ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

P. A. ZANZOTTO

Application du théorème de Scorza Dragoni aux équations différentielles stochastiques

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 90, série *Probabilités et applications*, n° 6 (1987), p. 59-83

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1987__90_6_59_0>

APPLICATION DU THEOREME DE SCORZA DRAGONI AUX EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

P.A. ZANZOTTO (*)

Abstract

On some filtered probability space $(\Omega, F, (F_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$ let Z be a finite-dimensional semimartingale, which admits a π^*-dominating process Q (see [MeP]) of the form expressed in (1.2) and let μ be a "white" random measure (see [Me 2]) whose dual predictable projection satisfies hypothesis (1.4). Let $q=\mu-\nu$. We consider the following stochastic differential equation

$$dX_t=a(\omega,X_.(\omega),t)dZ_t+b(\omega,X_.(\omega),t,x)q(dt,dx) \ :$$

the coefficients a,b are assumed to satisfy some boundedness assumptions and may depend on the whole path of X, in a predictable way. When $a(\omega,\cdot,t)$ and $b(\omega,\cdot,t,x)$ are continuous on the Skorokhod space $\mathbb{D}:=\mathbb{D}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^d)$ endowed with the uniform topology, we show that existence of weak solutions for this equation can be proved in a "direct" way, by means of a technique similar to those used in [Pe] and [Z].

(*) Membre du groupe de recherche G.N.A.F.A. - C.N.R. (Italie).

INTRODUCTION. Sur une base stochastique fixée $(\Omega, F, (F_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$ on se donne une semimartingale m-dimensionnelle quelconque Z et une mesure aléatoire (cf. [Me 2] on [Me 1], Chap. 7): cette expression désigne une famille $\mu: = \{\mu(\omega,ds,dx), \omega\in\Omega\}$ de mesures de Borel sur le produit $\mathbb{R}_+ \times E$ (E étant un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^m$), telle que, pour tout couple $(\omega,t)\in\Omega \times \mathbb{R}_+$, $\mu(\omega,]0,t],\cdot)$ soit un élément d'un certain espace M^p de mesures de Borel sur E (cf. le § 1 de cet article). Si $\nu(\omega,ds,dx)$ désigne la mesure aléatoire projection duale prévisible de μ, on pose $q:=\mu-\nu$ et cette mesure aléatoire est supposée "blanche" (c'est-à-dire elle est une martingale faible par rapport à la dualité naturelle liée à la structure de l'espace M^p). En plus μ n'a que des sauts totalement inacessibles.

Dans l'article [Z] on a récemment étudié le problème de l'existence de solutions faibles pour l'équation différentielle stochastique symbolisée par la formule

(1) $dX_t=a(\omega,X,t)dZ_t + b(\omega,X,t,x)q(\omega,dt,dx)$,

dans laquelle Z,q sont respectivement la semimartingale et la mesure aléatoire introduites ci-dessus et les coefficients $a=(a^{jk}(\omega,f,t))_{j\leq d,k\leq m}$, $b=(b^j(\omega,f,t,x))_{j\leq d}$ sont des fonctions définies respectivement sur $\Omega\times\mathbb{D}\times\mathbb{R}_+$ et sur $\Omega\times\mathbb{D}\times\mathbb{R}_+\times E$, $\mathbb{D}:=\mathbb{D}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^d)$ désignant l'espace de Skorokhod des trajectoires cadlag sur

$\mathbb{R}_+ := [0,+\infty[$ (et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$) ; en outre, a et b dépendent, de façon prévisible, de toute la trajectoire de la solution X.

Dans le cas où les coefficients a et b satisfont à des conditions de bornitude convenables et, pour tout couple (ω,x) de $\Omega x E$, les fonctions $a(\omega,\cdot,\cdot)$, $b(\omega,\cdot,\cdot,x)$ sont continues sur l'espace $\mathbb{D} x \mathbb{R}_+$ muni du produit de la topologie uniforme (sur $\mathbb{D}$) et de la topologie usuelle (sur $\mathbb{R}_+$), on a demontré ([Z]) que l'équation (1) admet des solutions faibles. La méthode de démonstration utilisée, qui s'inspire d'un article de Pellaumail ([Pe]), est "directe": elle permet de prouver rapidement le résultat et semble être beaucoup moins pénible que les techniques, assez compliquées, employées par des auteurs (cf. [H], [Le]) qui ont etudié des équations semblables. Toutefois elle exige la continuité en t des coefficients, une hypothèse qui n'est pas faite dans les travaux cités.

On se propose ici de montrer que, dans un certain nombre de cas (qui incluent les situations classiques: cf. REMARQUE (5.1)), même si les coefficients de l'équation ne sont pas continus dans la variable t, la méthode "directe" de démonstration, se prête également à prouver l'existence de solutions faibles.

Cette méthode est fondée sur le lemme (3.5) que l'on démontre en employant une forme "abstraite" (cfr. [Lt]) du théorème classique de Scorza Dragoni ([Sc]).

1. Les notations et la terminologie sont essentiellement celles de l'article [Z], auquel le lecteur est renvoyé.

Pour les notions de théorie générale des processus qui ne sont pas explicitement rappelées ici, on renvoye à [DeM 1], [DeM 2] ou à [Me 1].

On décrit ici les données principales du problème.

On considère: une base stochastique probabilisée $\mathbb{B}^I := (\Omega, F, (F_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$ avec $\mathbb{R}_+ := [0,+\infty[$; on suppose que $(\Omega, F, \mathbb{P})$ est complet et que la filtration $(F_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ satisfait aux conditions habituelles de Dellacherie; on appellera $\mathbb{B}^I$ la "base initiale";

- une semimartingale (cadlag) Z, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, adaptée à la base initiale $\mathbb{B}^I$ et telle que $Z_0=0$ $\mathbb{P}$-p.s.; d'après la charactérisation des semimartingales qu'on trouve dans [MeP], il existe donc un processus Q croissant, positif, cadlag, adapté à la base initiale $\mathbb{B}^I$ et qui possède la propriété suivante:

(1.1) Pour tout temps d'arrêt u et tout processus $\mathbb{B}^I$-prévisible localement borné Y, à valeurs dans $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^m$, on a:

$$\mathbb{E}[\sup_{t<u} \|\int_{]0,t]} Y_s dZ_s\|^2] \leq \mathbb{E}[Q_{u-} \int_{]0,u[} \|Y_s\|^2 dQ_s]$$

($\|\cdot\|$ désignant la norme euclidienne).

Pour exprimer cette propriété on dit, selon la terminologie de [MeP], que Z est π^*-dominée par Q.

Ici nous faisons en plus l'hypothèse suivante:

(1.2) Il existe un processus mesurable, positif, adapté $\ell(t,\omega)$, tel que, pour $\mathbb{P}$-presque tout ω et tout t, on ait

$$dQ_t(\omega) = \ell_t(\omega)dt,$$

l'application $t \mapsto \ell_t(\omega)$ étant (pour $\mathbb{P}$-presque tout ω) localement bornée.

En outre, on se donne un sous-espace ouvert E de $\mathbb{R}^m$ et une fonction p continue, bornée et partout strictement positive dans E.

On a donc la propriété suivante:

(1.3) Il existe une suite croissante de compacts $(U_n)_n$ de E telle qu'on ait $E = \bigcup_n U_n$ et, pour tout n

$$\sup_{x\in U_n} \frac{1}{p(x)} = \gamma_n < +\infty \quad .$$

On désigne par M^p l'espace des mesures réelles m sur $(E,\mathcal{B}(E))$ ($\mathcal{B}(E)$ tribu de Borel de E), telles que l'on ait

$$\|m\|_p := \int p(x)\,|m|\,(dx) < +\infty.$$

On considère M^p (muni de la norme $\|m\|_p$) comme un sous-espace du dual de l'espace C^p des fonctions réelles Φ, continues dans E et telles que Φ/p soit bornée, muni de la norme

$$\|\Phi\|_p := \sup_{x\in E} (|\Phi(x)|/p(x)).$$

On se donne en outre une <u>mesure aléatoire positive μ</u>, c'est-à-dire une famille $\{\mu(\omega,ds,dx) : \omega\in\Omega\}$ de mesures de Borel positives sur l'espace $(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{E}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{B}(E))$, telle que, pour tout sous-ensemble relativement compact $A \times B$ de $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{B}(E)$, la fonction $\omega \longmapsto \mu(\omega, A\times B)$ soit une variable aléatoire réelle.

On suppose que la mesure aléatoire μ est <u>d'ordre p</u>, c'est-à-dire que, pour tout $\omega\in\Omega$, l'application $A \longmapsto \mu(\omega,A,\cdot)$ de $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ dans l'ensemble des mesures sur E, prend ses valeurs dans M^p et est à variation localement intégrable pour la norme $\|\cdot\|_p$: ceci équivaut à dire que le processus réel $\left(\int_{]0,t]\times E} p(x)\mu(\omega,ds,dx)\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est localement intégrable.

La mesure aléatoire μ est supposée <u>optionnelle</u> par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$, et on désigne par ν la m.a. <u>projection duale prévisible de μ</u>.

On pose:

$$q = \mu - \nu ;$$

cette m.a. q est supposée <u>blanche</u> (i.e., pour toute fonction $\phi\in C^p$, le processus réel

$(\int_{]0,t]\times E} \phi(x)q(\omega,ds,dx))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une (F_t)-martingale). (Pour toutes les notions sur les mesures aléatoires en tant que processus à valeurs dans M^p et la construction de l'intégrale stochastique par rapport à un tel processus, le lecteur est renvoyé à [Me 1] Chap. 7, ou à [Me 2]).

On introduit encore les notations suivantes:

- R désigne la tribu des ensembles "progressifs" par rapport à la base $\mathbb{B}^I$;
- $\mathbb{D}^d$ est l'espace des fonctions cadlag définies sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$;
- τ_s désigne la topologie de Skorokhod sur $\mathbb{D}^d$ comme définie dans [Bi];
- τ_u désigne la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, définie par la distance $\delta_u(f,f') :=$ $= \sum_{n\geq 1} 2^{-n} [1 \wedge \sup_{t\leq n} |f(t)-f'(t)|]$;
- σ_u, la topologie de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$, définie par la distance $\delta(f,f') := \sup_t |(f(t)-f'(t)|$;
- D désigne la tribu borélienne et $(D_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ la filtration canonique de $\mathbb{D}^d$;
- $\mathbb{B} := (\Omega \times \mathbb{D}^d, F\otimes D, (F_t\otimes D_t)_{t\in\mathbb{R}_+})$: $\mathbb{B}$ sera appelée la <u>base canonique</u>; la tribu des prévisibles par rapport à cette base sera désignée par $\overline{P}$.

On fait l'hypothèse suivante:

(1.4) Il existe une mesure positive α sur $(E,\mathcal{B}(E))$ et une fonction positive $h(\omega,t,x)$ $\mathcal{R}\otimes\mathcal{B}(E)$-mesurable, telles que, pour $\mathbb{P}$-presque tout ω et tout couple $(t,x)\in\mathbb{R}_+\times E$, on ait:

$$\nu(\omega,dt,dx)=h(\omega,t,x)dt\,\alpha(dx),$$

la fonction $t \longmapsto h(\omega,t,x)$ étant, pour $\mathbb{P}$-presque tout ω et tout x, localement bornée. (Remarquons que, dans ce cas, la mesure aléatoire μ est, en particulier, quasi continue à gauche).

2. On considère l'équation différentielle stochastique symbolisée par la formule suivante:

(2.1) $dX_t = a(\omega,X,t)d\,Z_t + b(\omega,X,t,x)\;q(\omega,dt,dx),$

dans laquelle Z et q sont la semimartingale et la mesure aléatoire blanche introduites au §1.

On va donc définir les coefficients a et b.

(2.2) $a=(a^{j,k}(\omega,f,t))_{j\leq d,k\leq m}$ est un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^m$, prévisible sur la base canonique $\mathbb{B}$; $b=(b^j(\omega,f,t,x))_{j\leq d}$ est une fonctionnelle définie sur $\Omega\times\mathbb{D}^d\times\mathbb{R}_+\times E$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\bar{\mathcal{P}}\otimes\mathcal{B}(E)$-mesurable.

Une conséquence de (2.2) est la suivante (cf. [MeP] §6.4):

(2.3) pour tout temps d'arrêt σ sur $\mathbb{B}^I$, si f et f_1 sont deux éléments de $\mathbb{D}^d$ tels que $f=f_1$ sur $[0,\sigma[$,on a $a(\omega,f,\sigma)=a(\omega,f_1,\sigma)$ et, pour tout $x\in E$, $b(\omega,f,\sigma,x)=b(\omega,f_1,\sigma,x)$ (c'est à dire que a et b ne dépendent que du passé strict en tant que fonctions de f).

Les hypothèses sur les coefficients a et b sont les suivantes:

(2.4) Il existe une constante positive γ qui majore uniformément la norme de a; pour tout compact $U\subset E$, la fonction $(\omega,f,t,x) \longmapsto b(\omega,f,t,x)\cdot 1_U(x)$ est uniformément bornée en norme.

(2.5) Pour tout triplet $(\omega,t,x)\in\Omega\times\mathbb{R}_+\times E$ (resp. pour tout couple $(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+$) l'application $f \longmapsto b(\omega,f,t,x)$ (resp. $f \longmapsto a(\omega,f,t)$) est σ_u-continue sur l'espace $\mathbb{D}^d$.

(2.6) Il existe une fonction $c(\omega,x)$ à valeurs réelles, $F_0 \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable, telle que, à la $\mathbb{P}$-indistinguabilité près, le processus croissant $\left(\int_{]0,t]\times E} |c(\omega,x)|^2\nu(\omega,ds,dx)\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$ soit fini et que l'on ait, pour tout couple $(f,t)\in\mathbb{D}^d\times\mathbb{R}_+$

$$\|b(\omega,f,t,x)\| \leq |c(\omega,x)|.$$

(2.7) <u>REMARQUE</u>. En ce qui concerne la condition (2.5), remarquons que, d'après (2.3), pour tout triplet $(\omega,t,x)\in\Omega\times\mathbb{R}_+\times E$, la σ_u-continuité sur l'espace $\mathbb{D}^d$ des applications $f \longmapsto b(\omega,f,t,x)$, $f \longmapsto a(\omega,f,t)$ équivaut à la τ_u-continuité sur le même espace.

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant:

(2.8) <u>THEOREME</u>. <u>On suppose que le processus croissant Q (π^*-dominant selon (1.1) la semimartingale Z) et la mesure aléatoire ν (projection duale prévisible de μ) vérifient les hypothèses (1.2) et (1.4).</u>

<u>Alors, sous les conditions (2.4), (2.5) et (2.6), l'équation (2.1) possède une solution faible (au sens précisé dans la définition (3.5) de [Z])</u>.

3. Dans l'article cité [Z], à partir des coefficients a,b de l'équation (2.1), on construit deux suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ de coefficients qui approchent a,b de façon convenable: précisément $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ possèdent la propriété exprimée par le LEMME (4.8) de [Z], sur laquelle est fondé le passage à la limite qu'on réalise dans le

§6 du même article.

Ici on modifiera la définition des suites $(a_n)_n, (b_n)_n$ de manière à garder une propriété d'approximation légèrement plus faible que celle exprimée par le lemme qu'on vient de citer, mais permettant encore de passer à la limite, exactement comme dans l'autre article.

Pour tout entier n, appelons donc Π_n la famille constituée par les nombres réels $t_i := \frac{i}{n}$, où i varie dans $\mathbb{N}$.

Pour tout n, tout entier $i \geq 1$ et tout triplet $(\omega, f, x) \in \Omega \times \mathbb{D}^d \times E$ on pose

$$(3.1)\quad \begin{aligned} a_n^i(\omega,f) &:= n \int_{t_{i-1}}^{t_i} a(\omega,f,s)ds \\ b_n^i(\omega,f,x) &:= n \int_{t_{i-1}}^{t_i} b(\omega,f,s,x)1_{U_n}(x)ds \end{aligned}$$

On définit donc les deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ de la manière suivante: pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout élément (ω,f,t) (resp. (ω,f,t,x)) de $\Omega \times \mathbb{D}^d \times \mathbb{R}_+$ (resp. $\Omega \times \mathbb{D}^d \times \mathbb{R}_+ \times E$) on pose:

$$(3.2)\quad \begin{aligned} a_n(\omega,f,t) &:= a(\omega,f,0)1_{[0,t_1]}(t) + \sum_{i \geq 1} a_n^i(\omega,f)1_{]t_i,t_{i+1}]}(t), \\ b_n(\omega,f,t,x) &:= b(\omega,f,0,x)\, 1_{U_n}(x)\, 1_{[0,t_1]}(t) \ + \\ &+ \sum_{i \geq 1} b_n^i(\omega,f,x)1_{]t_i,t_{i+1}]}(t). \end{aligned}$$

Les suites (a_n) et (b_n) sont respectivement constituées par des processus prévisibles sur la base canonique $\mathbb{B}$ et par des fonctionnelles $\overline{\mathcal{P}} \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurables.

Comme conséquence de la REMARQUE (2.7) et des hypothèses (2.4), (2.5), on a aussi que, pour tout élément (ω,t) (resp. (ω,t,x)) fixé, la fonction $f \longmapsto a_n(\omega,f,t)$ (resp. $f \longmapsto b_n(\omega,f,t,x)$) est, quel que soit n, τ_u-continue.

Ensuite, c,γ étant respectivement la fonction et la constante introduites par les hypothèses (2.6) et (2.4), on pose

$$N_t := \int_{]0,t]\times E} |c(\omega,x)| \; q(ds,dx)$$

et, pour tout $\omega \in \Omega$:

(3.3) $\mathbb{D}_\gamma(\omega) := \{f \in \mathbb{D}^d : \|\Delta f(t)\| \leq \gamma \|\Delta Z_t(\omega)\| + \Delta N_t(\omega)$ pour tout $t>0\}$

(comme d'habitude, $\Delta f(t) := f(t) - f(t^-)$).

On a alors la propriété suivante:

(3.4) <u>LEMME</u> ([J.M.] , (4.2)). <u>Pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{D}_\gamma(\omega)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{D}^d$ fermé aussi bien pour la topologie τ_u que pour la topologie τ_s et les deux topologies τ_u et τ_s induisent la même topologie sur $\mathbb{D}_\gamma(\omega)$.</u>

Le lemme suivant sera fondamental pour la démonstration du THEOREME (2.8):

(3.5) LEMME. *On considère un nombre réel strictement positif* ρ *et un temps d'arrêt* v *par rapport à* $\mathbb{B}^I$, *à valeurs dans* $[0,+\infty[$, *vérifiant, pour* $\mathbb{P}$-*presque tout* ω *de* $\{v>0\}$, *la relation suivante*

$$Q_{v-(\omega)}(\omega)\leq\rho \quad \text{et} \quad \int_{]0,v(\omega)[\times E} |c(\omega,x)|^2 \nu(\omega,ds,dx)\leq\rho,$$

dans laquelle Q,c *désignent les processus introduits respectivement par (1.1), (2.6).*

Dans les hypothèses (1.2)(1.4), (2.4), (2.5) et (2.6), pour tout sous-ensemble K τ_s*-compact de* $\mathbb{D}^d$, *on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\sup_{f\in K\cap\mathbb{D}_\gamma(\cdot)} \int_{]0,v(\cdot)[} \|a(\cdot,f,t)-a_n(\cdot,f,t)\|^2 dQ_t(\cdot)\Big]=0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\sup_{f\in K\cap\mathbb{D}_\gamma(\cdot)} \int_{]0,v(\cdot)[\times E} \|b(\cdot,f,t,x)-b_n(\cdot,f,t,x)\|^2 \nu(\cdot,dt,dx)\Big] = 0,$$

$\mathbb{D}_\gamma(\omega)$ *et* a_n,b_n *étant définis respectivement par (3.3) et (3.2).*

(3.6) REMARQUE. La F-mesurabilité des fonctions dont on considère l'espérance dans le lemme précédent, peut être démontrée en raisonnant comme à propos du Lemme (4.8) de [Z].

4. Dans la démonstration de (3.5), on employera les majorations exprimées par le lemme suivant:

(4.1) LEMME. On se donne un nombre strictement positif arbitraire σ et on considère l'intervalle $V:=]0,\sigma[$. Si l'on fixe un compact arbitraire U_{n_0} de la suite $(U_n)_n$ introduite dans l'hypothèse (1.3), pour tout sous-ensemble K τ_s-compact de $\mathbb{D}^d$ et tout $\omega\in\Omega$, on a:

- pour tout n,

$$\sup_{f\in K\cap\mathbb{D}_\gamma(\omega)} \int_V \|a(\omega,f,t)-a_n(\omega,f,t)\|^2 dQ_t(\omega) \le$$

$$\le \sup_{f\in K\cap\mathbb{D}_\gamma(\omega)} \int_{]0,\frac{1}{n}]\cap V} \|a(\omega,f,t)-a(\omega,f,0)\|^2 dQ_t(\omega) +$$

$$+2 \sup_{\substack{f\in K\cap\mathbb{D}_\gamma(\omega)\\ 0\le u\le 2/n}} \int_V \|a(\omega,f,t)-a(\omega,f,(t-u)^+)\|^2 dQ_t(\omega)$$

- et, pour tout $n\ge n_0$,

$$\sup_{f\in K\cap\mathbb{D}_\gamma(\omega)} \int_{V\times E} \|b(\omega,f,t,x)-b_n(\omega,f,t,x)\|^2 1_{U_{n_0}}(x)\,\nu(\omega,dt,dx) \le$$

$$\le \sup_{f\in K\cap\mathbb{D}_\gamma(\omega)} \int_{(]0,\frac{1}{n}]\cap V)\times E} \|b(\omega,f,t,x)-b(\omega,f,0,x)\|^2\, 1_{U_{n_0}}(x)\,\nu(\omega,dt,dx) +$$

$$+ 2 \sup_{\substack{f\in K\cap \mathbb{D}_\gamma(\omega) \\ 0\le u\le 2/n}} \int_{V\times E} \| b(\omega,f,t,x)-b(\omega,f,(t-u)^+,x)\|^2 1_{U_{n_0}}(x)\,\nu(\omega,dt,dx).$$

DEMONSTRATION. Tout d'abord, on fixe le couple (ω,f), qu'on omet de répéter dans toutes les notations.

De (1.2) et (3.2), pour tout n on tire:

$$(4.2)\quad \int_V \|a(t)-a_n(t)\|^2 dQ(t) =$$

$$= \sum_{t_i\in\Pi_n} \int_{]t_i,t_{i+1}]\cap V} \|a(t)-a_n(t)\|^2 dQ(t) =$$

$$= \int_{]0,\frac{1}{n}]\cap V} \|a(t)-a(0)\|^2 dQ(t) +$$

$$+ \sum_{\substack{t_i\in\Pi_n \\ i\ge 1}} \int_{]t_i,t_{i+1}]\cap V} dQ(t)\ \|n\int_{t_{i-1}}^{t_i} (a(t)-a(s))ds\|^2.$$

D'après l'inégalité de Schwarz, on a aussi:

$$(4.3)\quad \sum_{\substack{t_i\in\Pi_n \\ i\ge 1}} \int_{]t_i,t_{i+1}]\cap V} dQ(t)\ \|n\int_{t_{i-1}}^{t_i} (a(t)-a(s))ds\|^2 \le$$

$$\le \sum_{\substack{t_i\in\Pi_n \\ i\ge 1}} n \int_{]t_i,t_{i+1}]\cap V} dQ(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|a(t)-a(s)\|^2 ds \le$$

$$\leq n \int_V dQ(t) \int_{(t-\frac{2}{n})^+}^{t} \|a(t)-a(s)\|^2 ds.$$

Ensuite, en remplaçant dans la dernière intégrale, la variable s par u=t-s, on obtient:

$$(4.4)\quad \sum_{\substack{t_i\in\Pi_n\\ i\geq 1}} \int_{]t_i,t_{i+1}]\cap V} dQ(t)\, \|n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (a(t)-a(s))ds\|^2 \leq$$

$$\leq n \int_V dQ(t) \int_0^{\frac{2}{n}\wedge t} \|a(t)-a(t-u)\|^2 du \leq$$

$$\leq n \int_V dQ(t) \int_0^{2/n} \|a(t)-a((t-u)^+)\|^2 du =$$

$$= n \int_0^{2/n} du \int_V \|a(t)-a((t-u)^+)\|^2 dQ(t) \leq$$

$$\leq 2 \sup_{0\leq u\leq 2/n} \int_V \|a(t)-a((t-u)^+)\|^2 dQ(t).$$

La première inégalité du lemme est une conséquence de (4.2) et (4.4).

Quant à la deuxième, pour la vérifier on procède d'une manière analogue.

En effet, compte tenu de l'hypothèse (2.4) et de (3.2), on a pour tout $n\geq n_0$:

$$(4.5)\quad \int_{V\times E} \|b(t,x)-b_n(t,x)\|^2\, 1_{U_{n_0}}(x)\,\nu(dt,dx) =$$

$$= \int_{]0,\frac{1}{n}]\cap V)\times E} \|b(t,x)-b(0,x)\|^2\, 1_{U_{n_0}}(x)\,\nu(dt,dx) +$$

$$+ \sum_{\substack{t_i\in\Pi_n\\ i\geq 1}} \int_{(]t_i,t_{i+1}]\cap V)\times E} \nu(dt,dx)\,1_{U_{n_0}}(x)\, \Big\|n\int_{t_{i-1}}^{t_i}(b(t,x)-b(s,x))\,ds\Big\|^2.$$

Ensuite on applique l'inégalité de Schwarz et on opère le même changement de variable que dans le cas précédent:

$$(4.6)\quad \sum_{\substack{t_i\in\Pi_n\\ i\geq 1}} \int_{(]t_i,t_{i+1}]\cap V)\times E} \nu(dt,dx)\,1_{U_{n_0}}(x)\, \Big\|n\int_{t_{i-1}}^{t_i}(b(t,x)-b(s,x))\,ds\Big\|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{t_i\in\Pi_n\\ i\geq 1}} \int_{(]t_i,t_{i+1}]\cap V)\times E} n\,\nu(dt,dx)\,1_{U_{n_0}}(x) \int_{t_{i-1}}^{t_i}\|b(t,x)-b(s,x)\|^2 ds$$

$$\leq n \int_{V\times E} \nu(dt,dx)\,1_{U_{n_0}}(x) \int_{(t-\frac{2}{n})^+}^{t} \|b(t,x)-b(s,x)\|^2 ds$$

$$\leq n \int_{V\times E} \nu(dt,dx) 1_{U_{n_0}}(x) \int_0^{2/n} \|b(t,x)-b((t-u)^+,x)\|^2 du =$$

$$= n \int_0^{2/n} du \int_{V\times E} \|b(t,x)-b((t-u)^+,x)\|^2 1_{U_{n_0}}(x)\nu(dt,dx) \leq$$

$$\leq 2 \sup_{0\leq u\leq 2/n} \int_{V\times E} \|b(t,x)-b((t-u)^+,x)\|^2 1_{U_{n_0}}(x)\nu(dt,dx).$$

La deuxième inégalité énoncée dans le lemme découle de (4.5) et (4.6). ∎

On passe à la démonstrarion du LEMME (3.5).
Après avoir fixé K, sous-ensemble τ_s-compact de $\mathbb{D}^d$, on pose, pour tout $\omega\in\Omega$, $K_1(\omega):=K\cap\mathbb{D}_\gamma(\omega)$.

Pour établir la première relation du LEMME, on fixe un élément ω de Ω tel que l'on ait (cf. (1.2)): $dQ_t(\omega) = =\ell_t(\omega)dt$ et $v(\omega)>0$.

On considère la restriction à l'ensemble $K_1(\omega)\times[0,v(\omega)]$ de la fonction $(f,t) \longmapsto a(\omega,f,t)$. Comme auparavant, dans les notations on omet ω.

Soit ε un nombre strictement positif arbitraire.

L'ensemble K_1 étant τ_u-compact dans $\mathbb{D}^d$ ((3.4)), d'après le théorème (2.1) de [Lt] (qui représente une extension à certaines situations "abstraites" d'un résultat classique de G. Scorza Dragoni [Sc]), il existe C, sous-ensemble compact de [0,v], et une fonction r(f,t), définie sur $K_1\times[0,v]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^m$, tels que les conditions suivantes soient remplies:

(4.7) - L'application $(f,t) \longmapsto r(f,t)$ est $\tau_u \times \Sigma$-continue sur $K_1 \times [0,v]$ (Σ désignant la topologie usuelle sur $\mathbb{R}_+$), et elle coïncide, sur $K_1 \times C$, avec l'application $(f,t) \longmapsto a(f,t)$;

(4.8) - On a $\Lambda([0,v] \cap C^c) < \varepsilon$, Λ désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$;

(4.9) - r est uniformément bornée en norme par $\gamma_1 = \gamma\sqrt{m+d}$.

On a évidemment, pour tout n,

$$(4.10) \quad \sup_{\substack{f\in K_1 \\ 0\le u\le 2/n}} \int_{]0,v[} \|a(f,(t-u)^+) - a(f,t)\|^2 dQ(t) \le$$

$$\le 3 \sup_{f\in K_1} \int_{]0,v[} \|a(f,t)-r(f,t)\|^2 dQ(t) +$$

$$+ 3 \sup_{\substack{f\in K_1 \\ 0\le u\le 2/n}} \int_{]0,v[} \|a(f,(t-u)^+) - r(f,(t-u)^+)\|^2 dQ(t) +$$

$$+ 3 \sup_{\substack{f\in K_1 \\ 0\le u\le 2/n}} \int_{]0,v[} \|r(f,(t-u)^+) - r(f,t)\|^2 dQ(t).$$

En tenant compte de (4.7) et (4.8), on obtient:

$$(4.11) \quad \sup_{f\in K_1} \int_{]0,v[} \|a(f,t)-r(f,t)\|^2 dQ(t) \le$$

$$\le 2(\gamma^2+\gamma_1^2) \int_{]0,v[\cap C^c} \ell(t)\,dt < 2(\gamma^2+\gamma_1^2)\,\delta\varepsilon \;,$$

δ désignant le $\sup\limits_{s\in]0,v[} \ell(s)$.

De façon analogue on obtient, pour tout entier n et tout u tels qu'on ait $\frac{2}{n} < v$ et $0 \leq u \leq \frac{2}{n}$:

(4.12) $$\sup_{f\in K_1} \int_{]0,v[} \|a(f,(t-u)^+)-r(f,(t-u)^+)\|^2 dQ(t) \leq$$

$$\leq \sup_{f\in K_1} \int_{]0,u]} \|a(f,0)-r(f,0)\|^2 dQ(t) +$$

$$+ \sup_{f\in K_1} \int_{]u,v[} \|a(f,t-u)-r(f,t-u)\|^2 dQ(t) \leq$$

$$\leq 2(\gamma^2+\gamma_1^2)\int_{]0,2/n]} dQ(t)+\sup_{f\in K_1} \int_{]0,v-u[} \|a(f,s)-r(f,s)\|^2 \ell(s+u)ds \leq$$

$$\leq 2(\gamma^2+\gamma_1^2)(\int_{]0,2/n]} dQ(t) +\delta\varepsilon).$$

D'après la continuité de r, on a:

(4.13) $$\lim_{n\to+\infty} \sup_{\substack{f\in K_1 \\ 0\leq u\leq 2/n}} \int_{]0,v[} \|r(f,t-u)^+)-r(f,t)\|^2 dQ(t) = 0;$$

en tenant compte de (4.10),(4.11) et (4.12), on obtient donc:

(4.14) $$\lim_{n\to+\infty} \sup_{\substack{f\in K_1 \\ 0\leq u\leq 2/n}} \int_{]0,v[} \|a(f,(t-u)^+)-a(f,t)\|^2 dQ(t) = 0.$$

On a d'autre part $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\int_{]0,v[} dQ_t] \leq \rho$ et pour tout ω:

$$(4.15)\quad \lim_{n\to+\infty} \sup_{f\in K_1} \int_{]0,\frac{1}{n}]\cap]0,v[} \|a(f,t)-a(f,0)\|^2 dQ_t = 0.$$

Compte tenu du LEMME (4.1), la prémière relation du LEMME (3.5) découle alors de (4.14), (4.15) et du théorème de Lebesgue sur la convergence dominée.

Pour démontrer la deuxième relation du même LEMME, on commence par fixer un compact U_{n_0} de la suite $(U_n)_n$ ((1.3)) de façon que l'on ait:

$$(4.16)\quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_{]0,v[\times E} |c(\cdot,x)|^2 1_{U^c_{n_0}}(x)\nu(dt,dx)\right] < \varepsilon/2.$$

D'après l'hypothèse (2.6), on a, pour tout n,

$$(4.17)\quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\sup_{f\in K_1(\cdot)} \int_{]0,v[\times E} \|b(\cdot,f,t,x)-b_n(\cdot,f,t,x)\|^2 \nu(dt,dx)\right] \leq$$

$$\leq 2\,\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_{]0,v[\times E} |c(\cdot,x)|^2\, 1_{U^c_{n_0}}(x)\nu(dt,dx)\right] +$$

$$+\,\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\sup_{f\in K_1(\cdot)} \int_{]0,v[\times E} \|b(\cdot,f,t,x)-b_n(\cdot,f,t,x)\|^2 1_{U_{n_0}}(x)\nu(dt,dx)\right].$$

Compte tenu de (4.16), il suffit de prouver que la deuxième espérance dans le côté droit de (4.17) tend vers 0. D'autre part, comme conséquence de la définition de v et de (2.6), on a évidemment:

$$(4.18)\quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\sup_{f\in K_1(\cdot)} \int_{(]0,\frac{1}{n}]\cap]0,v[)\times E} \|b(\cdot,f,t,x)-b(\cdot,f,0,x)\|^2 1_{U_{n_0}}(x)\nu(dt,dx)\right]$$

$$\leq 2 \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_{(]0,\frac{1}{n}]\cap]0,v[)\times E} |c(\cdot,x)|^2 1_{U_{n_0}}(x)\nu(dt,dx)\right] = 0,$$

et donc, en faisant intervenir la deuxième majoration du LEMME (4.1), on se ramène à vérifier la propriété suivante:

$$(4.19)\quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\sup_{\substack{f\in K_1(\cdot)\\ 0\leq u\leq 2/n}} \int_{]0,v[\times E} \|b(\cdot,f,t,x)-b(\cdot,f,(t-u)^+,x)\|^2 1_{U_{n_0}}(x)\nu(dt,dx)\right] = 0.$$

Pour $\mathbb{P}$-presque tout ω, on a, quel que soit le couple (f,u):

$$(4.20)\quad \int_{]0,v[\times E} \|b(\omega,f,t,x)-b(\omega,f,(t-u)^+,x)\|^2 1_{U_{n_0}}(x)\nu(dt,dx) =$$

$$= \int_E \alpha(dx)\int_{]0,v[} \|b(\omega,f,t,x)-b(\omega,f,(t-u)^+,x)\|^2 1_{U_{n_0}}(x)h(\omega,t,x)dt.$$

Pour tout couple (ω,x), l'application $(f,t)\longmapsto b(\omega,f,t,x)$ a la même régularité que $(f,t)\longmapsto a(\omega,f,t)$; compte tenu des hypothèses de bornitude sur b et h, on vérifie l'analogue de (4.14), c'est-à-dire que, pour $\mathbb{P}$-presque tout ω on a, quel que soit x:

$$(4.21)\quad \lim_{n\to+\infty} \sup_{\substack{f\in K_1(\omega)\\ 0\leq u\leq 2/n}} \int_{]0,v[} \|b(\omega,f,t,x)-b(\omega,f,(t-u)^+,x)\|^2 1_{U_{n_0}}(x)h(\omega,t,x)dt=0;$$

finalement, en utilisant l'hypothèse (2.6), on obtient (4.19) comme conséquence de (4.20), (4.21) et du théorème de Lebesgue sur la convergence dominée. ∎

5. Si maintenant on applique le lemme qu'on vient de démontrer, on voit que le théorème (2.8) peut être obtenu en répétant les mêmes raisonnements employés dans les paragraphes 5 et 6 de [Z] (voir notamment les relations (6.11), (6.12) et (6.13) du même article).

(5.1) REMARQUE. Dans le cas où l'on considère une équation du type (2.1) dans laquelle Z et q sont respectivement un processus de Wiener et une mesure aléatoire de Poisson, centrée, stationnaire, de mesure de Lévy α, on a $dQ_t(\omega)=K\ dt$ et $\nu(\omega,dt,dx)=dt\alpha(dx)$ pour $\mathbb{P}$-presque tout ω et tout couple $(t,x)\in\mathbb{R}_+ \times E$.

Si, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, les coefficients a et b dépendent de la solution X seulement à travers X_{t-}, cette dépendance étant en plus continue, on retrouve pour cette équation stochastique classique, comme corollaire de (2.8), un théorème d'existence de solutions faibles.

BIBLIOGRAPHIE

[Bi] P. BILLINGSLEY, Convergence of probability measures, Wiley, New York, 1968.

[DeM 1] C. DELLACHERIE, P.A. MEYER, Probabilités et potentiel, chap. I à IV, Hermann, Paris, 1975.

[DeM 2] C. DELLACHERIE, P.A. MEYER, Probabilités et potentiel, chap. V à VIII, Hermann, Paris, 1980.

[H] J-Y. HUBY, Solutions faibles d'équations différentielles stochastiques avec mesures aléatoires, Thèse 3^{e} cycle, Univ. de Rennes I, 1982.

[J.M.] J. JACOD, J. MEMIN, Existence of weak solutions for stochastic differential equations with driving semimartingales, Stochastics, Vol. 4, p. 317-337, 1981.

[Le] V.A. LEBEDEV, On the existence of weak solutions for stochastic differential equations with driving martingales and random measures, Stochastics, Vol. 9, p. 37-76, 1983.

[Lt] G. LETTA, Un teorema di approssimazione per le funzioni continue rispetto a una variabile e misurabili rispetto all'altra, Rend. Sem. Mat., Padova, XXXV, p. 260-266, 1965.

[Me 1] M.METIVIER, Semimartingales, a Course on Stochastic Processes, W. de Gruyter, Berlin-New York, 1982.

[Me 2] M. METIVIER, Stability theorems for stochastic integral equations driven by random measures and semimartingales, Journal of Integral Equations, Vol.3, p. 109-135, 1981.

[MeP] M. METIVIER, J. PELLAUMAL, Stochastic integration, Academic Press, 1980.

[Pe] J. PELLAUMAIL, Solutions faibles et semimartingales, Sem. Proba. Strasbourg XV, Springer Lecture Notes N. 850, p. 561-586.

[Sc] G. SCORZA DRAGONI, Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto all'altra variabile, Rend. Sem. Mat., Padova, XVII, p. 102-106, 1948.

[Z] P.A. ZANZOTTO, Sur l'existence de solutions faibles pour une classe générale d'équations stochastiques, Bollettino Un. Mat. Ital.(6)5-B, p. 781-804, 1986.

P.A. ZANZOTTO

Dipartimento di Matematica

dell'Università di Pisa

Via Buonarroti, 2

56100 - PISA (Italie)

Reçu en Juillet 1986

Sous forme révisée en Décembre 1986