ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

A. CLAVILIER

Fonctionnelles browniennes généralisées intégrale de Feynman

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 90, série *Probabilités et applications*, n° 6 (1987), p. 105-132
<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1987__90_6_105_0>

FONCTIONNELLES BROWNIENNES GENERALISEES

INTEGRALE DE FEYNMAN

A. CLAVILIER

Les solutions de certaines équations différentielles sont liées au mouvement brownien réel $(B(t))_{t \in \mathbb{R}}$, mais ne peuvent pas toujours s'exprimer comme fonctionnelles (non linéaires) des $B(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Il en est ainsi des solutions de certaines équations d'évolution stochastique et de l'équation de Schrödinger (sur $\mathbb{R}$)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - i\left[- \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + V\right], \quad f(0,x) = \Psi(x) \tag{1}$$

avec $\hbar$ constante de Planck, V potentiel et m constante positive. "La" solution de l'équation (1) est un objet appelé intégrale de Feynman; mais, malheureusement, ce n'est pas une vraie intégrale car il n'existe pas de mesure de Lebesgue en dimension infinie. Une approche possible de la solution de l'équation de Schrödinger est celle de Hida au moyen des fonctionnelles généralisées du mouvement brownien [9-10], [5-11].

Vers 1974, Hida introduit la notion de fonctionnelles généralisées du mouvement brownien, jouant le rôle de distributions et généralisant la notion de fonctionnelles du mouvement brownien; il définit un calcul causal lié au mouvement brownien prenant en compte le temps et une notion de dérivée des trajectoires du mouvement brownien (qui ne sont pas dérivables au sens classique, mais p.s. au sens des distributions).

Nous nous proposons de donner une justification détaillée de certaines propriétés énoncées sans preuves dans le papier de Streit-Hida [5] intitulé: "Generalized Brownian Functionals and the Feynman Integral".

Dans la partie I, nous rappelons quelques résultats sur les espaces des fonctionnelles browniennes et présentons l'espace des fonctionnelles browniennes généralisées.

Dans la partie II, nous appliquons ces notions à la démonstration des propriétés annoncées (non démontrées) par Streit-Hida [5]; puis nous appliquons ces résultats au calcul de certaines intégrales de Feynman.

I MISE EN PLACE DES OUTILS PRINCIPAUX

La première partie de cet exposé s'appuie sur les papiers de Hida, l'article [6] de Kubo et Takenaka et sur des notes de séminaire [1].

Dans ce qui suit, $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivables à décroissance rapide et $\dot{B}$ est un bruit blanc, c'est-à-dire une fonction aléatoire linéaire gaussienne centrée de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telle que:

$$\forall f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}},\ E(\exp(i\, \dot{B}(f))) = \exp(-\tfrac{1}{2}||f||^2_{L^2(\mathbb{R})}).$$

On supposera (H): $\mathcal{F}$ coincide avec la tribu engendrée par tous les représentants de tous les éléments de $\dot{B}(\mathcal{S}_{\mathbb{R}})$ et par les ensembles P-négligeables de $\mathcal{F}$.

$\dot{B}$ se prolonge en une isométrie de $L^2_R(\mathbb{R})$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ notée encore $\dot{B}$.

On peut prendre $\Omega = (\mathcal{S}'_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}), \tau(\mathcal{S}'_{\mathbb{R}}, \mathcal{S}_{\mathbb{R}}))$, $\mathcal{F}$ la tribu de Borel sur Ω, P la mesure standard du bruit blanc sur $\mathcal{S}'_{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire la probabilité gaussienne γ sur $\mathcal{S}'_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ telle que:

$$\forall f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}, \int_{\mathcal{S}'_{\mathbb{R}}} \exp(i \ \langle f, T\rangle)\, d\gamma(T) = \exp\left(-\frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right).$$

(H) est bien vérifiée.

L'espace autoreproduisant réel $\mathcal{K}$ associé au bruit blanc peut s'identifier à $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ par l'opérateur canonique $f \to (\int \xi(t) f(t) dt)_{\xi \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}}$ de $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{\mathcal{S}_{\mathbb{R}}}$.

Soit b une version du $\dot{B}$; si on pose

$$B(t,x) = \begin{cases} b(1_{]0,t]})(x), & \text{si } t \geq 0 \\ -b(1_{]t,0]})(x), & \text{si } t < 0 \end{cases} \qquad (x \in \mathcal{S}'_{\mathbb{R}}),$$

il est facile de voir que $(B(t))_{t \in \mathbb{R}}$ est un mouvement brownien au sens large.

1. Outils classiques

Nous avons besoin des outils classiques suivants:

a) Espace $\Gamma(H)$, espace de Fock $\Gamma(L^2)$

$L^2_{sy}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des classes des fonctions symétriques complexes sur $\mathbb{R}^n$ de carré-intégrables.

Soit H, $H_1, \ldots, H_n$ n+1 espaces de Hilbert complexes, $H_1 \hat{\otimes}_2 \ldots \hat{\otimes}_2 H_n$ est l'espace de Hilbert complexe complété de $H_1 \otimes \ldots \otimes H_n$ muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle_n$ défini par

$$\langle h_1 \otimes \ldots \otimes h_n, h'_1 \otimes \ldots \otimes h'_n \rangle_n = \prod_{i=1}^{n} \langle h_i, h'_i \rangle_{H_i},$$

$h_i \in H_i$, $h'_i \in H_i$ pour $i = 1, \ldots, n$. Si $H_i = H$ pour $i = 1, \ldots, n$ $H^{\hat{\otimes} n}$ désigne $H_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} H_n$.

Si $a_1, \ldots, a_n$ sont n éléments d'un Hilbert H, on pose $a_1 \odot \cdots \odot a_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma(n)}$. $H^{\odot n}$ sera le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par les éléments $a_1 \odot \cdots \odot a_n$, où $a_1, \ldots, a_n$ parcourent H. $H^{\hat{\odot} n}$ désigne le sous-espace de Hilbert de $H^{\hat{\otimes} n}$ engendré par $H^{\odot n}$.

$\Gamma(H)$ désigne l'espace de Hilbert complexe formé des éléments $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\prod_{n \in \mathbb{N}} H^{\hat{\odot} n}$ (où $H^{\odot 0} = \mathbb{C}$) tels que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} n! \, ||a_n||^2_{H^{\hat{\otimes} n}} < \infty,$$

muni du produit scalaire.

$$<(a_n)_n, (b_n)_n>_{\Gamma(H)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} n! <a_n, b_n>_{H^{\hat{\otimes} n}}, ((a_n)_n, (b_n)_n \in \Gamma(H)).$$

Pour tout ξ de H, $e^{\odot \xi} := (\frac{\xi^{\odot n}}{n!})_n$ appartient à $\Gamma(H)$ et $||e^{\odot \xi}||_{\Gamma(H)} = \exp\,(\frac{1}{2}||\xi||^2_H)$.

Comme $(L^2(\mathbb{R}))^{\odot n}$ s'identifie à $L^2_{sy}(\mathbb{R}^n)$, l'espace de Fock $\Gamma(L^2)$ est constitué des éléments $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\prod_{n \in \mathbb{N}} L^2_{sy}(\mathbb{R}^n)$ tels que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} n! \, ||f_n||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Notons que e.v$\{e^{\odot \xi}; \xi \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})\}$ est dense dans $\Gamma(L^2)$, [1], [6].

b) <u>Application γ</u>

C'est l'application γ de $\Gamma(L^2)$ dans $\mathbb{C}^{\mathcal{S}_{\mathbb{R}}}$ définie par:

$$\gamma((f_n)_n)(\xi) = <e^{\odot i\xi}, (f_n)_n>_{\Gamma(H)} \quad (\xi \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}).$$

γ est une <u>isométrie linéaire de $\Gamma(L^2)$ sur l'espace autoreproduisant $\mathcal{H}(\mathcal{S}, K)$ associé au noyau</u>

$$K : (\xi, \eta) \to \exp(<\xi, \eta>_{L^2(\mathbb{R})})$$

sur $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$.

c) <u>Chaos de Wiener</u>

Soit $\mathcal{H}$ l'espace gaussien associé au mouvement brownien (ou ce qui revient au même au bruit blanc $\dot{B}$) et $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des chaos de Wiener associée à $\mathcal{H}$. Il est bien connu que $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est somme directe hilbertienne des $\mathcal{H}_n$; plus précisément:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{H}_n = \overline{\text{e.v.}\{H_n(\dot{B}(\xi), ||\xi||); \xi \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}\}}^{L^2}$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t > 0$, $H_n(.,t)$ désigne le polynôme d'Hermite de degré n et de paramètre t. $H_n(.,t)$ est défini par

$$H_n(x,t) = \begin{cases} (-t)^{2n} . \exp(\frac{x^2}{2t}) . \frac{d^n}{dx^n} \exp(-\frac{x^2}{2t}) & \text{si } t \neq 0 \\ x^n & , \text{si } t = 0. \end{cases}$$

On a:

$$\exp(ux - \frac{u^2 t^2}{2}) = \sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{n!} H_n(x,t) \quad (u \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R})$$

et

$$H_n(.) = H_n(.,1), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

d) Fonction aléatoire de Ito-Wick

Théorème [2 - 14]. Soit H un Hilbert réel, $H_{\mathbb{C}}$ son complexifié et $L : H \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ une fonction aléatoire gaussienne centrée, normale (L est linéaire; pour tout x de H, L(x) est gaussienne centrée et $E(L(x))^2 = ||x||_H^2$). Alors il existe une isométrie linéaire et une seule $\omega_L : \Gamma(H_{\mathbb{C}}) \to L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prolongeant L telle que :

$$\forall h \in H,\ \omega_L(e^{\odot h}) = \exp(L(h) - \frac{1}{2}||h||^2).$$

ω_L est appelée fonction aléatoire de Ito-Wick associée à L. Cette isométrie est surjective si $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{L}(x);\ x \in H; \mathcal{N})$ avec $\mathcal{N}$ l'ensemble des éléments P-négligeables de $\mathcal{F}$, $\mathcal{L}(x)$ élément de la classe L(x).

On a :

$$\omega_L(H^{\hat{\odot} n}) = \mathcal{H}_n,\ \omega_L(H^{\odot 0}) = \mathcal{H}_0 \quad (H^{\odot 0} = \mathbb{R})$$

$$\omega_L(h^{\odot n}) = H_n(L(h),\ ||h||),\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall h \in H.$$

Ici on prend $L = \dot{B}$ et on note $\omega_L = \omega$. Si $f \in L^2_{sy}(\mathbb{R}^n)$,

$$\omega_L(f) = \iint \dots \int f(t_1, \dots, t_n)\, dB(t_1) \dots dB(t_n)$$

où l'intégrale multiple est prise au sens de Ito [15] et

$$\omega_L(f) = n! \int_{-\infty}^{\infty} dB(t_n) \int_{-\infty}^{t_{n-1}} \dots \int_{-\infty}^{t_2} f(t_1, \dots, t_n) dB(t_1).$$

2. Espaces des fonctions test et espaces des fonctionnelles généralisées

La notion de fonctionnelles généralisées de Wiener, comme la notion de distributions, a été introduite pour donner un sens à certains objets mathématiques.

Hida définit un e.v.t. localement convexe $\mathcal{D}$ de fonctions test (étroitement lié à la décomposition en chaos de Wiener de $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$) et vérifiant :

1) $\mathcal{D}$ est un s.e.v. de $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ et l'injection $\mathcal{D}\to L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ est continue;

2) $\mathcal{D}$ contient toutes les fonctions polynomiales du bruit blanc (c'est-à-dire si P polynôme à n variables, $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$, la v.a. $P(\dot{B}(f_1), \ldots, \dot{B}(f_n))$ est dans $\mathcal{D}$).

L'espace des fonctionnelles généralisées est l'espace dual $\mathcal{D}'$; il contient donc $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$. Hida choisit $\mathcal{D}$ de manière à ce que, pour tout réel $t \neq 0$, $\frac{B(t+h) - B(t)}{h}$ admette une limite notée $\dot{B}(t)$, dans $\mathcal{D}'$ quand $h \to 0$. ($\frac{B(t+h) - B(t)}{h}$ ne peut converger en probabilité quand $h \to 0$).

Watanabé a défini dans [16] un autre espace de fonctions test.

On va ici rappeler les espaces de fonctions test considérés par Hida. On a besoin de la

Notation. Si $(H_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'espaces de Hilbert complexes, on note $\Gamma((H_n)_n)$ l'espace des éléments $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de $\prod_{n\geqslant 0} H_n$ tels que la série $\sum_{n\geqslant 0} n!\, ||f_n||^2_{H_n}$ converge, muni du produit scalaire

$$((f_n), (g_n)) \to \sum_{n\geqslant 0} n!\, \langle f_n, g_n\rangle_{H_n} .$$

Donc, si H est un Hilbert complexe, $\Gamma(H)$ est l'espace $\Gamma((H^{\odot n})_n)$. $\Gamma((H_n)_n)$ est un espace de Hilbert.

a) Définition des espaces $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Soit $\mathcal{S}_{sy}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions symétriques complexes sur $\mathbb{R}^n$ indéfiniment dérivables à décroissance rapide et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, E_n un espace de Hilbert complexe tel que :

$$\mathcal{S}_{sy}(\mathbb{R}^n) \subset E_n \subset L^2_{sy}(\mathbb{R}^n)$$

avec inclusions continues à image dense.

Nous pouvons vérifier [1] que $\Gamma((E_n)_n)$ (avec $E_o = \mathbb{C}$) est un Hilbert contenu dans $\Gamma(L^2(\mathbb{R}))$ avec inclusion continue à image dense dès que les normes des opérateurs inclusions des E_n dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ sont uniformément bornées.

Nous supposerons dans ce qui suit que les E_n sont les espaces de Sobolev $H^{n+1/2}_{sy}(\mathbb{R}^n)$; $H_{sy}^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Sobolev des distributions symétriques complexes T sur $\mathbb{R}^n$ telles que la transformée de Fourier $\hat{T}$ de T vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{T}(u)|^2 \ (1 + ||u||^2)^{n+1/2} \ du < \infty,$$

muni du produit scalaire

$$<T,S> = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{T}(u) \ \overline{\hat{S}(u)} \ (1 + ||u||^2)^{n+1/2} \ du.$$

Notons que, puisque $\dim\mathbb{R}^n < \frac{n+1}{2}$, $H_{sy}^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ s'identifie à un sous-espace de l'espace des fonctions continues symétriques sur $\mathbb{R}^n$ [17].

Soit $\oplus\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ la somme directe algébrique des $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ muni de la topologie limite inductive et $\prod\limits_n \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'espace produit des $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ muni de la topologie limite projective des $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (munis de leur topologie forte). La dualité choisie ici entre $\oplus\,\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\Pi\ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est la dualité

$$<(\varphi_n)_n, (T_n)_n> = \sum_{n\geq 0} n! <\varphi_n, T_n>_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)}.$$

On a le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}\oplus_n \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \to & \Gamma((E_n)_n) & \to & \Gamma(L^2(\mathbb{R})) & \to & \Gamma((E'_n)_n) & \to & \prod\limits_n \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \\ & & & & \Big\downarrow \omega & & & & \\ & & & & L^2(\mathcal{S}',\gamma) & & & & \end{array}$$

avec inclusions continues à image dense. Nous pouvons définir à l'aide de ω plusieurs espaces topologiques.

Tout d'abord, $\mathcal{D} := \omega(\oplus\,\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ muni de la topologie localement convexe induite de celle de $\oplus\,\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par ω et $(L^2)_+ = \omega(\Gamma((E_n)_n))$ muni de la structure hilbertienne induite de celle de $\Gamma((E_n)_n)$. $\mathcal{D}$ contient toutes les fonctions polynomiales. Dans les travaux de Hida, $\mathcal{D}$ ou $(L^2)_+$ joue le rôle d'espace des fonctions test. Le dual $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ est l'espace des <u>fonctionnelles généralisées de Hida</u>.

ω est un isomorphisme de $\oplus\,\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathcal{D}$; ω^* est un isomorphisme de $\mathcal{D}'$ sur $\Pi\,\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (pour les topologies faibles et pour les topologies de Mackey qui coïncident avec les topologies fortes).

$(\omega^*)^{-1}$ est alors un isomorphisme de $\Pi\,\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathcal{D}'$ que l'on note ω, il prolonge ω si on identifie $L^2(\mathcal{S}',\gamma)$ à un sous-espace de $\mathcal{D}'$ de sorte que :

$$\langle f,\varphi\rangle_{\mathcal{D},\mathcal{D}'} = \int f(\omega)\,\overline{\varphi(\omega)}\,d\gamma(\omega), \text{ si } f\in\mathcal{D} \text{ et } \varphi\in L^2(\mathcal{S}',\gamma).$$

On pose $(L^2)_- := \omega(\Gamma((E'_n)_n))$ et on le munit de la structure hilbertienne induite de celle de $\Gamma((E'_n))_n$ par ω.

On a le schéma :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\oplus_n \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \to & \Gamma((E_n)_n) & \to & \Gamma(L^2(R)) & \to & \Gamma((E'_n)_n) & \to & \Pi_n \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{D} & \to & (L^2)_+ & \to & L^2(\mathcal{S}',\gamma) & \to & (L^2)_- & \to & \mathcal{D}'
\end{array}$$

Hida s'intéresse plus particulièrement à un sous-espace $\mathfrak{S}'$ de $\mathcal{D}'$.

b) <u>Espace $\mathfrak{S}'$ et fonction caractéristique d'un élément de $\mathfrak{S}'$</u>

Pour définir $\mathfrak{S}'$, on a besoin d'un espace intermédiaire $\mathcal{L}$.

- <u>espace $\mathcal{L}$, application γ</u>.

$\mathcal{L}$ est l'ensemble des $\tau = (\tau_n)_n$ de $\prod_n \mathcal{S}'_{sy}(\mathbb{R}^n)$ tels que, pour tout ξ de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$, la série

$$\sum_{n\geq 0} \langle \xi^{\odot n}, \tau_n\rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)} \quad \text{converge.}$$

On a :

$$\sum_{n\geq 0} \langle \xi^{\odot n}, \tau_n \rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)} = \sum_{n\geq 0} \langle \frac{\xi^{\odot n}}{n!}, \tau \rangle_{\oplus \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \prod_n \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)} .$$

Si $\tau = (\tau_n)_n$ est un élément de $\mathcal{L}$, pour tout $\xi \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la série

$$\sum_{n\geq 0} \lambda^n \langle \xi^{\odot n}, \tau_n \rangle \text{ converge.}$$

Par suite :

(1) $\tau = (\tau_n)_n$ est dans $\mathcal{L}$ si et seulement si, pour tout $\xi \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$, la série $\sum_{n\geq 0} i^n \langle \xi^{\odot n}, \tau_n \rangle$ converge.

(2) si $\tau = (\tau_n)_n$ est dans $\mathcal{L}$, $(n\,\tau_n)$ est dans $\mathcal{L}$ et, pour tout $\rho \in \mathbb{C}$, $(\rho^n \tau_n)_n$ est dans $\mathcal{L}$.

Il est facile de voir que $\mathcal{L}$ contient $\Gamma(L^2(\mathbb{R}))$ et que, pour tout τ de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $e^{\odot \tau}$ est dans $\mathcal{L}$. Cependant, $\Gamma((E_n')_n)$ n'est pas toujours contenu dans $\mathcal{L}$, ainsi $\Gamma((H_{sy}^{-n+1/2}(\mathbb{R}^n)))$ n'est pas contenu dans $\mathcal{L}$ [1].

L'application γ de $\mathcal{L}$ dans $\mathbb{C}^{\mathcal{S}_{\mathbb{R}}}$ est définie par

$$\gamma((\tau_n))(\xi) = \sum_{n\geq 0} i^n \langle \xi^{\odot n}, \tau_n \rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)} \quad (\xi \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}).$$

γ prolonge l'application γ de $\Gamma(L^2)$ dans $\mathbb{C}^{\mathcal{S}_{\mathbb{R}}}$ et γ est injective.

- <u>espace $\mathfrak{S}'$ et application $T \to U_T$</u>

Hida s'intéresse surtout à l'espace $\mathfrak{S}'$ des fonctionnelles généralisées image de $\mathcal{L}$ par ω, c'est-à-dire à l'espace $\mathfrak{S}'$ des éléments $T = \omega((\tau_n))$ de $\mathcal{D}'$ tels que, pour tout ξ de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$, la série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \langle T, H_n(\dot{B}(\xi), \|\xi\|_{L^2(\mathbb{R})}) \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \tag{2}$$

converge. $\mathfrak{S}'$ ne contient pas $(L^2)_-$.

Si $T \in \mathfrak{S}'$, on pose

$$U_T(\xi) = \sum_{n\geq 0} \frac{i^n}{n!} \langle T, H_n(\dot{B}(\xi), \|\xi\|) \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}, \quad (\xi \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}})$$

et on dit que U_T est la <u>fonction caractéristique de T</u> au sens de Hida.

On a $U_T = \gamma(f)$ où $T = \omega(f)$ avec $f \in \mathcal{L}$.

On peut voir aisément que, pour tout ξ de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$, $\lambda \to U_T(\lambda\xi)$ est une fonction entière.

Une application $\Psi : \mathcal{S}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}$ est la fonction caractéristique d'un élément T de $\mathfrak{S}'$ si et seulement si :

1) $\forall\xi \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$, $\lambda \to \Psi(\lambda\xi)$ est une fonction entière

2) $\xi \to \left.\frac{d^n}{d\lambda^n}\Psi(\lambda\xi)\right|_{\lambda=0}$ est la forme polaire associée

à une n-forme linéaire (séparément) continue sur $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$.

Théorème [1].

Tout élément F de $\bigcup_{p>1} L^p(\Omega,\mathfrak{F},P)$ est dans $\mathfrak{S}'$ et sa fonction caractéristique vérifie :

$$U_F(\xi) = E(F \exp (i\, L(\xi) + \tfrac{1}{2}||\xi||^2_{L^2(\mathbb{R})})) \quad (\xi \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}).$$

Preuve. Comme F est dans $\bigcup_{p>1} L^p$, il existe $p_o > 1$ tel que $F \in L^{p_o}$; soit n_o impair de $\mathbb{N}^*$ tel que $1 + \frac{1}{n_o} \leq p_o$ et ξ dans $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$.

Formellement, on a :

$$E(Fe^{iL(\xi)+\frac{1}{2}||\xi||^2}) = \sum_{n\geq 0} \frac{i^n}{n!} \int H_n(\dot{B}(\xi),||\xi||)F\, dP \qquad (3)$$

Grâce à l'inégalité de Hölder, la convergence a lieu absolument dans $L^1(\Omega,P)$. En effet, en posant $\lambda = ||\xi||$, on a :

$$\begin{aligned}
I := & \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} E|H_n(\dot{B}(\xi),||\xi||)F| \\
= & \sum_{n\geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} E|H_n(\dot{B}(\tfrac{\xi}{||\xi||}))F| \\
\leq & \sum_{n\geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} (E|F|^{1+1/n_o})^{n_o/n_o+1} (E(H_n(\dot{B}(\tfrac{\xi}{||\xi||})))^{n_o+1})^{1/n_o+1} \\
= & (E|F|^{1+1/n_o})^{n_o/n_o+1} \sum_{n\geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} (E(H_n(\dot{B}(\tfrac{\xi}{||\xi||})))^{n_o+1})^{1/n_o+1} .
\end{aligned}$$

Or, d'après Simon [18], si X est une v.a.r. de loi N(0,1), s un entier pair

$$E(H_n(X))^s \leqslant (s-1)^{ns/2}.(n!)^{s/2} ;$$

donc

$$E(H_n(\dot{B}(\tfrac{\xi}{||\xi||})))^{n_o+1} \leqslant n_o^{n(n_o+1)/2} . (n!)^{n_o+1/2} .$$

D'où

$$I \leqslant (E|F|^{1+1/n_o})^{n_o/n_o+1} . \sum_{n\geqslant 0} \frac{\lambda^n}{n!} n_o^{n/2} (n!)^{1/2} ;$$

cette dernière série étant convergente (critère de d'Alembert), l'égalité formelle (3) est donc une vraie égalité.

Posons

$$a_n(\xi_1,\ldots,\xi_n) = E(\omega(\xi_1 \otimes\ldots \otimes \xi_n)F) \quad (\xi_1,\ldots,\xi_n \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}} \text{ et } n\in\mathbb{N}^*)$$

donc

$$a_n(\xi,\ldots,\xi) = E(H_n(L(\xi),\xi)F) \quad (\xi \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}})$$

a_n est n-linéaire symétrique et séparément continu sur $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ (la convergence sur $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ implique la convergence dans L^2); donc, par le théorème des noyaux [17], il existe S_n de $\mathcal{S}'_{sy}(\mathbb{R}^n)$ tel que:

$$a_n(\xi_1,\ldots,\xi_n) = \langle\xi_1 \odot \cdots \odot \xi_n, S_n\rangle \quad (\xi_1,\ldots,\xi_n \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}});$$

d'où

$$F \in \mathfrak{S}' \text{ et } U_F(\xi) = E(F \exp(iL(\xi) + \tfrac{1}{2}\,||\xi||^2))(\xi \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}). \quad \square$$

<u>Proposition 1</u>. Si $T \in \mathfrak{S}'$ et $S \in \mathfrak{S}'$, alors $\xi \to U_T(\xi).U_S(\xi)$ est la fonction caractéristique d'une fonctionnelle généralisée de $\mathfrak{S}'$ notée T:S et appelée produit de Wick de T et S.

<u>Preuve</u>. On a :

$$T = \omega((f_n)_n) \text{ et } S = \omega((g_n)_n)$$

avec $(f_n)_n$ et $(g_n)_n \in \mathcal{L}$;

et

$$U_T(\xi).U_S(\xi) = \sum_n i^n \langle f_n, \xi^{\otimes n}\rangle . \sum_k i^k \langle g_k, \xi^{\otimes k}\rangle \quad (\xi \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}). \quad (4)$$

Comme les séries intervenant dans (4) sont absolument convergentes, on a, pour tout ξ de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$,

$$U_T(\xi).U_S(\xi) = \sum_n i^n < \sum_{k=0}^{n} f_k \otimes g_{n-k}, \xi^{\otimes n} >$$

$$= \sum_n i^n < \sum_{k=0}^{n} f_k \odot g_{n-k}, \xi^{\odot n} >$$

où $f_k \odot g_{n-k}$ désigne le produit tensoriel symétrique des distributions f_k et g_{n-k}. Par suite, par définition même de $\mathcal{L}$, $(\sum_{k=0}^{n} f_k \odot g_{n-k})_n$ est dans $\mathcal{L}$ et son image par ω a pour fonction caractéristique $\xi \to U_T(\xi).U_S(\xi)$.

3. Exemples de fonctionnelles généralisées

Exemple 1. L'avantage du choix de $\mathcal{D}$ de Hida c'est de définir pour tout $t \in \mathbb{R}$ une dérivée $\dot{B}(t)$ de $B(t)$ appartenant à $\mathcal{D}'$. Pour $t \in \mathbb{R}$, $\dot{B}(t)$ est l'élément de $\mathfrak{S}'$ dont la fonction caractéristique est $\xi \to <\delta_t, \xi>$. Il est facile de vérifier que $\dot{B}(t)$ est dans $(L^2)_-$ et que $\dot{B}(t)$ est la limite dans $\mathcal{D}'$ de la fonction $\varphi_\Delta := \frac{1}{h}(B(t+h)-B(t))$ de $L^2(\mathcal{S}',\gamma)$ quand $h \to 0$; plus précisément, pour tout $\xi \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$, $U\varphi_\Delta(\xi) = \frac{i}{h}\int_t^{t+h} \xi(u)\, du$ tend vers $<\delta_t, \xi>$ quand $h \to 0$. On a aussi convergence de φ_Δ vers $\dot{B}(t)$ dans $(L^2)_-$ quand $h \to 0$.

De même, il est possible de définir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'élément de $\mathcal{D}'$ noté $H_n(B(t); \frac{1}{\sqrt{dt}})$, comme limite quand $h \to 0$, de $H_n(\varphi_\Delta; \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}})$ ou comme la fonctionnelle généralisée de fonction caractéristique $\xi \to i^n <\xi^{\odot n}, \delta_t^{\odot n}>$.

Exemple 2. Si $h \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$, $\xi \to \exp(c <h,\xi>)$ est la fonction caractéristique de l'élément :

$$\omega\left(\left(\left(\frac{c}{i}\right)^n \frac{h^{\odot n}}{n!}\right)_n\right) \text{ de } \mathfrak{S}'.$$

Exemple 3. Soit K une forme bilinéaire continue sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ et $c \in \mathbb{C}$; soit τ l'élément de $\mathcal{S}'_{sy}(\mathbb{R}^2)$ tel que $<\tau, \xi \otimes \xi> = <K\xi, \xi>, \xi \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$; alors $\xi \to \exp(-\frac{c}{2} <K\xi,\xi>)$ est la fonction caractéristique de l'élément $\omega((\tau_n)_n)$ de $\mathfrak{S}'$ avec $\begin{cases} \tau_{2n+1} = 0 \\ \tau_{2n} = (\frac{c}{2})^n \frac{\tau^{\odot n}}{n!} \end{cases}$

En particulier, si A, B sont des opérateurs linéaires continus de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, f, g des éléments de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$

$$\Psi : \xi \rightarrow \exp(<f,A\xi> <g,B\xi>)$$

est la fonction caractéristique d'un élément de $\mathfrak{S}'$ (prendre c = 1 et K la forme bilinéaire sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ associée à l'opérateur

$$K = <.,A^* f> B^*(g) \text{ de rang 1 de } L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})).$$

La proposition suivante permet d'obtenir d'autres exemples à partir des précédents.

<u>Proposition 2</u>. [1] [3]. Soit h non nul dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Alors l'application

$$u : f \longrightarrow f(\dot{B}(h))$$

de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $(L^2)_-$ est continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{S}'_\tau(\mathbb{R})$ dans $(L^2)_-$.

u se prolonge donc par continuité à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et permet donc de définir $T(\dot{B}(h))$ pour tout $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. De plus, pour tout T de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, <u>$T(\dot{B}(h))$ est aussi dans $\mathfrak{S}'$</u> et [3]

$$U_{T(\dot{B}(h))}(\xi) = T * \gamma_{||h||^2}(i <\xi,h>_{L^2(\mathbb{R})})$$

avec $\gamma_\alpha(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \exp(-\frac{1}{2}\frac{u^2}{\alpha})$ pour $\alpha > 0$ et $T * \gamma_\alpha$ la convoluée de T et γ_α.

Donc si $t > 0$,

$$U_{T(B(h))}(\xi) = T * \gamma_t(i\int_0^t \xi(u)du) \quad (\xi \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}).$$

<u>Corollaire 1</u>. Soit f dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ non nul et $a \in \mathbb{R}$. Alors $\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \exp[-\frac{1}{\varepsilon}(\dot{B}(f)-a)^2]$ converge vers $\delta_a(\dot{B}(f))$ dans $(L^2)_-$.

Puisque les fonctions $x \to \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \exp(- \frac{1}{\varepsilon}(x-a)^2)$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ convergent vers δ_a dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ quand $\varepsilon \to 0$.

On retrouve ainsi la définition de $\delta_a(B(t))$ donnée par Hida [9].

Corollaire 2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $a \in \mathbb{R}$ et f dans $L^1 \cap L^2$ non nul.

Alors

$$\delta_a(\dot{B}(\lambda f)) = \frac{1}{\lambda}\, \delta_{a/\lambda}(\dot{B}(f))$$

Preuve. On a pour $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda^2\varepsilon}} \exp(- \frac{1}{\varepsilon}(\dot{B}(f)- \frac{a}{\lambda})^2) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2\varepsilon}} \exp\left[- \frac{1}{\lambda^2\varepsilon}(\dot{B}(\lambda f)-a)^2\right]$$

D'après le corollaire 1, le premier membre tend vers $\frac{1}{\lambda}\, \delta_{a/\lambda}(\dot{B}(f))$;

et le second membre vers $\dot{B}(\lambda f)$. □

II FONCTIONNELLES BROWNIENNES ET INTEGRALE DE FEYNMAN

1) Fonctionnelles quadratiques et exponentielles

Ces fonctionnelles browniennes sont mentionnées dans Streit-Hida [5]. Il nous semble utile d'expliciter le calcul de la fonction caractéristique de chacune d'elles.

Si K est un opérateur d'H.S. symétrique de $L^2(\mathbb{R})$, K peut être identifié à un élément de $L^2_{sy}(\mathbb{R}^2)$. On a

$$U_{\omega(K)}\ (\xi) = - \langle K\xi,\xi\rangle \quad (\xi \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}});$$

et on posera

$$:(K\dot{B},\dot{B}): = \omega(K).$$

Proposition 1. Soit K un opérateur nucléaire symétrique de $L^2(\mathbb{R})$; donc $K = \sum_{n\geq 1} a_n(.,e_n)e_n$ avec $(e_n)_{n\geq 1}$ système orthonormal de $L^2(\mathbb{R})$ et $(a_n)_{n\geq 1}$ dans ℓ^1. On pose

$$\theta(\dot{B}) = (K\dot{B},\dot{B}) = \sum_{n\geq 1} a_n(\dot{B}(e_n))^2$$

Alors

$$\theta \in L^2(\mathcal{S}',\gamma)$$

et

$$U_\theta(\xi) = - \langle K\xi,\xi\rangle + \text{trace } K \quad (\xi \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}).$$

Preuve. θ est un élément de $L^2(\mathcal{S}',\gamma)$ car la suite $\left(\sum_{n=1}^{p} a_n(\dot{B}(e_n))^2\right)_p$ est de Cauchy dans $L^2(\mathcal{S}',\gamma)$ puisque $(a_n)_{n\geq 1} \in \ell^1$.

On a :

$$\theta(\dot{B}) = \sum_{n\geq 1} a_n\left[(\dot{B}(e_n))^2 - 1\right] + \text{trace } K$$

$$= \sum_{n\geq 1} a_n H_2(\dot{B}(e_n)) + \text{trace } K$$

D'où

$$U_\theta(\xi) = \sum_{n\geq 0} a_n <\xi,e_n>^2 + \text{trace } K \quad (\xi \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}})$$

soit

$$U_\theta(\xi) = - <K\xi,\xi> + \text{trace } K. \qquad \square$$

Passons maintenant à une fonctionnelle de type exponentiel.

Proposition 2. Soit K un opérateur nucléaire symétrique de $L^2(\mathbb{R})$ tel que $1 + K$ ait un inverse borné et que la norme d'H.S. de $M = K(1 + K)^{-1}$ soit strictement plus petite que 1. Posons $\varphi(\dot{B}) = \exp\left[-\frac{1}{2}(K\dot{B},\dot{B})\right]$.

Alors

$$\varphi \in L^2(\mathcal{S}',\gamma)$$

et

$$U_\varphi(\xi) = \left[\det(1 + K)\right]^{-1/2}. \exp\left[\frac{1}{2}(M\xi,\xi)\right] \quad (\xi \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}).$$

Preuve. On a toujours, comme dans la proposition 1,

$K = \sum_{n\geq 1} a_n(.,e_n)\, e_n$ avec $(a_n)_{n\geq 1} \in \ell^1$, $(e_n)_{n\geq 1}$ base O.N. de $L^2(\mathbb{R})$.

L'existence de M assure que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1+a_n \neq 0$ et, par l'hypothèse

$$||M||_{H.S} < 1 \iff \sum_{n\geq 1} \left|\frac{a_n}{1+a_n}\right|^2 < 1 ,$$

on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* , -\frac{1}{2} < a_n \qquad (5)$$

Comme $||\xi||^2 = \sum_{n\geq 1} <\xi,e_n>^2$, on a :

$$U_{\varphi}(\xi) = \int_{\mathcal{S}'} \exp\left[-\frac{1}{2}(K\dot{B},\dot{B}) + i\,\dot{B}(\xi) + \frac{1}{2}||\xi||^2\right]d\mu\,(\dot{B})$$

$$= \int_{\mathcal{S}'} \left(\prod_{n\geq 1} \exp\left[-\frac{1}{2}a_n(\dot{B}(e_n))^2 + i\,\dot{B}(e_n)<\xi,e_n> + \frac{1}{2}<\xi,e_n>^2\right]\right)d\mu\,(\dot{B})$$

Par l'indépendance des $\dot{B}(e_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ et par (5), on a :

$$U_{\varphi}(\xi) = \left[\prod_{n\geq 1} \int_{\mathcal{S}'} \exp\left[-\frac{1}{2}a_n(\dot{B}(e_n))^2 + i\,\dot{B}(e_n)<\xi,e_n> + \frac{1}{2}<\xi,e_n>^2\right]d\mu\,(\dot{B})\right]$$

$$= \left[\prod_{n\geq 1} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}a_n u^2 + iu<\xi,e_n> + \frac{1}{2}<\xi,e_n>^2\right]\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du\right]$$

$$= \prod_{n\geq 1} (1+a_n)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}<\xi,e_n>^2\left(\frac{1}{1+a_n} - 1\right)\right] \;;$$

donc

$$U_{\varphi}(\xi) = \left[\det(1+K)\right]^{-1/2} \exp\left(\frac{1}{2}(M\xi,\xi)\right).$$ □

Nous avons supposé K nucléaire, s'il n'en est plus ainsi dét$(1+K)$ $(=\exp(\mathrm{Tr}\,\ell n(1+K))$ [4]) n'est plus fini; cependant, si on remplace $(K\dot{B},\dot{B})$ par : $:K\dot{B},\dot{B}: := (K\dot{B},\dot{B}) - E\left[(K\dot{B},\dot{B})\right]$, on obtient

$$U_{\varphi}(\xi) = \exp\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\ell n(1+K)-K)\right]\exp\left(\frac{1}{2}(M\xi,\xi)\right); \tag{6}$$

ainsi on posera :

$$:\exp\left(-\frac{1}{2}(K\dot{B},\dot{B})\right): = \exp\left[-\frac{1}{2}\;:(K\dot{B},\dot{B}):\right].$$

Notons que la fonctionnelle $U\varphi$ définie par (6) est la fonction caractéristique d'un élément de (L^2) dès que K est un opérateur d'Hilbert-Schmidt symétrique de $L^2(\mathbb{R})$ tel que $(1+K)^{-1}$ existe.

Plus généralement, si K est un opérateur de $L^2(\mathbb{R})$ tel que $M = K(1+K)^{-1}$ définisse une forme bilinéaire continue sur $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$, $\xi \to \exp(\frac{1}{2}(M\xi,\xi))$ est la fonction caractéristique d'un élément de $\mathfrak{S}'$ noté

$$\mathcal{N}.\ \exp\left(-\frac{1}{2}(K\dot{B},\dot{B})\right).$$

On dit qu'on a <u>normalisé</u> $\exp(-\frac{1}{2}(K\dot{B},\dot{B}))$ puisque, si K vérifie les hypothèses de la proposition 2, on a :

$$U_{\exp(-\frac{1}{2}(K\dot{B},\dot{B}))}(\xi) = \lambda \exp(\tfrac{1}{2}(M\xi,\xi)) \quad (\xi \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}})$$

avec λ la constante $[\det(1+K)]^{-1/2}$.

2) Fonctionnelles de la mécanique quantique

Comme nous l'avons signalé, l'intégrale de Feynman peut se définir à l'aide de fonctionnelles généralisées du mouvement brownien.

Streit et Hida [5] ont montré que les fonctionnelles généralisées

$$X = \text{"}\mathcal{N}\exp[-\tfrac{1}{2}(K\dot{B},\dot{B})]\ \exp[-\tfrac{1}{2}(L\dot{B},\dot{B}) + i\,\dot{B}(g)]\delta_y(B(t))\text{"} \tag{2.1}$$

avec $y \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $g \in L^2(\mathbb{R})$, L et K opérateurs de $L^2(\mathbb{R})$, L à trace, $1 + K$ et $N = 1 + K + L$ à inverses bornés, $\mathcal{N}$ constante dépendant de K (dite constante de normalisation), interviennent dans l'intégrale de Feynman associée à certains potentiels. Pour définir X, Streit et Hida posent sans aucune justification que la fonctionnelle caractéristique de X est $B\ \Psi$ avec

$$B = [2\pi t(N^{-1}e,e)\det(1 + L(1 + K)^{-1})]^{-1/2}$$

et

$$\Psi(\xi) = \exp \tfrac{1}{2}||\xi||^2 \exp(-\tfrac{1}{2}[(N^{-1}(\xi+g),\xi+g) + \frac{1}{(N^{-1}e,e)}(y - i(N^{-1}e,\xi+g))$$

$$(\frac{y}{\sqrt{t}} - i(N^{-1}(\xi+g),e))])$$

avec $e = \frac{1}{\sqrt{t}}\, 1_{[0,t]}$, $\xi \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$.

Nous allons justifier cette définition en utilisant le fait que $\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \exp[-\frac{1}{\varepsilon}(B(t)-y)^2]$ converge vers $\delta_y(B(t))$ dans $\mathcal{D}'$, quand $\varepsilon \to 0$.

Théorème.

On suppose que K et L sont des opérateurs symétriques de $L^2(\mathbb{R})$ à trace, que $(1 + K)$ admet un inverse borné et qu'il existe $c > 0$ tel que $N = 1+K+L$ vérifie

$$(Nx,x) \geq c||x||^2, \quad \forall x \in L^2(\mathbb{R}).$$

Alors il existe $q > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$X_\varepsilon = \exp\left[-\tfrac{1}{2}(K\dot{B},\dot{B})\right]\exp\left[-\tfrac{1}{2}(L\dot{B},\dot{B}) + i\,\dot{B}(g)\right]\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\exp\left[-\tfrac{1}{\varepsilon}(B(t)-y)^2\right]$$

est dans $L^{1+q}(\Omega,\mathcal{F},P)$; et, pour tout $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $U_{X_\varepsilon}(\xi)$ converge vers $\rho\ \Psi(\xi)$ quand $\varepsilon \to 0$ avec

$$\rho = \left[2\pi t(N^{-1}e,e)\det(1+K).\det(1+L(1+K)^{-1})\right]^{-1/2} = B(\det(1+K))^{-1/2}$$

Ainsi on peut dire que $\xi \to \rho\ \Psi(\xi)$ est la fonction caractéristique de la "v.a." $\frac{X}{\mathcal{N}}$. On peut, en choisissant convenablement la constante $\mathcal{N}$, définir l'élément X sous des hypothèses plus générales que celles du théorème puisque $\xi \to \Psi(\xi)$ est défini dès que N a un inverse borné.

Remarque. L'hypothèse $N \geqslant c\ I$ est de même nature que celle qui apparaît dans la proposition 2, elle implique que, pour tout α de $\left]0, \frac{c}{||K+L||}\right[$, $I + (1+\alpha)(K+L)$ est un opérateur symétrique strictement positif.

Preuve. On a vu que l'on peut définir $\delta(B(t)-y)$ dans $(L^2)_-$ à partir des éléments $\varphi_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}(B(t)-y)^2\right]$ de $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Posons

$$Y_\varepsilon = \exp\left[-\tfrac{1}{2}(K\dot{B},\dot{B})\right]\exp\left[-\tfrac{1}{2}(L\dot{B},\dot{B}) + i\,\dot{B}(g)\right]\varphi_\varepsilon .$$

On va vérifier que $Y_\varepsilon \in L^{1+\alpha_0}(\Omega,\mathcal{F},P)$ pour un (tout) α_0 de $\left]0, \frac{c}{||K+L||}\right[$ et que, pour tout ξ de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$, $U_{Y_\varepsilon}(\xi)$ converge quand $\varepsilon \to 0$.

Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\varphi_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\exp\left[-\frac{y^2}{\varepsilon}\right]\exp\left[-\tfrac{1}{2}(K_\varepsilon\dot{B},\dot{B}) + \dot{B}(f_\varepsilon)\right]$$

avec

$$f_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon}\,y\,1_{[0,t]} = \frac{2}{\varepsilon}\,y\sqrt{t}\,e$$

et

$$K_\varepsilon = \frac{2t}{\varepsilon}<.,e>\,e.$$

Ainsi

$$Y_\varepsilon = \exp\left[-\tfrac{1}{2}((K+L+K_\varepsilon)\dot{B},\dot{B}) + i\,\dot{B}(g) + \dot{B}(f_\varepsilon)\right]c_\varepsilon$$

avec $c_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\exp\left[-\frac{y^2}{\varepsilon}\right]$.

Posons

$$N_\varepsilon = 1 + K + L + K_\varepsilon$$

$K + L + K_\varepsilon$ est symétrique nucléaire. N_ε^{-1} existe et est borné car

$$(N_\varepsilon\, x,x) \geqslant c(x,x) \quad (x \in L^2(\mathbb{R})).$$

Soit $(e_n^\varepsilon)_{n\geqslant 1}$ un système orthonormal de vecteurs propres de $K + L + K_\varepsilon$ et $(a_n^\varepsilon)_{n\geqslant 1}$ les valeurs propres associées.

Pour tout $n \geqslant 1$, on a $1 + a_n^\varepsilon \geqslant c > 0$, car :

$$1 + a_n^\varepsilon = (N_\varepsilon\, e_n^\varepsilon, e_n^\varepsilon) \geqslant c(e_n^\varepsilon, e_n^\varepsilon) = c > 0;$$

et

$$\forall x \in L^2(\mathbb{R}),\ N_\varepsilon^{-1}(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(x,e_n^\varepsilon)}{1 + a_n^\varepsilon}\, e_n^\varepsilon.$$

a) <u>Calcul de $E|Y_\varepsilon|^{1+\alpha}$</u>

Si Y est une variable aléatoire réelle normale centrée réduite, on a :

$$\forall a \in\,]-\infty, 1[,\ \forall b,\ c \in \mathbb{R}$$

$$(*) \int \exp\left(a\,\frac{Y^2}{2} + bY + i\,c\,Y\right)dP = \frac{1}{\sqrt{1-a}} \exp\left[\frac{b^2-c^2}{2(1-a)} + i\,\frac{bc}{1-a}\right].$$

On a :

$$E|Y_\varepsilon|^{1+\alpha} = c_\varepsilon^{1+\alpha}\, E\Big(\prod_{n\geqslant 1} \exp\Big[-\frac{1+\alpha}{2}\, a_n^\varepsilon\, \dot{B}(e_n^\varepsilon) + (1+\alpha)(f_\varepsilon, e_n^\varepsilon)\dot{B}(e_n^\varepsilon)\Big]\Big).$$

Prenons α dans $\left]0, \dfrac{c}{||K+L||}\right[$ et soit $\beta = c - \alpha||K+L||$; donc $\beta > 0$. Soit aussi

$$M(\alpha,\varepsilon) = I + (1+\alpha)(K+L+K_\varepsilon).$$

On a

$$M(0,\varepsilon) = N_\varepsilon$$

et

(1) $\quad M(\alpha,\varepsilon)(x,x) \geqslant (c - \alpha||K+L||)(x,x) = \beta(x,x) \qquad (x \in L^2(\mathbb{R}))$

D'où

(2) $\quad 1 + (1+\alpha)a_n^\varepsilon = M(\alpha,\varepsilon)(e_n^\varepsilon, e_n^\varepsilon) \geqslant \beta > 0.$

Par suite, en utilisant l'indépendance des v.a.r. $\dot{B}(e_n^\varepsilon)$ gaussiennes de loi $N(0,1)$ et la formule $(*)$, on obtient

$$E|Y_\varepsilon|^{1+\alpha} = c_\varepsilon^{1+\alpha} \prod_{n\geq 1} \left[\frac{1}{\sqrt{1+(1+\alpha)a_n^\varepsilon}} \exp\left(\frac{2ty^2(1+\alpha)^2(e,e_n^\varepsilon)^2}{\varepsilon^2(1+(1+\alpha)a_n^\varepsilon)} \right) \right].$$

D'après (2), $M(\alpha,\varepsilon)$ est inversible et

$$M(\alpha,\varepsilon)^{-1}(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(x,e_n^\varepsilon).e_n^\varepsilon}{1+(1+\alpha)a_n^\varepsilon} \quad (x \in L^2(\mathbb{R}))$$

Donc

$$(M(\alpha,\varepsilon)^{-1} e,e) = \sum_{n\geq 1} \frac{(e,e_n^\varepsilon)^2}{1+(1+\alpha)a_n^\varepsilon}.$$

Ainsi, comme $M(\alpha,\varepsilon) - I$ est nucléaire,

$$E|Y_\varepsilon|^{1+\alpha} = c_\varepsilon^{1+\alpha}\left[\det M(\alpha,\varepsilon)\right]^{-1/2} \exp\left[2ty^2\left(\frac{1+\alpha}{\varepsilon}\right)^2(M(\alpha,\varepsilon)^{-1} e,e)\right]$$

et cette quantité est finie.

b) <u>Calcul de $\mathcal{T}_{Y_\varepsilon}(\xi) = \exp\left[\frac{1}{2}||\xi||^2\right] U_{Y_\varepsilon}(\xi)$.</u>

De même

$$\mathcal{T}_{Y_\varepsilon}(\xi) = E(c_\varepsilon \prod_{n\geq 1} \exp\left[-\frac{1}{2} a_n^\varepsilon \dot{B}(e_n^\varepsilon)^2 + i(g+\xi,e_n^\varepsilon)\dot{B}(e_n^\varepsilon) + (f_\varepsilon,e_n^\varepsilon)\dot{B}(e_n^\varepsilon)\right]).$$

D'après (*), puisque $a_n^\varepsilon + 1 > 0$ et que $\Sigma|a_n^\varepsilon| < \infty$, et d'après l'indépendance des $\dot{B}(e_n^\varepsilon)$, on obtient

$$\mathcal{T}_{Y_\varepsilon}(\xi) = c_\varepsilon \prod_{n\geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{1+a_n^\varepsilon}} \exp\left[\frac{\frac{4ty^2}{\varepsilon^2}(e,e_n^\varepsilon)^2 - (g+\xi,e_n^\varepsilon)^2}{2(1+a_n^\varepsilon)} + 2i\frac{\sqrt{t}}{\varepsilon} \frac{y(e,e_n^\varepsilon)(g+\xi,e_n^\varepsilon)}{1+a_n^\varepsilon} \right]\right)$$

$$= c_\varepsilon \left(\prod_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{1+a_n^\varepsilon}}\right) \exp\left[\frac{1}{2}(N_\varepsilon^{-1}e,e)\left(\frac{2\sqrt{t}y}{\varepsilon}\right)^2 - \frac{1}{2}(N_\varepsilon^{-1}(g+\xi),g+\xi)\right]$$
$$\exp\left[i\, 2\sqrt{t}\, \frac{y}{\varepsilon}(N_\varepsilon^{-1}e,g+\xi)\right]$$

Soit

$$\mathcal{T}_{Y_\varepsilon}(\xi) = \exp\left(-\frac{y^2}{\varepsilon}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \left(\prod_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{1+a_n^\varepsilon}}\right)$$
$$.\ \exp\left(\frac{1}{2}(N_\varepsilon^{-1}e,e)\left(2\sqrt{t}\,\frac{y}{\varepsilon}\right)^2\right)$$
$$.\ \exp\left(-\frac{1}{2}(N_\varepsilon^{-1}(g+\xi),g+\xi)\right)$$
$$.\ \exp\left(i\, 2\sqrt{t}\,\frac{y}{\varepsilon}(N_\varepsilon^{-1}e,g+\xi)\right).$$

c) Limite de $\mathcal{C}_{Y_\varepsilon}(\xi)$ quand $\varepsilon \to 0$.

Puisque N^{-1} existe, on a

$$N_\varepsilon = N + K_\varepsilon = (1 + K_\varepsilon N^{-1})N$$

On a besoin des cinq lemmes suivants:

Lemme 1. $1 + K_\varepsilon N^{-1}$ est inversible et

$$\forall x \in L^2(\mathbb{R}),\ (1 + K_\varepsilon N^{-1})(x) = x - \frac{2t(N^{-1}e,x)e}{\varepsilon+2t(N^{-1}e,e)}$$

Preuve du lemme.

On a $K_\varepsilon(N^{-1}x) = \frac{2t}{\varepsilon}(N^{-1}x,e)e = \frac{2t}{\varepsilon}(x,N^{-1}e)e$.

Montrons qu'il existe λ_ε tel que, pour tout x de $L^2(\mathbb{R})$,

$$(1+K_\varepsilon N^{-1})(x+\lambda_\varepsilon(N^{-1}e,x)e) = x = (1+\lambda_\varepsilon e(N^{-1}e,.))(1+K_\varepsilon N^{-1})(x). \quad (3)$$

On a pour λ réel,

$$(1 + K_\varepsilon N^{-1})(x + \lambda(N^{-1}e,x)e) = x + e(N^{-1}e,x)\left[\frac{2t}{\varepsilon} + \lambda\left(1 + \frac{2t}{\varepsilon}(N^{-1}e,e)\right)\right]$$

En prenant

$$\lambda = \lambda_\varepsilon = \frac{-\frac{2t}{\varepsilon}}{1+\frac{2t}{\varepsilon}(N^{-1}e,e)}$$

(3) est satisfaite; λ est bien défini car $(N^{-1}e,e) \geqslant 0$, puisque $(N(x),x) \geqslant c(x,x)$ avec $c > 0$.

D'où le lemme. □

Ainsi

$$N_\varepsilon^{-1} = ((1 + K_\varepsilon N^{-1})N)^{-1} = N^{-1} + N^{-1}((1 + K_\varepsilon N^{-1})^{-1} - 1)$$

donc

$$N_\varepsilon^{-1}e = N^{-1}e - \frac{2t}{\varepsilon+2t(N^{-1}e,e)}(N^{-1}e,e).N^{-1}e = \frac{\varepsilon N^{-1}e}{\varepsilon+2t(N^{-1}e,e)}$$

D'où

$$(**)\quad (N_\varepsilon^{-1}e,e) = \frac{\varepsilon(N^{-1}e,e)}{\varepsilon+2t(N^{-1}e,e)}$$

et

$$(***)\quad (N_\varepsilon^{-1}e,g+\xi) = \frac{\varepsilon(N^{-1}e,g+\xi)}{\varepsilon+2t(N^{-1}e,e)}$$

Nous avons

$$N_\varepsilon^{-1}(g+\xi) = N^{-1}(g+\xi) - \frac{2t(N^{-1}e,g+\xi)\, N^{-1}e}{\varepsilon+2t(N^{-1}e,e)}$$

et

$$(****) \qquad (N_\varepsilon^{-1}(g+\xi),g+\xi)=(N^{-1}(g+\xi),g+\xi) - \frac{2t(N^{-1}e,g+\xi)^2}{\varepsilon+2t(N^{-1}e,e)} .$$

On montre alors successivement

<u>Lemme 2.</u>

$$\exp\left[-\frac{y^2}{\varepsilon}\right] \exp\left[\frac{1}{2}(N_\varepsilon^{-1}e,e)\left(\frac{2\sqrt{t}\, y}{\varepsilon}\right)^2\right] \to \exp\left(-\frac{y^2}{2t(N^{-1}e,e)}\right)$$

quand $\varepsilon \to 0$.

<u>Preuve</u>. Elle résulte de (**), car :

$$\frac{1}{2}(N_\varepsilon^{-1}e,e)\left(\frac{2\sqrt{t}}{\varepsilon}y\right)^2 - \frac{y^2}{\varepsilon} = \frac{2ty^2(N^{-1}e,e)}{\varepsilon^2+2t\varepsilon(N^{-1}e,e)} - \frac{y^2}{\varepsilon}$$

$$= \frac{-y^2}{\varepsilon+2t(N^{-1}e,e)} \to -\frac{y^2}{2t(N^{-1}e,e)}$$

quand $\varepsilon \to 0$. □

<u>Lemme 3.</u>

$$\exp\left[i2\sqrt{t}\frac{y}{\varepsilon}(N_\varepsilon^{-1}e,g+\xi)\right] \to \exp\left(i\frac{y}{\sqrt{t}\,(N^{-1}e,e)}(N^{-1}e,g+\xi)\right)$$

quand $\varepsilon \to 0$.

<u>Preuve</u>. Avec (***), nous avons :

$$i\, 2\sqrt{t}\,\frac{y}{\varepsilon}(N_\varepsilon^{-1}e,g+\xi) = \frac{i2y\sqrt{t}(N^{-1}e,g+\xi)}{\varepsilon+2t(N^{-1}e,e)}$$

et le résultat. □

<u>Lemme 4.</u>

$$\exp\left(-\frac{1}{2}(N_\varepsilon^{-1}(g+\xi),g+\xi)\right) \to \exp\left(-\frac{1}{2}(N^{-1}(g+\xi),g+\xi) + \frac{1}{2}\frac{(N^{-1}e,g+\xi)^2}{(N^{-1}e,e)}\right)$$

quand $\varepsilon \to 0$.

<u>Preuve</u>. Avec (****)

$$-\frac{1}{2}(N_\varepsilon^{-1}(g+\xi),g+\xi) = -\frac{1}{2}(N^{-1}(g+\xi),g+\xi) + \frac{t(N^{-1}e,g+\xi)^2}{\varepsilon+2t(N^{-1}e,e)},$$

le résultat est immédiat. □

Lemme 5.

Quand $\varepsilon \to 0$,

$$\pi\varepsilon \prod_{n\geq 1} (1+a_n^{\varepsilon}) = \pi\varepsilon \det N_{\varepsilon} \to 2\pi t(N^{-1}e,e)\det(1+K)\det(1+L(1+K)^{-1})$$

Preuve.

Les principales propriétés utilisées sur les déterminants se trouvent dans B. SIMON [4].

On a :

$$\det N_{\varepsilon} = \prod_{n\geq 1} (1 + a_n^{\varepsilon}).$$

D'autre part, $N_{\varepsilon} = 1+K+L+K_{\varepsilon} = N+K_{\varepsilon}$

$$\det N_{\varepsilon} = \det N \det(1+K_{\varepsilon}N^{-1});$$

comme $K_{\varepsilon}N^{-1} = \frac{2t}{\varepsilon} (N^{-1}e,.)e$, $K_{\varepsilon}N^{-1}$ est de rang 1,

donc

$$\det(1+K_{\varepsilon}N^{-1}) = \det(1+\mathrm{tr}(K_{\varepsilon}N^{-1})) = \det(1 + \frac{2t}{\varepsilon} (N^{-1}e,e)).$$

Ainsi

$$\pi\varepsilon \det N = \det N \,.\, \pi\varepsilon(1+ \frac{2t}{\varepsilon}(N^{-1}e,e)) = \det N \,(\pi\varepsilon + 2t(N^{-1}e,e))$$

$$\to \det N . 2\pi t(N^{-1}e,e) \text{ quand } \varepsilon \to 0.$$

D'où le lemme 5 puisque

$$\det N = \det(1+K+L) = \det(1+K) \det(1+L(1+K)^{-1})$$

à cause de la nucléarité de L et K. □

Donc, pour tout $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $U_{Y_{\varepsilon}}(\xi) \to \rho\Psi(\xi)$, quand $\varepsilon \to 0$.

Enfin, il résulte de la proposition 1 (I-2) et des exemples 3 (I-3), que la fonctionnelle généralisée X associée à $\rho\Psi(\xi)$ est dans $\mathfrak{S}'$.

□

3) Intégrale de Feynman. (d'après Steit-Hida [5])

L'action classique d'un "mouvement" x de classe C^1 entre deux instants t_1 et t_2 est :

$$S[x] = \int_{t_1}^{t_2} L(x,\dot{x})(u)du.$$

Le Lagrangien L est la somme de deux termes

$$L(x,\dot{x}) = L_o(\dot{x}) + L_1(x) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x)$$

pour une particule de masse m se déplaçant dans un champ de force de potentiel V.

L'intégrale de Feynman sur tous les "mouvements" (ou chemins) s'exprime alors par la notation intuitive (ce n'est pas une intégrale ordinaire, il n'existe pas de mesure de Lebesgue en dimension infinie) :

$$I(\Phi) = \eta \int \exp\left[\frac{i}{\hbar} S[x]\right] \Phi(x) \boxed{d(\text{"}x\text{"} \; ; \; t_1 \leqslant t \leqslant t_2)}$$

avec $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h constante de Planck, le symbole $\boxed{d(\text{"}x\text{"} \; ; \; t_1 \leqslant t \leqslant t_2)}$ signifiant que "l'intégration" porte sur tous les chemins "passant" entre $x(t_1) = y_1$ et $x(t_2) = y_2$ où η est une constante de normalisation.

Pour $\Phi = 1$, $t_1 = 0$ et $t_2 = t$, on note $G(y_1,y_2;t)$ cette "intégrale" et on l'appelle propagateur de la mécanique quantique.

Nous introduisons des trajectoires x constituées d'un chemin déterministe (ou certain) y et d'une fluctuation brownienne

(i) $\quad x(u) = y(u) + \left(\frac{\hbar}{m}\right)^{1/2} B(u), \; 0 \leqslant u \leqslant t.$

Dans [5], Hida et Streit affirment que

$$G(y_1,y_2;t) = E(\mathcal{N}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\int_0^t \dot{x}(u)^2 du + \frac{1}{2}\int_0^t \dot{B}(u)^2 du\right).$$
$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t V(x(u))du\right)\delta(x(t) - y_2))$$

conformément à la notation (2.1).

Calculons $G(y_1,y_2;t)$ dans le cas d'une particule libre (V = 0) se déplaçant dans un champ unidimensionnel. Ce calcul n'est pas explicité dans l'article de Streit-Hida [5].

Formellement, nous avons au sens des distributions

(ii) $\quad \dot{x}(u) = \dot{y}(u) + \left(\frac{\hbar}{m}\right)^{1/2} \dot{B}(u), \; 0 \leqslant u \leqslant t$

bien que le mouvement brownien soit presque partout non dérivable.

Et donc

$$\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\int_0^t \dot{x}^2 du = \frac{i}{2}\frac{m}{\hbar}\int_0^t \dot{y}^2 du + i\left(\frac{m}{\hbar}\right)^{1/2}\int_0^t \dot{y}\,\dot{B}\,du + \frac{i}{2}\int_0^t \dot{B}^2 du$$

d'où

$$G_o(y_1,y_2;t) = E\left[\mathcal{N}\exp\left(\frac{1+i}{2}\int_0^t \dot{B}^2 du\right)\exp\left(i\left(\frac{m}{\hbar}\right)^{1/2}\int_0^t \dot{y}\,\dot{B}\,du\right)\delta(x(t)-y_2)\right]$$

$$\exp\left(\frac{i}{2}\,\frac{m}{\hbar}\int_0^t \dot{y}^2 du\right).$$

Grâce au corollaire 2 (I-3), nous avons :

$$\delta(x(t) - y_2) = \left(\frac{m}{\hbar}\right)^{1/2}\delta\left(B(t) - \left(\frac{m}{\hbar}\right)^{1/2}(y_2 - y(t))\right) ;$$

et donc

$$G_o(y_1,y_2;t) = \left(\frac{\hbar}{m}\right)^{-1/2}\exp\left[\frac{i}{2}\frac{m}{\hbar}\int_0^t \dot{y}^2 du\right]$$

$$.\ E\left[\mathcal{N}\exp\left(\frac{1+i}{2}\int_0^t \dot{B}^2 du\right)\exp\left(i\left(\frac{m}{\hbar}\right)^{1/2}\int_0^t \dot{y}\,\dot{B}\,du\right)\right]\delta(B(t)-y)$$

avec $y = \left(\frac{m}{\hbar}\right)^{1/2}(y_2 - y(t))$.

On applique le théorème du II-2 avec :

$$\xi = 0,\ L = 0,\ g = i\left(\frac{m}{\hbar}\right)^{1/2}\dot{y}\ 1_{[0,t]}$$

et K l'opérateur $\varphi \to -(1+i)1_{[0,t]}\,\varphi$ de $L^2(\mathbb{R})$.

Pour φ dans $L^2(\mathbb{R})$,

$$N\varphi = \varphi - (1+i)1_{[0,t]}\,\varphi = (1_{\complement[0,t]} - i\ 1_{[0,t]})\,\varphi = \Psi$$

d'où

$$N^{-1}\varphi = (1_{\complement[0,t]} + i\ 1_{[0,t]})\varphi,\quad \varphi \in L^2(\mathbb{R}).$$

On a alors

$$N^{-1}e = \frac{i}{\sqrt{t}}\,1_{[0,t]} \text{ et } (N^{-1}e,e) = i$$

$$N^{-1}g = -\left(\frac{m}{\hbar}\right)^{1/2}\dot{y}\ 1_{[0,t]} \text{ et } (N^{-1}g,g) = i\,\frac{m}{\hbar}\int_0^t \dot{y}^2 du$$

$$(N^{-1}e,g) = \left(\frac{i}{\sqrt{t}}\,1_{[0,t]},\ i\left(\frac{m}{\hbar}\right)^{1/2}\dot{y}\ 1_{[0,t]}\right) = \left(\frac{m}{\hbar t}\right)^{1/2}\int_0^t \dot{y}\,du$$

$$(N^{-1}g,e) = \left(-\left(\frac{m}{\hbar}\right)^{1/2}\dot{y}\ 1_{[0,t]},\ \frac{1}{\sqrt{t}}\,1_{[0,t]}\right) = -\left(\frac{m}{\hbar t}\right)^{1/2}\int_0^t \dot{y}\,du.$$

Ainsi nous avons :

$$\exp\left[-\frac{1}{2}(N^{-1}g,g)\right] = \exp\left[-\frac{im}{2\hbar}\int_0^t \dot{y}^2 du\right]$$

et

$$- \frac{1}{2} \frac{1}{(N^{-1}e,e)} \left[\frac{y}{\sqrt{t}} - i(N^{-1}e,g)\right] \left[\frac{y}{\sqrt{t}} - i(N^{-1}g,e)\right]$$

$$= - \frac{1}{2i} \left(\frac{y^2}{t} - (N^{-1}e,g)(N^{-1}g,e)\right)$$

$$= - \frac{1}{2i} \left[\frac{m}{\hbar t} (y_2-y(t))^2 + \frac{m}{\hbar t} (y(t)-y_1)^2 \right]$$

comme $y(t) = y_2$, nous avons donc :

$$G_o(y_1,y_2;t) = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar t} \right)^{1/2} \exp\left(\frac{im}{\hbar t} (y_2-y_1)^2\right). \qquad \square$$

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout particulièrement S. Chevet pour ses conseils et son aide précieuse et Madame Fontaine pour le soin avec lequel elle a dactylographié ce manuscrit.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. CHEVET : Notes de Séminaire (1985-86).

[2] S. CHEVET : Aspects statistiques et Aspects Physiques des Processus Gaussiens. Colloques du CNRS n° 307, Saint-Flour (1980), 83-129

[3] G. KALLIANPUR, H.H. KUO : Regularity Property of Donsker's Delta Function. Appl. Math. Optm. 12 (1984), 89-95

[4] B. SIMON : Notes on Infinite Determinants of Hilbert Space Operators. Advances in Mathematics 24 (1977), 244-273

[5] L. STREIT, T. HIDA : Generalized Brownian Functionals and the Feynman Integral. Stochastic Processes and their applications 16 (1983), 55-69

[6] I. KUBO, S. TAKENAKA : Calculus on Gaussian White Noise, I, II, III, IV, Proc. Japan Acad. 56 A (1980), 376-380, 411-416 and ibid 57 A (1981), 433-437, ibid 58 A (1982), 186-189

[7] H.H. SCHAEFFER : Topological Vector Spaces. MacMillan Company (1967)

[8] T. HIDA : Brownian Motion(1980), Springer-Verlag

[9] T. HIDA : Generalized Brownian Functionals, Proc. Int. at Bangalore (1982), 89-95. Lect. Notes Control. Inf. 49, Springer 1983

[10] T. HIDA : The role of exponential functions in the analysis of generalized brownian functionals, Theor. Prob. and Appl. 27, n° 3, (1983) 609-613

[11] H.H. KUO : Brownian Functionals and applications, Acta Applicandae Mathematicae I, (1983), 175-188

[12] H.H. KUO : Donsker's delta function as a generalized Brownian functional and its applications. Proc. Int. at Bangalore (1982), 167- 178. Lect. Notes Control. Inf. 49, Springer 1983

[13] S. TAKENAKA : Invitation to white noise calculus, Proc. Int. at Bangalore (1982), 249-257. Lect. Notes Control Inf. 49, Springer 1983

[14] R.L. DOBRUSHIN, R.A. MINLOS : Polynomials in linear random functions, Russian Math. Surveys 32 (1977), 67-122

[15] K. ITO : Multiple Wiener Integral, J. Math. Soc. Japan 3 (1951), 157-169

[16] S. WATANABE : Malliavin's calculus in terms of generalized Wiener functionals. Theory and Application of Random Fields, Bangalore (1982), 284-290. Lect. Notes Control. Inf. 49, Springer 1983

[17] F. TREVES : Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels, Academic Press, 1967

[18] B. SIMON : A remark on Nelson's best hypercontractive estimates. Proc. Amer. Math. Soc. 55, n° 2 (1976), 376-378

Monsieur André CLAVILIER

Université de CLERMONT II
Département de Mathématiques
Complexe Scientifique des Cézeaux
B.P. n° 45

F-63170 AUBIERE

Reçu en Février 1987