ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

FRANÇOIS CHARLOT
DJENAT MERAD

Sur les méthodes de processus ponctuels et de renouvellement dans les systèmes de files d'attente. III- Processus ponctuels périodiques et files d'attente périodiques

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 93, série *Probabilités et applications*, n° 8 (1989), p. 63-77
<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1989__93_8_63_0>

SUR LES METHODES DE PROCESSUS PONCTUELS ET DE RENOUVELLEMENT DANS LES SYSTEMES DE FILES D'ATTENTE

III - PROCESSUS PONCTUELS PERIODIQUES ET FILES D'ATTENTE PERIODIQUES

François CHARLOT - Djenat MERAD

SUMMARY

This paper is a follow-up to CCG and CM1. The notations are the same. We study classical models in queueing systems in the periodic case. We use point processes techniques. We obtain extensions of results due to HARRISSON J.M. and LEMOINE L.M.(HL) to queueing systems more complex than G/G/1.

INTRODUCTION

Les problèmes de files d'attente avec "input" périodique ont été étudiés par plusieurs auteurs (Af, AT, HL, Le) en particulier par J.M.HARRISSON et A.J.LEMOINE (HL) qui étudient le cas ou le processus d'entrée est un processus de poisson composé périodique. Tous les auteurs ne considèrent que le cas des files simples à un serveur. S.ATMUSSEN et H.THORISSON étudient une extension de HL par une approche par les Chaines de Markov. Nous développons ici une approche par les processus ponctuels, ce qui nous permet d'étendre les résultats de HL à d'autres systèmes de files d'attente: files à plusieurs serveurs, tandems de telles files etc.. Les résultats les plus intéressants étant ceux de convergence en loi des temps d'attente. Nous utilisons ici les techniques et les notations de CCG et de CM1.

1)FLOTS PERIODIQUES

Définition 11

Soit $(\Omega,\mathcal{A},\Theta)$ *où* $\Theta = (\theta_t, t\in\mathbb{R})$ *un flot réel et* $\mathbb{P}$ *une probabilité sur* $(\Omega,\mathcal{A})$. $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P},\Theta)$ *est un* **flot stationnairement périodique** *(f.s.p. en abrégé) si il existe un nombre réel* $a>0$ *tel que* $\theta_a\mathbb{P} = \mathbb{P}$ *et* $\theta_s\mathbb{P} \neq \mathbb{P}$ *pour* s, $0<s<a$. a *est appelé la période du flot.*

Remarque: Dans la suite, nous choisirons $a = 1$, pour simplifier l'écriture. Si $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P},\Theta)$ est un f.s.p., il en est de même de $(\Omega,\mathcal{A},\theta_s\mathbb{P},\Theta)$ pour tout $s\in\mathbb{R}$.

Le résultat suivant est évident.

Théorème 12

Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P},\Theta)$ *un f.s.p. et soit* $\mathbb{Q}$ *la probabilité définie sur* $(\Omega,\mathcal{A})$ *par:*

$$\forall A\in\mathcal{A} \quad \mathbb{Q}(A) = \int_0^1 \mathbb{P}(\theta_{-s}(A))ds.$$

Alors $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{Q},\Theta)$ *est un flot stationnaire.*

Le théorème suivant donne une condition suffisante d'ergodicité pour $\mathbb{Q}$, et examine dans ce cas les relations des $\theta_s\mathbb{P}$ entre eux et de $\theta_s\mathbb{P}$ avec $\mathbb{Q}$.

<u>Théorème</u> <u>13</u>

Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P},\Theta)$ *un fsp. Alors, si* $(\mathbb{P},\theta_1)$ *est ergodique:*

-a- $\forall t\in\mathbb{R}$, $(\theta_t\mathbb{P},\theta_1)$ *est ergodique;*

-b- $(\mathbb{Q},\Theta)$ *est ergodique;*

-c-les probabilités $(\theta_t\mathbb{P}, 0\le t<1)$ *sont deux à deux étrangères.*

-d- $\forall t\in\mathbb{R}$, $\theta_t\mathbb{P}$ *est étrangère à* $\mathbb{Q}$.

Démonstration

a est évident et c en est une conséquence puisque deux probabilités distinctes et ergodiques sur le même espace sont étrangères.

Pour b considérons l'évènement A

$$A = \left\{\omega \;/\; \frac{1}{t}\int_0^t X(\theta_s\omega)ds \xrightarrow[t\to\infty]{} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X)\right\}$$

X étant une variable aléatoire bornée. Par le théorème ergodique appliqué à $(\mathbb{P},\theta_1)$, il est clair que $\theta_t\mathbb{P}(A) = 1$. En effet:

$$\frac{1}{t}\int_0^t X(\theta_s\omega)ds = \frac{[t]}{t}\,\frac{1}{[t]}\sum_{n=1}^{n=[t]}\int_{n-1}^{n} X(\theta_s\omega)ds + \frac{1}{t}\int_{[t]}^{t} X(\theta_s\omega)ds =$$

$$\frac{[t]}{t}\,\frac{1}{[t]}\sum_{n=0}^{n=[t]-1}\Big[\int_0^1 X(\theta_s\omega)ds\Big]\circ\theta_n + \frac{[t]}{t}\,\frac{1}{[t]}\Big[\int_0^{t-[t]} X(\theta_s\omega)ds\Big]\circ\theta_{[t]}$$

d'où le résultat.

Mais alors: $\mathbb{Q}(A) = \int_0^1 \theta_s\mathbb{P}(A)ds = 1$ et donc pour toute variable aléatoire bornée X

$$\frac{1}{t}\int_0^t X\theta_s ds \xrightarrow[t\to\infty]{} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X)\ \mathbb{Q}\text{-p.s.}$$

ce qui implique l'ergodicité de $\mathbb{Q}$.

Pour démontrer le d, écrivons d'abord la décomposition de Lebesgue de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$. Il existe donc une variable aléatoire positive Y $\mathbb{P}$-p.s. finie telle que

$$\forall A\in\mathcal{A},\ \mathbb{Q}(A) = \int_{A\cap\{Y<\infty\}} Y d\mathbb{P} + \mathbb{Q}(A\cap\{Y=\infty\})$$

Comme $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{Q}(\theta_{-t}(A))$, il vient, par unicité de la décomposition en faisant $t=1$:

$$Y = Y\theta_{-1}\ \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

$$\{Y=\infty\} = \{Y\theta_{-1}=\infty\}\ \mathbb{Q}\text{-p.s.}$$

et donc $Y = \alpha$ $\mathbb{P}$-p.s. avec $\alpha = \mathbb{Q}(\{Y<\infty\})$. Il suffit donc de démontrer que $\alpha = 0$.

Si $\alpha = 1$, alors pour tout A de $\mathcal{A}$, $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{P}(A) = \theta_t\mathbb{P}(A)$ pour tout t, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de périodicité. Si $0<\alpha<1$, on a:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{\alpha}\,\mathbb{Q}(A\cap\{Y<\infty\}) + \mathbb{P}(\{Y=0\}\cap A)$$
$$= \mathbb{Q}(A/\{Y<\infty\})$$

Si $A = \theta_{-1}(A)$ $\mathbb{Q}$-p.s., $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1 et donc $A \supseteq \{Y<\infty\}$ ou $A \subseteq \{Y=\infty\}$. Comme $\alpha = \int_0^1 \mathbb{P}(\{Y\theta_{-t}<\infty\})dt$, il existe un t, $0<t<1$, tel que $\{Y\theta_{-t}<\infty\} = \{Y<\infty\}$ $\mathbb{Q}$-p.s. et donc $\theta_t\mathbb{P} = \mathbb{P}$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de périodicité. ∎

Remarque: Il est donc clair ici que, contrairement au cas stationnaire, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{L}^1(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ $t \dashrightarrow X\theta_t$ n'est pas continue pour la topologie de $\mathbb{L}^1$, lorsque X est un élément de $\mathbb{L}^1$.

2)Processus ponctuels marqués stationnairement périodiques

Soit F un espace métrique séparable complet localement compact, $\mathcal{F}$ sa tribu borélienne, $M = M(\mathbb{R};F)$ l'espace des mesures de Radon sur $\mathbb{R}$ à marques dans F, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{R};F)$ la tribu sur M construite en (CCG), $M_p = M_p(\mathbb{R};F)$ l'espace des mesures ponctuelles sur $\mathbb{R}$ à marques dans F, $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_p(\mathbb{R};F)$ la trace de $\mathcal{M}$ sur M_p.

Définition

Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P},\Theta)$ *un flot réel stationnairement périodique et* N *une mesure aléatoire sur* $\mathbb{R}$ *à marques dans* F *définie sur* $(\Omega,\mathcal{A},\Theta)$, *telle que* $N\theta_t = \tau_t N$. N *est appelée alors "mesure stationnairement périodique à marques dans* F*". Si* N *prend ses valeurs dans* M_p, *alors* N *est appelée "processus ponctuel stationnairement périodique à marques dans* F*", (en abrégé PPSPM). Si* F *est réduit à un point on dira simplement "mesure stationnairement périodique" et "processus ponctuel stationnairement périodique" (PPSP).*

N *est du premier ordre si, pour tout intervalle borné* [a,b] *de* $\mathbb{R}$, $\mathbb{E}(N([a,b]xF)) < \infty$.

Nous ne considèrerons par la suite que des processus du premier ordre et doublement infinis au sens où $\mathbb{P}(N(\mathbb{R}_+xF)=+\infty) = 1 = \mathbb{P}(N(\mathbb{R}_-xF)=+\infty)$..

Un exemple de PPSP (confere (HL)) est donné par le processus de Poisson sur $\mathbb{R}$ d'intensité h où h est une fonction périodique mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, localement intégrable.

Soit N un PPSPM à marques dans F. Notons, pour tout entier n:

$$K_n = N([n-1,n[xF)$$

le nombre de points du processus ponctuel de base qui appartiennent à l'intervalle [n-1,n[, ou, en terme de Files d'Attente, le nombre de clients qui arrivent durant la n-ième periode chargée. On défini les variables aléatoires X_n à valeurs dans $G = \{0\}+\Sigma_{p=1}^{\infty}([0,1[xF)^p$ muni de sa tribu naturelle $\mathcal{G}$, de la façon suivante:

-si $K_n = 0$, $X_n = 0$

-si $K_n = k > 0$, $X_n = ((U_1^n,Z_1^n),\dots,(U_k^n,Z_k^n)) =$

$= ((T_p-(n-1),Y_p),n-1\le T_p<n)$

$((K_n,X_n),n\in\mathbb{Z})$ est bien sur une suite $(\mathbb{P},\theta_1)$-stationnaire.

Réciproquement, soit $\Omega = G^{\otimes\mathbb{Z}}, \mathcal{A} = \mathcal{G}^{\otimes\mathbb{Z}}$ et X_n la n-ième projection de Ω. On note K_n le nombre de composantes de X_n et, si $K_n = k > 0$, $X_n = ((U_1^n,Z_1^n),\dots,(U_k^n,Z_k^n))$. θ est le "shift" de Ω: pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $X_n\theta = X_{n+1}$. Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega,\mathcal{A})$ invariante par θ et telle que pour tout $n\in\mathbb{Z}$ $U_1^n<U_2^n\dots<U_k^n$ $\mathbb{P}$-p.s. sur $\{K_n=k\}$. A l'aide de ce qui précède, nous allons construire un FSP et un PPSPM. Soit $(S_k,k\in\mathbb{Z})$ la suite des entiers n pour lesquels $K_n>0$, $S_0\le 0<S_1$. La suite des points $(T_p,p\in\mathbb{Z})$ est la suite de points strictement croissante de $\mathbb{R}$, $T_0\le 0<T_1$, qui coïncide avec l'ensemble des points $\{S_n-1+U_j^{S_n}, 1\le j\le K_{S_n}, n\in\mathbb{Z}\}$.

Si $T_p = S_n-1+U_j^{S_n}$, alors $Y_p = Z_j^{S_n}$. $N = \Sigma_{p\in\mathbb{Z}}\varepsilon_{T_p}\otimes\varepsilon_{Y_p}$ est un élement aléatoire à valeurs dans $(M_p(\mathbb{R};F),\mathcal{M}_p(\mathbb{R};F))$. Soit $\mathbb{P}_N$ la loi de N, I l'identité de M_p, $(\tau_t,t\in\mathbb{R})$ le flot des translations sur $\mathbb{R}$. Il est clair que $(M_p,\mathcal{M}_p,\mathbb{P}_N,(\tau_t,t\in\mathbb{R}))$ est un flot stationnairement périodique de periode 1 et que I est un processus ponctuel stationnairement périodique à marques dans F. La suite $((K'_n, Z'_n), n\in\mathbb{Z})$ construite à partir de I comme plus haut, est de même loi que la suite $((K_n, X_n), n\in\mathbb{Z})$ donnée sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \theta)$.

Lorsque la suite $(X_n, n\in\mathbb{Z})$ est une suite de variables indépendantes équidistribuées, on dira qu'on a **"un processus de renouvellement périodique à marques dans F"**. Le processus de Poisson périodique est bien sûr un tel processus. Dans ce cas les K_n ont une distribution de Poisson et, conditionnellement en $K_n = k$, $(U_1^n, \dots, U_k^n)$ est le réordonnement de k points uniformement distribués sur $[0,1[$. Dans ce cas, le processus est encore de renouvellement sous $\tau_t \mathbb{P}_N$, quelque soit t. Cette proprieté n'est évidemment pas vraie en général.

$S = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varepsilon_{S_n}$ est un processus ponctuel stationnaire sur le flot $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, (\theta_n, n\in\mathbb{Z}))$. Notons $\hat{P}_S$ la mesure de Palm de ce processus et $\hat{Q}_N$ celle du processus N sous la probabilité $\mathbb{Q}$. On notera désormais $N' = N(.xF)$, le processus ponctuel simple des points de base de N. Avec la définition de la mesure de Palm donnée dans CCG on a $\hat{\mathbb{Q}}_N = \hat{\mathbb{Q}}_{N'}$. On a alors

<u>Théorème 21</u>

Pour toute variable aléatoire positive X *sur* $(\Omega, \mathcal{A})$,

$$\int_\Omega X(\omega)\hat{Q}_N(d\omega) = \int_\Omega \mathbb{P}(d\omega)\int_{[0,1[} N'(\omega, ds)X(\theta_s(\omega))$$
$$= \int_\Omega \hat{P}_S(d\omega)\int_{[-1,0[} N'(\omega, ds)X(\theta_s(\omega)).$$

Démonstration

Soit a une fonction mesurable positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^1 a(s)ds = 1$. Pour toute variabe aléatoire X bornée

$$\int_\Omega \hat{Q}_N(d\omega)X(\omega) = \int_\Omega\int_{\mathbb{R}} X(\theta_s\omega)a(s)N'(\omega,ds)Q(d\omega)$$

$$= \int_\Omega \mathbb{P}(d\omega)\int_0^1 du\int_{\mathbb{R}} N'(\theta_u\omega,ds)X(\theta_{s+u}\omega)a(s)$$

$$= \int_\Omega \mathbb{P}(d\omega)\int_{\mathbb{R}} N'(\omega,ds)X(\theta_s\omega)\int_0^1 a(s-u)du.$$

$$= \int_\Omega \mathbb{P}(d\omega)\Sigma_{n\in\mathbb{Z}}\int_{[0,1[} N'(\omega,ds)X(\theta_s\omega)\int_0^1 a(s+n-u)du$$

$$= \int_\Omega \mathbb{P}(d\omega)\int_{[0,1[} N'(\omega,ds)X(\theta_s\omega)$$

l'autre formule s'obtenant en spécifiant l'intervalle $[-1,0[$ plutôt que $[0,1[$. ∎

Notons $f(\omega) = K(\omega)_{S_1(\omega)}$. Nous définissons ci-aprés le flot (discret) sous la fonction f. Soit $(\hat{\Omega}_S, \hat{\mathcal{A}}_S, \hat{\mathbb{P}}_S, \theta_{S_1})$ l'espace de Palm associé au processus ponctuel S. On pose:

$$\tilde{\Omega} = \{(\omega,k)/(\omega,k)\in\hat{\Omega}_S\mathrm{x}\mathbb{N},\ 0\le k\le f(\omega)-1\}$$

$$\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_S\otimes\mathcal{P}(\mathbb{N})\cap\tilde{\Omega}$$

et $\tilde{\mathbb{P}}$ défini par:

$$\int_{\tilde{\Omega}} X(\omega,k)\tilde{\mathbb{P}}(d(\omega,k)) = (1/c)\int_{\hat{\Omega}}\hat{\mathbb{P}}_S(d\omega)\Sigma_{k=0}^{k=f(\omega)-1}X(\omega,k)$$

ou X est une variable aléatoire positive $\tilde{\mathcal{A}}$-mesurable et

$$c = \int_{\hat{\Omega}_S} f(\omega)\hat{\mathbb{P}}_S(d\omega) = \int_\Omega f(\omega)\mathbb{P}(d\omega\ /N'([-1,0[>0)$$

est supposé fini.

$$\tilde{\theta}(\omega,k) = (\omega,k+1) \text{ si } 0 \le k \le f(\omega)-2$$

$$= (\theta_{S_1}(\omega),0) \text{ si } k = f(\omega)-1$$

$$\tilde{T}_0(\omega,k) = -k$$

$$\tilde{T}_1(\omega,k) = -k + f(\omega)$$

$$\tilde{T}_n(\omega,k) = -k + \Sigma_{p=0}^{p=n-1} f\theta_{S_p}(\omega) \text{ pour } n\ge1$$

$$= -k - \Sigma_{p=n}^{p=-1} f\theta_{S_p}(\omega) \text{ pour } n\leq -1.$$

$\tilde{T} = \Sigma_{n\in\mathbb{Z}}\varepsilon_{\tilde{T}_n}$ est un processus ponctuel stationnaire sur $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{A}},\tilde{\mathbb{P}},\tilde{\theta})$ dont l'espace de Palm est $(\hat{\Omega}_S,\hat{\mathcal{A}}_S,\hat{\mathbb{P}}_S,\hat{\theta}_{S_1})$. Comme corollaire du théorème 21, on a:

<u>Théorème 22</u>

Soit X *une variable aléatoire positive sur* $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ *et* $\tilde{X}$ *définie sur* $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{A}},\tilde{\mathbb{P}})$ *par* $\tilde{X}(\omega,k) = X\theta_{T_k}(\omega)$. *Alors:*

$$\int_\Omega X(\omega)\hat{\mathbb{Q}}_N(d\omega) = \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{X}(\omega,k)\tilde{\mathbb{P}}(d(\omega,k))$$

Démonstration

$$\int_\Omega X(\omega)\hat{\mathbb{Q}}_N(d(\omega) = \frac{1}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(N'([0,1[))} \int_\Omega \mathbb{P}(d\omega)\int_{[0,1[} N'(\omega,ds)X\theta_s(\omega)$$

$$= \frac{1}{\hat{\mathbb{E}}_S(N'([-1,0[)\hat{\mathbb{P}}(S=0)} \int_{\hat{\Omega}_S} \hat{P}_S(d\omega)\int_{[-1,0[} N'(\omega,ds)X\theta_s(\omega)$$

$$= \frac{1}{\hat{\mathbb{E}}_S(N'([-1,0[))} \int_{\hat{\Omega}_S} \hat{\mathbb{P}}_S(d\omega)\int_{[-1,0[} N'(\omega,ds)X\theta_s(\omega)$$

$$= \frac{1}{\hat{\mathbb{E}}_S(N'([0,S_1[)} \int_{\hat{\Omega}_S} \hat{\mathbb{P}}_S(d\omega)\int_{[0,S_1[} N'(\omega,ds)X\theta_s(\omega)$$

$$= \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{X}(\omega,k)\tilde{\mathbb{P}}(d(\omega,k)).$$

■

<u>3) Régime périodique des Files d'Attente.</u>

Dans toute la suite, $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P},\Theta)$ est un flot stationnairement périodique tel que θ_1 soit ergodique. Les notations sont celles de CCG. En particulier, la définition de stabilité et de processus bien autocouplé stable s'étend mot pour mot au cas périodique. Simplement, au lieu de l'expression "régime stationnaire", nous utiliserons l'expression "régime périodique" Les résultats de stabilité vont découler du lemme trivial suivant:

<u>Lemme 31</u>

Soit $\mathcal{Z}$ *une variable aléatoire à valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$. *Supposons que pour tout* ω *de* Ω, *si il existe un* $t \in \mathbb{R}$ *tel que* $\mathcal{Z}(\theta_t(\omega)) = \infty$, alors pour tout t de $\mathbb{R}$, $\mathcal{Z}(\theta_t(\omega)) = \infty$. *Alors*: $\mathbb{P}(\ \mathcal{Z} < \infty) = 1$ *si et seulement si* $\mathbb{Q}(\ \mathcal{Z} < \infty) = 1$.

<u>Théorème 32</u>

Soit un système de files d'attente décrit par un processus $(W^x(t), t \geq 0, x \in E)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+^p$.

a) Le processus admet un régime périodique pour $\mathbb{P}$, *si et seulement si il admet un régime stationnaire pour* $\mathbb{Q}$; *on note* $\mathcal{W}$ *ce régime périodique;*

b) le processus est un PBACSF pour $\mathbb{P}$ *si et seulement si c'est un PBACSF pour* $\mathbb{Q}$. *On a alors:*

$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ \lim_k \| \mathcal{L}((W^x(t+n+k), n \geq 0) - \mathcal{L}((\mathcal{W}(t) o \theta_n, n \geq 0)) \| = 0$

où $\mathcal{L}(.)$ *désigne la loi sous* $\mathbb{P}$ *sur* $((\mathbb{R}_+^p)^{\mathbb{N}}, (\mathcal{B}_{\mathbb{R}_+^p})^{\otimes \mathbb{N}})$ *des processus notés dans la parenthèse et* $\| \ \|$ *la norme de la variation totale des mesures bornées sur* $(\mathbb{R}_+^p)^{\mathbb{N}}$. *En particulier* $W^x(t+n)$ *tend en loi sous* $\mathbb{P}$ *vers* $\mathcal{W}(t)$ *quand* n *tend vers l'infini.*

Ce résultat s'applique immédiatement aux files à un serveur, aux files à un serveur avec plusieurs classes de clients et aux tandems de files à un serveur. Pour les files à plusieurs serveurs et les tandems de files à plusieurs serveurs (et aussi les files avec impatience ou avec une infinité de serveurs ou les tandems de ces files, ce que nous n'examinerons pas ici les conditions et démonstrations étant les mêmes que pour les files à plusieurs serveurs), nous avons besoin d'une hypothèse sur le processus ponctuel marqué d'entrée, sous $\mathbb{P}$, qui nous assure d'une hypothèse β ou β' (confère CCG) sous $\mathbb{Q}$. La plus simple et la plus utile est la suivante:

Hypothèse $\gamma(\mathbb{P})$: *Sous la probabilité $\mathbb{P}$, la famille de variables aléatoires $(B_n^k,\ n\in\mathbb{Z}, 1\le k\le p)$ est une famille de variables aléatoires indépendantes, indépendantes des $(T_n, n\in\mathbb{Z})$, les suites $(B_n^k, n\in\mathbb{Z})$, pour $1\le k\le p$, étant équidistribuées.*

Le lemme suivant est évident.

Lemme 33

L'hypothèse $\gamma(\mathbb{P})$ implique l'hypothèse $\gamma(\mathbb{Q})$ et $\gamma(\hat{\mathbb{Q}}_N)$. En particulier, sous $\mathbb{Q}$, l'hypothèse β' de CCG 6B est vérifiée.

Théorème 34

Avec les notations de CCG 6 si l'hypothèse $\gamma(\mathbb{P})$ est vérifiée, et si:

$$\forall i,\ 1\le i\le p,\ \mathbb{E}(B^i)\ \mathbb{E}(K_1) < q_i$$

le processus $(W^s(t), Q^{s,k}(t), s\in \prod_{i=1}^{i=p} S_i, k\in\mathbb{N}^p, t\ge 0)$ *est un PBACSF.*

En particulier, $(W^s(t+n), Q^{s,k}(t+n))$ *converge en loi quand* n *tend vers* ∞.

4 Convergence en loi des "temps d'attente" de systèmes périodiques de files d'attente.

Le résultat le plus remarquable de Harrisson et Lemoine est la convergence en loi des temps d'attente dans les files périodiques à un serveur, lorsque le processus ponctuel d'entrée est un processus de Poisson composé périodique. Cette démonstration utilise le théorème de renouvellement. L'extension faite du théorème de renouvellement dans CM1 nous permet de généraliser ce résultat et de l'appliquer à d'autres systèmes de files d'attente.

Soit $\hat{W}_n = W(T_n)$ et $\hat{Q}_n = Q(T_n)$ respectivement le vecteur de charge du système et le vecteur donnant le nombre de clients par service, avant l'arrivée du n-ième client, en régime stationnaire. On construit l'espace $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}}, \tilde{\theta})$ défini à la fin du paragraphe 2 ci-dessus. Sur $\tilde{\Omega}$ on définit

$$\tilde{W}_n(\omega, k) = \hat{W}_n(\theta_{T_k}(\omega)) = \hat{W}_{n+k}(\omega), \; 0 \le k < K_{S_1}(\omega)$$

$$\tilde{Q}_n(\omega, k) = \hat{Q}_{n+k}(\omega), \; 0 \le k < K_{S_1}(\omega)$$

et $\tilde{N}$ le processus ponctuel sur $\mathbb{Z}$, marqué à marques dans $F = \sum_{n \ge 1} (\prod_{i=1}^{i=p} S_i \times \mathbb{N}^p)^n$:

$$\tilde{N} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varepsilon_{\tilde{T}_n} \otimes \tilde{Y}_n$$

où:

$$\tilde{Y}_n = (\tilde{W}_i, \tilde{Q}_i, \; \tilde{T}_{n-1} \le i < \tilde{T}_n).$$

$$= (\hat{W}_i, \hat{Q}_i, \; \tilde{T}_{n-1} \le i < \tilde{T}_n)$$

puisque $\tilde{Y}_n$ est définie sur $\hat{\tilde{\Omega}} = \hat{\Omega}_S$. Mais alors il est clair sur la définition que $(\tilde{W}_0, \tilde{Q}_0)$ est continue par rapport à

$$\tilde{Y}_0 = (\hat{W}_i, \hat{Q}_i, 0 \leq i < K_{S_1})$$

et donc continue par rapport à $\tilde{N}$, lorsque l'espace des mesures ponctuelles marquées correspondant est muni de la convergence vague-étroite (confère CM1).

Comme en CM1, on a alors que la loi de $(\hat{W}_n, \hat{Q}_n)$ sous $\hat{\mathbb{P}}_S$ converge vers la loi de $(\tilde{W}_0, \tilde{Q}_0)$ sous $\tilde{\mathbb{P}}$, c'est-à-dire la loi de $(\hat{W}_0, \hat{Q}_0)$ sous $\hat{\mathbb{Q}}_N$:

$$\mathcal{L}(\hat{W}_n / \hat{\mathbb{P}}_S) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathcal{L}(\hat{W}_0 / \hat{\mathbb{Q}}_N) \text{ étroitement}$$

à condition bien sûr que le flot $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}}, \tilde{\theta})$ soit mélangeant, par exemple si N est un processus de renouvellement périodique et la loi de K_{S_1} est apériodique, et que $\tilde{N}$ soit du second ordre, ce qui est automatiquement vérifié puisque c'est un PPSM sur $\mathbb{Z}$.

Mais alors, si le processus est un PBACSF, on a, comme en CM1:

$$\mathcal{L}(\hat{W}_n^s, \hat{Q}_n^{s,k} / \hat{\mathbb{P}}_S) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathcal{L}(\hat{W}_0, \hat{Q}_0 / \hat{\mathbb{Q}}_N) \text{ étroitement}$$

pour tout s et pour tout k. Si de plus N est un processus de renouvellement, alors:

$$\mathcal{L}(\hat{W}_n^s, \hat{Q}_n^{s,k} / \mathbb{P}) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathcal{L}(\hat{W}_0, \hat{Q}_0 / \hat{\mathbb{Q}}_N) \text{ étroitement}$$

On a donc

Théorème 41

Sous les hypothèses suivantes:

-1-Le processus $(W_n^s, Q_n^{s,k})$ *est un PBACSF.*

-2-Le flot $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}}, \tilde{\theta})$ est mélangeant

alors pour tout (k,s),

$$\lim_n \mathcal{L}(W_n^s / \hat{\mathbb{P}}_S) = \mathcal{L}(W_0 / \hat{\mathbb{Q}}_N) \textit{ étroitement.}$$

Corollaire 42

Sous les hypothèses suivantes:

-1- N *est un processus de "renouvellement périodique".*

-2- L'hypothèse $\gamma(\mathbb{P})$ *est vérifiée.*

-3- K_{S_1} *est a-périodique.*

Alors:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}((W_n^s, Q_n^{s,k})/\mathbb{P}) = \mathcal{L}((W_0, Q_0)/\hat{\mathbb{Q}}_N) \text{ étroitement.}$$

BIBLIOGRAPHIE

Af: AFANAS'EVA L.G.: On periodic distribution of waiting time process. In "Stability Problems for Stochastic models. Lecture Notes in Maths 1115. Springer-Verlag (1987).

AT: ASMUSSEN S. et THORISSON H.: A Markov chain approach to periodic queues. J.Appl.Prob. 24,215-225 (1987).

CCG: F.CHARLOT, B.CHOUAF, A.GUELLIL: Sur les méthodes de processus ponctuels et de renouvellement dans les systèmes de files d'attente. I Sur la stabilité et la récurrence des chaines de Markov et des systèmes de files d'attente.

CMI: F.CHARLOT, D.MERAD: Sur les méthodes de processus ponctuels et de renouvellement dans les systèmes de files d'attente. II Convergence en loi dans les systèmes de file d'attente.

HL:HARRISON J.M. et LEMOINE A.J.: Limit theorems for periodic queues. J.Appl.Prob. 14, 566-576, (1977).

Le:LEMOINE A.J.: On queues with periodic imput. J.Appl.Prob. 18, 889-900, (1981).

Me:MERAD D.:Convergence en loi des processus ponctuels marqués. Application aux files d'attente stationnaires et aux files d'attente stationnairement périodiques.
Thèse de Magister de Probabilité. USTHB ALGER Mars 1988.

Na:NAKATSUKA T.: Periodic property of streecar congestion at the first station. Journal of operation research society of Japan, Vol.29, No 1, 1-19, (1986).

François CHARLOT
Laboratoire de Calcul des
Probabilités et Statistique
Université de Rouen
BP 118
76134 MONT-ST-AIGNAN Cédex
France

Djenat MERAD
Laboratoire de Calcul des
Probabilités
Institut de Mathématiques
USTHB
16112 BAB-EZZOUAR
Algérie