Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2
Série Probabilités et applications

M. Bouaziz

Cumulants de vecteurs aléatoires

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 92, série *Probabilités et applications*, n° 7 (1988), p. 23-29
<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1988__92_7_23_0>

CUMULANTS DE VECTEURS ALEATOIRES

M. BOUAZIZ

MOTIVATION : Il s'agit de mesurer la dépendance entre les composantes d'un vecteur aléatoire, et plus généralement entre les composantes de vecteurs marginaux de dimension finie d'un processus aléatoire, en termes de moments.

L'idée essentielle est de généraliser la covariance qui correspond au cas de dimension 2 en observant que c'est une fonction polynomiale des moments d'ordre ≤ 2 d'un couple : c'est la voie de la généralisation.

La théorie des cumulants (§ I) est très peu développée dans la littérature probabiliste en raison, semble-t-il, des formules d'inversion (§ I et II) qui établissent l'équivalence entre moments et cumulants. La statistique des processus aléatoires est à l'origine du développement de cette théorie notamment sous l'impulsion de V.P. LEONOV et A.N. SHIRYAYEV qui ont établi le résultat fondamental de la théorie : théorème produit (§ III).

Les applications vont dans deux directions principales : statistique des séries chronologiques sous l'influence de D.R. BRILLINGER et M. ROSENBLATT ; théorème central limite pour des fonctions non linéaires de processus stationnaires gaussiens (polynômes d'Hermite) ou plus généraux (polynômes d'Appell) à partir d'idées de L. GIRAITIS et D. SURGAILIS.

L'objet de cet exposé est de présenter les propriétés essentielles des cumulants avec quelques remarques sur des exemples liés aux applications.

I - Cumulant du premier ordre d'un vecteur aléatoire réel

Les données :

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathbb{R}^d, \mathscr{B}^d, P) \xrightarrow{X_j} \mathbb{R} \ : X_j = pr_j, \ 1 \leq j \leq d \ ; \ X = (X_1, \ldots, X_d) \\ \mathbb{R}^d \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C} \ : \ \varphi(t) = E\, e^{it.X} \end{array}\right.$$

. $X \in L_p(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}^d, P)$ si : $\forall\, t \in \mathbb{R}^d,\ t.X \in L_p(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}^d, P)$.

1) Théorème et définition

Si $X \in L_d$ alors :

$$\left(\frac{1}{i}\right)^d \frac{\partial^d}{\partial t_d \cdots \partial t_1} \operatorname{Log} \varphi(t)\Big|_0 = \sum_{p=1}^{d} (-1)^{p-1}.(p-1)! \sum_{(A_1^p, \ldots, A_p^p)} \prod_{j=1}^{p} E\, X^{A_j^p}$$

où : (A_j^p) est une partition de $\{1,\ldots, d\}$ en p classes

$$X^A = \prod_{k\in A} X_k \quad , \quad A\subset\{1,\ldots, d\} \quad .$$

Le nombre réel ainsi défini est appelé le cumulant ou le semi-invariant du premier ordre de X (ou P) et noté C(X).

Preuve du Théorème 1 :

C'est une conséquence des propriétés différentielles des fonctions caractéristiques (Leonov et Shiryayev, [4]) :

Lemme 1 : Soit n un entier > 0. Si $X\in L_n$ alors :

i) φ est $\mathscr{C}^n$ et

$$\varphi^{(r)}(t).\ (h^1,\ldots, h^r) = E\{e^{it.X}\ \Pi_{j=1}^r (i\ h^j.X)\}, 0 \leqq r \leqq n,\ h^j \in \mathbb{R}^d$$

$$\frac{\partial^{|\nu|}}{\partial t^\nu}\ \varphi(0) \qquad = (\tfrac{1}{i})^{|\nu|}\ E\ X^\nu$$

où : $\nu = (\nu_1,\ldots, \nu_d)\in\mathbb{N}^d$, $|\nu| = \Sigma\ \nu_j$, $X^\nu = \Pi(X_j^{\nu_j})$

ii) $$\varphi(t) = \sum_{|\nu|\leqq n} \frac{t^\nu}{\nu!}\ .\ \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial t^\nu}\ \varphi(0) + o(||t||^n), \quad \text{où } \nu! = \prod_1^d (\nu_j!)$$

Δ La partie principale de ii) résulte de l'identité

$$\varphi^{(r)}(t).(h)^r = (\ \Sigma_1^d\ h_j\ \frac{\partial}{\partial t_j})^r\quad \varphi(t),\quad h = (h_1,\ldots, h_d)\in\mathbb{R}^d$$

et de la formule multinomiale Δ .

Lemme 2 : Sous les conditions du lemme 1, on a :

i) $\exists\ \rho > 0$ tel que $\psi : = \mathrm{Log}\ \varphi$ est $\mathscr{C}^n$ sur $||t|| < \rho$.

ii) La formule ii) du lemme 1 est valable pour Ψ .

Lemme 3 : Sous les conditions du lemme 1, on a :

i) $$\frac{\partial^{|\nu|}}{\partial t^{\nu}} \psi(0) = \sum_{p>0} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \sum_{\substack{\nu^1+\ldots+\nu^p=\nu \\ |\nu^j|>0}} \frac{\nu\,!}{\nu^1!\ldots\nu^t!} \Pi_{j=1}^{p} \frac{\partial^{|\nu^j|}}{\partial t^{\nu^j}} \varphi(0)$$

ii) $$\frac{\partial t^{|\nu|}}{\partial t^{\nu}} \varphi(0) = \sum_{p \geqq 0} \frac{1}{p!} \sum_{\substack{\nu^1+\ldots+\nu^p=\nu \\ |\nu^j|>0}} \frac{\nu!}{\nu^1!\ldots\nu^p!} \Pi_{j=1}^{p} \frac{\partial^{|\nu^j|}}{\partial t^{\nu^j}} \psi(0)$$

Δ Les formules du Lemme 3 résultant des formule ii) des lemme 1, 2 et des développements de Log $(1+Z)$ et e^Z respectivement Δ .

Notons maintenant :

$$C(X_1,\ldots, X_d) := (\tfrac{1}{i})^d \frac{\partial^d}{\partial t_d\ldots\,\partial t_1} \operatorname{Log} \varphi(t)|_0 \ .$$

<u>Lemme 4</u> : Si $X \in L_d$ alors :

i) $$C(X_1,\ldots, X_d) = \sum_{p=1}^{d} (-1)^{p-1}.(p-1)! \sum_{(A_1^p,\ldots,A_p^p)} \Pi_{j=1}^{p} E\, X^{A_j^p}$$

ii) $$E(X_1,\ldots,X_d) = \sum_{p=1}^{d} \sum_{(A_1^p,\ldots,A_p^p)} \Pi_{j=1}^{p} C(X_k,\ k \in A_j^p).$$

Δ La formule i) résulte de la formule i) du Lemme 3 avec $\nu = (1,\ldots, 1) \in \mathbb{R}^d$ en utilisant la formule des moments du lemme 1 et en remarquant que :

- ν est décomposable en $\nu^1 +\ldots + \nu^p = \nu$, $|\nu^j| > 0$ si, et seulement si, $1 \leqq p \leqq d$.
- Chaque décomposition de ν induit une partition de $\{1,\ldots, d\}$ en classes $A_j^p = \{k : 1 \leqq k \leqq d,\ \nu_k^j = 1\}$.
- Chaque partition de ν en p classes induit p ! décompositions de ν comme ci-dessus.

  La même méthode démontre la formule ii). Δ

<u>Remarque</u> : Le théorème 1 caractérise donc $C(X_1,\ldots, X_d)$ comme le coefficient de $i^d\, t_1\ldots t_d$ dans le développement de Log φ au voisinage de 0.

2) Exemples : On vérifie à l'aide du théorème 1 que :

i) Si d=1 alors $C(X_1) = E(X_1)$

ii) Si d=2 alors $C(X_1,X_2) = Cov(X_1,X_2)$

iii) Si $d \geqq 2$ et $X_1,\dots,X_d$ indépendantes alors $C(X_1,\dots,X_d) = 0$

iv) Si $d \geqq 1$ et X gaussien $(\mu;\Gamma)$ alors :

$$C(X_1,\dots,X_d) = \begin{cases} \mu & : d=1 \\ \Gamma_{12} & : d=2 \\ 0 & : d>2 \end{cases}$$

II - Propriétés du cumulant du premier ordre

Les propriétés 1) à 4) suivantes sont des conséquences directes du théorème 1 ; la propriété 5) d'inversion résulte du lemme 4.

1) Semi-invariance (invariance par translation pour d>1) :

$$C(a_1X_1+ b_1,\dots, a_dX_d+b_d) = a_1\dots a_d \; C(X_1,\dots,X_d)$$

2) Indépendance et additivité : si $(X_1,\dots, X_d)$ et $(Y_1,\dots, Y_d)$ sont indépendants alors :

$$C(X_1+ Y_1,\dots, X_d + Y_d) = C(X_1,\dots, X_d) + C(Y_1,\dots, Y_d)$$

3) Symétrie et multilinéarité : L'application de $L_d \to \mathbb{R}$ $X \to C(X)$ est multilinéaire symétrique.

4) Indépendance par blocs et nullité : Si $A \subsetneqq \{1,\dots, d\}$ et $A \neq \emptyset$ $(X_j, j\in A)$, $(X_j,\ j \in A^c)$ sont indépendants alors $C(X_1,\dots, X_d) = 0$.

5) Formules d'inversion moments-cumulants : formules du Lemme 4.

III - Théorème "produit" (Leonov et Shiryayev)

1) Le problème : Soit

$T = \{(j,k) : 1 \leqq j \leqq m,\ 1 \leqq k \leqq n_j\}$ un tableau "triangulaire"

X un champ aléatoire indexé par T.

$X_j = \prod_{k=1}^{nj} X_{j,k}$; $d_m = \Sigma n_j$.

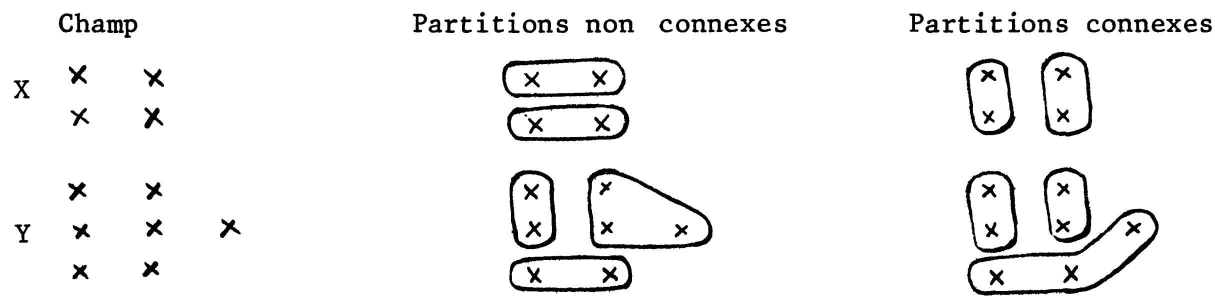
On veut calculer le cumulant du vecteur produit $(X_1,\ldots, X_m)$ en fonction des cumulants du champ.

<u>Exemple 2.1</u> : $(X_t,\ t \in \mathbb{Z})$ un processus réel, L_4 - stationnaire et centré. Calculer la covariance du processus $Y_t(k) = X_t\ X_{t+k},\ t \in \mathbb{Z}$ pour k fixé.

2) <u>Partitions connexes d'un champ triangulaire</u>

<u>Définition</u> : Une partition $\mathcal{P}$ de T est (horizontalement) non connexes (ou décomposable) s'il existe une partition non triviale du champ T en bandes horizontales partitionnées par des classes dans $\mathcal{P}$.

<u>Exemple 2.2</u> :



3) <u>Théorème 2</u> : Si $X \in L_{d_m}$ alors

$$C(X_{1.},\ldots,X_{m.}) = \sum_{\{\Gamma_t^p\}} \Pi_{j=1}^{p}\ C(X_{j,k}\ ;\ (j,k) \in \Gamma_t^p)$$

où $\{\Gamma_t^p\ ;\ 1 \leqq t \leqq p\}$, $p \geqq 1$, décrit l'ensemble des partitions <u>connexes</u> de T.

Δ Les formules d'inversion moments-cumulants montrent que :

i) En considérant le vecteur "produit" $(X_{j.})$ et des partitions $(A_1^p,\ldots, A_p^p)$ de $\{1,\ldots, m\}$:

$$C(X_{1.},\ldots X_{m.}) = E(X_{1.}\ldots X_{m.}) - \sum_{p>1} \sum_{\{A_s^p\}} \Pi_{s=1}^{p}\ C(X_{j.}\ ;\ j \in A_s^p)$$

ii) En considérant des partitions $(B_1^q,\ldots, B_q^q)$ du champ T :

$$E(X_{1.}\ldots X_{m.}) = \sum_{q \geqq 1} \sum_{\{B_t^q\}} \Pi_{t=1}^{q}\ C(X_{j,k}\ ;\ (j,k) \in B_t^q)$$

On conclut par récurrence sur le nombre m de lignes du champ T en calculant la contribution à ii) des partitions non connexes $\{B_t^q\}$ (récurrence fondée pour m=1 par la formule d'inversion cumulants moment). La contribution indiquée se calcule par l'argument essentiel suivant :

Considérons la relation suivante entre partitions non connexes de T : $\{B_t^q\} \sim \{B_{t'}^{q'}\}$ si elles partitionnent de façon connexe les classes d'une même partition de T en bandes horizontales. C'est une relation d'équivalence dont les classes sont en bijection avec les partitions de $\{1, \ldots, m\}$ de cardinal > 1.

Chaque classe d'équivalence est donc définie par :

- un entier p, $1 < p \leq m$
- une partition de $\{1, \ldots, m\}$ en p classes $\{A_s^p\}$
- l'ensemble des partitions connexes des bandes horizontales définies par la partition $\{A_s^p\}$.

Donc par récurrence sur m, la contribution des partitions non connexes $\{B_t^q\}$ de T est égale au deuxième terme du second membre de l'identité i). Δ

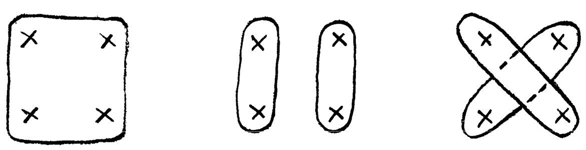
Exemple 2.3 : Reprenons le problème posé dans l'exemple 2.1.

$$\mathrm{Cov}\,(X_o X_k,\ X_t\, X_{t+k}) = C(X_o X_k,\ X_t X_{t+k})\ .$$

Notons $\gamma(t) = EX_o X_t$. Le processus X_t étant centré, les seules partitions connexes du tableau

$$\begin{matrix} X_o & X_k \\ X_t & X_{t+k} \end{matrix}$$

qui contribuent à $C(X_o X_k,\ X_t X_{t+k})$ sont :



qui donnent respectivement :

$$\begin{aligned} C(X_o X_k,\ X_t X_{t+k}) &= C(X_o, X_k, X_t, X_{t+k}) + C(X_o, X_t)\, C(X_k, X_{t+k}) \\ &\quad + C(X_o, X_{t+k})\ C(X_k, X_t) \\ &= C(X_o, X_k, X_t, X_{t+k}) + \gamma(t)\ \gamma(k) + \gamma(t-k)\ \gamma(t+k) \end{aligned}$$

(Le premier terme étant nul dans le cas gaussien).

III - BIBLIOGRAPHIE

[1] BRILLINGER, D.R. Time series. Data analysis & theory. Holt, Rinehart & Winston : New-York, 1975.

[2] BOURBAKI, N. Eléments de mathématique . Livre IV. Chapitre 6. Fonctions d'une variable réelle. Herman, Paris 1958. (Polynômes d'hermite, polynômes d'Appell).

[3A] GIRAITIS, L. & SURGAILIS, D. Multivariate Appell polynomials & the central limit theorem in : dependance in probability and statistics editors : E. EBERLEIN & M.S. TAQU. Birkhaüser, 1986.

[3B] GIRAITIS, L. & SURGAILIS, D. CLT & other limit theorems for functionals of gaussian processes. Z.W. 70, (1985),191-212.

[4] LEONOV, V.P. & SHIRYAYEV, A.N. On a method of calculation of semi-invariants. Theor. Prob. Appl. 4, (1959), 319-329.

[5] ROSENBLATT,M. Asymptotic normality, strong mixing & spectral density estimates. Ann. Prob. 1984, Vol. 12, N°4, 1167-1180.

Malek BOUAZIZ

Université BLAISE PASCAL

Département de Mathématiques Appliquées

B.P. 45

F63170 AUBIERE (FRANCE)