Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2

Série Probabilités et applications

Y. Ouknine

Sur l'unicité des solutions d'équations différentielles stochastiques

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 90, série *Probabilités et applications*, nº 6 (1987), p. 43-58

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1987__90_6_43_0>

SUR L'UNICITE DES SOLUTIONS D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

Y. OUKNINE

INTRODUCTION

Dans ce travail, on étudie des conditions suffisantes pour l'unicité des solutions d'équations différentielles stochastiques sur R^n. L'outil principal est constitué des fonctions du type Liapounov "polarisées". Les résultats importants de cette note sont les théorèmes (I) et (II), le théorème (II) est celui de T.C. GARD (7), avec une hypothèse de moins, bien que ce travail ait été rédigé indépendamment de (7).

Ce travail est inspiré d'une part, d'un article de N. NARITA (1) portant sur l'explosion des solutions d'EDS, d'autre part de Y. OKABE - A. SHIMIZU (2).

Plusieurs exemples d'applications sont étudiés. On retrouve en particulier la proposition (1) de T. YAMADA (5) et les théorèmes d'unicité d'IKEDA-WATANABE (6). On établit aussi des conditions portant sur le module de continuité des coefficients de l'équation différentielle stochastique, pour assurer l'unicité.

Je remercie Madame M. MASTRANGELO de ses encouragements et des discussions fructueuses que nous avons eues à propos de ce travail.

NOTATIONS ET DEFINITIONS

On considère l'E.D.S.

$$
* \quad \begin{cases} d\, X_t = \sigma(t,\, X_t)\, d\, B_t + b(t,\, X_t)\, dt \\ X_0 = x_o \end{cases}
$$

avec

$x_o \; \varepsilon \; R^n$
$\sigma \;\; \varepsilon \; \mathcal{C}^{\circ}(R_+ x R^n \;,\; \mathcal{M}_{nxp} \; (R^n))$
$b \;\; \mathcal{C}^{\circ}(R_+ x R^n \;,\; R^n)$
$\mathcal{M}_{nxp}(R^n)$: ensemble des matrices n-lignes, k-colonnes.
B_t désigne le mouvement brownien standard de R^p.

Enfin, on définit l'opérateur $\mathcal{L}$ par :

$\forall \; V(t,x,y) \; \varepsilon \; \mathcal{C}^{1,2,2} \; (R_+,\; R^n,\; R^n)$

$$
\mathcal{L}V(t,x,y) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \; b^i(t,x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_i} \; b^1(t,y)
$$

$$
+ \frac{1}{2} \Big\{ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \, \partial x_j} \Big(\sum_{k=1}^{p} \sigma_{ik}(t,x) \; \sigma_{jk}(t,x) \Big)
$$

$$
+ 2 \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \, \partial y_j} \Big(\sum_{k=1}^{p} \sigma_{ik}(t,x) \; \sigma_{jk}(t,y) \Big)
$$

$$
+ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial y_i \, \partial y_j} \Big(\sum_{k=1}^{p} \sigma_{ik}(t,y) \; \sigma_{jk}(t,y) \Big) \Big\}
$$

On notera :

$$
D_r = \{x \varepsilon R^n / \; ||x|| \leq r\}
$$

I - THEOREME

Supposons qu'il existe une suite de fonctions $V^m_{T,r}(t,x,y)$ définies sur $(0,T)xD_r xD_r$ et vérifiant les conditions suivantes :

1) $V^m_{T,r}(t,x,y) \in \mathcal{C}^{1,2,2}((0,T) \times D_r \times D_r)$ et

$V^m_{T,r}(t,x,y) \geq 0 \quad ; \quad V^m_{T,r}(t,x,x) = 0$

2) $V^r_{T,r}$ converge simplement vers $V_{T,r}$ vérifiant :

$V_{T,r}(t,x,y) = 0 \Longrightarrow x=y$

3) $\exists\ \beta \in \mathcal{C}(R_+, R_+)$ croissante, concave, nulle en 0 avec :

$$\int_{0^+} \frac{ds}{\beta(s)} = + \infty$$

$\alpha : R_+ \longrightarrow R_+$, bornée sur tout compact de R_+ et telle que :

$$\mathcal{L}\, V^m_{T,r}(t,x,y) \leq \alpha(t)\ \beta(V^m_{T,r}(t,x,y))$$

Alors, on a l'unicité des solutions de l'E.D.S *.

1 - REMARQUE

Ce théorème est une version en terme d'unicité d'un théorème de Narita(1) (ceci avec des modifications convenables) assurant la non explosion des solutions d'E.D.S.

Dans la suite si X_t et Y_t sont deux solutions de *, on notera :

$$\tau_r = \inf \{t/\ ||X_t||\ V\ ||Y_y|| = r\}$$

Démonstration :

On applique la formule d'ITO au processus $V^m_{T,r}(t\wedge\tau_r, X_{t\wedge\tau_r}, Y_{t\wedge\tau_r})$

avec X_t et Y_t deux solutions de *.

$V^m_{T,r}(t\wedge\tau_r, X_{t\wedge\tau_r}, Y_{t\wedge\tau_r}) = V^m_{T,r}(0, x_o, x_o)$

$$+ \text{ Martingale } + \int_0^{t\wedge\tau_r} \mathcal{L} V^m_{T,r}(s, X_s, Y_s)\, ds$$

$$= \text{ Martingale } + \int_0^{t\wedge\tau_r} \mathcal{L} V^m_{T,r}(s\wedge\tau_r, X_{s\wedge\tau r}, Y_{s\wedge\tau r})\, ds$$

$$E\, V^m_{T,r}(t\wedge\tau_r, X_{t\wedge\tau r}, Y_{t\wedge\tau r}) = E \int_0^{t\wedge\tau_r} \mathcal{L} V^m_{T,r}(s\wedge\tau_r, X_{s\wedge\tau r}, Y_{s\wedge\tau r})\, ds$$

$$E\, V^m_{T,r}(t\wedge\tau_r, X_{t\wedge\tau r}, Y_{t\wedge\tau r}) \leq E \int_0^{t\ \ r} \alpha(s\wedge\tau_r)\, \beta(V^m_{T,r}(----)\, ds$$

$$\leq \quad A(T)\, E \int_0^{t\wedge\tau_r} \beta(V^m_{T,r}(----)\, ds$$

$$\leq \quad A(T)\, . \int_0^{t} \beta E\, (V^m_{T,r}(s\wedge\tau_r, X_{s\wedge\tau r}, Y_{s\wedge\tau r})\, ds$$

car β est concave, $A(t) = \mathrm{Sup}_{0\leq s\leq t} |\alpha(s)|$

et puisque $\int_{0^+} \frac{ds}{\beta(s)}\, ds = +\infty$

Alors, il est bien connu que, l'inégalité précédente implique :

$$E\, V^m_{T,r}(t\wedge\tau_r, X_{t\wedge\tau}, Y_{t\wedge\tau r}) = 0$$

De plus on a : $V^m_{T,r} \geq 0$

Donc : $V^m_{T,r}(t\wedge\tau_r(\omega), X_{t\wedge\tau r(\omega)}(\omega), Y_{t\wedge\tau r(\omega)}(\omega)) = 0$,

pour tout ω appartenant à $\Omega\backslash\mathcal{N}_{t,m}$, où l'évènement $\mathcal{N}_{t,m}$ a lieu avec une probabilité nulle : $P(\mathcal{N}_{t,m}) = 0$

Donc pour tout ω appartenant à $\Omega \backslash \bigcup_m \mathcal{N}_{t,m} = \Omega \backslash \mathcal{N}_t$, on a

$$V_{T,r}(t\wedge\tau_r(\omega),\ X_{t\wedge\tau r(\omega)}(\omega),\ Y_{t\wedge\tau r(\omega)}(\omega)) = 0$$

Il découle des hypothèses du théorème I que :

$$X_{t\wedge\tau r} = Y_{t\wedge\tau r} \qquad , \text{ p.s.}$$

Si maintenant $r \to +\infty$, alors $\tau_r \to +\infty$ et donc $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ pour tout ω n'appartenant pas à $\mathcal{N}_t$.

Alors : $\qquad \forall\ t \in Q \cap (0,T),\quad X_t = Y_t$, p.s.

et par continuité des trajectoires de X_t et de Y_t, on a

$$P\ (X_t = Y_t,\ \forall\ t \in \quad (0,T)) = 1 \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

2 - REMARQUE

Dans le cas où $\beta(x) = x$, on pourra supposer $\alpha(t) \geq 0$ et $\alpha \in L^1$loc. On utilisera le lemme de Gronwall pour conclure.

3 - COROLLAIRE

Si σ et b sont localement lipschitziens, alors on a l'unicité des solutions de l'E.D.S. *.

Démonstration :

Soit K_T et K'_T deux constantes telles que :

$$\| b(t,x) - b(t,y) \| \leq K_T \| x - y \|$$
$$\| \sigma(t,x) - \sigma(t,y) \| \leq K'_T \| x - y \|$$

ceci pour tout t appartenant à (0,T), pour tout couple $(x,y) \in B_r \times B_r$, $r>0$. On prend $V^m_{T,r}(t,x,y) = \| x - y \|^2$, les conditions (1) et (2) du théorème sont trivialement vérifiées.

$$\mathcal{L}V^m_{T,r}(t,x,y) = 2\ (x - y)\ (b(t,x) - b(t,y) + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} (\sigma_{ij}(t,x) - \sigma_{ij}(t,y))^2$$

Donc : $\mathcal{L}\, V^m_{T,r}(t,x,y) \leq (2K_T + (K'_T)^2) \quad || x - y ||^2$

et la condition (3) est satisfaite.

4 - **COROLLAIRE**

On suppose que :

$$|| b(t,x) - b(t,y)|| \leq \emptyset(t) \; || x - y ||$$

et $\quad || \sigma(t,x) - \sigma(t,y)|| \leq \Psi(t) \; || x - y ||$

avec $\quad \emptyset^2(t) + 2\Psi(t)$ appartient à L^1_{loc}

Sous ces hypothèses, on a l'unicité de la solution de l'E.D.S *.

Démonstration :

Prendre $V^m_{T,r}(t,x,y) = || x - y ||^2$ et utiliser la remarque qui suit le théorème (I).

5 - **COROLLAIRE**

Soit $\rho : R_+ \dashrightarrow R_+$, continue croissante, nulle en 0 et vérifiant

(i) $\quad \displaystyle\int_{0^+} \frac{d\xi}{\rho^2(\sqrt{\xi})} = +\infty$

(ii) $\rho \dashrightarrow \rho^2(\sqrt{\xi})$ concave

Si σ vérifie :

$$|| \sigma(t,x) - \sigma(t,y)|| \leq \rho(|| x - y ||)$$

Alors l'équation différentielle stochastique :

$$d X_t = \sigma(t, X_t) \, d B_t$$
$$X_0 = x_o \in R^n$$

admet au plus une solution.

Démonstration :

Soit $V^m_{T,r}(t,x,y) = V_{t,r}(t,x,y) = \| x - y \|^2$

$\mathcal{L} V_{T,r}(t,x,y) = \| \sigma(t,x) - \sigma(t,y) \|^2 \leq \rho^2(\| x - y \|)$

$$\mathcal{L} V_{T,r}(t,x,y) \leq \rho^2(\sqrt{V_{T,r}(t,x,y)})$$

On pose $\beta(\xi) = \rho^2(\sqrt{\xi})$

Les conditions (i) et (ii) et le théorème I assurent l'unicité.

Exemples de fonctions assurant les hypothèses du corollaire :

$\rho(\xi) = \xi$, $\rho(\xi) = \xi(\mathrm{Log}\ \frac{1}{\xi})^{1/2}$, $\rho(\xi) = (\mathrm{Log}\ (1 + \xi^2))^{1/2}$

Plus généralement, on a le corollaire suivant.

6 - COROLLAIRE

Si $\rho_{T,r}$ et $\bar{\rho}_{T,r}$ satisfont les conditions suivantes :

1) $\displaystyle\int_{0+} \{\sqrt{\xi}\, \bar{\rho}_{T,r}(\sqrt{\xi}) + \rho^2_{T,r}(\sqrt{\xi})\}^{-1} d\xi = + \infty$

2) $\xi \dashrightarrow \sqrt{\xi}\, \bar{\rho}_{T,r}(\sqrt{\xi}) + \rho^2_{T,r}(\sqrt{\xi})$ est concave

et si σ et b vérifient :

$$\| \sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq \rho_{T,r} (\| x - y \|)$$
$$\| b(t,x) - b(t,y)\| \leq \bar{\rho}_{T,r} (\| x - y \|)$$

ceci $\forall\ (t,x,y) \in (0,T) \times D_r \times D_r$

Alors, l'E.D.S * admet au plus une solution.

<u>Démonstration</u> :

Soit $V^m_{T,r}(t,x,y) = V_{T,r}(t,x,y) = \| x - y \|^2$

Par un calcul simple, on trouve :

$$\mathcal{L} V^m_{T,r}(t,x,y) = 2\,(x - y)\,(b(t, x) - b(t, y)) + \| \sigma(t, x) - \sigma(t,y) \|^2$$

$$\mathcal{L} V^m_{T,r}(t,x,y) \leq 2\,\{\| x - y \|\, \bar{\rho}(\| x - y \|) + \rho^2(\| x - y \|)\}$$

On pose $\beta(\xi) = \sqrt{\xi}\,\bar{\rho}_{T,r}(\sqrt{\xi}) + \rho^2_{T,r}(\sqrt{\xi})$ et la démonstration se termine comme dans le corollaire précédent.

S. Watanabe et T. Yamada (3) ont établi le théorème suivant :

7 - <u>THEOREME</u>

Si ρ et $\bar{\rho}$ sont tels que :

1') $\displaystyle\int_{0+} \{\rho^2(\xi)\xi^{-1} + \bar{\rho}(\xi)\}^{-1}\, d\xi = +\infty$

2') $\xi \dashrightarrow \rho^2(\xi)\ \xi^{-1} + \bar{\rho}(\xi)$ est concave

et si :

$$\| \sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq \rho(\| x - y \|)$$
$$\| b(t,x) - b(t,y)\| \leq \bar{\rho}(\| x - y \|)$$

Alors, l'équation différentielle stochastique * admet au plus une solution. Remarquons qu'un changement de variable donne immédiatement :

$$\int_{0+} \frac{d\xi}{\{\sqrt{\xi}\ \bar{\rho}(\sqrt{\xi}) + \rho^2(\sqrt{\xi})\}} = \int_{0+} \frac{du}{\{\bar{\rho}\,(u) + \rho^2(u)\ u^{-1}\}}$$

et par suite les conditions 1') et <u>1</u>) sont équivalentes. Ce qui est moins évident, c'est la comparaison entre <u>2</u>) et 2').

On peut remarquer que si en outre $\rho(x)/x$ et $\bar{\rho}(x)/x$ sont décroissantes 2') implique 2). Par contre je n'ai pas d'exemple concret où le théorème 6 permettrait de prouver l'unicité alors que le théorème 7 serait inopérant.

8 - REMARQUE

Watanabe-Yamada (3) ont montré que la condition de non intégrabilité de :

$\{\rho^2(u)\, u^{-1} + \bar{\rho}(u)\}^{-1}$ en 0+ est optimale pour $n \geq 3$.

9 - COROLLAIRE (Toshio, Yamada)

Si σ et b satisfont :

$$\| \sigma(t,x) - \sigma(t,y) \|^2 + \| b(t,x) - b(t,y) \|^2 \leq K_{T,r}(\| x - y \|^2)$$

$\forall\, t \in (0,T)$, $\forall\, x \in D_r$, $\forall\, y \in D_r$, avec

$$\| \sigma(t,x) - \sigma(t,y) \|^2 = \text{trace}\, ((\sigma(t,x) - \sigma(t,y)))\, (\sigma(t,x) - \sigma(t,y))^*$$

$$\| b(t,x) - b(t,y) \|^2 = \sum_{i=1}^{n} (b^i(t,x) - b^i(t,y))^2$$

$K_{T,r}$ continue, croissante, concave, nulle en 0 et :

$$\int_{0+} \frac{du}{K_{T,r}(u)} = +\infty$$

Alors, l'E.D.S * admet au plus une solution.

Démonstration :

Soit $V_{T,r}(t,x,y) = \| x - y \|^2$

Par un calcul simple, on trouve :

$$\mathcal{L} V^m_{T,r}(t,x,y) \leq \| x - y \|^2 + K_{T,r}(\| x - y \|^2)$$

On pose $\beta(\xi) = \xi + K_{T,r}(\xi)$

D'après les hypothèses, on a $\beta(0) = 0$, β concave, croissante et il est facile de voir que :

$$\left(\int_{0+} \frac{du}{K_{T,r}(u)} = +\infty \right) \Longleftrightarrow \left(\int_{0+} \frac{du}{\beta(u)} = +\infty \right)$$

Et on conclut comme précédemment.

II - THEOREME

On suppose qu'il existe une suite de fonctions $V^m_{T,r}(t,x,y)$ vérifiant les hypothèses 1) et 2) du théorème (I) et la condition suivante :

3') $\exists\ \beta : (0,+\infty(\longrightarrow (0,+\infty($, concave, continue, nulle en 0, et

$$\int_{0+} \frac{ds}{\beta(s)} = +\infty$$

$\exists\ f_m : R_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ tq:

$$\mathcal{L}\, V^m_{T,r}(t,x,y) \leq C\ \beta(V_{T,r}(t,x,y)) + f_m(t)$$

et

$$f_m \xrightarrow{L^1_{loc}((0,T))} 0$$

Sous ces conditions, on a l'unicité des solutions de l'E.D.S *.

10 - REMARQUE

Plus généralement, on peut remplacer l'hypothèse 3') du théorème II par 3")

3") $\exists \omega : (0,T) \times (0, +\infty(\longrightarrow (0, +\infty($ avec

(i) $\omega(t, 0) = 0$

(ii) $u(t) = 0$ est l'unique solution continue de l'équation

$$u(t) = \int_0^t \omega(s, u(s))\, ds$$

et

$$\lim_{t \to 0+} |u(t)/t| = 0$$

(iii) $\omega(x,t)$ concave en la variable x, c'est-à-dire :

$$\forall\, t \in (0,T),\ x \longrightarrow \omega(t,x) \text{ est concave}$$

(iiii) $\mathcal{L} V^m_{T,r}(t,x,y) \leq \omega(t, V_{T,r}(t,x,y)) + f_m(t)$

et $$f_m \xrightarrow{L^1_{loc}((0,T))} 0$$

Une telle fonction ω vérifiant (i) et (ii) s'appelle fonction de KAMKE.

11 - REMARQUE

T.C. GARD (7) et C. TUDOR (4) ont prouvé des théorèmes analogues à (II) avec la condition supplémentaire :

$$\frac{\partial V^m_{T,r}(t,x,y)}{\partial t} \leq C\, \beta(V_{T,r}(t,x,y)) + f_m(t)$$

qu'ils utilisent systématiquement dans leur démonstration.

Démonstration du théorème II

Par application de la formule d'ITO, il vient :

$$V^m_{T,r}(t\wedge\tau_r, X_{t\wedge\tau r}, Y_{t\wedge\tau r}) = V^m_{T,r}(0,x,x)$$

$$+ \text{Martingale} + \int_0^{t\wedge\tau_r} \mathcal{L} V^m_{T,r}(s, X_s, Y_s)ds$$

En prenant l'espérance des deux membres, on a :

$$E\, V^m_{T,r}(t\wedge\tau_r, X_{t\wedge\tau r}, Y_{t\wedge\tau r}) = E\int_0^{t\wedge\tau_r} \mathcal{L} V^m_{T,r}(s, X_s, Y_s)ds$$

$$= E\int_0^{t\wedge\tau_r} \mathcal{L} V^m_{T,r}(s\wedge\tau_r, X_{s\wedge\tau r}, Y_{s\wedge\tau r})ds$$

$$\leq E\int_0^{t\wedge\tau_r} C\ \beta(V_{T,r}(s\wedge\tau_r, X_{s\wedge\tau r}, Y_{s\wedge\tau r}))ds$$

$$+ E\int_0^{t\wedge\tau_r} f_m(s\wedge\tau_r)ds$$

$$\leq C\int_0^{t} E\ \beta(V_{T,r}(s\wedge\tau_r, X_{s\wedge\tau r}, Y_{s\wedge\tau r}))ds$$

$$+ E\int_0^{t} |f_m(s)|ds$$

$$\leq C \int_0^t \beta\left[E\, V_{T,r}(s\wedge\tau_r, X_{s\wedge\tau r}, Y_{s\wedge\tau r}\right]ds$$

$$+ E \int_0^t \quad |f_m(s)|ds \qquad\qquad (\beta \text{ est concave})$$

Maintenant, en faisant tendre m vers l'infini, m -> +∞, on a :

$$\frac{\text{Lim}}{m\to+\infty} \quad E\, V^m_{T,r}(t\wedge\tau_r, X_{t\wedge\tau r} \quad , Y_{t\wedge\tau r}\ ) \leq C \int_0^t \beta(E\, V_{T,r})\ ds$$

et par le terme de Fatou, on a :

$$0 \leq E\, V_{T,r}(t\wedge\tau_r, X_{t\wedge\tau r} \quad , Y_{t\wedge\tau r}\ ) \leq$$

$$\leq C \int_0^t \beta(E\, V_{T,r}(s\wedge\tau_r, X_{s\wedge\tau r}, Y_{s\wedge\tau r}))ds$$

$$\left(\int_{0+} \frac{ds}{\beta(s)} = +\infty\right) \Longrightarrow E\, V_{T,r}(t\wedge\tau_r, X_{t\wedge\tau r} \quad , Y_{t\wedge\tau r}\ ) = 0$$

Et par suite,

$V_{T,r}(t\wedge\tau_r, X_{t\wedge\tau r} \quad , Y_{t\wedge\tau r}\ ) = 0$, p.s. ce qui entraîne à son tour que :

$X_{t\wedge\tau r} = Y_{t\wedge\tau r}$, p.s. et on termine la démonstration comme dans le théorème I

12 - COROLLAIRE (IKEDA-WATANABE (5), p.168)

On suppose n=1 pour simplifier :

Si $\exists \rho_{T,r}$ fonction strictement croissante / $\rho_{T,r}(0) = 0$

$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq \rho_{T,r}(|x - y|)$$

$\exists K_{T,r}$ fonction croissante concave telle que $K_{T,r}(0) = 0$

$$|b(t,x) - b(t,y)| \leq K_{T,r}(|x - y|)$$

On suppose en outre que :

$$\int_{0+} \rho_{T,r}^{-2}(u)\, du = \int_{0+} \frac{du}{K_{T,r}(u)} = +\infty$$

Sous ces conditions, on a l'unicité des solutions de l'E.D.S *

avec (n = 1 , p = 1)

Démonstration :

Soit le suite (a_n) , $1 > a_1 > a_2 > \ldots\ldots.> a_n \ldots..> 0$
définie par :

$$\int_{a_1}^{1} \rho_{T,r}^{-2}(s)\, ds = 1, \int_{a_2}^{a_1} \rho_{T,r}^{-2}(s)\, ds = 2, \ldots\ldots\ldots., \int_{a_n}^{a_{n-1}} \rho_{T,r}^{-2}(s)\, ds = n$$

$a_n \to 0$, quand $n \to \infty$

Soit $\psi_{T,r}^{n}(s)$ continue, à support compact contenu dans l'intervalle (a_n, a_{n-1}) et telle que :

$$0 \leq \psi_{T,r}^{n}(s) < 2\, \rho_{T,r}^{-2}(s)/n$$

et

$$\int_{a_n}^{a_{n-1}} \psi_{T,r}^{n}(s)\, ds = 1, \text{ (une telle fonction existe)}$$

On pose $\phi^n_{T,r}(x) = \int_0^{|x|} dy \int_0^y \Psi^n_{T,r}(u)\, du$, x réel

Alors :

$$\phi^n_{T,r} \in \mathcal{C}^2(B_r), \qquad |\phi'^n_{T,r}| \leq 1 \qquad \text{et } \phi^n_{T,r}(x) \uparrow |x|$$

On prend alors :

$$V^m_{T,r}(t,x,y) = \phi^m_{T,r}(x-y)$$

et on vérifie aisément que :

$V^m_{T,r}(t,x,y) \geq 0$

$V^m_{T,r}(t,x,x) = 0$ et $V^m_{T,r}(t,x,y) \dashrightarrow |x-y|$

enfin :

$$\begin{aligned} V^m_{T,r}(t,x,y) &= \phi'^m_{T,r}(x-y)\,(b(t,x) - b(t,y)) \\ &+ \frac{1}{2}\,\phi''^m_{T,r}(x-y)\,(\sigma(t,x) - \sigma(t,y))^2 \\ &\leq K_{T,r}\,(|x-y|) + m^{-1} \end{aligned}$$

Alors avec les notations du théorème II, on prend $\beta(\xi) = K_{T,r}(\xi)$ et $f_n = n^{-1}$ et on peut conclure.

REFERENCES

(1) K. NARITA, No explosion critéria for stochastic differential equations. J. Math. Soc. Japon, Vol 34, n°2, (1982)

(2) Y. OKABE, A. SHIMUZU, On the pathwise uniqueness of solutions of stochastic differential equations. J. Math. KYOTO Univ. 15.2, (1975).

(3) S. WATANABE, T. YAMADA, On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations II, J. Math. KYOTO Univ. 11.3, (1971).

(4) C. TUDOR, An abstract nonlinear stochastic integral equations, J. Diff. E. 54, (1984).

(5) T. YAMADA, on the sucessive approximation of solution of stochastic differential equations. J. Math. KYOTO-Univ. 21.3, (1981).

(6) IKEDA.WATANABE, Stochastic Differential equations and diffusion process. North Holland, Kodansha (1981).

(7) T.C. GARD, a general uniqueness for solutions of stochastic differential equations, SICOM 14, (1976).

OUKNINE Youssef

U.A.213 du C.N.R.S.
"Analyse complexe et Géométrie"
Tour 45-46, 5e étage
Université de Paris VI
4, Place Jussieu

75252-PARIS CEDEX 05

Reçu en Octobre 1986