = \text{Lim}_n \sup\, (\nu\circ\theta^{-n} > n)$ est P-négligeable (cf. |2| lemme 2) et θ-invariant ; pour tout ω de E l'ensemble $H_s^1(\omega) = L_s(\theta^{-1}\omega;\mathbb{M}^s)$ est une partie finie non vide de $\mathbb{M}^s$ car elle est formée de s-uples $(i_1, \dots ,i_s)$ dont toutes les composantes sont dans l'ensemble fini $0 \;\cup\; i \in \mathbb{N}^* \mid \nu\circ\theta^{-i} > i$. Il est clair sur la définition de $L_s^{m+1}(\omega)$ que $H_s^{m+1}(\omega)$ est inclus dans $H_s^m(\omega)$, ainsi pour tout ω de E les $H_s^m(\omega)$ forment une suite décroissante de parties finies non vides de $\mathbb{M}^s$ qui devient constante à partir d'un certain rang (dépendant de ω) et sa limite $H_s(\omega)$ est donc aussi finie et non vide. En remarquant que $L_s^{m+1}(\theta\omega) = L_s(\omega, \cdot) \circ L_s^m(\omega)$, on voit que les cardinaux $h_s^m(\omega)$ des ensembles $H_s^m(\omega)$ vérifient l'inégalité $h_s^{m+1}(\theta\omega) \leq h_s^m(\omega)$ sur E et en faisant tendre m vers $+\infty$ on a $h_s \circ \theta \leq h_s$ sur E ; étant donnée l'ergodicité de θ ceci signifie que $h_s(\omega)$ est constante sur un sous-ensemble mesurable F de E tel que $P(E \;\; F) = 0$. F (et F^c) sont invariants par θ, F^c est P-négligeable, nous jetterons donc définitvement F^c.

Dans la suite nous considèrons l'extension suivante de Ω :

$\tilde{\Omega} = \{(\omega;i_1, \dots, i_s) \in \Omega \times \mathbb{M}^s \mid (i_1, \dots, i_s) \in H_s(\omega)\}$

$\tilde{\theta}(\omega;i_1, \dots, i_s) = (\theta\omega;L_s(\omega;i_1, \dots, i_s))$

$\tilde{\mathcal{A}}$ est la trace sur $\tilde{\Omega}$ de la tribu $\mathcal{A} \times \mathcal{P}(\mathbb{M}^s)$ où $\mathcal{P}(\mathbb{M}^s)$ est la tribu des parties de $\mathbb{M}^s$

La mesure $\tilde{P}$ est définie par :

$\forall A \in \mathcal{A} \quad \tilde{P}(A \times \{i_1, \dots, i_s\}) = \int_A 1_{H_s(\omega)}(i_1, \dots, i_s)\, dP(\omega)$

(noter que $\tilde{P}$ n'est pas une probabilité : $\tilde{P}(\tilde{\Omega}) = h_s$).

En procédant comme dans | 2 | il est immédiat de vérifier que $\tilde{\theta}$ est un automorphisme (non nécessairement ergodique) de $\tilde{\Omega}$ laissant $\tilde{P}$ invariante.

Le problème de l'existence et de l'unicité des solutions de l'équation (2) est résolu par la proposition suivante, qui assure que toute autre espace de probabilité permettant de construire le vecteur charge stationnaire des serveurs se projette sur $\tilde{\Omega}$.

<u>Proposition 2</u> La v.a. $\tilde{\Gamma} : \tilde{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}_+^s$ dont les composantes sont

$$\tilde{\Gamma}_k(\omega;i_1, i_k, i_s) = \sigma\circ\theta^{-i_k} - \sum_{j=1}^{i_k} \tau\circ\theta^{-j} > 0 \quad \text{si } i_k \neq 0$$

$$= 0 \quad \text{si } i_k = 0$$

est solution de l'équation (2).

Soit $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ un espace de probabilité muni d'un automorphisme ergodique θ', et ϕ une application mesurable de $(\Omega', \mathcal{A}')$ dans $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que :

$$\phi \circ \theta' = \theta \circ \phi \quad \text{et} \quad \phi(P') = P .$$

Alors à toute solution non presque sûrement infinie de l'équation

$$\text{(2bis)} \quad \Gamma' \circ \theta' = \left(\Gamma' + \sum_{i=1}^{s} \sigma\circ\phi \, 1_{A_i'} e_i - \tau\circ\phi \, u \right)^+$$

où $\quad A_i' = (\omega' \in \Omega' \mid \Gamma_i'(\omega') = 0 \text{ et } \forall j < i \quad \Gamma_j' > 0)$

correspond une composante ergodique $\tilde{I}$ de $\tilde{\Omega}$ et une application mesurable $\tilde{\phi}$ de Ω' dans $\tilde{I}$

telle que $\quad \Gamma' = \tilde{\Gamma} \circ \tilde{\phi} \; , \; \tilde{\phi} \circ \theta' = \tilde{\theta} \circ \tilde{\phi} \quad$ et $\quad \tilde{\phi}(P') = \dfrac{\tilde{P}}{\tilde{P}(\tilde{I})}$

La démonstration de cette proposition suit pas à pas celle faite dans |2| (proposition 4) pour le cas s = 1, nous ne la reprendrons donc pas.

La proposition suivante donne un encadrement de h_s.

Proposition 3 Soit r le plus petit entier supérieur ou égal à $E(\sigma)/E(\tau)$, $r' = \mathrm{Inf}\{n > 0 \mid P(\bigcap_{m\geq n} (\nu o\theta^{-m} \leq m)\ ) > 0\}$, et $p = r \wedge r'$. Alors

$$d \leq h_s \leq \sum_{k=0}^{s\wedge p-1} C_s^k \ A_{p-1}^k \leq p^s .$$

Démonstration : Pour établir la première inégalité remarquons que le serveur numéro un travaille exactement comme s'il était seul : pour presque tout ω l'application

$$H_s(\omega) \longrightarrow H_1(\omega)$$
$$(i_1, \dots ,i_s) \longrightarrow i_1$$

est une bijection. Comme $h_1 \geq d$ (cf. | 2 | proposition 3), à fortiori $h_s \geq d$.

Pour établir la seconde inégalité remarquons que si $(i_1, \dots ,i_s) \in H_s^1(\omega)$, tous les i_k $(1 \leq k \leq s)$ sont dans l'ensemble $\{0\} \cup \{n > 0 \mid \nu o\theta^{-n} > n\}$; si il existe un événement non négligeable A et un entier $q > 0$ tels que $\mathrm{card}\,\{n > 0 \mid \nu o\theta^{-n} > n\} \leq q-1$ sur A, alors $\mathrm{card}\ H_s^1(\omega) \leq \sum_{k=0}^{s\wedge q-1} C_s^k\ A_{q-1}^k \leq q^s$ sur A. ($C_s^k\ A_{q-1}^k$ est le nombre de s-uples constitués de k éléments deux à deux distincts pris parmi $q-1$ et de $s-k$ zéros).La constante h_s qui est majorée par la v.a. $\mathrm{card}\ H_s^1(\omega)$ vérifie donc la même inégalité.

Posons $B_{r'} = \bigcap_{m\geq r'} (\nu o\theta^{-m} \leq m)$; par définition de r' $P(B_{r'}) > 0$, et le raisonnement fait ci-dessus s'applique à $A = B_{r'}$ et $q = r'$. D'autre part par définition de ν

$$\sum_{j=0}^{\nu-2} \tau o\theta^j < \sigma \qquad \text{p.s.}$$

soit en intégrant sur Ω :

$$\int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} \tau o\theta^{n-1}\ 1_{\nu>n}\ dP < E(\sigma)$$

et en utilisant l'invariance de P par θ :

$$\int_\Omega (\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\nu o\theta^{-n}>n})\ \tau o\theta^{-1}\ dP < E(\sigma) = \int_\Omega \frac{E(\sigma)}{E(\tau)}\ \tau o\theta^{-1}\ dP$$

Il existe donc un événement A' non négligeable sur lequel

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\nu o\theta^{-n}>n} < \frac{E(\sigma)}{E(\tau)}$$

et comme le premier membre de cette inégalité est un entier

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\nu o\theta^{-n}>n} \leqq r-1 \qquad \text{sur } A'.$$

En prenant A = A' et q = r on achève la démonstration de la seconde inégalité.

La proposition suivante exprime le fait que si $s \leqq d$, p.s. aucun client ne trouve à son arrivée plus d'un guichet libre et que les s serveurs travaillent indépendamment les uns des autres.

Proposition 4 Soit $\tilde{E} = \left\{(\omega;i_1, \dots ,i_s) \in \tilde{\Omega} \mid \exists(j,k)\ 1 \leqq j \leqq k \leqq s \quad i_j = i_k = 0\right\}$
Si $s \leqq d$, on a $\tilde{P}(\tilde{E}) = 0$ et $H_s(\omega) = \left\{(i_1, \dots ,i_s) \in (H_1(\omega))^s \mid \forall j \neq k \quad i_j \neq i_k\right\}$

Démonstration : Rappelons que si $(i_1, \dots ,i_s) \in H_s^1(\omega)$, pour tout k tel que $i_k > 0$ $\nu o\theta^{-i_k} > i_k$ donc la définition de L_s sur $\tilde{\Omega}$ devient :

$$L_s(\omega;i_1, \dots ,i_s) = (i_1', \dots ,i_s') \text{ où pour tout } k\ (1 \leqq k \leqq s)$$

$$i_k' = \begin{cases} 0 & \text{si } (\nu o\theta^{-i_k} = i_k+1) \text{ ou si } (\exists p < k \quad i_p = i_k = 0) \\ i_k + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme les valeurs prises par ν sont toutes multiples de d

(α) $\overline{i_k'} = \overline{i_k+1}$ modulo d sauf si $\exists p < k \quad i_p = i_k = 0$ (dans ce cas $i_k'=$

Pour prouver que $\tilde{P}(\tilde{\Omega}) = 0$ on procède par récurrence sur s $(2 \leqq s \leqq d)$.
Si $s = 2 \leqq d$, $\tilde{E} = \left\{(\omega;0,0) \in \tilde{\Omega}\right\}$, et toute trajectoire partant de $\tilde{E}$ n'y revient jamais : en effet , si $\tilde{\omega} \in \tilde{E}$ $\tilde{\theta}\tilde{\omega} = (\theta\omega;1,0)$ et compte tenu de (α), pour tout $n > 0$ $\tilde{\theta}^n\tilde{\omega} = (\theta^n\omega;i_1^n,i_2^n)$ avec $\overline{i_1^n} = \overline{n}$ et $\overline{i_2^n} = \overline{n-1}$ modulo d. Le lemme de récurrence de Poincaré permet d'affirmer que $\tilde{P}(\tilde{E}) = 0$.
Supposons le résultat établi pour $s-1 \leqq d$, et prouvons le pour $s \leqq d$. Si $s \leqq d$, à fortiori $s-1 \leqq d$ et comme l'ouverture du s-ième guichet ne modifie pas le travail des s-1 premiers serveurs, d'après l'hypothèse de récurrence p.s. aucun couple de serveurs parmi les s-1 premiers n'est libre simultanément et $\tilde{E} = \bigcup_{p<s} \tilde{E}_p$ où $\tilde{E}_p = \left\{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} \mid i_p = i_s = 0\right\}$. Montrons que toute trajectoire partant de $\tilde{E}_j$ $(1 \leqq j < s)$ ne peut y revenir, ce qui établira que $\tilde{P}(\tilde{E}) = 0$. Soit donc $(\omega;i_1, \dots ,i_s) \in \tilde{E}_j$ et notons $(\lambda_k)_{k>0}$ la suite des instants de retour à $\tilde{E}$. En utilisant (α) il est facile de voir que pour tout k tel que $\lambda_k < \infty$ $\overline{\lambda_k} = \overline{k}$ modulo d, et que si on pose $\tilde{\theta}^n(\omega;i_1, \dots ,i_s) = (\theta^n\omega;i_1^n, \dots ,i_s^n)$, alors $\overline{i_p^n} = \overline{i_p} + \overline{n}$ modulo d pour tout $n > 0$ et pour tout $p < s$. Ceci prouve que pour tout $k < d$, on ne peut être à l'instant T_{λ_k} dans aucun des ensembles $\tilde{E}_p$ déjà visités aux instants $T_0, \dots ,T_{\lambda_{k-1}}$. En effet , si $\tilde{\theta}^{\lambda_k}\tilde{\omega} \in \tilde{E}_p$ $\overline{i_p^{\lambda_k}} = \overline{i_p} + \overline{k} = \overline{0}$, et si pour un m $(0 \leqq m < k)$ $\tilde{\theta}^{\lambda_m}\tilde{\omega} \in \tilde{E}_p$ $\overline{i_p^{\lambda_m}} = \overline{i_p} + \overline{m}$ donc $\overline{m} = \overline{k}$ ce qui est impossible si $0 \leqq m < k < d$.

Comme $s \leqq d$, toute trajectoire partant de $\tilde{E}_j$ aura visité aux instants $T_0=0$,T_{λ_1} , ... ,$T_{\lambda_{s-2}}$ successivement tous les $(\tilde{E}_p)_{1\leqq p<s}$, donc $\lambda_{s-1} = \infty$ et cette trajectoire ne repasse jamais par $\tilde{E}_j$. La récurrence est établie.

Il reste à montrer que pour P-presque tout ω, $H_s(\omega)$ est l'ensemble $H'_s(\omega)$ des s-uples formés d'entiers deux à deux distincts pris dans $H_1(\omega)$. On rappelle (cf. |2|) que card $H_1(\omega) = h \geqq d$ P-p.s.. Montrons que $H_s(\omega) \subset H'_s(\omega)$ p.s. : soit $(i_1, \dots ,i_s)$ un élément de $H_s(\omega)$; pour tout n de $\mathbb{Z}$ posons $\tilde{\theta}^n(\omega;i_1, \dots ,i_s) = (\theta^n\omega;i_1^n, \dots ,i_s^n)$. Comme $\tilde{P}(\tilde{E}) = 0$ l'ensemble $E = \{\omega \in \Omega \mid \exists(i_1, \dots ,i_s) \in H_s(\omega), \exists n \in \mathbb{Z} \quad \tilde{\theta}^n(\omega;i_1, \dots ,i_s) \in \tilde{E}\}$ est P-négligeable, et pour tout ω de E^c :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad (i_1^{n+1}, \dots ,i_s^{n+1}) = L_s(\theta^n\omega;i_1^n, \dots ,i_s^n) = (L_1(\theta^n\omega,i_1^n),\dots,L_1(\theta^n\omega,i_s^n))$$

et donc $\quad \forall m > 0$, $\forall k\ (1 \leqq k \leqq s) \qquad L_1^m(\omega,i_k^{-m}) = i_k$.

Pour tout ω de E^c les i_k $(i \leqq k \leqq s)$ sont dans tous les $H_1^m(\omega)$, donc dans $H_1(\omega)$; de plus ils sont deux à deux distincts car pour tout s-uple $(i_1, \dots ,i_s)$ de $H_s(\omega)$, si $i_j = i_k$ alors $i_j = i_k = 0$, ce qui est exclu pour ω dans E^c. Donc $H_s(\omega) \subset H'_s(\omega)$ P-p.s..

Pour établir l'inclusion inverse, considérons un élément $(i_1, \dots ,i_s)$ de $H'_s(\omega)$. $L_1^m(\omega)$ étant pour tout $m > 0$ une bijection de $H_1(\theta^{-m}\omega)$ sur $H_1(\omega)$, notons i_k^{-m} l'unique élément de $H_1(\theta^{-m}\omega)$ tel que $L_1^m(\omega,i_k^{-m}) = i_k$ $(1 \leqq k \leqq s)$. Les $(i_k)_{1\leqq k\leqq s}$ étant deux à deux distincts les $(i_k^{-m})_{1\leqq k\leqq s}$ le sont aussi et en particulier deux d'entre eux ne peuvent être nuls en même temps. Donc pour tout $m > 0$:

$$L_s^m(\omega;i_1^{-m}, \dots ,i_s^{-m}) = (L_1^m(\omega,i_1^{-m}), \dots ,L_1^m(\omega,i_s^{-m})) = (i_1, \dots ,i_s)$$

et $(i_1, \dots ,i_s) \in H_s(\omega)$. Finalement $H_s(\omega) = H'_s(\omega)$ P-p.s. .

Intéressons nous maintenant au point de vue du client pour qui il est indifférent d'être servi par tel ou tel serveur. Un tel client ne veut connaître que la liste des charges (sans ordre) des différents serveurs. Lorsqu'on adopte ce point de vue on peut se limiter à une extension plus petite de Ω : soit $\mathcal{R} : \mathbb{M}^s \longrightarrow \mathbb{M}^s$ l'application qui à tout s-uple $(i_1, \dots ,i_s)$ associe son réordonnement par ordre croissant, et soit $\mathcal{M}^s = \mathcal{R}(\mathbb{M}^s) = \{(j_1, \dots ,j_s) \in \mathbb{M}^s \mid j_1 \leqq j_2 \leqq \dots \leqq j_s\}$.
On note $\mathcal{L}_s(\omega)$ l'application de $\mathcal{M}^s$ dans lui-même définie par :

$$\mathcal{L}_s(\omega;j_1, \dots ,j_s) = \mathcal{R} \circ L_s(\omega;j_1, \dots ,j_s)$$

L'égalité suivante , entre applications de $\mathbb{M}^s$ dans $\mathcal{M}^s$ est immédiate à vérifier :

$$(3) \qquad \mathcal{L}_s(\omega) \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ L_s(\omega) \qquad \text{P-p.s.}$$

On pose $\qquad \mathcal{H}_s(\omega) = \{\mathcal{R}(i_1, \dots ,i_s) \quad \mid (i_1, \dots ,i_s) \in H_s(\omega)\} \subset \mathcal{M}^s$

et on note $h_s(\omega)$ son cardinal. Le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} H_s(\omega) & \xrightarrow[\text{bijection}]{L_s(\omega)} & H_s(\theta\omega) \\ \Big\downarrow \text{surjection} & & \Big\downarrow \text{surjection} \\ \mathcal{H}_s(\omega) & \xrightarrow{\mathcal{L}_s(\omega)} & \mathcal{H}_s(\theta\omega) \end{array}$$

montre que $\mathcal{L}_s(\omega)$ est P-p.s. une surjection de $\mathcal{H}_s(\omega)$ sur $\mathcal{H}_s(\theta\omega)$, et donc que $h_s(\theta\omega) \leqq h_s(\omega)$ P-p.s. ; étant donnée l'ergodicité de θ , h_s est P-p.s. constante et $\mathcal{L}_s(\omega)$ est P-p.s. une bijection de $\mathcal{H}_s(\omega)$ dans $\mathcal{H}_s(\theta\omega)$.

On considère l'extension suivante de Ω :

$$\overline{\Omega} = \{(\omega;j_1, \dots ,j_s) \in \Omega \times \mathcal{M}^s \mid (j_1, \dots ,j_s) \in \mathcal{H}_s(\omega)\}$$

$$\overline{\theta}(\omega;j_1, \dots ,j_s) = (\theta\omega \; ; \mathcal{L}_s(\omega;j_1, \dots ,j_s))$$

$\overline{\mathcal{a}}$ est la trace sur $\overline{\Omega}$ de la tribu $\mathcal{a} \times \mathcal{P}(\mathcal{M}^s)$

$\overline{P}$ est la mesure image de $\widetilde{P}$ par l'application $\widetilde{\mathcal{R}} : \widetilde{\Omega} \longrightarrow \overline{\Omega}$

définie par : $\qquad \widetilde{\mathcal{R}}(\omega;i_1, \dots ,i_s) = (\omega;\mathcal{R}(i_1, \dots ,i_s))$

L'application $\mathcal{L}_s(\omega) : \mathcal{H}_s(\omega) \longrightarrow \mathcal{H}_s(\theta\omega)$ étant bijective, $\overline{\theta}$ est inversible sur $\overline{\Omega}$; de (3) on déduit

$$(4) \qquad \overline{\theta} \circ \widetilde{\mathcal{R}} = \widetilde{\mathcal{R}} \circ \widetilde{\theta}$$

et donc l'invariance de $\widetilde{P}$ par $\widetilde{\theta}$ implique celle de $\overline{P}$ par $\overline{\theta}$.

Remarque : 1) Grâce à (3) on peut vérifier qu'on obtient les mêmes ensembles $\mathcal{H}_s(\omega)$ en appliquant le procédé utilisé pour construire $H_s(\omega)$ (on définit par récurrence les aplications $\mathcal{L}_s^m(\omega)$ et leurs images $\mathcal{H}_s^m(\omega)$, et on prend l'intersection des $\mathcal{H}_s^m(\omega)$).

2) $\overline{P}(\overline{\Omega}) = \tilde{P}(\tilde{\Omega}) = h_s$ (et non $\mathcal{h}_s$). Plus généralement, pour tout A de $\mathcal{A}$ et tout $(j_1, \ldots ,j_s)$ de $\mathcal{N}^s$,

$$\overline{P}(A \times \{j_1, \ldots ,j_s\}) = \int_A \sum_{(i_1, \quad ,i_s)\in H_s(\omega)} 1_{(j_1, \quad ,j_s)}(\mathcal{R}(i_1, \quad ,i_s))dP(\omega)$$

$$= \int_A \overline{c}_s(\omega; j_1, \ldots ,j_s)\, dP(\omega)$$

où $\overline{c}_s(\omega;j_1, \ldots ,j_s)$ est le nombre d'éléments de $H_s(\omega)$ dont le réordonnement est $(j_1, \ldots ,j_s)$. Si $\tilde{c}_s(\omega;i_1, \ldots ,i_s)$ est la v.a. définie sur $\tilde{\Omega}$ comme le nombre d'éléments de $H_s(\omega)$ ayant même réordonnement que $(i_1, \ldots ,i_s)$, on vérifie grâce à (3) que $\tilde{c}_s \circ \tilde{\theta} \geq \tilde{c}_s$ $\tilde{P}$-p.s. sur $\tilde{\Omega}$ donc $\tilde{c}_s$ est $\tilde{\theta}$ invariante , c'est à dire p.s. constante sur chaque invariant de $\tilde{\Omega}$. Comme $\tilde{c}_s = \overline{c}_s \circ \tilde{\mathcal{R}}$, $\overline{c}_s$ est $\overline{\theta}$ invariante, donc $\overline{P}$-p.s. constante sur chaque invariant de $\overline{\Omega}$.

Grâce à cette remarque, il suffit de reprendre les arguments développés dans la démonstration de la proposition 4 de | 2 | pour établir la :

Proposition 5 Soit $\overline{\mathcal{G}} : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}_+^s$ la v.a. dont les composantes sont

$$\overline{\mathcal{G}}_k(\omega;j_1, ,j_k, ,j_s) = \sigma\circ\theta^{-j_k} - \sum_{i=1}^{j_k} \tau\circ\theta^{-i} > 0 \qquad \text{si } j_k \neq 0$$

$$= 0 \qquad \text{si } j_k = 0$$

et ρ l'application qui à tout vecteur de $\mathbb{R}^s$ associe son réordonnement par ordre croissant Alors $\rho\overline{\mathcal{G}}$ est solution de l'équation

$$(5) \qquad \mathcal{G} \circ \overline{\theta} = (\mathcal{G}(\overline{\omega}) + \sigma(\omega)\, 1_{\mathcal{G}_1(\overline{\omega})=0}\, e_1 - \tau(\omega)\, u)^+$$

Soit $(\Omega',\mathcal{A}',P')$ un espace de probabilité muni d'un automorphisme ergodique θ' , et une application mesurable ϕ de $(\Omega',\mathcal{A}')$ dans $(\Omega,\mathcal{A})$ telle que :

$$\phi \circ \theta' = \theta \circ \phi \qquad \text{et} \qquad \phi(P') = P .$$

Alors, à toute solution $\mathcal{G}'$ non P'-p.s. infinie de l'équation

$$(5bis) \quad \mathcal{G}' \circ \theta' = (\mathcal{G}' + \sigma\circ\phi\, 1_{\mathcal{G}'_1=0}\, e_1 - \tau\circ\phi\, u)^+$$

correspond une composante ergodique I de $\overline{\Omega}$ et une application mesurable $\overline{\Phi}$ de Ω' dans I telle que $\mathcal{G}' = \rho\overline{\mathcal{G}} \circ \overline{\Phi}$, $\overline{\Phi} \circ \theta' = \overline{\theta} \circ \overline{\Phi}$ et $\overline{\Phi}(P') = \dfrac{\overline{P}}{\overline{P}(I)}$

Donnons maintenant une majoration de $\mathcal{h}_s$:

Proposition 6 : L'entier p étant défini comme à la proposition 3, on a :

$$\mathcal{h}_s \leqq \sum_{k=0}^{s \wedge p-1} C_{p-1}^{k} \leqq 2^{p-1} .$$

Démonstration : On a vu dans la démonstration de la proposition 3 qu'il existe un événement non négligeable A de Ω, tel que pour tout ω de A et pour tout $(i_1, \ldots, i_s)$ de $H_s(\omega)$ les seules composantes i_j non nulles sont prises dans un ensemble de cardinal inférieur ou égal à p-1. $\mathcal{H}_s(\omega)$ étant constitué des réordonnements des éléments de $H_s(\omega)$, pour tout ω de A il y a au plus C_{p-1}^{k} éléments de $\mathcal{H}_s(\omega)$ qui ont exactement k composantes non nulles. Comme le cardinal de $\mathcal{H}_s(\omega)$ est constant l'inégalité annoncée est ainsi établie.

III. APPLICATION AU CAS INDEPENDANT.

Supposons maintenant que les variables $(\sigma\circ\theta^n, \tau\circ\theta^m)_{n\in\mathbb{Z},\, m\in\mathbb{Z}}$ forment une suite de v.a. indépendantes, toutes les v.a. $\sigma\circ\theta^n$ (respectivement $\tau\circ\theta^m$) ayant même loi que σ (respectivement τ), cas noté GI|GI|s|0 dans la littérature. Nous allons donner des conditions suffisantes pour que les extensions $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P}, \tilde{\theta})$ ou $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{P}, \bar{\theta})$ soient isomorphes à $(\Omega, \mathcal{A}, P, \theta)$, autrement dit pour que h_s ou $\hbar_s$ égalent 1.

Proposition 7 : On se place dans le cas GI|GI|s|0 $(s > 1)$, et on suppose que l'une au moins des deux conditions suivantes est réalisée :

i) $P(\sigma \leqq \tau) > 0$

ii) $P(\tau \geqq s\, a) > 0$ avec $a = \text{ess inf } \tau$

est réalisée. Alors $h_s = 1$, et l'équation (1) admet sur Ω une solution unique Γ ; cette solution vérifie $P(\Gamma = 0) > 0$. De plus pour toute fonction f continue et positive sur $\mathbb{R}_+$:

$$E(\, f(\Gamma\circ\theta^n) \mid \Gamma = x\,) \xrightarrow[n\to\infty]{} E(\, f(\Gamma)\,)\ .$$

Démonstration : Nous la scinderons en quatre parties :

1ère partie : i) $\Longrightarrow$ $h_s = 1$ et $P(\Gamma = 0) > 0$

Les v.a. σ et τ étant indépendantes, la condition $P(\sigma \leqq \tau) > 0$ implique l'existence d'un réel $x > 0$ tel que $P(\sigma \leqq x) > 0$ et $P(\tau \geqq x) > 0$. On pose :

$$A_n = \bigcap_{m\geq n} \left(\sigma\circ\theta^{-m} \leqq \sum_{k=1}^{m} \tau\circ\theta^{-k}\right) = \bigcap_{m\geq n} (\nu\circ\theta^{-m} \leqq m)$$

$$B_n = \bigcap_{0<p<n} (\tau\circ\theta^{-p} \geqq x\ ;\ \sigma\circ\theta^{-p} \leqq x)$$

La suite A_n croit vers Ω (l'événement négligeable $\text{Lim sup}_n\, (\nu\circ\theta^{-n} > n)$ a été jeté une fois pour toutes au lemme 1), donc $P(A_n) > 0$ pour n assez grand ; d'autre part pour tout $n \geqq 2$ $P(B_n) > 0$, et comme A_n et B_n sont indépendants, il existe un entier $N \geqq 2$ tel que $P(A_N \cap B_N) > 0$. Comme sur A_N $H_s^1(\omega)$ est constitué de s-uples dont toutes les composantes sont dans $0,1, \ldots ,N-1$, et sur B_N $\nu\circ\theta^{-p} = 1$ pour tout $p < N-1$, $H_s^1(\omega) = (0,0, \ldots ,0)$ sur $A_N \cap B_N$ donc $H_s(\omega)$ aussi et $h_s = 1$. L'extension $(\tilde{\Omega}, \ ,\tilde{P},\tilde{\theta})$ est donc isomorphe à $(\Omega, \ ,P,\theta)$ et d'après la proposition 2 l'équation (1) admet une solution unique sur Ω, qui est nulle sur $A_N \cap B_N$, donc $P(\Gamma = 0) > 0$.

<u>2ème partie : ii) $\Longrightarrow h_s = 1$ et $P(\Gamma = 0) > 0$, dans le cas où $P(\tau=a) > 0$.</u>

La démonstration de ce résultat dans le cas où $P(\tau=a) = 0$ se traite de la même manière, mais comporte quelques difficultés supplémentaires d'ordre technique que nous aborderons dans la troisième partie. La condition $P(\tau=a) > 0$ implique $a > 0$, soit p le plus petit entier tel que $P(pa < \sigma \leq (p+1)a) > 0$, et remarquons qu'il existe un réel γ $(0 < \gamma \leq a)$ tel que $P(pa < \sigma \leq pa + \gamma) > 0$ et $P(pa + \gamma \leq \sigma \leq (p+1)a) > 0$. On peut supposer $p \geq s$, car si $p < s$ on est dans le cas déjà traité où $P(\sigma \leq \tau) > 0$.

On procède par récurrence sur s :

I) Montrons d'abord que dans le cas $s = 2$, la condition $P(\tau \geq 2a) > 0$ implique $h_1 = 1$. Ce résultat est un cas particulier de la proposition 6 de |2| : en effet si $P(\tau \geq 2a) > 0$ la loi de ν charge deux entiers consécutifs et $d = 1$. Nous en donnerons néammoins une démonstration directe. Pour alléger les notations posons $h = h_1$ et supposons $h > 1$.

Soit X_0 le vecteur aléatoire $\Omega \dashrightarrow \mathbb{R}_+^h$ obtenu par réordonnement croissant du vecteur de composantes :

$$\begin{cases} R_0(\omega) = 0 \quad \text{si} \quad 0 \in H(\omega) \\ \forall i \in H(\omega),\ i \neq 0, \quad R_i(\omega) = \sigma \circ \theta^{-i} - \sum_{k=1}^{i} \tau \circ \theta^{-k} > 0 \end{cases}$$

On définit par récurrence la suite (X_n) de v.a. de Ω dans $\mathbb{R}_+^h$ en posant pour tout $n \geq 0$

$$X_{n+1} = \begin{cases} \left[(X_{n,1}-\tau\circ\theta^n)^+, \ \dots \ , (X_{n,h}-\tau\circ\theta^n)^+\right] & \text{si} \quad X_{n,1} > 0 \\ R\left[(\sigma\circ\theta^n-\tau\circ\theta^n)^+,(X_{n,2}-\tau\circ\theta^n)^+, \ \dots \ ,(X_{n,h}-\tau\circ\theta^n)^+\right] & \text{si} \quad X_{n,1} = 0 \end{cases}$$

où $X_{n,1}$, $X_{n,2}$, ... , $X_{n,h}$ désignent les composantes du vecteur X_n, et R l'opération réordonnement croissant. La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov en vertu du résultat suivant : Etant donnée une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de v.a. $\Omega \dashrightarrow \mathbb{R}^k$, indépendantes et de même loi , et une fonction borélienne $F : \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^k \dashrightarrow \mathbb{R}^h$, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} X_0 \text{ donnée : } \Omega \dashrightarrow \mathbb{R}^h, \text{ mesurable par rapport à la tribu engendrée} \\ \text{par les } \ (Y_n)_{n<0} \\ \text{et } \ \forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = F(X_n,Y_n) \end{cases}$$

est une chaîne de Markov. On applique ce résultat à $Y_n = (\sigma\circ\theta^n, \tau\circ\theta^n)$ et $k = 2$.

On vérifie facilement que pour tout $n \geq 0$ $X_n = X_0\circ\theta^n$,donc la chaîne est stationnaire, sa probabilité invariante m (qui est la loi de X_0) charge l'ensemble

$$K = \left\{(x_1,x_2, \ \dots \ ,x_h \in \mathbb{R}_+^h \mid 0 = x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_h \leq (p+1)a \right\}$$

En effet, soit $x \in \mathbb{R}_+^h$ tel que $x_1 \leqq x_2 \leqq \dots \leqq x_h$ (les composantes des X_n sont ordonnées par ordre croissant) et N le plus petit entier supérieur ou égal à $x_h/2a$. Comme $P(\tau \geqq 2a) > 0$, l'événement $E = \bigcap_{0 \leqq n \leqq N} (pa < \sigma\circ\theta^n \leqq (p+1)a \; ; \; \tau\circ\theta^n \geqq 2a)$ est non négligeable et P_x-p.s. sur E toutes les composantes de X_n s'annulent au moins une fois à l'instant T_N ou avant, et à chaque fois qu'une composante s'annule , elle saute à $\sigma\circ\theta^n \leqq (p+1)a$, donc toutes les composantes de X_N sont majorées par $(p+1)a$ P_x-p.s. sur E ; soit $T_{\lambda(\omega)}$ le premier instant supérieur ou égal à T_N où $X_{\lambda,1} = 0$, alors $P_x(X_\lambda \in K) \geqq P(E) > 0$ donc $m(K) > 0$.

Soit $\Delta = \left\{x \in \mathbb{R}_+^h \mid x_1 = x_2 = 0\right\}$. Par définition de h, $m(\Delta) = 0$. Nous allons montrer que pour tout x de K il existe un entier q tel que $P_x(X_q \in \Delta) > 0$, ce qui est incompatible avec les conditions $m(K) > 0$ et $m(\Delta) = 0$, donc $h = 1$.

Soit $x \in K$ tel que $(p-1)a < x_h \leqq (p+1)a$. On a $(X_{p,1} = X_{p,2} = 0)$ P_x-p.s. sur $A = \left\{pa < \sigma \leqq (p+1)a\right\} \cap \left\{\bigcap_{0 \leqq k < p-1} (\tau\circ\theta^k = a)\right\} \cap \left\{\tau\circ\theta^{p-1} \geqq 2a\right\}$ donc $P_x(X_p \in \Delta) > 0$.

Soit maintenant $x \in K$ tel que $(p-j)a < x_h \leqq (p-j+1)a$ pour $2 \leqq j \leqq p$, et montrons que pour un tel x, soit $P_x(X_{p-j+1} \in \Delta) > 0$, soit il existe un $q \leqq p$ tel que $P_x(X_q \in K \; ; \; X_{q,h} > (p-j+1)a) > 0$. Ceci finira de prouver que pour tout x de K, il existe un entier q tel que $P_x(X_q \in \Delta) > 0$, et donc que $h = 1$, et $m(0) > 0$ c'est à dire $P(\Gamma=0) > 0$. On considère pour celà l'événement non négligeable :

$$A_j = \left\{\bigcap_{0 \leqq k < p} (pa < \sigma\circ\theta^k \leqq (p+1)a)\right\} \cap \left\{\bigcap_{\substack{0 \leqq k < p \\ k \neq p-j}} (\tau\circ\theta^k = a)\right\} \cap \left\{\tau\circ\theta^{p-j} \geqq 2a\right\}$$

Sur A_j :
$$\begin{cases} X_{p-j+1,1} \leqq (x_h - \sum_{n=0}^{p-j} \tau\circ\theta^n)^+ \leqq (x_h-(p-j)a-2a)^+ = 0 \\ \text{et} \quad X_{p-j+1,2} \leqq (\sigma - \sum_{n=0}^{p-j} \tau\circ\theta^n)^+ \leqq ((p+1)a-(p-j)a-2a)^+ = (j-1)a \qquad (\alpha) \end{cases}$$

Deux cas peuvent se présenter : soit $P_x(X_{p-j+1,2} = 0 \cap A_j) > 0$ et dans ce cas $P_x(X_{p-j+1} \in \Delta) > 0$, soit $X_{p-j+1,2} > 0$ P_x-p.s. sur A_j et dans ce cas on considère le premier instant T_λ $(\lambda > p-j)$ où $X_{\lambda,1} = 0$. Il résulte de l'inégalité (α) que $\lambda \leqq p$ sur A_j , et comme $X_{p-j+1,1} = 0$ sur A_j , $X_{\lambda,h} \geqq (\sigma\circ\theta^{p-j+1} - \sum_{p-j<n<\lambda} \tau\circ\theta^n)^+ > (p-j+1)a$ sur A_j , donc dans ce cas $\exists q \leqq p$ $P_x(X_q \in K \; ; \; X_{q,h} > (p-j+1)a) > 0$.

II) Soit $s \geqq 2$. Supposons démontré que si $P(\tau \geqq sa) > 0$, $h_{s-1} = 1$ et $P(\Gamma_{s-1} = 0) = P((0,0, \dots ,0) \in H_{s-1}(\omega)) > 0$, et montrons que sous la même condition $P(\tau \geqq sa) > 0$, on a aussi $h_s = 1$ et $P(\Gamma_s = 0) > 0$. Comme l'adjonction d'un serveur supplémentaire ne modifie pas le fonctionnement des (s-1) premiers , pour tout $(i_1, \dots ,i_{s-1},i_s)$ de $H_s(\omega)$, $(i_1, \dots ,i_{s-1}) \in H_{s-1}(\omega)$. On posera $h_s = h$ dans la suite , et on notera $X_0 = (X'_0, X''_0)$ la v.a. $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+^{s-1} \times \mathbb{R}_+^h$ où :

$$X'_0(\omega) = \Gamma_{s-1}(\omega)$$

et $X''_0(\omega)$ est le réordonnement croissant du vecteur de composantes

$$\begin{cases} R_0(\omega) = 0 \quad \text{si } \exists(i_1, \quad ,i_{s-1}) \in H_{s-1}(\omega) \text{ tel que } (i_1, \quad ,i_{s-1},0) \in H_s(\omega) \\ \forall i > 0 \quad R_i(\omega) = \sigma\circ\theta^{-i} - \sum\limits_{n=1}^{i} \tau\circ\theta^{-n} > 0 \quad \text{si } \exists(i_1, \quad ,i_{s-1}) \in H_{s-1}(\omega) \end{cases}$$

tel que $(i_1, \quad ,i_{s-1},i) \in H_s(\omega)$.

On définit ensuite par récurrence la suite $(X_n) = (X'_n, X''_n)$ de v.a. de Ω dans $\mathbb{R}_+^{s-1} \times \mathbb{R}_+^h$:

$$\begin{cases} X'_{n+1}(\omega) = X'_n(\theta\omega) = \Gamma_{s-1}\circ\theta^n(\omega) \\ X''_{n+1}(\omega) = \begin{matrix} [(X''_{n,1} - \tau\circ\theta^n)^+, \dots ,(X''_{n,h} - \tau\circ\theta^n)^+] \text{ si } X''_{n,1} > 0 \\ R[(\sigma\circ\theta^{-n} - \tau\circ\theta^n)^+, (X''_{n,2} - \tau\circ\theta^n)^+, \dots ,(X''_{n,h} - \tau\circ\theta^n)^+] \text{ si } X''_{n,1} = 0 \end{matrix} \end{cases}$$

où $X''_{n,1}$, ... , $X''_{n,h}$ désignent les composantes du vecteur X''_n , et R l'opération réordonnement croissant. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est comme dans le cas $s = 1$ une chaîne de Markov stationnaire , soit m sa probabilité invariante (la loi de X_0). Compte tenu de l'hypothèse de récurrence m charge l'ensemble

$$Y = \left\{(x',x'') \in \mathbb{R}_+^{s-1} \times \mathbb{R}_+^h \mid x' = 0 \; ; \; x''_1 \leqq x''_2 \leqq \dots \leqq x''_h\right\}$$

Montrons que m charge aussi l'ensemble $Z = Y \cap \left\{x''_h \leqq (p+1)a\right\}$: soit E_0 l'événement non négligeable $E_0 = \left\{\bigcap\limits_{0\leqq n\leqq p} (pa < \sigma\circ\theta^n \leqq (p+1)a)\right\} \cap \left\{\bigcap\limits_{0\leqq n<p} (\tau\circ\theta^n = a)\right\} \cap \left\{\tau\circ\theta^p \geqq sa\right\}$,

et remarquons que sur E_0 le temps de retour à Y est constant et vaut p+1 , et que $T_{p+1} \geqq (p+s)a$. Soit N le plus petit entier tel que $x''_h \leqq N\cdot(p+s)a$, et

$E_N = \bigcap\limits_{0\leqq k\leqq N} \theta^{-k(p+1)}(E_0)$; comme les $(\theta^{-k(p+1)}(E_0))_{k\geqq 0}$ sont indépendants, $P(E_N) > 0$, et comme toutes les composantes $x''_1, \dots ,x''_h$ se sont annulées avant l'instant $T_{N(p+1)}$ $X_{N(p+1)} \in Z$ P_x-p.s. sur E_N , donc $P_x(X_{N(p+1)} \in Z) > 0$ pour tout x de Y, et $m(Z) > 0$.

Soient $\quad K = \{(x',x'') \in \mathbb{R}_+^{s-1} \times \mathbb{R}_+^h \mid \forall k<s \;\; x'_k \leqq (k-1)a \; ; \; x''_1 \leqq .. \leqq x''_h \leqq (p+1)a\}$

et $\quad K' = \{(x',x'') \in K \mid x''_1 \leqq (s-1)a\}$

Comme $K \supset Z$, $m(K) > 0$. Nous allons établir les trois points suivants :

II.1) $\forall x \in K \quad \exists q \quad P_x(X_q \in K') > 0$, donc $m(K') > 0$.

II.2) Si $h > 1$, on pose $\Delta = \{(x',x'') \in \mathbb{R}_+^{s-1} \times \mathbb{R}_+^h \mid x'_1 = x''_2 = 0\}$, alors $\forall x \in K' \quad \exists q \quad P_x(X_q \in \Delta) > 0$, donc $m(\Delta) > 0$, ce qui est contraire à la définition de h, donc $h = 1$.

II.3) $P(\Gamma_s = 0) > 0$.

Ceci achèvera la démonstration du point II).

<u>Preuve de II.1)</u> Pour tout j $(1 \leqq j \leqq p-s+1)$ on pose

$$K_j = \{(x',x'') \in K \mid (p-j)a < x''_h \leqq (p-j+2)a\}$$

Comme $K = (\bigcup_j K_j) \cup K'$, il suffit d'établir que pour tout x de K_j il existe un entier q tel que $P_x(X_q \in K') > 0$, ainsi nous aurons $m(K') > 0$. Soit donc $x \in K_j$, et A_j l'événement non négligeable

$$A_j = \{pa+\gamma \leqq \sigma \leqq (p+1)a\} \cap \Big\{\bigcap_{0<n\leqq p-j} (pa<\sigma\circ\theta^n \leqq pa+\gamma)\Big\} \cap \Big\{\bigcap_{0\leqq n<p-j} (\tau\circ\theta^n = a)\Big\} \cap \{\tau\circ\theta^{p-j} \geqq sa\}$$

Pour tout ω de A_j, à chaque instant $(T_k)_{0\leqq k<s-1}$ $\quad X'_{k,k+1}(\omega) = 0$ (ceci provient des inégalités $x'_k \leqq (k-1)a$ pour $k < s$), et à l'instant T_{s-1}(antérieur à T_{p-j} car $j \leqq p-s+1$), X'_{s-1} a la forme suivante sur A_j :

$$\forall k < s \qquad X'_{s-1,k} = \sigma\circ\theta^{k-1} - \sum_{n=k-1}^{s-2} \tau\circ\theta^n > 0 \qquad \text{sur } A_j .$$

A tout instant $(T_q)_{s\leqq q\leqq p-j}$ $\quad X'_q$ a toutes ses composantes strictement positives sur A_j et à l'instant T_{p-j+1} :

$$(6) \qquad \forall k < s \qquad X'_{p-j+1,k} = (\sigma\circ\theta^{k-1} - \sum_{n=k-1}^{p-j} \tau\circ\theta^n)^+ \leqq (j+k-s)^+ a \quad \text{sur } A_j$$

D'autre part, comme $(p-j)a < x''_h \leqq (p-j+2)a$, à l'instant T_{p-j+1} :

$$(7) \qquad X''_{p-j+1,1} \leqq (x''_h - \sum_{n=0}^{p-j} \tau\circ\theta^n)^+ = 0 \qquad \text{sur } A_j.$$

Deux cas sont à envisager selon que $X'_{p-j+1,1}$ s'annule ou non sur A_j :

<u>1er cas</u> : $P_x(X'_{p-j+1,1} = 0 \cap A_j) > 0$, alors $P_x(X_{p-j+1} \in K') > 0$.

En effet sur $(X'_{p-j+1,1} = 0 \cap A_j)$ pour tout k $(1 < k < s)$

$$X'_{p-j+1,k} - X'_{p-j+1,1} = (\sigma\text{-}o\theta^{k-1} - \sum_{n=k-1}^{p-j} \tau o\theta^n)^+ - (\sigma - \sum_{n=0}^{p-j} \tau o\theta^n)^+ \quad \text{d'après (6)}$$

$$\leqq (\sigma\text{-}o\theta^{k-1} - \sigma + \sum_{n=0}^{k-2} \tau o\theta^n)^+ \qquad \text{car } u^+ - v^+ \leqq (u-v)^+$$

$$\leqq \sum_{n=0}^{k-2} \tau o\theta^n \qquad \text{car} \quad \sigma\text{-}o\theta^{k-1} \leqq pa+\gamma \leqq \sigma$$

$$\leqq (k-1)a$$

donc $X'_{p-j+1,k} \leqq (k-1)a$ sur $(X'_{p-j+1,1} = 0 \cap A_j)$, et comme il est clair que toutes les composantes de X''_{p-j+1} sont majorées par $(p+1)a$ sur A_j, grâce à (7) on a $X_{p-j+1} \in K'$ sur $(X'_{p-j+1,1} = 0 \cap A_j)$, donc $P_x(X_{p-j+1} \in K') > 0$ dans ce premier ca

Il resteà remarquer que , compte tenu de (6) , si $j < s$ on est toujours dans ce cas.

<u>2ème cas</u> : $X'_{p-j+1,1} > 0$ P_x-p.s. sur A_j, alors $\exists q \leqq p$ $P_x(X_q \in K_{j-1}) > 0$.

Remarquons d'abord que dans ce cas toutes les composantes de X'_{p-j+1} sont strictement positives sur A_j : en effet si $1 < k < s$, d'après (6)

$$X'_{p-j+1,k} = (\sigma\text{-}o\theta^{k-1} - \sum_{n=k-1}^{p-j} \tau o\theta^n)^+$$

$$\geqq (\sigma - a - \sum_{n=k-1}^{p-j} \tau o\theta^n)^+ \qquad \text{car} \quad pa < \sigma\text{-}o\theta^{k-1} \leqq \sigma \leqq (p+1)a$$

$$\geqq (\sigma - \sum_{n=k-2}^{p-j} \tau o\theta^n)^+$$

$$\geqq X'_{p-j+1,1} > 0 \qquad P_x\text{-p.s. sur } A_j.$$

Soit B_j l'événement non négligeable

$$B_j = A_j \cap \Big\{ \bigcap_{p-j+1 \leqq n \leqq p} (\tau o\theta^n = a \ ; \ pa < \sigma\text{-}o\theta^n \leqq (p+1)a) \Big\}$$

et considérons le premier instant $(T_\lambda)_{\lambda > p-j+1}$ où $X'_{\lambda,1} = 0$. On a $\lambda \leqq p$ sur B_j car d'après (6) $X'_{p-j+1,1} \leqq (j+1-s)^+ a \leqq (j-1)a$ sur A_j. Un calcul analogue à celui fait dans le premier cas montre que pour tout k $(1 < k < s)$

$$X'_{\lambda,k} = X'_{\lambda,k} - X'_{\lambda,1} \leqq (k-1)a \qquad \text{sur } B_j$$

D'autre part, comme d'après (7) $X''_{p-j+1,1} = 0$ sur A_j, la plus grande composante $X''_{\lambda,h}$ de X''_λ vérifie $X''_{\lambda,h} \geqq (\sigma\text{-}o\theta^{p-j+1} - \sum_{n=p-j+1}^{\lambda-1} \tau o\theta^n)^+ > pa - (j-1)a$ sur B_j car $\lambda \leqq p$,

donc $X_\lambda \in K_{j-1}$ Px-p.s. sur B_j , donc il existe $q \leqq p$ tel que $P_x(X_q \in K_{j-1}) > 0$.

On a ainsi montré que pour tout x de K_j $(1 \leqq j \leqq p\text{-}s\text{+}1)$,

-soit $P_x(X_{p-j+1} \in K') > 0$ (si on est dans le premier cas)

-soit $\exists q \leqq p \quad P_x(X_q \in K_{j-1}) > 0$ (si on est dans le second cas) .

Comme pour $j < s$ on est toujours dans le premier cas, par récurrence sur j on a

$$\forall x \in \bigcup_j K_j \quad \exists q \quad P_x(X_q \in K') > 0 .$$

Preuve de II.2) Pour établir que $\forall x \in K' \quad \exists q \quad P_x(X_q \in \Delta) > 0$, posons pour tout j $(1 \leqq j \leqq p-s+1)$ $K'_j = K_j \cap K'$, et $K'' = \{(x',x'') \in K' | \ x''_1 \leqq \dots \leqq x''_h \leqq (s-1)a\}$ ainsi $K' = (\bigcup_j K'_j) \cup K''$. Reprenons le raisonnement fait en II.1) pour montrer que $\forall x \in \bigcup_j K'_j \quad \exists q \quad P_x(X_q \in \Delta) > 0$: sur A_j , on a encore (6) , (7) , et en plus comme $x''_1 \leqq (s-1)a$, $X''_{s-1,1} = 0$ et comme X'_{s-1} a toutes ses composantes strictement positives , à l'instant T_{p-j+1} on a :

$$(8) \qquad X''_{p-j+1,2} \leqq ja \quad \text{sur } A_j$$

En effet $X_{p-j+1,2} \leqq (\sigma\text{-}o\theta^{s-1} - \sum_{n=s-1}^{p-j} \tau o\theta^n)^+ \leqq ((p+1)a - (p-j-s+1)a - sa)^+ = ja$ sur A_j.

On distingue encore deux cas selon que $X'_{p-j+1,1}$ s'annule ou non sur A_j :

1er cas ; $P_x(X'_{p-j+1,1} = 0 \cap A_j) > 0$, alors $P_x(X_{p-j+2} \in \Delta) > 0$.

En effet , comme sur A_j $pa < \sigma$ et $\sum_{n=0}^{p-j} \tau o\theta^n \leqq (p-j)a + b$ où $b = \text{ess sup } \tau$

la condition $P_x(X'_{p-j+1,1} = 0 \cap A_j) > 0$ implique $pa < (p-j)a + b$ soit $ja < b$ et donc $P(\tau \geqq ja) > 0$. On considère maintenant l'événement non négligeable $A'_j = (X'_{p-j+1,1} = 0 \cap A_j \cap \tau o\theta^{p-j+1} \geqq ja)$; sur A'_j d'après (7) $X''_{p-j+1,1} = 0 = X'_{p-j+1,1}$ donc $X''_{p-j+2,1} = 0$, et d'après (8) $X_{p-j+2,2} \leqq (ja - \tau o\theta^{p-j+1})^+ = 0$, donc $X_{p-j+2} \in \Delta$ P_x-p.s. sur A'_j et le résultat est établi. De plus, si $j < s$ on est toujours dans ce premier cas.

2ème cas : $X'_{p-j+1,1} > 0$ P_x-p.s. sur A_j , alors $\exists q \leqq p \quad P_x(X_q \in K'_{j-1}) > 0$.

On considère de nouveau l'événement B_j défini en II.1) et le premier instant $(T_\lambda)_{\lambda>p-j+1}$ où $X'_{\lambda,1} = 0$. On a encore $\lambda \leqq p$ et $X_\lambda \in K_{j-1}$ P_x-p.s. sur B_j. Il reste à montrer que $X''_{\lambda,1} \leqq (s-1)a$ sur B_j pour établir que $X_\lambda \in K'_{j-1} P_x$-p.s. sur B_j ; or

on a vu qu'à l'instant T_{s-1} $X''_{s-1,1} = 0$ et X'_{s-1} a toutes ses composantes strictement positives sur A_j,donc la composante $X''_{s-1,1}$ passe de 0 à $\sigma\text{-}o\theta^{s-1}$ à l'instant T_{s-1} , et à chaque instant $(T_q)_{p-j+1 \leqq q < \lambda}$

$$(\sigma\text{-}o\theta^{s-1} - \sum_{n=s-1}^{q-1} \tau o\theta^n)^+ \geqq (\sigma - a - \sum_{n=s-1}^{q-1} \tau o\theta^n)^+ \geqq (\sigma - \sum_{n=s-2}^{q-1} \tau o\theta^n)^+ \geqq X'_{q,1} > 0 \quad \text{sur } B_j .$$

Ainsi , à l'instant T_λ X''_λ a une composante de la forme :

$$(\sigma\circ\theta^{s-1} - \sum_{n=s-1}^{\lambda-1} \tau\circ\theta^n)^+ = (\sigma\circ\theta^{s-1} - \sum_{n=s-1}^{\lambda-1} \tau\circ\theta^n)^+ - X'_{\lambda,1}$$

$$\leqq (\sigma\circ\theta^{s-1} - \sigma + \sum_{n=0}^{s-2} \tau\circ\theta^n)^+$$

$$\leqq \sum_{n=0}^{s-2} \tau\circ\theta^n$$

$$\leqq (s-1)a$$

et donc $X''_{\lambda,1} \leqq (s-1)a$ sur B_j. Ainsi $\forall x \in \bigcup_j K'_j$ $\exists q$ $P_x(X_q \in \Delta) > 0$.

Il reste à montrer qu'à partir de K'' la chaîne X_n a également une probabilité strictement positive d'atteindre Δ. Ceci achèvera de prouver que $h = 1$.
Soit donc $x \in K''$ et C l'événement non négligeable

$$C = \bigcap_{0\leqq n\leqq s-1} (\tau\circ\theta^n = a \ ; \ pa < \sigma\circ\theta^n \leqq (p+1)a)$$

Il est facile de voir que sur C, à chaque instant $(T_k)_{0\leqq k<s-1}$ $X'_{k,k+1} = 0$ et à T_{s-1} le vecteur X''_{s-1} est nul puisque toutes composantes de X" s'annulent au plus tard à T_{s-1} ($x''_1 \leqq \dots \leqq x''_h \leqq (s-1)a$ car $x \in K''$) et qu'elles ne peuvent décoller de 0 avant T_{s-1} , X' ayant au moins une composante nulle à chaque instant antérieur à T_{s-1} .
Donc $\forall x \in K''$ $P_x(X_{s-1} \in \Delta) > 0$.

II.3) On sait maintenant que $h = 1$ et donc $X_n = \Gamma_s \circ \theta^n$. Pour prouver que $P(\Gamma_s = 0) > 0$ il suffit de montrer que pour tout x de K' il existe un entier q tel que $P_x(X_q = 0) > 0$: comme $m(K') > 0$, on aura $m((0,0, \dots ,0)) > 0$ et donc $P(\Gamma_s = 0) = P(X_o = 0) = m((0,0, \dots ,0)) > 0$. Pour celà on considère l'événement

$$D = \left\{\bigcap_{0\leqq n\leqq p} (pa < \sigma\circ\theta^n \leqq (p+1)a)\right\} \cap \left\{\bigcap_{0\leqq n<p} (\tau\circ\theta^n = a)\right\} \cap \left\{\tau\circ\theta^p \geqq sa\right\}$$

A partir de tout point x de K' la chaîne X_n vérifie à l'instant T_p :

$$\forall k \leqq s \qquad X_{p,k} = \sigma\circ\theta^{k-1} - \sum_{n=k-1}^{p-1} \tau\circ\theta^n > 0 \quad \text{sur D}$$

et à l'instant suivant :

$$\forall k \leqq s \qquad X_{p+1,k} = (X_{p,k} - \tau\circ\theta^p)^+ \leqq ((p+1)a - (p-k+1)a - sa)^+ = 0 \quad \text{sur D.}$$

donc pour tout x de K' $P_x(X_{p+1} = 0) > 0$, et la deuxième partie est terminée.

3ème partie : ii) $\Longrightarrow h_s = 1$ et $P(\Gamma = 0) > 0$, dans le cas où $P(\tau=a) = 0$.

Montrons d'abord que le cas $a = 0$ peut se ramener à $a > 0$: si $a = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ $P(0 < \tau < \varepsilon) > 0$; on peut trouver un $a' > 0$ tel que $sa' < b = \text{ess sup } \tau$, et $P(a' \leqq \tau < a'+\alpha) > 0$ pour tout $\alpha > 0$: en effet,

$$\forall \alpha > 0 \qquad]0,\varepsilon[\subset \bigcup_{n>1} [\frac{\varepsilon}{n} , \frac{\varepsilon}{n} + \alpha[$$

et comme $P(0 < \tau < \varepsilon) > 0$ il suffit de prendre pour a' le premier des $\frac{\varepsilon}{n}$ tel que $P(\frac{\varepsilon}{n} \leqq \tau < \frac{\varepsilon}{n} + \alpha) > 0$. De plus $P(\tau \geqq sa') > 0$ car $sa' < b$, on peut donc remplacer $a = 0$ par $a' > 0$. Dans la suite nous supposerons donc $a > 0$.

Rappelons qu'il existe un entier p ($p \geqq s$) et un réel γ ($0 < \gamma \leqq a$) tels que $P(pa < \sigma \leqq pa + \gamma) > 0$ et $P(pa + \gamma \leqq \sigma \leqq (p+1)a) > 0$. Nous aurons besoin de raffiner un peu la première condition en prouvant l'existence d'un réel $\beta > 0$ tel que $P(pa + \beta < \sigma \leqq pa + \gamma) > 0$. Pour construire β on remarque que

$$]pa , pa + \gamma] = \bigcup_{n>1}]pa + \frac{\gamma}{n} , pa + \gamma]$$

et on prend pour β le premier des $\frac{\gamma}{n}$ tel que $P(pa + \frac{\gamma}{n} < \tau \leqq pa + \gamma) > 0$.

Nous aurons également besoin de construire une suite $(a_m)_{m\geqq 0}$ de réels décroissant vers a telle que pour tout $n > 0$ $P(a_m \leqq \tau \leqq a_{m-1}) > 0$. On choisit donc a_o , $a < a_o \leqq a + \frac{\beta}{p}$, puis a_{m-1} ($m > 0$) étant défini on pose pour $k > 0$

$$a_m^k = a + \frac{a_{m-1}-a}{k}$$

et on prend pour a_m le premier des a_m^k tel que $P(a_m^k \leqq \tau \leqq a_{m-1}) > 0$ (l'existence d'un tel a_m^k est assurée par $]a , a_{m-1}] = \bigcup_{k>1} [a_m^k , a_{m-1}]$ et $P(a < \tau \leqq a_{m-1}) > 0$).

On a aussi $P(a < \tau \leqq a_m) > 0$ par définition de a, et on peut itérer la construction.

Indiquons maintenant comment modifier la démonstration faite dans le cas où $P(\tau=a) > 0$, pour la rendre applicable au cas où la loi de τ ne charge plus a.

I) Cas $s = 1$:

On reprend la même chaîne de Markov et le même ensemble K . La démonstration de $m(K) > 0$ est sans changement. Pour tout j ($1 \leqq j \leqq p$) et pour tout $m \geqq 1$ on pose

$$K_j^m = \left\{ x \in K \mid (p-j)a_m < x_h \leqq (p-j+2)a \right\}$$

et on considère au lieu des A_j , les événements A_j^m :

$$A_j^m = \left\{ \bigcap_{0\leqq k<p} (pa+\beta<\sigma\circ\theta^k\leqq(p+1)a) \right\} \cap \left\{ \bigcap_{\substack{0\leqq k<p \\ k\neq p-j}} (a_m\leqq \tau\circ\theta^k\leqq a_{m-1}) \right\} \cap \left\{ \tau\circ\theta^{p-j}\geqq 2a \right\}$$

Notation : U et V étant deux ensembles, on notera $U \dashrightarrow V$ pour exprimer que

$$\forall x \in U \quad \exists q \in \mathbb{N} \quad P_x(X_q \in V) > 0$$

On vérifie alors que :

$$\forall m \geqq 1 \qquad K_1^m \dashrightarrow \Delta$$

$$\forall m \geqq 1 \qquad \forall j\ (2 \leqq j \leqq p) \quad K_j^m \dashrightarrow K_{j-1}^{m-1} \ \text{ ou } \ K_j^m \dashrightarrow \Delta$$

donc , comme $K = \bigcup_{j=1}^{p} K_j^m$ pour tout $m \geqq 1$, en prenant $m > p$ on obtient $K \dashrightarrow \Delta$

d'où $h_1 = 1$ et $P(\Gamma = 0) > 0$.

II) Récurrence pour $s \geqq 2$:

On considère la même chaîne de Markov, les mêmes ensembles K et K', et on a encore $m(K) > 0$

On pose pour $m \geqq 1$:

$$K^m = \left\{(x',x'') \in \mathbb{R}_+^{s-1} \times \mathbb{R}_+^h \mid \forall k<s \ \ x_k' \leqq (k-1)a_m \ ; \ x_1'' \leqq \dots \leqq x_h'' \leqq (p+1)a\right\}$$

$$K'^m = \left\{(x',x'') \in K^m \mid x_1'' \leqq (s-1)a_m \right\}$$

et pour tout $j\ (1 \leqq j \leqq p-s+1)$

$$K_j^m = \left\{(x',x'') \in K^m \mid (p-j)a_m < x_h'' \leqq (p-j+2)a\right\}$$

En remplaçant les événements A_j et B_j par :

$$A_j^m = \left\{pa+\gamma \leqq \sigma \leqq (p+1)a\right\} \cap \left\{ \bigcap_{0<n\leqq p-j} (pa+\beta < \sigma\circ\theta^n \leqq pa+\gamma) \right\} \cap \left\{ \bigcap_{0\leqq n<p-j} (a_m \leqq \tau\circ\theta^n \leqq a_{m-1}) \right\} \cap \left\{\tau\circ\theta^{p-j} \geqq sa\right\}$$

et $$B_j^m = A_j^m \ \cap \ \left\{ \bigcap_{p-j+1\leqq n\leqq p} (a_m \leqq \tau \leqq a_{m-1} \ ; \ pa+\beta < \sigma\circ\theta^n \leqq (p+1)a)\right\}$$

on montre de la même façon que dans le cas où $P(\tau=a) > 0$:

II.1) $\forall m > p-s+1 \quad K^m \dashrightarrow K'^{m-p+s-1}$, et comme $K = \bigcap_m K^m$ et $m(K) > 0$

pour tout $m \geqq 1$ $m(K'^m) > 0$. Comme $K^m = (\bigcup_j K_j^m) \cup K_m'$, il suffit d'établir que

$$\forall j < s \qquad K_j^m \dashrightarrow K'^{m-1}$$

et $$\forall j\ (s \leqq j \leqq p-s+1) \qquad K_j^m \dashrightarrow K'^{m-1} \ \text{ ou } \ K_j^m \dashrightarrow K_{j-1}^{m-1} .$$

II.2) $\forall m \geqq 1 \quad K'^m \dashrightarrow \Delta$, donc $h_s = 1$.

Pour celà on pose pour $j\ (1 \leqq j \leqq p-s+1)$ $K_j'^m = K_j^m \cap K'^m$ et

$$K''^m = \left\{(x',x'') \in K'^m \mid x_1'' \leqq \dots \leqq x_h'' \leqq (s-1)a_m\right\}$$

Comme $K'^m = (\bigcup_j K_j'^m) \cup K''^m$, il suffit d'établir (en considérant les A_j^m et B_j^m) que :

$\forall j < s \quad K'^m_j \dashrightarrow \Delta$

$\forall j\ (s \leqq j \leqq p-s+1) \quad K'^m_j \dashrightarrow \Delta$ ou $K'^m_j \dashrightarrow K'^{m-1}_{j-1}$

et que $K''^m \dashrightarrow \Delta$, en se plaçant sur

$$C^m = \bigcap_{0 \leqq n \leqq s-1} (\ a_m \leqq \tau o\theta^n \leqq a_{m-1}\ ;\ pa+\beta < \sigma o\theta^n \leqq (p+1)a\ )$$

II.3) On montre ensuite que $K'^1 \dashrightarrow \{(0,0, \ldots ,0)\}$

en considérant l'événement

$$D^1 = \left\{\bigcap_{0 \leqq n \leqq p} (pa+\beta < \sigma o\theta^n \leqq (p+1)a)\right\} \cap \left\{\bigcap_{0 \leqq n < p} (a_1 \leqq \tau o\theta^n \leqq a_0)\right\} \cap \left\{\tau o\theta^p \geqq sa\right\}$$

Comme $m(K'^1) \geqq m(K') > 0$, $P(\Gamma_s = 0) = m(0,0, \ldots,0) > 0$.

<u>4ème partie</u> : La chaîne de Markov stationnaire $(X_n = \Gamma o\theta^n)_{n \geqq 0}$ est irréductible et récurrente à l'origine. Il reste à établir qu'elle est apériodique pour pouvoir lui appliquer le théorème d'Orey et obtenir ainsi le résultat de convergence annoncé dans la proposition 7.

Comme le temps de retour à l'origine de (X_n) vaut 1 sur l'événement $(\ \sigma \leqq \tau\ )$, (X_n) est apériodique dès que la première condition $P(\sigma \leqq \tau) > 0$ est réalisée. Supposons la deuxième condition $P(\tau \leqq sa) > 0$ réalisée et $P(\sigma \leqq \tau) = 0$. Nous nous placerons dans le cas où τ charge a, les modifications à faire dans le cas contraire sont celles de la 3ème partie ci-dessus. Nous avons vu au II) 3 que sur l'événement

$$D = \left\{\bigcap_{0 \leqq n \leqq p} (pa < \sigma o\theta^n \leqq (p+1)a)\right\} \cap \left\{\bigcap_{0 \leqq n < p} (\tau o\theta^n = a)\right\} \cap \left\{\tau o\theta^p \geqq sa\right\}$$

à partir de tout point de $K' = \left\{x \in \mathbb{R}^s_+ \mid x_1 = 0, x_2 \leqq a , \ldots , x_s \leqq (s-1)a\right\}$ la chaîne (X_n) atteint l'origine pour la première fois à l'instant T_{p+1} . Soit maintenant

$$D' = \left\{\bigcap_{0 \leqq n \leqq p-1} (pa < \sigma o\theta^n \leqq (p+1)a\right\} \cap \left\{\bigcap_{0 \leqq n < p-1} (\tau o\theta^n = a)\right\} \cap \left\{\tau o\theta^{p-1} \geqq sa\right\}$$

Plaçons nous sur $D' \cap (\Gamma = 0)$; à chaque instant $(T_n)_{1 \leqq n \leqq p-1}$ la première composante de $X_n = \Gamma\ o\ \theta^n$ est strictement positive (donc $X_n \neq 0$) , de plus à l'instant $T_{p-1} = (p-1)a$ les composantes de X_{p-1} vérifient :

$$a < X_{p-1,1} \leqq 2a\ ,\ 2a < X_{p-1,2} \leqq 3a\ ,\ \ldots\ ,\ sa < X_{p-1,s} \leqq (s+1)a$$

A l'instant $T_p \geqq T_{p-1} + sa$, on a :

$$X_{p,1} = 0\ ,\ X_{p,2} = 0\ ,\ \ldots\ ,\ X_{p,s-1} = 0\ ,\ X_{p,s} \leqq a\ .$$

Ainsi, partant de tout point de K' la chaîne (X_n) a une probabilité non nulle de se trouver de nouveau dans K' à l'instant T_p. Sur l'événement $D' \cap \Gamma = 0 \cap X_{p,s} = 0$, le temps de retour à l'origine de la chaîne (X_n) vaut p . Si cet événement est non négligeable, ce temps de retour charge p mais aussi p+1 (sur D) et la chaîne est apériodique. Sinon, il charge p+1 (sur D) et aussi 2p+1 d'après la propriété de Markov : (X_n) a une probabilité non nulle de passer de l'origine à K' en p étapes, puis de K' à l'origine en p+1 étapes. Pour tout $p > 0$ le PGCD de p+1 et 2p+1 est 1, donc la chaîne est encore apériodique.
La proposition 7 est établie.

Donnons maintenant des conditions suffisantes pour que l'extension $(\bar{\Omega},\bar{\mathfrak{a}},\bar{P},\bar{\theta})$ soit isomorphe à $(\Omega,\mathfrak{a},P,\theta)$.

Proposition 8 : Dans le cas GI|GI|s|0 , si on suppose que l'une au moins des deux conditions suivantes :

i) $P(\sigma \leqq s\,\tau) > 0$

ii) $d = s$

est réalisée , alors $h_s = 1$ et l'équation aux réordonnements

$$(9) \qquad \mathcal{G} \circ \theta = (\mathcal{G}(\omega) + \sigma(\omega)\, 1_{\mathcal{G}_1(\omega)=0}\, e_1 - \tau(\omega)\, u)^+$$

admet une solution unique sur Ω.

Au contraire, si $d > s$ cette équation n'admet aucune solution sur Ω et le recours à l'extension est indispensable.

Démonstration : Supposons d'abord la condition i) réalisée. Les v.a. σ et τ étant indépendantes, il existe un $x>0$ tel que $P(\sigma \leqq sx) > 0$ et $P(\tau \geqq x)>0$. Considérons les événements

$$A'_n = \bigcap_{m \geqq n} (\sigma o \theta^{-m-s+1} \leqq \sum_{k=s}^{m+s-1} \tau o \theta^{-k}) = \bigcap_{m \geqq n} (\nu o \theta^{-m-s+1} \leqq m)$$

$$B'_n = \bigcap_{0<p<n} (\tau o \theta^{-p} \geqq x \ ; \ \sigma o \theta^{-p} \leqq sx)$$

La suite des événements $A_n = \bigcap_{m \geqq n} (\nu o \theta^{-m} \leqq m)$ étant croissante, de limite Ω (l'événement négligeable $\operatorname{Lim\,sup}_n (\nu o \theta^{-n} > n)$ a été jeté) , les $A'_n = \theta^{s-1}(A_n)$ sont tous de probabilité strictement positive à partir d'un certain rang ; de plus A'_n et B'_n sont indépendants et les B'_n $(n \geqq 2)$ sont non négligeables, soit donc $N \geqq 2$ un entier tel que $P(A'_N \cap B'_N) > 0$. Pour tout ω de A'_N les s-uples de $\mathcal{H}^1_s(\theta^{-s+1}\omega)$ ont toutes leurs composantes dans $\{0,1, \ldots ,N-1\}$, et si en plus ω est dans B'_N , pour tout p $(0 < p < N)$ $\nu o \theta^{-p} \leqq s$, donc sur $A'_N \cap B'_N$ les éléments de $\mathcal{H}^1_s(\theta^{-s+1}\omega)$ ont toutes leurs composantes dans $0,1, \ldots , s-1$,et au moins une d'elles doit être nulle puisque les composantes non nulles sont deux à deux distinctes. Ceci signifie que si ω est dans $A'_N \cap B'_N$, le client arrivant à T_{-s+1} est effectivement servi. Le même raisonnement s'applique à tous les $\mathcal{H}^1_s(\theta^{-s+k}\omega)$ pour $1 \leqq k \leqq s$, donc sur $A'_N \cap B'_N$ tous les clients arrivant aux instants T_{-s+1} , T_{-s+2} , ... , T_0 sont servis et $\mathcal{H}^1_s(\omega)$ est constitué de l'unique s-uple $(0,1, \ldots ,s-1)$. Ainsi $\mathcal{H}_s(\omega) = \{(0,1, \ldots ,s-1)\}$ sur $A'_N \cap B'_N$ et $h_s = 1$.

$(\bar{\Omega},\bar{\mathfrak{a}},\bar{P},\bar{\theta})$ est alors isomorphe à $(\Omega,\mathfrak{a},P,\theta)$ et d'après la proposition 5 il y a existence et unicité des solutions de (9) sur Ω.

Supposons maintenant la condition ii) réalisée. Il a été établi dans |2| (proposition 6) que $h_1 = d$ dans le cas GI|GI|1|0 . D'après la proposition 4 du présent travail , si $d \geqq s$ $H_s(\omega) = \{(i_1, \ldots ,i_s) \in H^1_s(\omega) \mid \forall j = k \quad i_j = i_k\}$, donc si $d = s$ $\mathcal{H}_s(\omega)$ est constitué de l'unique réordonnement des d éléments de $H_1(\omega)$, et $h_s = 1$.

Si au contraire $d > s$, $h_s = C^s_d > 1$, et grâce à la proposition 5 il suffit de montrer que $\bar{\Omega}$ n'a aucune composante ergodique isomorphe à Ω pour établir que (9) n'admet pas de solution sur Ω . On sait (cf. |2| proposition 6) que dans le cas GI|GI|1|0 $\tilde{\theta}_1$ est ergodique. La proposition 4 dit que si $d \geqq s$ $\tilde{P}(\tilde{E}) = 0$, et on a

$$\tilde{\theta}_s(\omega;i_1, \ldots ,i_s) = (\theta\omega;L_1(\omega,i_1), \ldots ,L_1(\omega,i_s))$$

et donc $\tilde{\theta}_s$ est également ergodique dès que $d \geqq s$. Mais l'ergodicité de $\tilde{\theta}_s$ implique celle de $\bar{\theta}_s$: en effet d'après (4) , si $\bar{A}$ est une partie de $\bar{\Omega}$ invariante par $\bar{\theta}_s$, $\tilde{\mathcal{R}}^{-1}(\bar{A})$ est invariante par $\tilde{\theta}_s$, donc $\tilde{P}(\tilde{\mathcal{R}}^{-1}(\bar{A})$ vaut 0 ou 1 , et comme $\bar{P}$ a été définie comme la mesure image de $\tilde{P}$ par $\tilde{\mathcal{R}}$ $\bar{P}(\bar{A})$ vaut également 0 ou 1, et $\bar{\theta}_s$ est ergodique. La proposition est établie.

Les résultats des propositions 7 et 8 incitent à formuler la conjecture suivante :

<u>Conjecture</u> : Pour une file $GI|GI|s|0$,

1) Si $d = 1$, $h_s = 1$ et la charge stationnaire Γ existe sur $(\Omega,\mathcal{A},P,\theta)$ et est unique.

2) Si $1 < d \leqq s$, $h_s = 1$ et le réordonnement $\mathcal{G}$ de la charge stationnaire existe sur $(\Omega,\mathcal{A},P,\theta)$.

La proposition 7 établit le point 1 dans le cas où ν charge 1 (cas $P(\sigma \leqq \tau) > 0$), ou deux entiers consécutifs (cas $P(\tau \geqq sa) > 0$). La proposition 8 établit le point 2 dans le cas $d = s$ et dans le cas où ν charge un entier inférieur ou égal à s, ainsi que la nécessité du recours à l'extension dans le cas $d > s$. Enfin la conjecture a été complètement démontrée dans le cas $s = 1$ dans FLIPO |2|.

Je remercie Monsieur NEVEU pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée tout au long de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

|1| A. BOROVKOV : Stochastic processes in queuing theory.
Springer Verlag (1976).

|2| D. FLIPO : Charge stationnaire d'une file d'attente à rejet
Annales scientifiques de l'Université de CLERMONT-FERRAND II
Numéro 92 , série Probabilités et applications, fascicule 7
pages 48 à 74.

|3| A. JOFFE et P.E. NEY : Convergence theorem for multiple channel lossprobabilities.
Ann. Math. Statist. 34 (1963) p. 260-273.

|4| B. LISEK : Construction of stationnary distributions for loss systems.
Math. Operationforsch. Statist. , série Statist.
Vol. 10 (1979) pages 561 à 581.

Daniel FLIPO
Laboratoire de Probabilités
associé au CNRS n° 224
Université Paris VI
4, place Jussieu

75230 PARIS Cédex 05