ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

J. C. ALT

Sur le comportement asymptotique presque sûr des sommes de variables aléatoires à valeurs vectorielles

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 90, série *Probabilités et applications*, n° 6 (1987), p. 3-24

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1987__90_6_3_0>

SUR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE PRESQUE SUR DES SOMMES DE VARIABLES ALEATOIRES A VALEURS VECTORIELLES

J.C. ALT

Summary. Kolmogorov's law of the iterated logarithm (l.i.l.) and a l.i.l. due to R.Wittmann are extended to type p Banach spaces. The norming sequence of the scalar case $s_n=(\sum_{i=1}^{n} EX_i^2)^{\frac{1}{2}}$ is replaced by any increasing sequence $(s_n)_n$ satisfying $s_n \geq c\,\sigma_n$, where c is a positive number and σ_n denotes the "weak variance" $\sigma_n = \sup\{ E < \sum_{i=1}^{n} X_i , x^* >^2 ; \| x^* \| \leq 1 \}^{\frac{1}{2}}$.

1. Introduction et principaux résultats.

Le principal résultat de cet article est une généralisation à certains espaces de Banach - en un énoncé unique - de deux théorèmes célèbres: la loi des grands nombres de Prokhorov et la l.l.i. de Kolmogorov. Rappelons-en les énoncés.

THEOREME 1. (Prokhorov, [11]) Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles (v.a.r.) indépendantes et centrées, satisfaisant la condition:

$$\exists\, C \geq 0 \;, \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad |X_n| \leq C\, n / \mathrm{Log}_2\, n \qquad \text{p.s.}$$

où $\mathrm{Log}_2\, x = \ln[\ln(x \vee e)]$.

Cette suite vérifie la loi forte des grands nombres si et seulement si :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \sum_{n\geq 1} \exp(-\varepsilon \lambda_n^{-1}) < \infty$$

où

$$\lambda_n = 2^{-2n} \sum_{2^n < i \leq 2^{n+1}} E\, X_i^2 \;.$$

THEOREME 2. (Kolmogorov , [5]) Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.r. indépendantes et centrées ; soit $s_n=(\sum_{i=1}^{n} E\, X_i^2)^{\frac{1}{2}}$. On suppose qu' il existe une suite K_n tendant vers 0 telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad |X_n| \leq K_n\, s_n\, (\mathrm{Log}_2\, s_n^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{p.s.}$$

On a alors , en posant : $S_n = X_1 + \ldots + X_n$:

$$\limsup_{n\to\infty} S_n / (2 s_n^2 \operatorname{Log}_2 s_n^2)^{\frac{1}{2}} = 1 \qquad \text{p.s.}$$

Ces deux théorèmes ont déjà connu des extensions à différentes classes d' espaces de Banach. Jusqu'il y a peu, ces extensions, ainsi d'ailleurs que celles de la plupart des théorèmes limites réels, s'obtenaient essentiellement en remplaçant les valeurs absolues des v.a.r. par des normes. C'est ainsi que Kuelbs ([6], théorème 3.1) a donné du théorème 2 la généralisation suivante.

THEOREME 3. <u>Soit</u> $(X_n)_n$ <u>une suite de v.a. indépendantes et centrées à valeurs dans un espace de Banach B réel et séparable , vérifiant les deux conditions</u> :

1) $\|X_n\| \le \Gamma_n \sigma_n (\operatorname{Log}_2 \sigma_n)^{-\frac{1}{2}}$ p.s.

<u>où</u> $(\Gamma_n)_n$ <u>est une suite de réels tendant vers 0</u> ,

<u>et</u> $\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n} E\,\|X_i\|^2$ <u>tend vers l'infini</u>.

2) <u>il existe L tel que</u> : $\sup_{n_1} P\{\|S_n\| > L\, a_n\} \le 1 / 24$,

<u>où</u> $a_n = (2 \sigma_n^2 \operatorname{Log}_2 \sigma_n^2)^{\frac{1}{2}}$.

<u>La suite</u> $(S_n / a_n)_n$ <u>est alors presque sûrement bornée</u>.

La condition 1) de ce théorème, et plus généralement les conditions obtenues par substitution des normes aux valeurs absolues, n'imposent aucune restriction sur la nature de l'espace de Banach considéré; mais elles sont rarement satisfaisantes , car trop contraignantes.

Recherchant des analogues plus adéquats des moments des v.a.r. , B. Heinkel ([3] , [4]) a étendu plusieurs résultats classiques (loi des grands nombres de Prokhorov, de Kolmogorov et de Brunk) en utilisant les " variances faibles "

$$l_n = 2^{-2n} \sum_{i=1}^{n} \sup \{ E < X_i , x^* >^2 \ ; \|x^*\| \le 1 \} . \qquad (1.1)$$

L'affaiblissement des hypothèses résultant de l'emploi de ces variances nécessite en contrepartie d'imposer des limitations à la nature de l'espace de Banach : dans [3] et [4] les résultats sont formulés dans le cadre des espaces de Banach uniformément lisses. Voici par exemple la généralisation du théorème 1 aux espaces 2 - uniformément lisses obtenue par B. Heinkel dans [3] .

THEOREME 4. Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. indépendantes et centrées à valeurs dans un espace de Banach réel, séparable et 2 - uniformément lisse B. Supposons vérifiées les trois conditions :

1) $\exists\ C \geq 0\ ,\ \forall\ n \geq 1 \qquad \|X_n\| \leq C\, n / \mathrm{Log}_2\, n$ p.s.

2) $\lim\limits_{n \to \infty} n^{-2} \sum\limits_{i=1}^{n} E\,\|X_i\|^2 = 0$

3) $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \sum\limits_{n\geq 1} \exp(-\varepsilon l_n^{-1}) < \infty$ (où l_n est défini en (1.1))

Sous ces hypothèses la suite $(X_n)_n$ vérifie la loi forte des grands nombres.

La condition 3) du théorème 4 n'est pas encore pleinement satisfaisante, car on construit facilement des exemples prouvant qu'elle n'est pas nécessaire.

Prolongeant les travaux de B. Heinkel nous avons montré dans [1] que les expressions naturellement adaptées à la généralisation du théorème 1 sont en fait les moments faibles

$$\lambda_n = 2^{-2n} \sup \{ \sum_{2^n < i \leq 2^{n+1}} E < X_i\ ,\ x^* >^2\ ;\ x^* \in B^*\ ,\ \|x^*\| \leq 1 \}. \quad (1.2)$$

D'une part en effet ([1], théorème 4) dans tout espace de Banach , une condition nécessaire pour qu'une suite $(X_n)_n$ de v.a. indépendantes, centrées et vérifiant la condition 1) du théorème 4 satisfasse la loi forte des grands nombres est :

$$\forall\ \varepsilon > 0 \qquad \sum_{n\geq 1} \exp(-\varepsilon\, \lambda_n^{-1}) < \infty\ .$$

Et d'autre part la condition précédente permet effectivement d'obtenir une extension du théorème de Prokhorov. Celle démontrée dans [1] utilise la notion d'espace de type p, dont nous rappelons préalablement la définition .

Un espace de Banach $(B, \|\ \|)$ est de type p, $p \in [1,2]$, s'il existe une constante C telle que pour toute suite finie $(X_1,\dots,X_n)$ de v.a. indépendantes et centrées à valeurs dans B on ait l'inégalité :

$$E\,\|\sum_{i=1}^{n} X_i\,\|^p \leq C \sum_{i=1}^{n} E\,\|X_i\|^p\ .$$

Nous pouvons maintenant énoncer la loi de Prokhorov de [1] .

THEOREME 5. <u>Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. indépendantes et centrées à valeurs dans un espace de Banach réel, séparable et de type</u> $p \in]1,2]$. <u>On suppose vérifiées les conditions suivantes</u> :

1) <u>il existe une suite $(C_n)_n$ tendant vers 0 telle que</u> :

$$\forall\, n \geq 1 \qquad \|X_n\| \leq C_n\, n \,/\, \mathrm{Log}_2\, n \qquad \text{p.s.}$$

2) $$\lim_{n \to \infty} n^{-p} \sum_{i=1}^{n} E\,\|X_i\|^p = 0$$

3) $$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \sum_{n\geq 1} \exp(-\,\varepsilon\, \lambda_n^{-1}) < \infty \qquad \text{(où } \lambda_n \text{ est défini en (1.2))}$$

<u>Sous ces hypothèses la suite $(X_n)_n$ satisfait la loi forte des grands nombres.</u>

La démonstration de ce théorème repose sur une méthode de randomisation gaussienne mise au point par M. Ledoux ([7]) pour prouver la l.l.i. équidistribuée dans les espaces de type 2 .

Le théorème précédent laisse supposer que des moments faibles analogues à ceux définis en (1.2) sont également appropriés à l'extension d'autres théorèmes limites réels dans le cadre non équidistribué. L'objectif principal de cet article est de montrer qu'il en est bien ainsi; l'illustration en est fournie par les trois théorèmes ci-dessous (théorèmes 6, 7 et 8) .

Le théorème 6 est une extension de la l.l.i. de Kolmogorov. Par son cadre , les espaces de type p, et ses hypothèses, il est en parenté avec le théorème 5, ce qui n'est pas surprenant compte tenu des similitudes bien connues des théorèmes réels correspondants; on verra plus loin que les théorèmes 5 et 6 possèdent en fait une démonstration essentiellement identique . Voici l'énoncé du théorème 6.

THEOREME 6. <u>Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. indépendantes et centrées à valeurs dans un espace de Banach B réel, séparable et de type</u> $p \in [1,2]$, <u>de dual topologique B^*.</u>
<u>On pose pour tout entier n :</u>

$$\sigma_n = \sup \{\, E < S_n, x^* >^2 \;;\; x^* \in B^* \,,\; \|x^*\| \leq 1 \,\}^{\frac{1}{2}} .$$

<u>Soit $(s_n)_n$ une suite croissante de réels > 0. On suppose vérifiées les conditions suivantes</u> :

1) $$\forall\, n \geq 1 \qquad \|X_n\| \leq s_n\, (\,\mathrm{Log}_2\, s_n\,)^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{p.s.}$$

2) $\sup_{n\geq 1} [s_n(\mathrm{Log}_2\, s_n)^{\frac{1}{2}}]^{-p} \sum_{i=1}^{n} E\, \|X_i\|^p < \infty$

3) $\exists\, c > 0 ,\ \forall\, n \geq 1 \qquad \sigma_n \leq c\, s_n$

4) $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$

La suite $(S_n / s_n(\mathrm{Log}_2\, s_n)^{\frac{1}{2}})_n$ est alors presque sûrement bornée.

REMARQUE. La classe des espaces auxquels le théorème 6 s'applique est d'autant plus étendue que p est proche de 1, le cas p=1 correspondant à un énoncé vrai dans tout espace de Banach (puisque tout espace de Banach est de type 1). Mais corrélativement la condition 2) est d'autant plus restrictive que p est proche de 1 .

On constate que dans le théorème précédent la suite de normalisation n'est pas directement liée à un quelconque moment, fort ou faible, ce qui autorise une grande latitude d'application; en particulier, dans le cas où B est de type 2 et $s_n = (\sum_{i=1}^{n} E\,\|X_i\|^2)^{\frac{1}{2}}$, on retrouve le théorème 3.

Les similitudes mentionnées plus haut entre les théorèmes 5 et 6 nous ont incité à rechercher un énoncé généralisant simultanément ces deux théorèmes. Grâce à la méthode de randomisation gaussienne de M. Ledoux une telle généralisation a effectivement pu être obtenue. Elle englobe des situations bien plus vastes que celles des théorèmes 5 et 6, situations dont très peu ont, semble-t-il, été considérées jusqu'à présent, même dans le cas scalaire. Voici cette généralisation.

THEOREME 7. Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. indépendantes et centrées à valeurs dans un espace de Banach réel, séparable et de type $p \in [1,2]$. Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites croissantes de réels > 0, et $(n_k)_k$ une suite strictement croissante d'entiers. On pose pour $k \geq 1$:

$$I_k =]n_{k-1}, n_k] \qquad \text{et} \qquad \sigma_k = \sup \{ \sum_{i\in I_k} E < X_i, x^* >^2 \ ; \|x^*\| \leq 1 \}^{\frac{1}{2}} .$$

On suppose vérifiées les conditions suivantes.

1) $\exists\, \delta > 0$ tel que : $\sum_{k\geq 1} \exp(-\delta\, a_{n_k} / b_{n_k}) < \infty$

2) $\exists\, \alpha > 0 ,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \|X_n\| \leq \alpha\, b_n \qquad$ p.s.

3) $\sup_{k\geq 1} a_{n_k}^{-p} \sum_{i\in I_k} E\|X_i\|^p = \beta < \infty$

4) $\exists\ \gamma > 0$ __tel que :__ $\sum_{k\geq 1} \exp[-\gamma\,(a_{n_k}/\sigma_{n_k})^2] < \infty$

__Il existe alors une fonction__ $\Phi : R_+^4 \to R_+$, __ne dépendant que de l'espace B et vérifiant :__

$$\forall\ y \in R_+ \qquad \lim_{x\to 0;\, x\in R^3} \Phi(x,y) = 0 ,$$

__telle que l'on ait pour toute suite orthogaussienne__ $(g_n)_n$ __indépendante de la suite__ $(X_n)_n$, __et pour n assez grand :__

$$E \sup_{k\geq n} a_{n_k}^{-1} \|\sum_{i\in I_k} g_i X_i\| \leq \Phi(\alpha,\beta,\gamma,\delta). \tag{1.3}$$

Le théorème 7 s'applique lorsqu'on se propose d'établir une loi des grands nombres en prouvant l'égalité : $\lim_{n\to\infty} E \sup_{k\geq n} \|S_k / a_k\| = 0$ (resp. une l.l.i. en prouvant : $E \sup_{n\geq 1} \|S_n / a_n\| < \infty$) , car dans ce cas une méthode standarde permet de se restreindre à montrer que le membre de gauche de (1.3) tend vers 0 quand k tend vers l'infini (resp. est fini). Pour passer des sommes S_n / a_n aux sommations par bloc de (1.3) on utilise dans un premier temps une hypothèse de convergence ou de bornitude en probabilité afin de pouvoir supposer les variables symétriques, et donc de raisonner sur les sommes $a_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i X_i$, où $(\varepsilon_n)_n$ est une suite de Rademacher indépendante de la suite $(X_n)_n$. Au moyen de l'inégalité de Jensen, on remplace ensuite ces variables de Rademacher par une suite orthogaussienne $(g_n)_n$ indépendante de $(X_n)_n$. Enfin un procédé classique de réduction à des blocs par extraction de sous-suite ramène au membre de gauche de (1.3). On trouvera un exemple d'emploi d'une telle méthode dans la démonstration du théorème 6.

__REMARQUE.__ Le théorème 5 se déduit du théorème 7 en prenant $a_n = n$, $b_n = C_n\, n / \mathrm{Log}_2 n$ et $n_k = 2^k$. Comme dans la démonstration directe (cf. [1]) on ne peut se contenter de $C_n = O(1)$; on ne sait pas si la restriction $C_n = o(1)$ est due à la technique employée ou si elle provient du passage à la dimension infinie.

Plus généralement on ne peut déduire du théorème 7 une loi forte des grands nombres qu'en faisant intervenir une suite $(C_n)_n$ tendant vers 0 dans une condition analogue à la condition 1) du théorème 5. C'est ce qui empêche de retrouver pleinement des résultats qui, comme le corollaire 2 de [13] , relèvent pourtant du cadre du théorème 7.

Nous terminerons cette partie avec un autre exemple d'utilisation des " variances faibles " dans l'extension de théorèmes réels. Il a pour origine un article de R. Wittmann ([14]) où sont étudiées diverses l.l.i. dont les énoncés comportent comme hypothèse essentielle un analogue de la conditin 1) du théorème 8 ci-dessous. Ce dernier théorème généralise partiellement plusieurs résultats de [14]. Du fait qu'on ne s'y intéresse qu'à la finitude de la limite supérieure : $\limsup_{n \to \infty} \|S_n / a_n\|$, on a pu adopter des hypothèses comparativement moins restrictives que dans [14] .

THEOREME 8. <u>Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. indépendantes et centrées à valeurs dans un espace de Banach B réel, séparable et de type p $\in [1,2]$; soit $(s_n)_n$ une suite croissante de réels > 0. On pose pour tout entier n</u> :

$$a_n = s_n (\mathrm{Log}_2\, s_n)^{\frac{1}{2}} \quad \underline{\text{et}} \quad \sigma_n = \sup \{ E < S_n, x^* >^2 \ ;\ \|x^*\| \le 1 \}^{\frac{1}{2}} .$$

<u>On suppose vérifiées les conditions suivantes</u> :

1) $\exists\, \delta \in\ ]0,2p]$ <u>tel que</u> : $\sum_{n\geq 1} a_n^{-\delta} E \|X_n\|^{\delta} < \infty$

2) $\sup_{n\geq 1} a_n^{-p} \sum_{i=1}^{n} E\|X_i\|^p < \infty$

3) $\exists\, c > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\qquad \sigma_n \le c\, s_n$

4) $\lim_{n \to \infty} s_n = \infty$

<u>La suite $(S_n / a_n)_n$ est alors presque sûrement bornée</u>.

Dans le cas où B = $\mathbb{R}$ le théorème précédent se simplifie en :

COROLLAIRE 9. <u>Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.r. indépendantes et centrées. Posons</u> :

$$s_n = \Big(\sum_{i=1}^{n} E X_i^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \quad \underline{\text{et}} \quad a_n = s_n (\mathrm{Log}_2\, s_n)^{\frac{1}{2}} .$$

<u>Pour que la suite $(S_n / a_n)_n$ soit presque sûrement bornée, il suffit que soient satisfaites les deux conditions</u> :

1) $\exists\ \delta \in]0,4]$ tel que : $\sum_{n\geq 1} a_n^{-\delta}\ E\ |X_n|^{\delta} < \infty$

2) $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$.

Le théorème 8, ainsi que les théorèmes 6 et 7, seront démontrés dans la seconde partie de cet article. Dans une troisième et dernière partie on donnera d'abord deux conséquences des résultats précédents : une loi de Brunk en corollaire du théorème 5 et la l.l.i. équidistribuée dans les espaces de type 2 en corollaire du théorème 8. On énoncera ensuite une loi des grands nombres qui est le pendant exact du théorème 8. On conclura par quelques applications du théorème 8.

2. Démonstrations des théorèmes 6, 7 et 8.

Les démonstrations des théorèmes 6 et 8 sont des adaptations de la méthode de randomisation gaussienne de M. Ledoux exposée dans [7]. Elles utilisent les notations et conventions suivantes :

. B^* désigne le dual topologique de l'espace de Banach B considéré, B_1^* sa boule unité fermée.

. Etant donnée la suite $(X_n)_n$ de v.a. à valeurs dans B, on notera $(X'_n)_n$ une copie indépendante de cette suite, $(\varepsilon_n)_n$ une suite de v.a.r. de Rademacher indépendantes, $(g_n)_n$ et $(g'_n)_n$ des suites de v.a.r. gaussiennes indépendantes, centrées et réduites. Toutes ces suites seront supposées indépendantes entre elles, de sorte qu'il sera possible de les définir sur des espaces distincts et de prendre pour espace probabilisé de base un produit de ces espaces. On notera alors E_X (resp. $E_{X'}$, E_ε,..) l'espérance par rapport au facteur sur lequel est définie la suite $(X_n)_n$ (resp. $(X'_n)_n$, $(\varepsilon_n)_n$,..).

. On pose pour tout $x \geq 0$: $\mathrm{Log}\ x = \ln(x \vee e)$ et $\mathrm{Log}_2\ x = \ln[\ln(x \vee e^e)]$.

. Démonstration du théorème 7.

1ère étape. Pour tout couple d'entiers (m,n) vérifiant $m \leq n$ posons :

$$A_m^n = E \sup_{k=m}^{n} a_{n_k}^{-1} \Big\| \sum_{i\in I_k} g_i\ X_i \Big\| .$$

L'hypothèse 2) assure que A_m^n est fini. En conséquence de l'inégalité isopérimétrique gaussienne de C. Borell (voir [7]), il existe une constante $K_1 > 0$ telle que :

$$A_m^n \leq K_1 (B_m^n + C_m^n) , \qquad (2.1)$$

avec $$B_m^n = E_X \sup_{k=m}^{n} a_{n_k}^{-1} E_g \| \sum_{i \in I_k} g_i X_i \|$$

et $$C_m^n = E \sup_{k=m}^{n} \{ |g_k| a_{n_k}^{-1} \sup (\sum_{i \in I_k} < X_i, x^* >^2 ; \|x^*\| \leq 1) \}.$$

. <u>$2^{\text{ème}}$ étape</u>. Si C désigne la constante de type de l'espace B, on a en posant $K_2 = (C E |g_1|^p)^{1/p}$:

$$B_m^n \leq K_2 E \sup_{k \geq m} a_{n_k}^{-1} (\sum_{i \in I_k} \|X_i\|^p)^{1/p}$$

$$\leq K_2 \int_0^\infty P\{ \sup_{k \geq m} a_{n_k}^{-p} \sum_{i \in I_k} \|X_i\|^p \geq t^p \} dt .$$

Pour tout réel $h \geq 0$, on a par indépendance et inégalité de Tchebychev :

$$P\{ a_{n_k}^{-p} \sum_{i \in I_k} \|X_i\|^p \geq t^p \} \leq e^{-ht^p} \prod_{i \in I_k} E \exp(h a_{n_k}^{-p} \|X_i\|^p) .$$

Puis, tenant compte de la condition 2) :

$$E \exp (h a_{n_k}^{-p} \|X_i\|^p) = 1 + \sum_{j \geq 1} h^j E \|X_i\|^{pj} / j! a_{n_k}^{pj}$$

$$\leq 1 + E \|X_i\|^p \sum_{j \geq 1} h^j (\alpha b_{n_k})^{pj-p} / j! a_{n_k}^{pj}$$

$$\leq 1 + (\alpha b_{n_k})^{-p} E \|X_i\|^p \sum_{j \geq 1} (\alpha^p h b_{n_k}^p / a_{n_k}^p)^j / j! .$$

On choisit $h = a_{n_k}^p / \alpha^p b_{n_k}^p$ pour obtenir :

$$P\{ a_{n_k}^{-p} \sum_{i \in I_k} \|X_i\|^p \geq t^p \} \leq \exp[- (t^p - e a_{n_k}^{-p} \sum_{i \in I_k} E \|X_i\|^p) a_{n_k}^p / \alpha^p b_{n_k}^p]$$

La condition 3) donne la majoration :

$$\forall k \geq 1 \qquad e a_{n_k}^{-p} \sum_{i \in I_k} E \|X_i\|^p \leq e \beta .$$

Soit $\zeta = \sup \{ (2\beta e)^{1/p}, (2\alpha^p \delta)^{1/p} \}$. Pour $t \geq \zeta$, on a : $t^p \geq 2e\beta$, donc :

$$P\{ a_{n_k}^{-p} \sum_{i \in I_k} \|X_i\|^p \geq t^p \} \leq \exp(- t^p a_{n_k}^p / 2 \alpha^p b_{n_k}^p) .$$

D'où :

$$\int_0^\infty P\{\sup_{k\geq m} a_{n_k}^{-p} \sum_{i\in I_k} \|X_i\|^p \geq t^p\}\,dt \leq \zeta + \sum_{k\geq m} \int_\zeta^\infty \exp(-\ t^p a_{n_k}^p / 2\,\alpha^p b_{n_k}^p)\,dt$$

$$\leq \zeta + \sum_{k\geq m} \int_\zeta^\infty \exp(-\ t\,\zeta^{p-1} a_{n_k}^p / 2\,\alpha^p b_{n_k}^p)\,dt$$

$$\leq \zeta + \sum_{k\geq m} (2\alpha^p b_{n_k}^p / a_{n_k}^p \zeta^{p-1}) \exp(-\ a_{n_k}^p \zeta^p / 2\alpha^p b_{n_k}^p)$$

$$\leq \zeta + \sum_{k\geq m} (2\alpha^p b_{n_k}^p / a_{n_k}^p \zeta^{p-1}) \exp(-\ \delta a_{n_k}^p / b_{n_k}^p)\ .$$

La condition 1) assure l'existence d'un entier m_1 tel que pour $n \geq m \geq m_1$:

$$B_m^n \leq 2\,K_2\,\zeta = 2\,K_2 \sup\{\,(2\beta e)^{1/p},\ (2\alpha^p\delta)^{1/p}\,\}\ . \qquad (2.2)$$

. 3ème étape. Par l'inégalité de Minkowski :

$$C_m^n \leq D_m^n + E_m^n\ , \qquad (2.3)$$

où $\quad D_m^n = E \sup_{k=m}^{n} \{\,|g_k|\,\sigma_{n_k} / a_{n_k}\}$

et $\quad E_m^n = E \sup_{k=m}^{n} \{\,a_{n_k}^{-1} |g_k| \sup_{\|x^*\|\leq 1} |\sum_{i\in I_k} < X_i, x^*>^2 - E< X_i, x^*>^2|^{\frac{1}{2}}\,\}\ .$

a) On a clairement :

$$D_m^n \leq (2\gamma)^{\frac{1}{2}} + \sum_{k\geq m} \int_{(2\gamma)^{\frac{1}{2}}}^\infty P\{\,|g_k|\,\sigma_{n_k} a_{n_k}^{-1} \geq t\}\,dt$$

$$\leq (2\gamma)^{\frac{1}{2}} + \sum_{k\geq m} \int_{(2\gamma)^{\frac{1}{2}}}^\infty \sigma_{n_k} a_{n_k}^{-1}\,t^{-1} \exp(-\ t^2 a_{n_k}^2 / 2\,\sigma_{n_k}^2\ )\,dt$$

$$\leq (2\gamma)^{\frac{1}{2}} + \sum_{k\geq m} (2\gamma)^{-\frac{1}{2}} \sigma_{n_k} a_{n_k}^{-1} \int_{(2\gamma)^{\frac{1}{2}}}^\infty \exp(-\ a_{n_k}^2 (2\gamma)^{\frac{1}{2}}\,t / 2\,\sigma_{n_k}^2)\,dt$$

$$\leq (2\gamma)^{\frac{1}{2}} + \sum_{k\geq m} \gamma^{-1} \sigma_{n_k}^3 a_{n_k}^{-3} \exp(-\ \gamma\,a_{n_k}^2\,\sigma_{n_k}^{-2})\ .$$

La condition 4) assure donc l'existence d'un entier $m_2 \geq m_1$ tel que pour $n \geq m \geq m_2$ on ait :

$$D_m^n \leq 2\,\gamma^{\frac{1}{2}}\ . \qquad (2.4)$$

b) Posons :

$$F_m^n = E \sup_{k=m}^{n} \{\,a_{n_k}^{-2} g_k^2 \sup\{|\sum_{i\in I_k} < X_i, x^*>^2 - E< X_i, x^*>^2|\,;\|x^*\|\leq 1\}\}.$$

Par l'inégalité de Schwarz :

$$E_m^n \leq F_m^{n\,\frac{1}{2}} . \qquad (2.5)$$

En utilisant l'indépendance et l'inégalité de Jensen on obtient la suite de majorations (dans laquelle on a posé : $M = E\,|g_1'|$) :

$$F_m^n = E \sup_{k=m}^{n} \{ a_{n_k}^{-2}\, g_k^2 \sup \{ | \sum_{i\in I_k} < X_i, x^*>^2 - E < X_i', x^*>^2 | \; ; \|x^*\|\leq 1 \} \}$$

$$\leq E \sup_{k=m}^{n} \{ a_{n_k}^{-2}\, g_k^2 \sup \{ | \sum_{i\in I_k} < X_i, x^*>^2 - < X_i', x^*>^2 | \; ; \|x^*\|\leq 1 \} \}$$

$$\leq E \sup_{k=m}^{n} \{ a_{n_k}^{-2}\, g_k^2 \sup \{ | \sum_{i\in I_k} \varepsilon_i (< X_i, x^*>^2 - < X_i', x^*>^2) | \; ; \|x^*\|\leq 1 \} \}$$

$$\leq 2M\, E \sup_{k=m}^{n} \{ a_{n_k}^{-2}\, g_k^2 \sup \{ | \sum_{i\in I_k} g_i' < X_i, x^*>^2 | \; ; \|x^*\|\leq 1 \} \} . \qquad (2.6)$$

Fixons à présent les variables liées aux suites $(g_n)_n$ et $(X_n)_n$, et considérons , sur l'ensemble $([m,n]\cap\mathbb{N})\times B_1^*$, le processus gaussien :

$$G(k,x^*) = a_{n_k}^{-2}\, g_k^2 \sum_{i\in I_k} g_i' < X_i, x^*>^2 .$$

On vérifie sans peine que : $\forall\, x^*, y^* \in B_1^*$, $\forall\, k,l \in ([m,n]\cap\mathbb{N})\times B_1^*$, $k\neq l$:

$$E_{g'} [G(k,x^*) - G(k,y^*)]^2 \leq 4\, a_{n_k}^{-4}\, g_k^4 \sum_{i\in I_k} \|X_i\|^2 (< X_i, x^*> - < X_i, y^*>)^2$$

et

$$E_{g'} [G(k,x^*) - G(l,y^*)]^2 = a_{n_k}^{-4}\, g_k^4 \sum_{i\in I_k} < X_i, x^*>^4 + a_{n_l}^{-4}\, g_l^4 \sum_{i\in I_l} < X_i, y^*>^4 ,$$

si bien que l'écart induit par G est majoré par celui induit par le processus gaussien :

$$G'(k,x^*) = 2\, a_{n_k}^{-2}\, g_k^2 \sum_{i\in I_k} < X_i, x^*> \|X_i\|\, g_i' .$$

On peut alors appliquer un théorème de comparaison gaussienne basé sur le lemme de Slepian ([2], théorème 2.1.2.) et déduire de (2.6) :

$$F_m^n \leq 8M\, E \sup_{k=m}^{n} \{ a_{n_k}^{-2}\, g_k^2 \sup \{ | \sum_{i\in I_k} < X_i, x^*> \|X_i\|\, g_i' | \; ; \|x^*\|\leq 1 \} \}$$

$$= 8M\, E \sup_{k=m}^{n} \{ a_{n_k}^{-2}\, g_k^2 \, \| \sum_{i\in I_k} g_i' \|X_i\|\, X_i \| \} .$$

Grâce à un principe de contraction utilisant la condition 2) il vient :

$$F_m^n \leq K_3 \, E \sup_{k=m}^{n} \{ g_k^2 \, (\alpha \, b_{n_k} a_{n_k}^{-1}) \, a_{n_k}^{-1} \, \| \sum_{i \in I_k} g_i' \, X_i \| \} . \qquad [K_3 = 8M]$$

Puis par indépendance :

$$F_m^n \leq K_3 \alpha \, E \sup_{k=m}^{n} \{ g_k^2 \, b_{n_k} a_{n_k}^{-1} \} \, A_m^n .$$

On a ensuite facilement :

$$E \sup_{k=m}^{n} \{ g_k^2 \, b_{n_k} a_{n_k}^{-1} \} \leq 2\delta + \sum_{k \geq m} \int_{2\delta}^{\infty} P\{ g_k^2 \, b_{n_k} a_{n_k}^{-1} \geq t \} \, dt$$

$$\leq 2\delta + \sum_{k \geq m} (b_{n_k} a_{n_k}^{-1})^{\frac{1}{2}} \int_{2\delta}^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} \exp(- t \, a_{n_k} / 2 \, b_{n_k}) \, dt$$

$$\leq 2\delta + (2\delta)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \geq m} (b_{n_k} a_{n_k}^{-1})^{3/2} \exp(- \delta \, a_{n_k} b_{n_k}^{-1}) .$$

La condition 1) assure par conséquent l'existence d'un entier $m_3 \geq m_2$ tel que pour $n \geq m \geq m_3$ on ait :

$$E \sup_{k=m}^{n} \{ g_k^2 \, b_{n_k} a_{n_k}^{-1} \} \leq 3\delta .$$

D'où pour $n \geq m \geq m_3$:

$$F_m^n \leq 3\alpha\delta K_3 \, A_m^n . \qquad (2.7)$$

. <u>$4^{\text{ème}}$ étape</u>. Finalement les inégalités (2.1) à (2.5) et (2.7) permettent d'établir l'inégalité suivante, valable pour $n \geq m \geq m_3$:

$$A_m^n \leq K_1 \left[2K_2 \sup \{ (2e\beta)^{1/p} , \alpha(2\delta)^{1/p} \} + 2\gamma^{\frac{1}{2}} + (3\alpha\delta K_3)^{\frac{1}{2}} A_m^{n \, \frac{1}{2}} \right] .$$

Posons : $\lambda = \lambda(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = K_1 \left[2K_2 \sup \{ (2e\beta)^{1/p} , \alpha(2\delta)^{1/p} \} + 2\gamma^{\frac{1}{2}} \right]$

et : $\mu = \mu(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = K_1 \, (3\alpha\delta K_3)^{\frac{1}{2}}$.

Le polynôme : $x^2 - \mu x - \lambda$ a pour racines :

$x_1 = x_1(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \frac{1}{2}(\mu - (\mu^2 + 4\lambda)^{\frac{1}{2}})$ et $x_2 = x_2(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \frac{1}{2}(\mu + (\mu^2 + 4\lambda)^{\frac{1}{2}})$.

Comme : $x_1 < 0$ et $x_2 > 0$, et que : $A_m^n - \mu A_m^{n \, \frac{1}{2}} - \lambda \leq 0$,

nécessairement : $A_m^n \leq x_2^2$.

D'où par passage à la limite :

$$\forall\ m \geq m_3 \qquad A_m = E \sup_{k\geq m} a_{n_k}^{-1} \Big\| \sum_{i\in I_k} g_i X_i \Big\| \leq x_2^2 .$$

Pour conclure il suffit donc de définir Φ par :

$$\Phi(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = x_2^2(\alpha,\beta,\gamma,\delta) .$$

. Démonstration du théorème 6.

Nous ne ferons que l'esquisser. Posons $a_n = s_n(\mathrm{Log}_2 s_n)^{\frac{1}{2}}$. L'espace étant de type p, la condition 2) implique que la suite $(S_n/a_n)_n$ est bornée en probabilité, ce qui permet de supposer les variables symétriques. On a alors évidemment :

$$E \sup_{n\geq 1} \|S_n / a_n\| = E \sup_{n\geq 1} \Big\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i X_i / a_n \Big\| ,$$

et par un principe de contraction utilisant l'inégalité de Jensen :

$$E \sup_{n\geq 1} \Big\| a_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i X_i \Big\| \leq (E|g_1|)^{-1} E \sup_{n\geq 1} \Big\| a_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} g_i X_i \Big\| . \qquad (2.8)$$

On se donne alors un réel $M > 1$; il existe, d'après le lemme 3.3 de [14], une sous-suite $(n_k)_k$ et un réel N tels que :

$$\forall\ k \geq 1 \qquad M\, s_{n_k} \leq s_{n_{k+1}} \leq M^3 s_{n_k+1}$$

$$\text{et:} \qquad M\, a_{n_k} \leq a_{n_{k+1}} \leq N\, a_{n_k+1} .$$

Par un procédé standard de réduction à des blocs et l'inégalité de Lévy on montre que la finitude du membre de droite de (2.8) résulte de :

$$\exists\ m \in \mathbb{N} \qquad E \sup_{l\geq m} a_{n_l}^{-1} \Big\| \sum_{i\in I_l} g_i X_i \Big\| < \infty .$$

Cette dernière inégalité est une conséquence facile du théorème 7 .

. Démonstration du théorème 8.

Elle procède en 3 étapes.

. 1ère étape. L'espace B étant de type p, la condition 2) du théorème 8 assure que la suite $(S_n / a_n)_n$ est bornée en probabilité, ce qui permet de supposer les variables X_n symétriques. On pose pour tout entier n :

$$Y_n = X_n \, I_{\{\|X_n\| \le a_n\}} , \qquad T_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i ,$$

et: $$Z_n = X_n - Y_n , \qquad U_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i .$$

De façon évidente :

$$\sup_{n\ge 1} \| S_n / a_n \| \le \sup_{n\ge 1} \| T_n / a_n \| + \sup_{n\ge 1} \| U_n / a_n \| .$$

Par l'inégalité de Tchebychev :

$$P\{ \|X_n\| \ge a_n \} \le a_n^{-\delta} \, E \|X_n\|^{\delta} ;$$

et la condition 1) entraîne par conséquent :

$$P\{ \limsup_{n\to\infty} \{Z_n = 0\} \} = 0 .$$

Il en résulte que la suite $(U_n / a_n)_n$ est presque sûrement bornée. Pour démontrer le théorème, il suffit donc d'établir :

$$E \sup_{n\ge 1} \| T_n / a_n \| < \infty . \tag{2.9}$$

On procède pour cela comme dans la démonstation du théorème 6 : on se donne un réel $M > 1$; d'après le lemme 3.3 de [14], il existe une sous-suite $(n_k)_k$ et un réel N tels que :

$$\forall \; k \ge 0 \qquad M \, s_{n_k} \le s_{n_{k+1}} \le N \, s_{n_k+1} \tag{2.10}$$

$$\text{et:} \qquad M \, a_{n_k} \le a_{n_{k+1}} \le N \, a_{n_k+1} . \tag{2.11}$$

On pose pour tout $k \ge 1$: $I_k =]n_{k-1}, n_k]$.

(2.9) est alors une conséquence de l'inégalité :

$$E \sup_{l\ge 1} a_{n_l}^{-1} \| \sum_{i\in I_l} g_i Y_i \| < \infty ,$$

que l'on va prouver.

Par l'inégalité isopérimétrique gaussienne de C. Borell, il existe une constante K_1 telle que :

$$E \sup_{l\ge 1} a_{n_l}^{-1} \| \sum_{i\in I_l} g_i Y_i \| \le K_1 \, (A + B) , \tag{2.12}$$

où $\quad A = E_Y \sup\limits_{l\geq 1} a_{n_l}^{-1} E_g \| \sum\limits_{i\in I_l} g_i Y_i \|$

et $\quad B = E \sup\limits_{l\geq 1} \{ a_{n_l}^{-1} |g_l| \sup \{ (\sum\limits_{i\in I_l} < Y_i, x^* >^2)^{\frac{1}{2}} \; ; \|x^*\| \leq 1\} \}$.

. <u>$2^{\text{ème}}$ étape</u>. Montrons que A est fini. Désignant par C la constante de type de l'espace B, on a :

$$A \leq C \, E \sup_{l\geq 1} a_{n_l}^{-1} (\sum_{i\in I_l} \|Y_i\|^p)^{1/p}.$$

Soit $L \geq 1$ tel que : $\qquad \sup\limits_{m\geq 1} a_m^{-p} \sum\limits_{i=1}^{m} E\|X_i\|^p \leq L$.

On a pour tout $l \geq 1$:

$$a_{n_l}^{-p} \sum_{i\in I_l} E\|Y_i\|^p \leq L .$$

D'où :

$$C^{-1} A \leq 2L + \sum_{l\geq 1} \int_{2L}^{\infty} P\{ a_{n_l}^{-p} \sum_{i\in I_l} \|Y_i\|^p \geq t^p\} \, dt$$

$$\leq 2L + \sum_{l\geq 1} \int_{2L}^{\infty} P\{ a_{n_l}^{-p} \sum_{i\in I_l} (\|Y_i\|^p - E\|Y_i\|^p) \geq t^p - a_{n_l}^{-p} \sum_{i\in I_l} \|Y_i\|^p \} \, dt$$

$$\leq 2L + \sum_{l\geq 1} \int_{2L}^{\infty} P\{ a_{n_l}^{-p} \sum_{i\in I_l} (\|Y_i\|^p - E\|Y_i\|^p) \geq t^p / 2 \} \, dt .$$

L'inégalité de Tchebychev permet d'écrire :

$$C^{-1} A \leq 2L + (4 \int_{2L}^{\infty} t^{-2p} \, dt) \sum_{l\geq 1} a_{n_l}^{-2p} \sum_{i\in I_l} E\|Y_i\|^{2p}.$$

Tenant compte des inégalités :

$$\forall \; i \in I_l \qquad \|Y_i\| \leq a_i \qquad \text{et} \qquad a_{n_l} \geq a_i \; ,$$

on obtient facilement :

$$C^{-1} A \leq 2L + K_2 \sum_{l\geq 1} (\sum_{i\in I_l} a_i^{-\delta} E\|X_i\|^{\delta})$$

$$\leq 2L + K_2 \sum_{n\geq 1} a_n^{-\delta} E\|X_n\|^{\delta}.$$

La condition 1) entraîne donc la finitude de A.

. <u>$3^{\text{ème}}$ étape</u>. Par l'inégalité de Minkowski :

$$B \leq B' + B'' , \tag{2.13}$$

où $B' = E \sup_{l\geq 1} \{ a_{n_l}^{-1} |g_l| \sup \{ |\sum_{i\in I_l} <Y_i,x^*>^2 - E<Y_i,x^*>^2|^{\frac{1}{2}} ; \|x^*\|\leq 1\} \}$

et $B'' = E \sup_{l\geq 1} \{ |g_l| \sigma'_l a_{n_l}^{-1} \}$

avec $\sigma'_l = \sup \{(\sum_{i\in I_l} E<Y_i,x^*>^2)^{\frac{1}{2}} ; \|x^*\|\leq 1\}$.

a) La condition 3) donne : $\sigma'_l \leq \sigma_{n_l} \leq c\, s_{n_l}$.

D'où : $\sigma'_l a_{n_l}^{-1} \leq c\, s_{n_l} a_{n_l}^{-1} \leq c\, (\mathrm{Log}_2\, s_{n_l})^{-\frac{1}{2}}$.

En supposant $s_{n_0} \geq 1$, on a grâce à (2.10) :

$\forall\ l \geq 1 \qquad s_{n_l} \geq M^l s_{n_0} \geq M^l$.

Il existe donc une constante $d > 0$ et un entier l_o tels que pour $l \geq l_o$:

$\mathrm{Log}_2\, s_{n_l} \geq \mathrm{Log}_2\, M^l \geq \mathrm{Log}\, l$.

Par conséquent pour tout $l \geq l_o$:

$\sigma'_l a_{n_l}^{-1} \leq c\, d^{-\frac{1}{2}} (\mathrm{Log}\, l)^{-\frac{1}{2}}$,

et il est clair que cette dernière inégalité entraîne la finitude de B'' .

b) Par l'inégalité de Jensen on a, en posant $K_3 = E|g_1|^{2p}$:

$$B'^{2p} \leq E \sup_{l\geq 1} \{ a_{n_l}^{-2p} |g_l|^{2p} \sup \{ |\sum_{i\in I_l} <Y_i,x^*>^2 - E<Y_i,x^*>^2|^p ; \|x^*\|\leq 1\} \}$$

$$\leq \sum_{l\geq 1} E\, a_{n_l}^{-2p} |g_l|^{2p} \sup \{ |\sum_{i\in I_l} <Y_i,x^*>^2 - E<Y_i,x^*>^2|^p ; \|x^*\|\leq 1 \}$$

$$\leq K_3 \sum_{l\geq 1} a_{n_l}^{-2p} E \sup \{ |\sum_{i\in I_l} <Y_i,x^*>^2 - E<Y_i,x^*>^2|^p ; \|x^*\|\leq 1 \} .$$

Comme dans la démonstration du théorème 7 on utilise un théorème de comparaison gaussienne pour obtenir :

$$B'^{2p} \leq K_4 \sum_{l\geq 1} a_{n_l}^{-2p} E \sup \{ |\sum_{i\in I_l} g_i \|Y_i\| <Y_i,x^*>|^p ; \|x^*\|\leq 1 \}$$

$$\leq K_4 \sum_{l\geq 1} a_{n_l}^{-2p} E \|\sum_{i\in I_l} g_i Y_i \|Y_i\| \|^p .$$

Finalement B étant de type p il vient :

$$B'^{2p} \leq K_5 \sum_{l\geq 1} a_{n_l}^{-2p} \sum_{i\in I_l} E\|Y_i\|^{2p} .$$

L'étape précédente a montré que la série figurant dans l'inégalité ci-dessus est convergente. D'où la finitude de B' qui, jointe à celles de A et B'', achève la démonstration du théorème 8 .

3. Résultats annexes et corollaires.

a) Corollaires des théorèmes 5 et 8.

On sait que la loi des grands nombres de Brunk peut s'obtenir comme corollaire de la loi des grands nombres de Prokhorov (voir [8], page 271). De façon tout à fait analogue on déduit du théorème 5 la généralisation suivante de la loi de Brunk.

PROPOSITION 10. Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. indépendantes et centrées à valeurs dans un espace de Banach B réel, séparable et de type $p \in]1,2]$. On suppose vérifiées les conditions suivantes :

1) il existe une suite $(C_n)_n$ tendant vers 0 telle que :

$$\sum_{n\geq 1} P\{\|X_n\| > C_n\, n / \mathrm{Log}_2\, n\} < \infty$$

2) il existe un réel $r \in [1,\infty[$ tel que :

$$\sum_{n\geq 1} n^{-(r+1)} \sup\{E\,|<X_n,x^*>^2|^{2r} \; ; \|x^*\|\leq 1\} < \infty$$

3) $\lim_{n\to\infty} n^{-p} \sum_{i=1}^{n} E\|X_i\|^p = 0$

La suite $(X_n)_n$ vérifie alors la loi forte des grands nombres.

Dans [14] R. Wittmann prouve en corollaire de ses résultats la l.l.i. équidistribuée sur $\mathbb{R}$. Par une démarche similaire on dérive du théorème 8 la l.l.i. équidistribuée dans les espaces de type 2 de M. Ledoux ([7]).

THEOREME 11. Soit B un espace de Banach de type 2, et X une v.a. à valeurs dans B vérifiant :

1) $E\left(\|X\|^2 / \mathrm{Log}_2 \|X\| \right) < \infty$

2) $\forall\ x^* \in B^*$ $\qquad E < X,x^*>^2 < \infty$ et $E < X,x^*> = 0$

Alors X vérifie la loi du logarithme itéré bornée.

REMARQUE. Les conditions 1) et 2) du théorème 11 sont également des conditions nécessaires pour que X vérifie la loi du logarithme itéré, et ce dans tout espace de Banach (voir [7]).

b) Une extension d'une loi des grands nombres de R. Wittmann.

Dans l'article de R. Wittmann ([14]) figure en corollaire une loi des grands nombres que le théorème 12 ci-dessous généralise et améliore. L'énoncé de ce théorème est le pendant de celui du théorème 8, dont il reprend la démonstration à de légères modifications près.

THEOREME 12. Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. indépendantes et centrées à valeurs dans un espace de Banach B réel, séparable et de type $p \in [1,2]$; et soit $(a_n)_n$ une suite croissante de réels > 0. On suppose vérifiées les conditions suivantes:

1) $\exists\ \delta \in]0,2p]$ tel que $\sum\limits_{n\geq 1} a_n^{-\delta}\, E\|X_n\|^\delta < \infty$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{-p} \sum\limits_{i=1}^{n} E\|X_i\|^p = 0$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n\, a_n^{-1} (\mathrm{Log}_2\, a_n)^{\frac{1}{2}} = 0$ $\qquad$ (où $\sigma_n = \sup\limits_{\|x^*\|\leq 1} (E < S_n,x^*>^2)^{\frac{1}{2}}$)

La suite $(S_n / a_n)_n$ tend alors presque sûrement vers 0.

Lorsque $B = \mathbb{R}$ le théorème 12 prend la forme simplifiée suivante.

COROLLAIRE 13. Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.r. indépendantes et centrées; et soit $(a_n)_n$ une suite de réels > 0. Posons : $s_n = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} E\, X_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Pour que la suite $(S_n / a_n)_n$ converge presque sûrement vers 0, il suffit que soient vérifiées les deux conditions :

1) $\exists\ \delta \in]2,4]$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} a_n^{-\delta}\, E|X_n|^\delta < \infty$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} s_n a_n^{-1} (\mathrm{Log}_2\, a_n)^{\frac{1}{2}} = 0$.

REMARQUE 1. Le cas $\delta \in [1,2]$ relève d'un théorème de Petrov ([10], théorème 12, page 272), qui montre que dans ce cas la condition 1) du corollaire 13 est à elle seule suffisante.

REMARQUE 2. La méthode employée dans la démonstration des théorèmes 8 et 12 permet en fait de prouver des résultats légèrement plus forts. On voit en effet facilement que l'on pourrait, comme dans le théorème 7, introduire dans l'énoncé des théorèmes 8 et 12 une sous-suite $(n_k)_k$ et y remplacer la condition 3) par un analogue de la condition 4) du théorème 7). En particulier on démontrerait ainsi le théorème suivant, correspondant au choix $a_n = n$ dans le théorème 12.

THEOREME 14. Soit $(X_n)_n$ un suite de v.a. indépendantes et centrées à valeurs dans un espace de Banach B réel, séparable et de type $p \in [1,2]$. On suppose vérifiées les conditions suivantes :

1) $\exists\, \delta \in]0,2p]$ tel que $\sum_{n\geq 1} n^{-\delta} E\|X_n\|^\delta < \infty$

2) $\lim_{n\to\infty} n^{-p} \sum_{i=1}^{n} E\|X_i\|^p = 0$

3) $\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \sum_{n\geq 1} \exp(-\varepsilon\, \lambda_n^{-1}) < \infty$

où $\lambda_n = 2^{-2n} \sup \{ \sum_{2^n < i \leq 2^{n+1}} E < X_i, x^* >^2 \ ; \ \|x^*\| \leq 1 \}$

La suite $(S_n / a_n)_n$ converge alors presque sûrement vers 0.

c) Quelques applications du corollaire 9.

Le corollaire 9, joint à la l.l.i. de Kolmogorov et à un argument de troncation, permet de retrouver très facilement divers ensembles de conditions suffisantes pour que la suite $(S_n / a_n)_n$ soit presque sûrement bornée. Nous en avons regroupés trois à titre d'exemple dans la proposition suivante.

PROPOSITION 15. Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.r. indépendantes et centrées; et soit $(a_n)_n$ une suite de réels > 0. Posons: $s_n = (\sum_{i=1}^{n} E X_i^2)^{\frac{1}{2}}$. La suite $(S_n / a_n)_n$ est presque sûrement bornée si l'un des ensembles suivants de conditions est satisfait:

a) (Situation considérée par Petrov dans [9])

i) $\limsup_{n \to \infty} s_n^2 / n > 0$

ii) $\exists\, \delta > 0 \,,\ \exists\, K > 0 \,,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad E|X_n|^{2+\delta} \leq K$

b) (Situation considérée par Petrov dans [10], théorème 2, page 303)

i) $\lim_{n \to \infty} s_n = \infty$

ii) $\exists\, c > 0 \quad \sum_{n\geq 1} a_n^{-2}\, E\, X_n^2\, I_{\{|X_n| \geq c s_n (\mathrm{Log}_2\, s_n)^{-\frac{1}{2}}\}} < \infty$

c) (Situation considérée par Teicher dans [12], théorème 1)

i) $\lim_{n \to \infty} s_n = \infty$

ii) $\exists\, \delta > 0 \quad \sum_{n\geq 1} P\{\, |X_n| > \delta\, a_n\} < \infty$

iii) $\exists\, c > 0 \quad \sum_{n\geq 1} a_n^{-2}\, E\, X_n^2\, I_{\{c s_n (\mathrm{Log}_2 s_n)^{-\frac{1}{2}} \leq |X_n| \leq \delta s_n (\mathrm{Log}_2 s_n)^{\frac{1}{2}}\}} < \infty$

Comme dans un certain nombre de travaux récents ([1], [7]), on voit à nouveau dans cet article que les véritables équivalents des moments des v.a.r. appropriés à l'extension des théorèmes limites réels aux espaces de Banach sont les moments faibles utilisés tout au long de ce travail. Cet article illustre aussi le fait que , à l'exemple de la méthode de randomisation gaussienne, les techniques mises au point pour l'étude des v.a. à valeurs dans les espaces de Banach sont maintenant en mesure de retrouver, voire d'améliorer, des résultats classiques du cas scalaire.

REFERENCES

[1] ALT J.-C. : La loi des grands nombres de Prokhorov dans les espaces de type p, à paraître dans les Annales de l'I.H.P. ,1986.

[2] FERNIQUE X. : Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes, Lecture Notes in Math. , 480 (1975), 1-96, Springer, Berlin.

[3] HEINKEL B. : Une extension de la loi des grands nombres de Prokhorov, Z. Wahr. verw. Gebiete, 67 (1984) ,349-362.

[4] HEINKEL B. : An application of a martingale inequality of Dubins and Freedman to the law of large numbers in Banach spaces, Lecture Notes in Math., 1193 (1986),29-43, Springer, Berlin.

[5] KOLMOGOROV A.: Uber das Gesetz des iterierten Logarithmus, Math. Ann., 101 (1929), 126-135.

[6] KUELBS J. : Kolmogorov's law of the iterated logarithm for Banach space valued random variables, Ill. J. of Math., 21 (1977), 784-800.

[7] LEDOUX M. : Gaussian randomisation and the law of the iterated logarithm in type 2 Banach spaces, Preprint, 1985.

[8] LOEVE M. : Probability Theory I, 4ème édition,Springer, Berlin.

[9] PETROV V.V. : On a relation on the estimate of the remainder in the central limit theorem and the law of the iterated logarithm, Theor. Prob. Appl., 11 (1966), 454-468.

[10] PETROV V.V. : Sums of independant random variables, Springer, Berlin, 1975.

[11] PROKHOROV Y.V. : Some remarks on the strong law of large numbers, Theor. Prob. Appl., 4 (1959), 204-208.

[12] TEICHER H. : On the law of the iterated logarithm, Ann. Prob. , 2 (1974) , 714-728.

[13] TEICHER H. : Generalized exponential bounds, iterated logarithm and strong laws, Z. Wahr. verw. Gebiete, 48 (1979), 293-307.

[14] WITTMANN R.: A general law of the iterated logarithm, Z. Wahr. verw. Gebiete, 68 (1985), 521-543.

Jean-Christian ALT
Université Louis Pasteur
Département de Mathématique
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG CEDEX

Reçu en Septembre 1986