ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

C. ARENAS

Une famille bi-markovienne : arrêt optimal

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 93, série *Probabilités et applications*, n° 8 (1989), p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1989__93_8_1_0>

UNE FAMILLE BI-MARKOVIENNE : ARRET OPTIMAL

C. ARENAS

Summary. We study a particular bi-Markov family with values in $\mathbb{R}^d$, $d>0$, constructed with two Markovian processes with values in $\mathbb{R}^d$, which are the unique solutions of two given stochastic differential equations and we solve the optimal stopping problem associated with a family of processes which are functions of the previously constructed bi-Markov family.

Key words: bi-Markov family, optimal stopping problem.

1. Introduction

Le problème d'arrêt optimal pour des processus à deux indices a été récemment résolu; je renvoie à [D] pour le cas discret et [Ma], [Mi] pour le cas continu. Comme application de ces derniers résultats on montre, dans [Ma], l'existence d'un point d'arrêt optimal pour une famille de processus bi-markovienne vérifiant certaines propriétés et à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, $d>0$. La condition de prendre ses valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$

semble un peu artificielle.On s'intéresse d'abord aux processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Avec cette condition, on se demande, si étant donnéesdeux familles de processus de Markov, $X = \{X(\cdot;x),\ x \in \mathbb{R}^d\}$ et $Y = \{Y(\cdot;y),\ y \in \mathbb{R}^d\}$, définies comme les uniques solutions continues de deux équations différentielles stochastiques associées au mouvement Brownien d-dimensionel, et ayant comme condition initiale un point quelconque de $\mathbb{R}^d$, la famille $M = \{M(\cdot;x),\ x \in \mathbb{R}^d\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, définie par, $M_z(\cdot;x) = Y_t(\cdot;X_s(\cdot;x))$ pour $z = (s,t)$ dans $\mathbb{R}_+^2$, est bi-markovinne et vérifie les conditions nécéssaires pour pouvoir assurer l'existence d'un point d'arrêt optimal.

Dans la première partie, on montre qu'une telle famille est bi-markovienne si les demi-groupes associés aux processus X et Y commutent.

Dans la deuxième partie, en suivant [Ma] , on montre l'existence de solution au problème d'arrêt optimal associé à une famille de processus $U = \{U(\cdot;x),\ x \in \mathbb{R}^d\}$ construite à partir de la famille M de la façon suivante: si p est un nombre réel strictement positif, f une fonction positive, bornée et uniformément continue, alors on prend

$$U_z(\cdot,x) = e^{-p|z|}f(M_z(\cdot;x))$$

pour tout $z = (s,t)$ de $\mathbb{R}_+^2$, tout x de $\mathbb{R}^d$,avec $|z| = s + t$ et $U_\infty(\cdot,x) = 0$.

2. Notations. Construction de la famille bi-Markovienne M.

Soit $(E,\mathcal{E})$ un espace métrique séparable, complet et $\mathcal{E}$ sa tribu borélienne. On désigne par $b(\mathcal{E})$ l'ensemble des fonctions mesurables bornées f sur E, avec la norme

$\| f \| = \sup_{x\in E} |f(x)|$.

On prend $\mathbb{R}_+^2$ comme ensemble d'indices avec l'ordre partiel usuel, c'est à dire, pour $z = (s,t)$, $z' = (s',t')$ dans $\mathbb{R}_+^2$, $z \leq z'$ signifie que $s \leq s'$ et $t \leq t'$.

Soit (Ω,A,Q) un espace de probabilité et $F = \{F_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ une filtration complète, croissante, continue à droite avec la propriété d'indépendance conditionnelle classique (propriété F.4., [C-W]), c'est à dire, étant donné $z = (s,t)$ dans $\mathbb{R}_+^2$, les sous-tribus, $F_{s\infty} = \bigvee_r F_{(s,r)}$ et $F_{\infty t} = \bigvee_r F_{(r,t)}$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à F_z.

Suivant les notations de [B], étant donné un processus A on désigne par A° sa projection optionnelle.

Rappelons les définitions suivantes,

Définition II.1.

Un *semi-groupe* à deux indices est une famille $P = \{P_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$

d'opérateurs de $b(\mathcal{E})$ dans $b(\mathcal{E})$ positifs vérifiant,

(i) $P_{(0,0)} = Id$, et pour z,z' dans $\mathbb{R}_+^2$, $P_z \cdot P_{z'} = P_{z'} \cdot P_z = P_{z+z'}$.

(ii) Pour toute fonction f de $b(\mathcal{E})$ on a $\|P_z f\| \leq \|f\|$.

Définition II.2.

Étant donné un semi-groupe P et une famille de processus $X = \{X(\cdot;x),\ x \in E\}$ continus, on dit que (X,F,P) est une *famille bi-markovienne* si pour toute fonction f de $b(\mathcal{E})$ et pour tout z de $\mathbb{R}_+^2$, la projection optionnelle du processus $\{f(X_{z+z'}(\cdot;x))\ ,\ z' \in \mathbb{R}_+^2\}$ est indistinguable du processus $\{P_z f(X_{z'}(\cdot;x)),\ z' \in \mathbb{R}_+^2\}$ et si pour tout x de E on a, $X_{(0,0)}(\cdot;x) = x$, presque - sûrement.

Remarque. Dans le cadre des processus à deux indices plusieurs propriétés de Markov ont été proposées (cf. [NS]); on utilise la définition précédente car elle s'exprime en termes de semi-proupes.

Sur un espace de probabilité donné, un *point d'arrêt* est une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{R}_+^2$ telle que, pour tout z dans $\mathbb{R}_+^2$, l'ensemble $\{Z \leq z\}$ est dans F_z.
Soit X un processus positif vérifiant de bonnes propriétés. Le *problème d'arrêt optimal* associé à X consiste à établir l'existence d'un point d'arrêt Z*, dit optimal, qui

maximise le gain moyen sur l'ensemble des points d'arrêt, c'est à dire,

$$E[X_{Z^*}] = \sup \{E[X_Z],\ Z \text{ point d'arrêt}\} .$$

Dans la suite E sera l'ensemble $\mathbb{R}^d$, $d > 0$, avec la relation d'ordre partiel induite par les coordonnées cartésiennes et on considère les familles $X = \{X(\cdot;x), x \in \mathbb{R}^d\}$ et $Y = \{Y(\cdot;y),\ y \in \mathbb{R}^d\}$ de processus markoviens définis comme les uniques solutions continues des équations différentielles stochastiques de la forme,

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t \beta(\xi_s, s) d_s + \int_0^t \sigma(\xi_s, s)\ dW_s$$

avec ξ_0 de $\mathbb{R}^d$; $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1,..,d}$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_d)$ où σ_{ij} , β_j sont des fonctions mesurables de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ globalement Lipschitziens avec les conditions usuelles de restriction sur la croissance,(voir [A]), pour qu'il existe une unique solution continue et markovienne,et W est un mouvement Brownien de dimension d. Ces processus sont définis sur des espaces de probabilité (Ω^i, A^i, Q^i), $i = 1,2$, et sont associés à des filtrations $F^i = \{F^i_t,\ t > 0\}$, $i = 1,2$, complètes, continues à droite et croissantes. De plus, ils ont un semi-groupe $P^i = \{P^i_t,\ t > 0\}$ associé, $i = 1,2$. On considère l'espace de probabilité produit, et la filtration $F = \{F_z, z \in \mathbb{R}^2_+\}$avec $F_z = F^1_s \otimes F^2_t$ pour tout $z = (s,t)$; on sait (voir [Me-1]) que cette filtration est complète, croissante, continue à droite et vérifie la propriété F.4.

Sur cet espace de probabilité produit avec la filtration F, on définit une famille $M = \{M(\cdot;x),\ x \in \mathbb{R}^d\}$ de la façon suivante: pour $x \in \mathbb{R}^d$, $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2$ et $(\omega_1,\omega_2) \in \Omega^1 \times \Omega^2$,

$$M_{(s,t)}((\omega_1,\omega_2);x) = Y_t(\omega_2;X_1(\omega_1;x)).$$

Cette notion à été introduite par D.Michel [M].

Théorème II.1.

La famille M est bi-Markovienne si les demi-groupes P^1, P^2 commutent.

Démonstration

Si P^1, P^2 commutent, il est facile de voir que la famille $P = \{P_{(s,t)} = P_s^1 \cdot P_t^2,\ (s,t) \in \mathbb{R}_+^2\}$ est un semi-groupe. On va montrer maintenant que (M,F,P) est une famille bi-Markovienne. C'est à dire, il faut montrer que pour tout point d'arrêt (S,T) (on prendra $(S,T) \neq (\infty,\infty)$), tout x de $\mathbb{R}^d$ et tout z de $\mathbb{R}_+^2$, on a,

$$E\Big((P_z f) M_{(S,T)}(\cdot;x)\Big) = E\Big(f(M_{(S,T)+z}(\cdot;x)\Big) \quad , \quad (1).$$

Notons que,

(i) Si T est un F^2 - temps d'arrêt et ξ une variable sur Ω^2, qui prend seulement un nombre fini de valeurs et qui est F_T^2-measurable, alors pour toute fonction g measurable et bornée (continue et bornée), on a:

$$E\Big((P_t^2 g) Y_T(\cdot;\xi)\Big) = \Big(E(g(Y_{t+T}(\cdot;\xi)\Big) \ .$$

(ii) Si les semi-groupes P^1, P^2 commutent, pour tout x de $\mathbb{R}^d$, tout (s,t) de $\mathbb{R}_+^2$, la loi de $Y_t(\cdot;X_s(\cdot;x))$ coincide avec celle de $X_s(\cdot;Y_t(\cdot;x))$.

(iii) Par un raisonnement de classes monotones, il suffit de montrer (1) pour toute fonction f continue et bornée.

Soit donc f une fonction continue et bornée.

Le premier terme de (1) est le même que,

$$E\left[E\left(P_t^2(P_s^1 f)Y_{T(\omega_1;\cdot)}(\cdot;X_{S(\omega_1;\cdot)}(\omega_1;x)\ \middle|\ F_T^2\right)\right], \quad (2)$$

La variable $X_{S(\omega_1;\cdot)}(\omega_1;x)$ est F_T^2-measurable et on peut supposer qu'elle prend un nombre fini de valeurs (sinon on l'approche par des fonctions définies sur Ω^2, F_T^2-measurables ne prenant qu'un nombre fini de valeurs). De plus, $T(\omega_1,\cdot)$ est un F^2-temps d'arrêt et $Y(\cdot;y)$ a la propriété de Feller, et est continu par rapport à (t,y). Donc, en vertu de la propriété forte de Markov et de l'observation (i), on a que (2) est le même que,

$$E\left((P_s^1 f)Y_{T+t}(\cdot;X_S(\cdot;x))\right), \quad (3).$$

En suposant que S et T prennent un nombre fini de valeurs (sinon on les approche de façon convenable), en utilisant l'observation (ii) et par un raisonnement similaire au précédent, on achève la démonstration. #

3. Arrêt optimal.

À partir de la famille bi-Markovienne M et étant donnée une fonction positive, uniformément continue f de $b(\mathcal{E})$, et un nombre réel strictement positif p, on considère la famille de processus $U = \{U(\cdot;x), x \in \mathbb{R}^d\}$, avec

$$U_z(\cdot;x) = e^{-p|z|} f(M_z(\cdot;x)),$$

pour tout $z = (s,t)$ de $\mathbb{R}_+^2$, x de $\mathbb{R}^d$, avec $|z| = s + t$ et $U_\infty(\cdot;x) = 0$.

Pour chaque x de $\mathbb{R}^d$, le processus $U(\cdot;x)$ est adapté, positif, avec des trajectoires continues et la famille, $\{U_Z(\cdot;x),\ Z$ point d'arrêt$\}$ est uniformément intégrable. On désigne par $J(\cdot;x)$ son enveloppe de Snell. Nous cherchons à montrer l'existence d'un point d'arrêt optimal pour le processus $U(\cdot;x)$.

On sait ([Ma]), que pour chaque x de l'ensemble $\mathbb{R}^d$, il existe une fonction q de $b(\mathcal{E})$ qui majore f telle que pour tout point d'arrêt Z,

$$J_Z(\cdot;x) = e^{-p|Z|} q(M_Z(\cdot;x)).$$

De plus, la famille M satisfait la condition de regularité suivante,

Théorème III.1.

Pour tout nombre réel positif A, il existe une constante k > 0, telle que, pour tout point d'arrêt Z = (S,T) avec

$|Z| \leq A$, *et pour tout* x,y *de* $\mathbb{R}^d$ *on a,*

$$E[|M_Z(\cdot;x) - M_Z(\cdot;y)|] \leq e^{kA} |x-y|.$$

Démonstration

On procède comme dans [Ma] lemme 3.1..#

Finalment, on a,

Théorème III.2.

Pour tout x *de* $\mathbb{R}^d$ *, il existe solution au problème d'arrêt optimal par rapport à le processus* $U(\cdot;x)$.

Démonstration

Comme la fonction f est uniformément continue et bornée, et la famille M satisfait le théorème précédent, alors ([Ma] , proposition 3.1.1.)la fonction q est uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$. En outre, comme le processus $U(\cdot;x)$ et son enveloppe de Snell $J(\cdot;x)$ sont continus, et $J(\cdot;x)$ est un processus complètement régulier, existe une solution au problème d'arrêt optimal de $U(\cdot;x)$ sur $\mathbb{R}_+^2$ (voir [Ma], Theorem 1.2.), que l'on peut choisir parmi les éléments maximaux de l'ensemble des points d'arrêt Z tels que,

$$E(J_Z(\cdot;x)) = E(J_{(0,0)}(\cdot;x)). \#$$

RÉFÉRENCES

[A] Arnold, L.: Stochastic Differential Equations. Theory and Applications. Wiley and Sons (1937).

[B] Bakry, D.: Théorèmes de section et de projection pour les processus à deux indices. Z. Wahrs. verw. Gebiete 55, 55-71 (1981).

[C] Cairoli, R.: Enveloppe de Snell d'un processus à paramètre bidimensionnel. Ann. Inst. H. Poincaré. 18-1, 47-54 (1982).

[C-W] Cairoli, R., Walsh, J.: Stochastic Integrals in the plane. Acta Mathematica 134, 111-183 (1975).

[D] Dalang, R.C.: On infinite graphs and randomized stopping points on the plane. Preprint.

[E] El Karoui, N.: Les aspects probabilistes du contrôle stochastique. Ecole d'Été de St. Flour 1979. Lect. Notes in Math. 876, 74-239, Springer-Verlag Berlin (1981).

[F] Friedman, A.: Stochastic Differential Equations and Applications. Volume 1. Academic Press (1975).

[M] Michel,D.:Produit de deux diffussions.C.R.Acad.Sc. Paris Série A,289,143-146 (1979).

[Ma] Mazziotto, G.: Two Parameter Optimal Stopping and bi-Markov Processes. Z. Wahrs. verw. Gebiete 69, 99-135 (1985).

[Mi] Millet A.: On randomized tactics and optimal stopping in the plane. Ann. Prob. 13,946-965 (1985).

[Me-1] Meyer, P.A.: Processus Aléatoires à deux indices. Lect. Notes in Math. 863, Springer-Verlag, Berlin (1981).

[Me-2] Meyer, P.A.: Processus de Markov. Lect. Notes in Math, 26, Springer-Verlag, Berlin (1967).

[N-S] Nualart, D., Sanz, M.: A Markov property for two parameter gaussian processes. Stochastica 3-1, 1-16, Barcelone (1979).

C. ARENAS

Dept. d'Estadistica
Facultat de Biologia
Universitat de Barcelona
Diagonal, 645

08028 BARCELONA
Espagne