ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

FRANÇOIS CHARLOT

Intégrabilité des temps de renouvellement des files d'attente et applications

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 87, série *Probabilités et applications*, n° 4 (1985), p. 1-41

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1985__87_4_1_0>

INTEGRABILITE DES TEMPS DE RENOUVELLEMENT DES FILES D'ATTENTE ET APPLICATIONS

François CHARLOT

INTRODUCTION

Le problème des cycles (busy periods) des Files d'attente a été très étudié. Il a permis d'obtenir de nombreux théorèmes limites (11), (13), (14), (25, etc). Mais ces théorèmes sont tous soumis à des conditions d'intégrabilité sur les cycles, et, en dernière analyse, sur les temps de renouvellement (temps de retour en 0 pour les GI/G/1).

Les questions d'intégrabilité dans les Files d'attente, ont été peu étudiées. A notre connaissance 2 articles traitent de la question : J. KIEFFER, J. WOLFOWITZ (16) et D. J. DALEY (9). Dans ce travail, nous donnons une nouvelle démonstration de ces résultats et nous établissons des conditions suffisantes d'intégrabilité des cycles. L'article de D. J. DALEY semble indiquer que les résultats obtenus sont les meilleurs possibles.

Ces conditions d'intégrabilité nous permettent de ré-énoncer les théorèmes centraux limites et la loi du Logarithme itéré pour les temps d'attente des GI/G/1. Bien d'autres théorèmes auraient pu être ré-énoncés (cf (14)) pour les GI/G/1 mais aussi pour les files à plusieurs serveurs et les files avec impatience. Cela aurait considérablement alourdi l'exposé. (Pour les GI/G/q cf (11)).

(*) Institut de Mathématiques, U.S.T.H.B., BP 9 DAR EL BEIDA, ALGER, ALGERIE

On obtient enfin des vitesses de convergence vers le régime stationnaire. On aurait pu utiliser les résultats de PITTMAN (24) mais la démonstration est ici directe.

Evidemment, pour les Files à un serveur, les résultats sont des résultats de marches aléatoires.

O - NOTATIONS ET PRELIMINAIRES

Soient P une probabilité sur (E, ξ), où $E = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, ξ est la tribu des Boréliens de E, $\Omega = E^{\mathbb{Z}}$, $((A_n, B_n, C_n), n \in \mathbb{Z})$, la famille des applications coordonnées de Ω, θ le shift sur Ω : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $A_n o\theta = A_{n+1}$, $B_n o\theta = B_{n+1}$, $C_n o\theta = C_{n+1}$, $\theta_o = Id_\Omega$, $\theta_{-1} = \theta^{-1}$, et $\forall\, n \geq 1$, $\theta_n = \theta_{n-1} o\theta$ et $\theta_{-n} = \theta_{-n+1} o\, \theta_{-1}$.

$\mathcal{A} = \sigma(A_i, B_i, C_i)$; $i \in \mathbb{Z})$ la σ-algèbre sur Ω engendrée par les applications coordonnées, et, $\forall n \in \mathbb{Z}, \mathcal{A}_n = \sigma(A_i, B_i, C_i)\ i \leq n)$.

$\mathbb{P} = P^{\times\mathbb{Z}}$, et donc, sous $\mathbb{P}$, la famille des applications coordonnées est une famille de Variables Aléatoires Indépendantes Equidistribuées (V.A.I.E.).

On écrira souvent A pour A_1, B pour B_1 et C pour C_1.

Si T est un temps d'arrêt par rapport aux $(\mathcal{A}_n, n \in \mathbb{Z})$, $\mathbb{P}(1 \leq T < +\infty) = 1$, la famille des temps d'arrêt $(T_k, k \geq 0)$ est définie comme suit : $T_0=0$, $T_1=T$, et pour $k \geq 1$ $T_{k+1}=T_k+To\theta_{T_k}$. La suite de Variables Aléatoires (V.A.) :

$((T_k-T_{k-1}\ ;\ A_{T_{k-1}+1}, B_{T_{k-1}+1}, C_{T_{k-1}+1}, \ldots\ldots A_{T_k}, B_{T_k}, C_{T_k})\ k \geq 1)$

est alors une famille de V.A.I.E.

Si f est une application mesurable de $\mathbb{R}_+^q \times E$ dans $\mathbb{R}_+^q$, le processus $W^w = (W_n^w, n \geqslant 0)$ défini par :

$$(1) \quad \begin{cases} W_0^w = w, \text{ ou } w \in \mathbb{R}_+^q \\ W_{n+1}^w = f(W_n^w , A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}) \end{cases}$$

est une chaîne de Markov Homogène par rapport aux $(\mathcal{Q}_n, n \in \mathbb{N})$. On parlera encore du processus W pour désigner la famille de processus $(W^w, w \in \mathbb{R}_+^q)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^q$, $q \geqslant 1$. On notera, si $x=(x^1, x^2,\ldots,x^q)$

$||x|| = \max (|x^i|, 1 \leqslant i \leqslant q)$

Si $(x, y) \in (\mathbb{R}^q)^2$, on notera :

$x \leqslant y$ si $\forall i$, $1 \leqslant i \leqslant q$, $x^i \leqslant y^i$

$x < y$ si $\forall i$, $1 \leqslant i \leqslant q$, $x^i < y^i$

$x \vee y = (\max (x^i, y^i) ; 1 \leqslant i \leqslant q)$

$x \wedge y = (\min (x^i, y^i) ; 1 \leqslant i \leqslant q)$

$x_+ = x \vee 0$

R est la fonction de réordonnement des coordonnées de $\mathbb{R}^q$, c'est-à-dire, que si $x \in \mathbb{R}^q$,

$R(x)^i \in \{x^1, x^2, \ldots, x^q\}$

$R(x)^1 \leqslant R(x)^2 \leqslant \ldots\ldots \leqslant R(x)^q$

$\mathbb{S}$ est le sous ensemble de $\mathbb{R}^q$:

$\mathbb{S} = \{x/x \in \mathbb{R}^q, \quad 0 \leqslant x^1 \leqslant x^2 \ \ldots \leqslant x^q\}$

$a \in \mathbb{R}^q$ est un point minimum du processus W, si $\forall n \geqslant 0$, $W_n^w \geqslant a$ pour $w \geqslant a$, et a est le plus grand point vérifiant cette propriété. On notera alors W_n pour W_n^a.

Si $T^w = \inf (n \geqslant 1 : W_n^w = a)$, on notera de la même façon T pour T^a.

On note T_k^w la suite des instants de passage de W^w dans a. On a évidemment $T_k^w = T_{k-1}^w + T \circ \theta_{T_{k-1}^w}$. Si $\mathbb{P}(T<+\infty)=1$, $((T_{k+1}^w - T_k^w, W^w_{T_k^w+1}, \ldots, W^w_{T_{k+1}^w}), k \geqslant 1)$ est une famille de V.A.I.E. indépendantes et de même loi que $(T, W_1, \ldots, W_T)$.

Pour $p \geqslant 1$, L^p est l'espace des V.A. de puissance p-ième intégrable. L^e est l'espace d'Orlicz associé à la fonction $x \to e^x - x - 1$ c'est-à-dire l'espace des V.A. X telles qu'il existe a, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, avec $\mathbb{E}(e^{a|X|}) < \infty$.
On notera $\mathbb{N}' = \{p/p \in \mathbb{N}, p > 1, \text{ ou } p = e\}$.

Nous aurons par la suite besoin des lemmes "classiques" suivants.

LEMME 01

Soient $(X_i, i \geqslant 1)$ une suite de V.A.I.E. à valeurs réelles, et T une V.A. à valeurs entières. Si

- $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$, $\{T \geqslant n\}$ est indépendant de X_n
- Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $T \in L^p$ et $X \in L^p$.

Alors :

$$\sum_{i=1}^{i=T} X_i \in L^p$$

PREUVE

Elle est classique pour p = 1 et p = 2 (par exemple (23) page 83). Elle se fait par récurrence avec le même type d'argument pour $p \in \mathbb{N}$, $p > 2$. Il suffit de démontrer pour $X \geqslant 0$. Par la formule du binôme

$$(\sum_1^T X_i)^p = \sum_{q=1}^{q=p} \binom{q}{p} \sum_{j=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^{i=j-1} X_i)^{p-q} X_j^q \, 1_{\{T \geqslant j\}}$$

d'où d'après l'inégalité de Holder :

$$\mathbb{E}(\sum_1^T X_i)^p \leqslant \sum_{q=1}^{q=p} \binom{q}{p} \mathbb{E}(X^q) \quad \mathbb{E}(T(\sum_1^T X_i)^{p-q})$$

$$\leqslant \sum_{q=1}^{q=p} \binom{q}{p} \mathbb{E}(X^q) \left\|\sum_1^T X_i\right\|_{p-q+1}^{p-q} \|T\|_{p-q+1}$$

Lorsque on remplace X_i par $X_i \wedge \ell$ $(\ell \in \mathbb{R})$ toutes les quantités ci-dessus sont finies, et on peut tout diviser par $\|\sum_1^T X_i\|_p^{p-1}$ puis on fait tendre ℓ vers $+\infty$.

Pour $p = e$ reprenons la première égalité :

$$\mathbb{E}(\exp\,(a \sum_1^T X_i)) = \mathbb{E}(e^{aX} - 1)(\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}(1_{\{T \geqslant j\}} \exp\,(a\sum_1^{j-1} X_i)))$$

$$\mathbb{E}(e^{aX}-1) \; (\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}(e^{paX})^{(j-1)/p} (\mathbb{P}(T \geqslant j))^{1/q}$$

avec $1/p + 1/q = 1$

$$\leqslant \mathbb{E}(e^{aX}-1) \; (\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}(e^{paX})^{(j-1)/p} \, \mathbb{E}(e^{bT})^{1/q} e^{-bj/q}$$

cette dernière série converge dès que a est assez petit pour que

$$\mathbb{E}(e^{paX}) \leqslant e^{b(p-1)} \; ;$$

Ce qui démontre le résultat.

<u>LEMME 02</u>

Supposons la Chaîne de Markov W récurrente positive au sens de Harris, de probabilité invariante m. Soit A un Borélien de $\mathbb{R}_+^q$, $m(A) > 0$, et $T_A^W = \inf\,(n \geqslant 1 : W_n^W \in A)$. Alors si m_A est définie par $m_A(B) = \dfrac{m\,(AB)}{m(A)}$, $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $p > 1$ $\int m_A\,(dw)\; \mathbb{E}(T_A^W)^p < +\infty$, si et seulement si $\int m(dw)\; \mathbb{E}(T_A^W)^{p+1} < +\infty$.

Preuve par exemple dans COGBURN (8) page 202.

1 - QUELQUES EQUATIONS ISSUES DE PROBLEMES DE FILES D'ATTENTE

La théorie des Files d'attente rencontre un certain nombre d'équations du type (1) où f a de plus les propriétés suivantes :

$$(2) \begin{cases} - \text{ f est croissante par rapport à la première coordonnée} \\ - \forall (w, w') \in (\mathbb{R}_+^q)^2, \forall ((a, b), (a', b')) \in (\mathbb{R}_+ \mathbb{R}_+)^2, \\ \forall (c, c') \in \mathbb{R}_+^2 \; \|f(w, a, b, c) - f(w', a', b', c')\| \\ \leqslant \max(\|w-w'\| , |a-a'|, |b-b'|, |c-c'|) \end{cases}$$

Ce sont d'abord trois modèles classiques de Files d'Attente :

- GI/G/1. Ici q = 1

$$(3) \begin{cases} W_0^w = w \\ W_{n+1}^w = (W_n^w + B_{n+1} - A_{n+1})_+ \end{cases}$$

- GI/G/q (par exemple dans (1), (4), (7), (11), (15), (20), (25))

  L'espace des états du processus est ici $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}_+^q$

$$(4) \begin{cases} W_0^w = w \\ W_{n+1}^w = R(W_n^w + B_{n+1} \bar{1} - A_{n+1} \bar{e})_+ \end{cases}$$

  ou $\bar{1} = (1, 0, \dots, 0)$ et $\bar{e} = (1, 1, \dots, 1)$

- Files à un serveur avec impatience ((5), (10), (12))

  Ici q = 1.

$$(5) \begin{cases} W_0^w = w \\ W_{n+1}^w = (W_n^w + B_{n+1} - A_{n+1})_+ \wedge (W_n^w \vee C_{n+1} - A_{n+1})_+ \end{cases}$$

Ensuite trois équations que l'on rencontre dans des problèmes de majoration des équations (4) et (5) :

- Majoration de (4).(Voir (4), (11))

$$(6)\quad \begin{cases} V_0^v = v \quad \text{où} \quad v \in \mathbb{R}_+ \\ V_{n+1}^v = (q-1)\ B_{n+1}\ V(V_n^v - B_{n+1}) \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} Z_0^{v,z} = z \quad \text{où} \quad z \in \mathbb{R}_+ \\ Z_{n+1}^{v,z} = (Z_n^{v,z} + B_{n+1} - qA_{n+1})_+ V\,((q-1)\ V_{n+1}^v) \end{cases}$$

$W_n^{v,z} = (V_n^v, Z_n^{v,z})$ est bien un processus tel que ceux définis en (1) et (2) et on a les relations suivantes entre (4) et (6), (7) :

Si $v = \sum_{i=1}^{i=q} (w^q - w^i)$ et $z = \sum_{i=1}^{i=q} w^i$, alors

$$\sum_{i=1}^{i=q} ((W_n^w)^q - (W_n^w)^i) \leqslant V_n^v$$

$$\sum_{i=1}^{i=q} (W_n^w)^i \leqslant Z_n^{v,z}$$

- Majoration de (5) (Voir (5))

$$(8)\quad \begin{cases} \overline{W}_0^w = w, \text{ ou } w \in \mathbb{R}_+ \\ \overline{W}_{n+1}^w = (\overline{W}_n^w + B_{n+1}\ 1_{\{C_{n+1} \geqslant \ell\}} - A_{n+1})\ V\ \ell \text{ où } \ell \in R_+ \end{cases}$$

Si W est défini par (5) on a alors :

$$W_n^w \leqslant \overline{W}_n^w$$

- Enfin une équation qui généralise (3) (6) et (8), et qui apparaîtra dans la suite pour des raisons techniques :

$$(9)\quad \begin{cases} W_0^w = w \quad \text{ou} \quad w \in R_+ \\ W_{n+1}^w = (W_n^w + B_{n+1} - A_{n+1}) \vee C_{n+1} \end{cases}$$

Evidemment ici il faut prendre $\mathbb{P}(C = \infty) = 0$ pour éviter les trivialités.

Les équations (3) (6) (7) (8) et (9) ont des solutions explicites, ce qui fait leur intérêt. Par exemple pour (9) :

$$W_n^w = (w + \sum_{j=1}^{j=n} B_j - A_j) \vee \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (C_i + \sum_{j=i+1}^{j=n} (B_j - A_j))$$

avec la convention $\sum_{n+1}^{n} = 0$.

La vérification de (2) pour toutes les équations de (3) à (9) est une conséquence du théorème des accroissements finis (Cartan (2)).

Les résultats de stabilités fondamentaux sont énoncés dans le théorème ci-après.

THEOREME 11

Sous les hypothèses

- Pour (3) $\mathbb{E}(B) < \mathbb{E}(A)$
- Pour (4) et (7) $\mathbb{E}(B) < q\, \mathbb{E}(A)$
- Pour (5) $\mathbb{E}(B 1_{\{C=+\infty\}}) < \mathbb{E}(A)$
- Pour (9) $\mathbb{E}(B) < \mathbb{E}(A)$ et $\mathbb{E}(C) < +\infty$ et donc
- Pour (6) $\mathbb{E}(B) < +\infty$ et pour (8) $\mathbb{E}(B 1_{\{C \geqslant \ell\}}) < \mathbb{E}(A)$

Les processus définis plus haut ((3) à (9)) sont des chaînes de Markov par rapport aux $(\mathcal{Q}_n, n \geqslant 0)$, homogènes, récurrentes positives au sens de Harris, dont la probabilité invariante est la loi de l'unique V. A. $\mathcal{W}$ $\mathcal{A}_o$-mesurable $\mathbb{P}$ p.s. finie telle que

$$\mathcal{W} \circ \theta = f(\mathcal{W}, A_1, B_1, C_1).$$

On a $\mathcal{W} = \lim_n \uparrow W_n^0 \circ \theta^{-n}$ $\mathbb{P}$ p.s.

et on posera

$$W_n^{\mathcal{W}} = \mathcal{W}_n = \mathcal{W} \circ \theta^n$$

Tous ces résultats de stabilité sont démontrés dans les références données avec les équations. La méthode la plus élégante de l'existence d'un tel $\mathcal{W}$ est donnée par J. NEVEU pour les équations (3) et (4) mais elle s'applique sans difficultés aux autres équations ((2), (6), (7), (12)). Il s'agit bien sûr essentiellement de la méthode de LOYNES ((20), voir aussi (6)). Notons que J. NEVEU déduit de cette méthode le théorème ergodique de BIRKHOFF. Pour la récurrence voir (1), (4), (5), (6), (7), (11), (12).

Les résultats d'intégrabilités de $\mathcal{W}$ sont contenus dans le théorème suivant. Pour les équations (3) et (4), ils sont dus, pour L^p, à KIEFFER et WOLFOWITZ (16). La démonstration que nous donnons est différente de la leur.

<u>THEOREME 12</u>

Pour les équations (3) à (8)

- Si pour un $p \in \mathbb{N}$, $B \in L^{p+1}$, alors $\mathcal{W} \in L^p$

  Si $B \in L^e$, alors $\mathcal{W} \in L^e$

  Pour l'équation (9)

- Si pour un $p \in \mathbb{N}$, $B \in L^{p+1}$ et $C \in L^{p+1}$, alors $\mathcal{W} \in L^p$

  Si $B \in L^e$ et $C \in L^e$, alors $\mathcal{W} \in L^e$

Pour la démonstration de ce théorème, nous aurons besoin de deux lemmes.

LEMME 13

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P, \theta)$ un système dynamique ergodique, et X une V.A. positive presque sûrement finie. Si $Y = X - X\circ\theta$ est quasi-intégrable, (i.e. $E(Y_+) < +\infty$ ou $E(Y_-) < +\infty$), alors Y est intégrable, et $E(Y) = 0$.

Remarque : le fait que $E(Y) = 0$ a été signalé par J. NEVEU (22) dans le cas où Y est intégrable.

PREUVE

Si $E(Y_+) = +\infty$ et $E(Y_-) < +\infty$ alors

$\lim$ p.s. $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} Y\circ\theta^k = \lim$ p.s. $\frac{1}{n}(X - X\circ\theta^n) = +\infty$, d'après le théorème ergodique de Birkhoff et donc

$\lim$ p.s. $\frac{1}{n} X\circ\theta^n = -\infty$, ce qui est impossible.

Si $E(Y_+) < +\infty$ et $E(Y_-) = +\infty$, on applique le même raisonnement avec $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n-1} Y\circ\theta^{-k}$.

$E(Y) = 0$ s'obtient alors en tronquant X à c, $c > 0$. La variable Y_c ainsi obtenue vérifie $|Y_c| < |Y|$. Il ne reste plus alors qu'à faire tendre n vers l'infini.

LEMME 14

Soit A et B comme au début et C une V.A. positive $\mathcal{A}_1$-mesurable. Si $\mathbb{E}(B) < \mathbb{E}(A)$ et $\mathbb{E}(C) < +\infty$, alors l'équation

(*) $\mathcal{W} \circ \theta = (\mathcal{W} + B - A) \vee C$

a une solution P-p.s. finie.

Si pour $p \in \mathbb{N}$, $B \in L^{p+1}$ et $C \in L^{p+1}$ et $C^{p+1} \circ \theta - C^{p+1} \in L^p$, alors $\mathcal{W} \in L^p$ et $\mathcal{W}^{p+1} \circ \theta - \mathcal{W}^{p+1} \in L^1$.

Si $B \in L^e$ et $C \in L^e$, alors $\mathcal{W} \in L^e$.

PREUVE

L'unicité et l'existence de l'équation (*) sous les conditions du lemme est facile à démontrer. Nous ne le ferons pas.

1) Majoration et minorations

Si A est remplacé par $A \wedge a$ où $a \in \mathbb{R}_+$ est choisi tel que $\mathbb{E}(A \wedge a) > \mathbb{E}(B)$, alors l'unique solution de l'équation

$$\mathcal{W}' \circ \theta = (\mathcal{W}' + B - A \wedge a) \vee C$$

vérifie $\mathcal{W}' > \mathcal{W}$. Pour les problèmes d'intégrabilité de $\mathcal{W}$ on peut donc choisir A bornée.

Si B et C sont remplacées par $B \wedge b$ et $C \wedge c$ où $b \in \mathbb{R}_+$ et $c \in \mathbb{R}_+$, et si $\mathcal{W}_{b,c}$ est l'unique solution de l'équation

$$\mathcal{W}_{b,c} \circ \theta = (\mathcal{W}_{b,c} + B \wedge b - A) \vee (C \wedge c)$$

alors si $b \leq b'$ et $c \leq c'$ $\mathcal{W}_{b,c} \leq \mathcal{W}_{b',c'}$ et $\lim_{b,c} \mathcal{W}_{b,c} = \mathcal{W}$ car cette limite est solution de l'équation (*).

Enfin, si $d \in \mathbb{R}_+$, il est facile de voir que l'équation

$$\mathcal{V} \circ \theta = ((\mathcal{V} + B - A) \vee C) \wedge d$$

a une solution unique que nous noterons $\mathcal{V}_d$. Si $d \leq d'$ alors $\mathcal{V}_d \leq \mathcal{V}_{d'}$ et $\lim_d \mathcal{V}_d = \mathcal{W}$. Evidemment $\mathcal{V}_d \leq d$.

2) Supposons $B \in L^e$ et $C \in L^e$. Notons $\mathcal{V} = \mathcal{V}_d$.

$$e^{t\mathcal{V}} \circ \theta - e^{t\mathcal{V}} = e^{t(\mathcal{V}+B-A)} - e^{t\mathcal{V}} + (e^{t(C\wedge d)} - e^{t((\mathcal{V}+B-A)\wedge d)})1_{\{\mathcal{V}+B-A\leqslant C\}}+$$

$$+ (e^{td} - e^{t(\mathcal{V}+B-A)})\, 1_{\{\mathcal{V}+B-A>d\}}$$

d'où

$$0 \leqslant E(e^{t\mathcal{V}})\, (\mathbb{E}(e^{t(B-A)}-1) + \mathbb{E}((e^{t(C\wedge d)} - e^{t(\mathcal{V}+B-A)\, d})1_{\{\mathcal{V}+B-A<C\}})$$

t peut être choisi positif et tel que $\mathbb{E}(e^{t(B-A)}) < 1$.

On a alors :

$$\mathbb{E}(e^{t\mathcal{V}_d}) < \frac{\mathbb{E}(e^{tC})}{1-\mathbb{E}(e^{t(B-A)})}$$

et en passant à la limite sur d on obtient que $\mathcal{W} \in L^e$.

3) Supposons B et C borné ; on a alors $\mathcal{W} \in L^q$ pour tout q entier et :

$$\mathcal{W}^{q+1} \circ \theta - \mathcal{W}^{q+1} = (q+1)(B-A)\mathcal{W}^q + \sum_{k=0}^{k=q-1} \binom{k}{q+1}\mathcal{W}^k (B-A)^{q+1-k} +$$

$$(C^{q+1} - (\mathcal{W}+B-A)^{q+1} - \mathcal{W}^{q+1})\,1_{\{\mathcal{W}+B-A\leqslant C\}} = (q+1)(B-A)\mathcal{W}^q +$$

$$\sum_{k=0}^{k=q-1} \binom{k}{q+1}\mathcal{W}^k (B-A)^{q+1-k} + (C^{q+1} - C^{q+1}\circ\theta^{-1} - (\mathcal{W}+B-A)_+^{q+1}$$

$$+ (-1)^q (\mathcal{W}+B-A)_-^{q+1} + C^{q+1}\circ\theta^{-1}\mathcal{W}^{q+1})1_{\{\mathcal{W}+B-A\leqslant C\}}$$

On a $C\circ\theta^{-1} \leqslant \mathcal{W}^{q+1}$ et $(\mathcal{W}+B-A)_- \leqslant A$ est bornée. En prenant l'espérance mathématique des deux membres de l'égalité on obtient donc :

$$(q+1)(\mathbb{E}(A-B\wedge b)\mathbb{E}(\mathcal{W}_{b,c}^q) \leqslant \sum_{k=0}^{k=q-1} \binom{k}{q+1} \mathbb{E}(\mathcal{W}_{b,c}^k)\mathbb{E}((B\wedge b-A)^{q+1-k}) +$$

$$\mathbb{E}((C\wedge c)^{q+1} - (C\circ\theta^{-1}\wedge c)^{q+1}) +$$

$$\mathbb{E}(((C\wedge c)^{q+1} - (C\circ\theta^{-1}\wedge c)^{q+1})1_{\{\mathcal{W}+B-A<C\}}) + \mathbb{E}(A^{q+1})$$

Si $\mathcal{W} \in L^k$ pour $k \leqslant q-1$, comme
$|(C\circ\theta \wedge c)^{q+1} - (C \wedge c)^{q+1}| \leqslant |C^{q+1}\circ\theta - C^{q+1}|$, on peut passer à la limite en b et c dans l'expression précédente. On a alors $\mathcal{W} \in L^q$ et finalement par récurrence $\mathcal{W} \in L^p$, et d'après l'égalité précédente et le Lemme 13, $\mathcal{W}^{p+1}\circ\theta - \mathcal{W}^{p+1} \in L^1$.

CQFD

PREUVE DU THEOREME 12

Seul ce qui concerne les files à plusieurs serveurs, c'est-à-dire les équations (4), (6) et (7) restent à faire. Tout revient à démontrer que si $(\mathcal{V}, \mathcal{Z})$ est la solution de l'équation

$$\mathcal{V}\circ\theta = (q-1)\ B \vee (\mathcal{V} - B)$$
$$\mathcal{Z}\circ\theta = (\mathcal{Z} + B - qA)\ \vee\ (q-1)\mathcal{V}\circ\theta$$

alors $\mathcal{Z} \in L^p$.

D'après le lemme 14, $\mathcal{V} \in L^p$ et $\mathcal{V}^{p+1}\circ\theta - \mathcal{V}^{p+1} \in L^1$
d'où $\mathcal{W} \in L^p$.

Remarque : Dans (16) il est démontré que, si A et B sont indépendantes et si $\mathbb{E}(A) < +\infty$ alors $\mathcal{W} \in L^p$ implique $B \in L^{p+1}$. On peut voir aussi facilement que, si A et B sont indépendantes et $\mathbb{P}(A = +\infty) = 0$, $\mathcal{W} \in L^e$ implique $B \in L^e$.

2 - TEMPS DE RENOUVELLEMENT ET INTEGRABILITE DES CYCLES DANS LES GI/G/1

Nous allons dans ce paragraphe étudier les temps de retour en 0 pour les GI/G/1 (équation (3)). Dans les paragraphes suivants nous étendrons ces résultats aux équations (4) et (5).

Le résultat fondamental de ce paragraphe est un résultat de marches aléatoires.

THEOREME 21

Soit $(X_i, i \geqslant 1)$ une suite de V.A.I.E. à valeurs réelles telles que

pour un $p \in \mathbb{N}'$ $X_+ \in L^p$ et $\mathbb{E}(X) < 0$.

Soient $S_0 = 0$ et, pour $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_1^n X_i$. Si

$$T = \inf (n : n \geqslant 1 \text{ et } S_n \leqslant 0)$$

$$T' = \inf (n : n \geqslant 1 \text{ et } S_n < 0)$$

alors

$$T \in L^p \quad \text{et} \quad T' \in L^p$$

Remarque :

Pour p = 1, il existe une démonstration très élégante par les GI/G/1 de ce résultat, par ailleurs bien connu, due à LEMOINE (18).

PREUVE

Soit W le processus défini par l'équation (3). Nous pouvons en effet sans restreindre la généralité, poser $X_n = B_n - A_n$.
Soit

$$T^w = \inf (n : n \geqslant 1 \text{ et } W_n^w = 0) = \inf (n : n \geqslant 1 \text{ et } w + S_n \leqslant 0)$$

Evidemment $T^0 = T$.

Nous allons utiliser maintenant une méthode d'approximation de KIEFFER et WOLFOWITZ (15). Soit, pour $d > 0$, $X_i^{(d)} = \left[\frac{X_i}{d}\right] d + d$. $(X_i^{(d)})_+ \in L^p$ et on peut choisir d positif suffisamment petit pour que $\mathbb{E}(X_i^{(d)}) < 0$. Soit :

$$R = R_1 = \inf (n : n \geqslant 1 \text{ et } \sum_1^n X_i^{(d)} < 0)$$

$$= \inf (n : n \geqslant 1 \text{ et } \sum_1^n X_i^{(d)} \leqslant -d)$$

On a $\mathbb{E}(R) < +\infty$. Définissons les $(R_k, k \geqslant 0)$, comme au paragraphe 0. Alors

$$\sum_1^{R_k} X_i^{(d)} \leqslant -kd \quad \text{et donc}$$

$$T^w \leqslant R_{\left(\left[\frac{w}{d}\right]+1\right)} \quad \text{d'où}$$

$$\mathbb{E}((T^w)^p) < \left(\left[\frac{w}{d}\right]+1\right)^p \mathbb{E}(R^p)$$

Alors si $X_+ \in L^{p+1}$, $\mathcal{W} \in L^p$, et donc si $R \in L^p$, $\int m(dx)\, \mathbb{E}((T^x)^p) < +\infty$, où m est la loi de $\mathcal{W}$, et alors $T \in L^{p+1}$.

Mais si $T \in L^{p+1}$, il en est de même de T', puisque $T' = T_S$ où $S = \inf (k : k \geqslant 1 \text{ et } \sum_{T_{k-1}+1}^{T_k} X_i < 0)$, en appliquant le lemme 01.

Pour $p \in \mathbb{N}$, la démonstration se fait alors par récurrence. Pour p = e, la démonstration est élémentaire :

$$\mathbb{P}(T > n) \leqslant \mathbb{P}(S_n > 0) = \mathbb{P}(S_n + na) > na) \leqslant (\mathbb{E}(e^{b(X+a)}))^n e^{-bna}$$

ou $a > 0$, $E(X) + a < 0$, $b > 0$ tel que $\mathbb{E}(e^{b(X+a)}) < 1$, ce qui est possible puisque $\mathbb{E}(X) < 0$. Cela démontre alors que $T \in L^e$. Pour T' on applique l'argument précédent et à nouveau le lemme 01.

Pour simplifier l'énoncé du théorème suivant on conviendra que e + 1 = e.

THEOREME 22

Pour l'équation (3), soit

$T^w = \inf (n : n \geqslant 1 \text{ et } W_n^w = 0)$

Pour $p \in \mathbb{N}'$

- Si $B \in L^{p+1}$, alors $\mathcal{W} \in L^p$, $T^{\mathcal{W}} \in L^p$, et $T \in L^{p+1}$

Pour $p \neq e$ si $B \in L^{2p}$, alors $\sum_1^T W_i \in L^p$.

PREUVE

- $T^{w} \in L^p$ découle de la démonstration du théorème 21.

Le reste a déjà été démontré (Théorèmes 12 et 21).

- Si $1 \leqslant i < T$, alors $W_i = \sum_1^i (B_j - A_j) \leqslant \sum_1^i B_j$

et donc $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant T} (W_i) \leqslant \sum_1^T B_i \in L^{2p}$ d'après le théorème 21 et le lemme 01. Alors

$$\sum_1^T W_i \leqslant T \max_{1 \leqslant i \leqslant T} (W_i) \in L^p$$

3 - INTEGRABILITE DES CYCLES POUR L'EQUATION (9)

On étend ici les résultats précédents au processus défini par l'équation (9). On suppose ici que A, B, C prennent leurs valeurs dans $d\mathbb{N}$, pour un $d > 0$. Cela est suffisant pour la suite et simplifie énoncés et démonstrations. On pose $X_n = B_n - A_n$ car seule cette différence intervient dans les calculs, ce qui était déjà le cas pour l'équation (3).

Soit $c = \text{infess } C = \inf(n : \mathbb{P}(C=n) > 0)$. Alors c est un point minimum du processus W défini par (9).

LEMME 31

Soit pour $w \in \mathbb{R}_+$

$T^w = \inf (n : n \geqslant 1 \text{ et } W_n^w = c)$

Pour $p \in \mathbb{N}'$

a) Si $B \in L^{p+1}$ et $C \in L^{p+1}$ alors $\mathcal{W} \in L^p$, $T^{w} \in L^p$ et $T \in L^{p+1}$

b) Si $p \neq e$, $B \in L^{2p}$ et $C \in L^{2p}$, alors $\sum_1^T W_i \in L^p$.

PREUVE

a) $\mathcal{W} \in L^p$ est démontré dans le théorème 12. Que $T = T^c$ soit intégrable est une conséquence de l'ergodicité de la Chaîne. On a, pour $w \geq c$

$$W_n^w = (w + \textstyle\sum_1^n X_i) \vee \max\limits_{1 \leq j \leq n} (C_j + \sum_{j+1}^n X_i) = (w + \sum_1^n X_i) \vee (W_n)$$

et donc :

$$W_{T_k}^w = (w + \textstyle\sum_{j=1}^k (\sum_{i=T_{j-1}+1}^{T_j} X_i)) \vee \underset{\sim}{C}$$

Posons $Y_j = \sum_{T_{j-1}+1}^{T_j} X_i$. $(Y_j, j \geq 1)$ est une famille de V.A.I.E. intégrables, $\mathbb{E}(Y) < 0$, à valeurs dans $d\mathbb{Z}$.

Soit :

$$S = \inf (n : n \geq 1 \text{ et } \textstyle\sum_1^n Y_j < 0) = \inf(n : n \geq 1 \text{ et } \sum_1^n Y_j \leq -d)$$

Alors si $k = \left[\frac{w}{d}\right] + 1$

$\sum_1^{S_k} Y_j < -w$, d'où : $T^w < T_{S_k} = \sum_1^{S_k} (T_j - T_{j-1})$, d'où :

$$\mathbb{E}((T^w)^p) \leq (\left[\frac{w}{d}\right] + 1)^p \ \mathbb{E}(T_S^p) \quad \text{pour } p \in \mathbb{N},\ p \geq 1.$$

Donc si $B \in L^{p+1}$ et $C \in L^{p+1}$, et $T_S \in L^p$, alors $\mathcal{W} \in L^p$ donc $T^{\mathcal{W}} \in L^p$ et $T \in L^{p+1}$. D'où le résultat par récurrence puisque pour $p = 1$, $\mathbb{E}(T_S) = \mathbb{E}(S)\,\mathbb{E}(T) < +\infty$.

b) Il est facile de voir, comme dans la démonstration du Théorème 22 que

$$\textstyle\sum_1^T W_i \leq T\ (\sum_1^T (B_i + C_i))$$

d'où le résultat.

c) Pour $p = e$, nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME DE KENDALL (17)

Soit $(p(n), n \geqslant 0)$, une suite de nombre réels positifs, $p(0) = 1$ et $\lim_n p(n) = p$, $(f(n), n \geqslant 0)$ une autre suite de nombres réels positifs $f(0) = 0$ et $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = 1$, telles que pour $n \geqslant 1$

$$p(n) = \sum_{k=1}^{k=n} p(n-k)\ f(k)$$

Les conditions suivantes sont alors équivalentes

(1) $\exists a,\ 0 < a < 1,\ |p(n)-p| = 0(a^n)$

(2) $\exists b,\quad b > 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\ b^n < +\infty$

On peut supposer que $c = 0$, en remplaçant W_n par $W_n - c$. Soit alors :

$$R = \inf\left(n : n \geqslant 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{i=n} X_i < 0\right)$$

$$= \inf\left(n : n \geqslant 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{i=n} X_i \leqslant -d\right)$$

et posons :

$$Y = Y_1 = \sum_{i=1}^{i=R} X_i$$

$$Y_k = Y o \theta_{R_{k-1}} = \sum_{i=R_{k-1}+1}^{i=R_k} X_i$$

Les Y_i sont des V.A.I.E., $Y \leqslant -d$.

Soit $V_k = W_{T_k}$, $V_o = 0$. On a

$$V_{k+1} = (V_k + Y_{k+1}) \vee D_{k+1}$$

ou

$$D_{k+1} = \max_{R_k \leqslant i \leqslant R_{k+1}} (C_i + \sum_{j=i+1}^{R_{k+1}} X_j)$$

On a :

$$V_{k+1} \leqslant (V_k - d) \vee D_{k+1}$$

et donc, si on définit les $(U_k, k \geqslant 0)$ par

$$U_0 = 0, \; U_{k+1} = (U_k - d) \vee D_{k+1}$$

ils vérifient une équation de type (9) et forment donc une Chaîne de Markov récurrente positive.

Soit

$$S = \inf (n : n \geqslant 1 \text{ et } U_n = 0)$$

D'après le lemme 01, il suffit de démontrer que $S \in L^e$, car alors $R_S \in L^e$ et comme $T \leqslant R_S$, $T \in L^e$.

Comme pour $n \geqslant 1$

$$\mathbb{P}(U_n = 0) = \sum_{k=1}^{k=n} \mathbb{P}(S=k)\, \mathbb{P}(U_{n-k} = 0)$$

il suffit de vérifier, d'après le lemme de Kendall que

$|\mathbb{P}(U_n = 0) - p| = 0(a^n)$ avec $0 < a < 1$, et $p = \lim_n P(U_n = 0)$

Or

$$\mathbb{P}(U_n = 0) = \prod_{k=1}^{k=n} \mathbb{P}(D \leqslant (k-1)d)$$

$$p = \prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(D \leqslant (k-1)\, d)$$

$$\mathbb{P}(U_n = 0) - p \leqslant 1 - \prod_{n+1}^{\infty} (1 - \mathbb{P}(D > (k-1)d))$$

$$\leqslant 1 - \prod_{n+1}^{\infty} (1 - Ce^{-dbk}) \quad \text{ou} \quad b > 0 \text{ et } C = \mathbb{E}(e^{bU})$$

$$\leqslant C \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-dbk} = C \frac{e^{-db(n+1)}}{1 - e^{-db}}$$

D'où le résultat.

4 - TEMPS DE RENOUVELLEMENT ET INTEGRABILITE DES CYCLES POUR LES GI/G/q

Nous nous intéressons ici au processus défini par l'équation (4). La notion de "temps de renouvellement" n'est ici pas la même que dans les GI/G/1, car, dans le cas général, il n'y a par retour et 0 du processus W. Cette notion est semblable à celle qui sera introduite dans les files avec impatience. Nous sommes évidemment dans le cas de la stabilité, c'est-à-dire que $\mathbb{E}(B) < q\ \mathbb{E}(A)$ (Théorème 11). Pour simplifier, nous supposons que les $(A_n, n \in \mathbb{Z})$ sont indépendantes des $(B_n, n \in \mathbb{Z})$, mais les résultats resteraient vrais sans cette hypothèse (pour la récurrence dans ce cas confère (7)).

On note :

$a = \text{supess } A = \inf (t : t \in R \text{ et } \mathbb{P}(A < t) = 1)$

$b = \text{infess } B = \sup (t : t \in R \text{ et } \mathbb{P}(B > t) = 1)$

On suppose évidemment que $0 < a \leqslant +\infty$, $0 \leqslant b < +\infty$.

Si $a > b$, c'est-à-dire si $\mathbb{P}(B-A < 0) > 0$, alors ((4) ; (6) ; (7) ; (11) ; (15) ; (25), quel que soit $w \in S$, W^w récurre en 0. On note alors :

$$T_w = \inf (n/n \geq 1 \text{ et } W_n^w = 0)$$

Si $a < b$, soit $j = \left[\frac{b}{a}\right]$ (ou' $[x]$ signifie :"partie entière de x"). L'hypothèse $\mathbb{E}(B) < q\, \mathbb{E}(A)$, implique alors que $1 \leq j < q$. Soit :

$$\bar{v} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{q-j \text{ termes}}, \underbrace{b-ja, b-(j-1)a, \ldots, b-a}_{j \text{ termes}})$$

c'est-à-dire que

Pour i, $1 \leq i \leq q-j$ $\quad \bar{v}^i = 0$

Pour i, $1 \leq i \leq j$ $\quad \bar{v}^{q-j+i} = b-(j+1-i)a$

Alors $\bar{v}$ est un point minimum pour W, et on écrira donc W_n pour $W_n^{\bar{v}}$. Pour δ, $\delta > 0$, soit :

$$\bar{v}_\delta = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{q-j \text{ termes}}, \underbrace{b-j(a-\delta), b-(j-1)(a-\delta), \ldots, b-a+\delta}_{j \text{ termes}})$$

C'est-à-dire que :

Pour i, $1 \leq i \leq q-j$ $\quad \bar{v}_\delta^i = 0$

Pour i, $1 \leq i \leq j$ $\quad \bar{v}_\delta^{q-j+i} = b-(j+1-i)(a-\delta)$

Soit

$$V_\delta = \{w/w \in S \text{ et } \bar{v} \leq w \leq \bar{v}_\delta\}$$

Il est démontré dans (4), (7) et (11) que, pour tout $w \in \mathbb{S}$, W^w récurre dans V_δ. On a alors le phénomène de renouvellement suivant : soit δ, $0 < \delta < \frac{(j+1)\,a-b}{j+1}$, et

$$S = \inf (n/n \geq 0 \text{ et } W_{n+1} \notin V_\delta)$$

$$U_1^w = \inf (n/n \geq 1 \text{ et } W_n^w \in V_\delta)$$

$$S_1^w = \inf (n/n \geq 0 \text{ et } W^w_{U_1^w+n+1} \notin V_\delta)$$

et par récurrence, pour k, $k \geqslant 1$:

$$U_{k+1}^{w} = \inf (n/n \geqslant U_k^w + S_k^w + 1 \text{ et } W_n^w \in V_\delta)$$

$$S_{k+1}^{w} = \inf (n/n \geqslant 0 \text{ et } W^w_{U^w_{k+1}+n+1} \in V_\delta)$$

Il est facile de voir ((4) ; (1)) que les $(S_k^w, k \geqslant 1)$ sont des VAIE géométriques de même distribution que S, et que, si $S_k^w \geqslant j$, pour $n \geqslant U_k^w + j$, W_n^w est indépendante de $W^w_{U^w_k}$. Si

$$L^w = \inf (k/k \geqslant 1 \text{ et } S_k^w \geqslant j)$$

alors $\quad T^w = U^w_{L^w} + j$

est un temps d'arrêt, et, pour $n \geqslant T^w$, $W_n^w = W_n$. On écrira T pour T^{∇}.

La suite $(Y_k^w, k \geqslant 2)$ définie par :

$$Y_k^w = (T_k^w - T_{k-1}^w \,;\, W^w_{T^w_{k-1}+1}, \ldots\ldots, W^w_{T^w_k})$$

est une suite de VA stationnaire 2-dépendantes (11), (c'est-à-dire que $\forall k$, $k \geqslant 2$, $\sigma(Y_2^w, \ldots, Y_k^w)$ est indépendante de $\sigma(Y_i^w, i \geqslant k+2)$, Y_k^w étant distribuée, pour $k \geqslant 2$, comme $Y = (T - j \,;\, W_{j+1}, \ldots\ldots, W_T)$ sachant $\{S \geqslant j\}$).

Nous pouvons alors énoncer le

THEOREME 41

Si $\mathbb{E}(B) < q\,\mathbb{E}(A)$, si T et T^w sont définis comme ci-dessus, et si $\mathcal{W}$ est l'unique solution $\mathbb{P}$p.s. finie de l'équation

$$\mathcal{W} \circ \theta = R(\mathcal{W} + B\mathrm{I} - A e)_+$$

Alors :

1) $\forall p \in \mathbb{N}'$, si $B \in L^{p+1}$, alors $\mathcal{W} \in L^p$, $T^{\mathcal{W}} \in L^p$ et $T \in L^{p+1}$;

2) $\forall p \in \mathbb{N}$ si $B \in L^{2p}$ alors $\sum_{i=1}^{i=T} W_i \in L^p$.

PREUVE

-a- Discrétisation de Kieffer et Wolfowitz (15)

Choisissons un $d \in \mathbb{R}$, $d > 0$ assez petit pour que

$$\mathbb{E}(\left[\frac{B}{d}\right] d + d) < q\,\mathbb{E}(\left[\frac{A}{d}\right] d)$$

Notons : $A'_n = \left[\frac{A}{d}n\right] d \qquad B'_n = \left[\frac{B}{d}n\right] d + d. \qquad \mathcal{S}' = \mathcal{S} \cap (d\mathbb{Z})^q$

Soit $W'^{w'}$ le processus défini sur $\mathcal{S}'$ par :

$$W'^{w'}_0 = w'$$

$$W'^{w'}_{n+1} = R(W'^{w'}_n + B'_{n+1}\,\mathbb{1} - A'_{n+1}\,\bar{e})_+$$

Alors, pour tout $w \in \mathcal{S}$, si $w' \in \mathcal{S}'$, $w \leqslant w'$, pour tout $n \geqslant 0$, on a :

$$W^w_n \leqslant W'^{w'}_n$$

L'étude du processus discrétisé W' est plus simple que celle du processus W et ici elle nous suffira. Son avantage est que les temps de retour dans les points forment une vraie suite de renouvellement.

Pour alléger l'écriture dans la suite de la démonstration, nous supprimerons les ' et ne considèrerons que des VA à valeurs dans $d\mathbb{N}$, $d\mathbb{Z}$, $(d\mathbb{Z})^q$ où $\mathcal{S}'$ suivant les cas.

-b- Etude du processus majorant

Considérons le processus

$$W^{v,z} = ((V_n^z, Z_n^{v,z}), n \geqslant 0) = (V^v, Z^{v,z})$$

défini en (6) et (7). Remarquons que :

- $\forall v$, V^v récurre au point $(q-1)b$ qui est un point minimum pour V.

- $\forall (v, z)$, $Z^{v,z}$ récurre au point $(q-1)^2 b$, $\{Z_n^{v,z} = (q-1)^2 b\} \subset \{V_n^v = (q-1)b\}$ et $(q-1)^2 b$ est un point minimum pour Z.

- $\forall v$, $V_n^v = (v - \sum_{i=1}^{i=n} B_i) \vee (V_n)$

- $\forall (v,z)$ $Z^{v,z} = (z + \sum_{i=1}^{i=n} (B_i - qA_i) \vee (Z_n^{v,(q-1)^2 b})$

Soit

$$\nu^{v,z} = \inf(n/n \geqslant 1 \text{ et } Z_n^{v,z} = (q-1)^2 b)$$

$$\nu = \inf(n/n \geqslant 1 \text{ et } Z_n = (q-1)^2 b) \quad \text{où} \quad Z_n = Z_n^{(q-1)b,(q-1)^2 b}$$

Nous allons démontrer que si $B \in L^{p+1}$, $\nu \in L^{p+1}$ et donc $\nu^{\mathcal{V},\mathcal{Z}} \in L^p$, où $(\mathcal{V},\mathcal{Z})$ est l'unique solution $\mathbb{P}$p.s. finie de l'équation

$$\mathcal{V} \circ \theta = ((q-1)B) \vee (\mathcal{V} - B)$$

$$\mathcal{Z} \circ \theta = (\mathcal{Z} + B - qA) \vee ((q-1)\mathcal{V})$$

Soient :

$$\sigma^v = \inf (n/n \geqslant 1 \text{ et } V_n^v = (q-1)\, b)$$

$$\sigma = \sigma^{(q-1)b}$$

Alors si $B \in L^{p+1}$, d'après le théorème 12 et le lemme 31, on a $\vartheta \in L^p$, $\sigma\vartheta \in L^p$, et $\sigma \in L^{p+1}$.

On a

$$Z^{(q-1)b,z}_{\sigma_{k+1}} = (Z^{(q-1)b,z}_{\sigma_k} + \sum_{i=\sigma_k+1}^{i=\sigma_{k+1}} (B_i-A_i)) \vee (\max_{\sigma_k+1<i<\sigma_{k+1}} ((q-1)V_i + \sum_{j=i+1}^{j=\sigma_{k+1}} B_j-qA_j))$$

Posons :

$$M_k = \sum_{i=\sigma_{k-1}+1}^{i=\sigma_k} (B_i-qA_i)$$

$$M = M_1$$

$$N_k = \max ((q-1) V_i + \sum_{j=i+1}^{j=\sigma_k} (B_i-qA_i)/\sigma_{k-1}+1 \leq i \leq \sigma_k)$$

$$N = N_1$$

$$Q^z_k = Z^{(q-1)b,z}_{\sigma_k}$$

Si $B \in L^{p+1}$, alors

$$M_+ \leq \sum_{i=1}^{i=\sigma} B_i \in L^{p+1}$$

$$N \leq (q-1) \max_{1<i<\sigma} V_i + \sum_{i=1}^{i=\sigma} B_i \leq q \sum_{i=1}^{i=\sigma} B_i \in L^{p+1}$$

La suite $((M_k, N_k), k \geq 1)$ est une suite de V.A.I.E.

On a :

$$Q^z_0 = z$$

$$Q^z_{k+1} = (Q^z_k + M_{k+1}) \vee (N_{k+1})$$

et c'est donc un processus du type de celui décrit par l'équation (9).

Comme infess $N = (q-1)^2 b$, si τ^z

$$\tau^{z} = \inf (k / k \geqslant 1 \text{ et } Q_k^z = (q-1)^2 b)$$

$$\tau = \tau^{(q-1)^2 b}$$

et si $\mathcal{Q}$ est l'unique solution $\mathbb{P}$ p.s. finie de l'équation

$$\mathcal{Q} \circ \theta = (\mathcal{Q} + M)\, v(N)$$

alors, d'après le lemme 31, si $B \in L^{p+1}$, $\mathcal{Q} \in L^p$, $_{\tau}\mathcal{Q} \in L^p$ et $\tau \in L^{p+1}$.

Comme on a

$$\nu < \sigma_\tau$$

et donc, si $B \in L^{p+1}$, $\nu \in L^{p+1}$ et donc $_{\nu}\mathcal{V},\mathcal{X} \in L^p$.

Par ailleurs, si $B \in L^{2p}$

$$\max_{1 \leqslant n \leqslant \nu} Z_n = ((q-1)^2 + 1) \sum_{i=1}^{i=\nu} B_i \in L^{2p}$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{n=\nu} Z_n < \nu \max_{1 \leqslant n \leqslant \nu} Z_n \in L^p$$

-c- Le processus W discrétisé

Nous considérons toujours le processus discrétisé. Aux instants ν_k définis précédemment

$$W_{\nu_k} \leqslant (q-1)^2\, b\mathbb{1}$$

puisque $\sum_{i=1}^{i=q} W_n^i \leqslant Z_n^{\alpha,\beta} \leqslant Z_n$, où

$$\alpha = \sum_{i=1}^{i=q} (v^q - v^i) \leqslant (q-1)\, b$$

$$\beta = \sum_{i=1}^{i=q} v^i \leqslant (q-1)^2\, b$$

On sait, (confère (4) ou (11) ou (15)) qu'il existe un entier ℓ, ne dépendant que de ϖ, tel que si D

$$D = \bigcap_{i=1}^{i=\ell} \{B_i = b,\ A_i = a\}$$

alors :

$$D \subset \{W^{\varpi}_{\ell-j} = \varpi,\ W^{\varpi}_{\ell-j+1} = \varpi,\ \ldots\ldots,\ W^{\varpi}_{\ell} = \varpi\}$$

où $\varpi = (q-1)^2 b$

Soit $\qquad \mu = \inf\,(k/k \geq 1 \text{ et } 1_D \circ \theta_{\nu_k} = 1)$

μ est une V.A. dont toutes les puissances sont intégrables. Par ailleurs

$$\{\mu \geq n\} \in \sigma\{A_i,\ B_i / 1 \leq i \leq \nu_{n-1} + \ell\}$$

et est donc indépendante de

$$\sigma\{\nu_{n+\ell+k} - \nu_{n-1+\ell+k}/k \geq 0\} \subset \sigma\{A_i,\ B_i/i \geq \nu_{n-1}+\ell+1\}$$

Donc, d'après le lemme 01, $\nu_{\mu+\ell} \in L^{p+1}$, dès que $B \in L^{p+1}$. Or $T \leq \nu_\mu \leq \nu_{\mu+\ell}$, d'où le résultat dans le cas du processus discrétisé.

-d- Le processus W non discrétisé

Remettons les ' pour le processus discrétisé comme en a. On peut alors choisir d, d > 0 tel que $\varpi' < \varpi_\delta$. On a alors

$$\forall\ w' \in \mathcal{S}',\ T'^{w'} \geq T^{w'}$$

puisque pour tout n, $W^{w'}_n < W'^{w'}_n$. Comme T^w est croissante en w

$$T^{\mathcal{W}} \leq T^{\mathcal{W}'} \leq T'^{\mathcal{W}'}$$

et donc, si $B \in L^{p+1}$, $T^{\mathcal{W}} \in L^p$ et $T \in L^{p+1}$.

Par ailleurs

$$\left\| \sum_{n=1}^{n=T} W_n \right\| < T \max_{1 \leqslant n \leqslant T} Z'_n$$

Donc si $B \in L^{2p}$, $\sum_{i=1}^{i=T} W_i \in L^p$

5 - TEMPS DE RENOUVELLEMENT ET INTEGRABILITE DES CYCLES POUR LES FILES AVEC IMPATIENCE

Il s'agit ici de l'équation (5), où on utilise le processus majorant défini par (8). Nous sommes dans le cas de la stabilité c'est-à-dire que $\mathbb{E}(B1_{\{C=\infty\}}) < \mathbb{E}(A)$. On choisit alors le ℓ de l'équation (8) tel que $\mathbb{E}(B1_{\{C \geqslant \ell\}}) < \mathbb{E}(A)$, et alors le processus (8) est aussi stable (Théorème 11).

Nous décrivons rapidement le phénomène de récurrence et les temps de renouvellement correspondant. Le problème est le même que pour les Files GI/G/q. Nous supposons ici aussi pour simplifier l'exposé que les $(A_n, n \geqslant 0)$, $(B_n, n \geqslant 0)$ et les $(C_n, n \geqslant 0)$ sont des familles de V.A. indépendantes entre elles. On pose encore

$$a = \text{esssup } A \qquad (0 < a \leqslant +\infty)$$

$$b = \text{essinf } B \qquad (0 \leqslant b < +\infty)$$

$$c = \text{essinf } C \qquad (0 \leqslant c < +\infty)$$

Alors si min (b-a, c-a) < 0, W^W récurre en 0.
Si min (b-a, c-a) = v > 0, c'est un point minimum pour W et W récurre, pour tout δ, $\delta > 0$, dans l'ensemble $V_\delta = [v, v + \delta]$. (confère (6)).

On définit alors S, les $S_k^w, k \geqslant 1$, les $U_k^w, k \geqslant 1$, L^w, les $Y_k^w, k \geqslant 1$, T^w et T, ect, comme au §4 ou on prend $j = 1$, et les résultats pour ces V.A. tels qu'ils sont énoncés avant le théorème 41 restent vrais.

Le théorème suivant se démontre comme le précédent, en utilisant le processus majorant défini en (8). Nous en laissons la vérification au lecteur.

THEOREME 51

Si $\mathbb{E}(B1_{\{C=\infty\}}) < \mathbb{E}(A)$, si T et T^w sont définis comme ci-dessus et si $\mathcal{W}$ est l'unique solution $\mathbb{P}$ p.s. fini de l'équation

$$\mathcal{W} \circ \theta = (\mathcal{W} + B - A)_+ \wedge (\mathcal{W} \vee C - A)_+$$

alors

1) $\forall p \in \mathbb{N}'$, si $B \in L^{p+1}$, $\mathcal{W} \in L^p$, $T^{\mathcal{W}} \in L^p$ et $T \in L^{p+1}$.

2) $\forall p \in \mathbb{N}$ si $B \in L^{2p}$, $\sum_{i=1}^{i=T} W_i \in L^p$.

6 - VITESSE DE CONVERGENCE VERS LE REGIME STATIONNAIRE

Pour les équations (3), (4), (5) (pour les autres aussi mais c'est de moindre importance), les temps d'arrêt T^w précédemment définis vérifient la propriété

$$(10) \qquad \forall w, \forall n, n \geqslant T^w \vee T \ , \ W_n^w = \mathcal{W}_n$$

où $(\mathcal{W}_n, n \in \mathbb{Z})$ est le régime stationnaire défini par ces équations (cf le théorème 11). En effet nous avions déjà noté que si $n \geqslant T^w$, $W_n^w = W_n$. La propriété (10) est alors évidente en tenant compte de ce que T^w est une fonction croissante en w.

Cette propriété est très forte. Elle signifie que presque toutes les trajectoires $(W_n^w(\omega),\ n \geqslant 0)$ rejoignent les trajectoires du processus stationnaire $(\mathcal{W}_n,\ n \geqslant 0)$, et ceci quelle que soit la valeur initiale w. Cette propriété est, bien entendu, une propriété du "couplage naturel" $(W_n^w, \mathcal{W}_n)$, et les résultats suivants auraient pu être démontrés à partir de ceux de Pittman ((24), confère aussi (3)). Mais le remarquable, pour les Chaînes de Markov définies par les équations de récurrence de type (2) à (9), est que l'on peut se passer de la théorie générale des Chaînes de Markov, à cause, en particulier de cette propriété (10).

Notons $\mathcal{L}_n(W^w)$ (respectivement $\mathcal{L}(\mathcal{W})$) la loi du processus $(W_{n+k}^w,\ k \geqslant 0)$ (respectivement $(\mathcal{W}_k,\ k \geqslant 0)$), c'est-à-dire l'image sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ou $\mathbb{S}^{\mathbb{N}}$ suivant les cas, de la probabilité $\mathbb{P}$ par l'application $\omega \longrightarrow (W_{n+k}^w(\omega),\ k \geqslant 0)$ (respectivement $\omega \longrightarrow (\mathcal{W}_k(\omega),\ k \geqslant 0)$). On note ici $\|\ \ \|$ la norme de la variation totale sur les mesures bornées.

<u>THEOREME 61</u>

Pour tout $p \in \mathbb{N}'$, si $B \in L^{p+1}$, alors

- si $p \neq e$, $\|\mathcal{L}_n(W^w) - \mathcal{L}(\mathcal{W})\| = 0(1/n^p)$

- si $p = e$, $\exists \rho$, $0 < \rho < 1$, $\|\mathcal{L}_n(W^w) - \mathcal{L}(\mathcal{W})\| = 0(\rho^n)$

<u>PREUVE</u>

$$\|\mathcal{L}_n(W^w) - \mathcal{L}(\mathcal{W})\| \leqslant 2 \sup \left(\mathbb{E}(1_A((W_{n+k},\ k \geqslant 0))) - \mathbb{E}(1_A((\mathcal{W}_{n+k},\ k \geqslant 0)))\ /A \in \mathcal{Q}\right)$$

$$\leqslant 2\,\mathbb{P}\,(T^w \vee T^{\mathcal{W}} \geqslant n)$$

d'où le résultat d'après les paragraphes précédents.

REMARQUE

La convergence géométrique est déjà démontrée dans (23), (voir aussi (21)), pour les GI/G/1. Evidemment, ce théorème contient le théorème d'OREY pour les Chaînes de Markov ici considérées.

7 - SERIE DES COEFFICIENTS DE CORRELATION ET THEOREMES LIMITES

Nous allons appliquer les résultats précédents aux théorèmes limites pour les GI/G/1, c'est-à-dire pour le processus défini par l'équation (3).

Nous commençons par un résultat de D. J. DALEY (9).

THEOREME 7.1

Si $B \in L^3$, alors

$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathrm{cov}(\mathcal{W}_o, \mathcal{W}_k) \geqslant \mathrm{cov}(\mathcal{W}_o, \mathcal{W}_{k+1}) > 0$

Si $B \in L^4$, la série

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(\mathcal{W}_o) + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{cov}\,(\mathcal{W}_o, \mathcal{W}_k)$$

est convergente et

$$\mathrm{Var}\Big(\sum_{k=1}^{k=T} W_k\Big) = \mathbb{E}(T)\,\sigma^2$$

Nous avons besoin du lemme technique suivant :

LEMME 7.2

Soit f une fonction croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles, et μ une probabilité sur $(\mathbb{R}_+, \beta_{\mathbb{R}_+})$ telle que

$\int_{\mathbb{R}_+} f(t)\ \mu\ (dt) = 0$. Alors, $\int_{\mathbb{R}_+} tf(t)\ \mu(dt) \geq 0$.

Démonstration du lemme

Soit $c > 0$ tel que $f(c) = 0$. Si $t = cu$, on a :

$\int_{\mathbb{R}_+} tf(t)\ \mu(dt) = c \int_{\mathbb{R}_+} uf(cu)\ \mu(cdu)$. On peut donc se ramener

au cas où $c = 1$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}_+} tf(t)\ \mu(dt) = \int_0^1 tf(t)\ \mu(dt) + \int_1^{+\infty} tf(t)\ \mu(dt)$$

$$= - \int_0^1 tf_-(t)\ \mu(dt) + \int_1^{+\infty} tf_+(t)\ \mu(dt)$$

$$\geq - \int_0^1 f_-(t)\ \mu(dt) + \int_1^{+\infty} f_+(t)\ \mu(dt) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t)\mu(dt) = 0$$

d'où le résultat.

Démonstration du Théorème 7

a) En notant $\mathcal{W}_n = \mathcal{W}_o\ \theta^n$, on a

$$\mathcal{W}_{n+1} = (\mathcal{W}_n + B_{n+1} - A_{n+1})_+ = \mathcal{W}_n - \mathcal{W}_n \wedge (A_{n+1} - B_{n+1})$$

$\mathcal{W}_n$ appartient à L^2 d'après le théorème 1.2, et

donc

$$\mathbb{E}(\mathcal{W}_o \mathcal{W}_n) - \mathbb{E}(\mathcal{W}_o \mathcal{W}_{n+1}) = \mathbb{E}(\mathcal{W}_o \cdot \mathcal{W}_n \wedge (A_{n+1} - B_{n+1})$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+} \mu(dt)\ t\ \mathbb{E}(W_n^t \wedge (A_{n+1} - B_{n+1}))$$

où μ est la loi de $\mathcal{W}_o$. $f(t) = \mathbb{E}(W_n^t \wedge (A_{n+1} - B_{n+1}))$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$ qui vérifie les hypothèses du lemme 7.2. On a donc $\mathbb{E}(\mathcal{W}_o \mathcal{W}_n) \geq \mathbb{E}(\mathcal{W}_o \mathcal{W}_{n+1})$ et donc $\mathrm{cov}\,(\mathcal{W}_o, \mathcal{W}_n) > \mathrm{cov}\,(\mathcal{W}_o, \mathcal{W}_{n+1})$.

b) Si $B \in L^4$, alors d'après le théorème 2.2, $\sum_{k=1}^{k=T} W_k \in L^2$. On sait alors, (K. L. Chung (26) page 102) que

$$\lim_n (1/n)\,\mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{k=n} (W_k - \mathbb{E}(\mathcal{W}_o))\right)^2\right) = (1/\mathbb{E}(T))\ \mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{k=T} W_k\right)$$

Or

$$(1/n)\,\mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{k=n} \mathcal{W}_k - \mathbb{E}(\mathcal{W}_o)\right)^2\right) = \mathrm{Var}(\mathcal{W}_o) + 2\sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{n-k}{n}\ \mathrm{cov}(\mathcal{W}_o,\mathcal{W}_k)$$

et, d'après la première partie de la démonstration, le membre de droite de cette égalité tend vers

$\mathrm{Var}(\mathcal{W}_o) + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{cov}(\mathcal{W}_o,\mathcal{W}_k)$ quand n tend vers l'infini.

c) Il reste donc à démontrer l'égalité des deux dernières limites, ce qui n'est pas évident. Nous allons d'abord démontrer le résultat auxiliaire suivant :

i) $T^{\mathcal{W}}\left|\sum_{k=1}^{k=T} \mathcal{W}_k\right| \in L^1$

ii) $(1/T^{\mathcal{W}})\left(\sum_{k=1}^{k=T} \mathcal{W}_k\right)^2 \in L^1$

iii) $T^{\mathcal{W}} \sup_n \left((1/n \sum_{k=1}^{k=n} \mathcal{W}_k)^2\right) \in L^1$

D'après le théorème ergodique uniforme, et puisque $B \in L^4$ implique que $\mathcal{W} \in L^3$ (Théorème 1.2), alors $\sup_n 1/n \left|\sum_{k=1}^{k=n} \mathcal{W}_k\right| \in L^3$. Par ailleurs, (Théorème 2.2) $T^{\mathcal{W}} \in L^3$. Donc la troisième affirmation est démontrée. Comme le premier terme est majoré par $(T^{\mathcal{W}})^2 \sup_n \left(1/n \left|\sum_{k=1}^{k=n} \mathcal{W}_k\right|\right)$ et le second terme par $T^{\mathcal{W}} \sup_n \left((1/n \sum_{k=1}^{k=n} \mathcal{W}_k)^2\right)$, les deux premières affirmations sont alors démontrées.

d) Posons $\mathcal{W}'_n = \mathcal{W}_n - \mathbb{E}\,(\mathcal{W}_o)$, $W'_n = W_n - \mathbb{E}\,(\mathcal{W}_o)$. On a :

$$(1/n)\,\mathbb{E}\,((\sum_{k=1}^{k=n} \mathcal{W}'_k)^2) = (1/n)\,\mathbb{E}((\sum_{k=1}^{k=n} \mathcal{W}'_k)^2 1_{\{T > n\}}) + (1/n\,\mathbb{E}((\sum_{k=1}^{k=T} \mathcal{W}'_k)^2 1_{\{T \leqslant n\}})$$

$$+ (1/n)\,\mathbb{E}((\sum_{k=1}^{k=T^{\mathcal{W}}} \mathcal{W}'_k)\ (\sum_{j=T^{\mathcal{W}}+1}^{j=n} \mathcal{W}'_j)\ 1_{\{T^{\mathcal{W}} \leqslant n\}})$$

$$+ (1/n)\,\mathbb{E}\,((\sum_{j=T^{\mathcal{W}}+1}^{j=n} \mathcal{W}'_j)^2 1_{\{T^{\mathcal{W}} \leqslant n\}})$$

$$= (1) + (2) + (3) + (4)$$

$$- (1) \leqslant \mathbb{E}\,((1/n \sum_{k=1}^{k=n} \mathcal{W}'_k)^2 T^{\mathcal{W}})$$

La variable sous ce dernier signe "espérance mathématique" tend p.s. vers 0 par le théorème ergodique, et est majorée dans L^1 d'après le paragraphe précédent. Donc (1) tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Pour (2), la variable sous le signe espérance tend p.s. vers 0 quand n tend vers l'infini. Cette variable est majorée par $(1/T^{\mathcal{W}})\ (\sum_{k=1}^{k=T^{\mathcal{W}}} \mathcal{W}'_k)^2$ qui est intégrable d'après le paragraphe précédent. Donc (2) tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Comme pour $j \geqslant T^{\mathcal{W}} + 1$, $\mathcal{W}_j = W_j$

$$- (3) = \mathbb{E}\,((\sum_{k=1}^{k=T^{\mathcal{W}}} \mathcal{W}'_k)\ (\sum_{j=T^{\mathcal{W}}+1}^{j=n} \mathcal{W}'_j)\ 1_{\{T^{\mathcal{W}} \leqslant n\}})$$

$$- (4) = (1/n)\,\mathbb{E}\,((\sum_{j=T^{\mathcal{W}}+1}^{j=n} W'_j)^2 1_{\{T^{\mathcal{W}} \leqslant n\}})$$

Alors

$$- (3) = (1/n) \sum_{j=1}^{j=n} a(j)\, b(n-j) = \frac{a * b(n)}{n}$$

$$- (4) = (1/n) \sum_{k=1}^{k=n} c(k)\, d(n-k) = \frac{a * b(n)}{n}$$

où pour $n \geqslant 1$

$$a(n) = \mathbb{E}\ (1_{\{T\ =n\}} \sum_{k=1}^{k=n} \mathcal{W}'_k)$$

$$b(n) = \mathbb{E}\ (\sum_{k=1}^{k=n} W'_k)$$

$$c(n) = \mathbb{P}\ (T^{\mathcal{W}} = n)$$

$$d(n) = \mathbb{E}\ ((\sum_{k=1}^{k=n} W'_k)^2)$$

et $a(0) = b(0) = c(0) = d(0) = 0$.

D'après la première partie de la démonstration la série $a(n)$ est absolument convergente et

$$- \sum_{n=0}^{n=\infty} a(n) = \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{k=T^{\mathcal{W}}} \mathcal{W}'_k)$$

$$- \lim_{n} \frac{b(n)}{n} = \mathbb{E}(\ '_{o}) = 0$$

$$- \sum_{n=1}^{n=\infty} c(n) = 1$$

$$- \lim_{n} \frac{d(n)}{n} = \lim_{n}\ 1/n\, \mathbb{E}\ ((\sum_{k=1}^{k=n} W'_{o})^2)$$

Les séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} a(n)\, z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} c(n)\, z^n$ convergent absolument pour $|z| \leqslant 1$, et les séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} d(n)\, z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b(n)\, z^n$ convergent absolument pour $|z| < 1$.

On a alors, par intégration par partie de la formule $\sum_{n=0}^{\infty} a*b(n)\ x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)\ x^n \sum_{n=0}^{\infty} b(n)\ x^n$, valable pour $x \in]-1, +1[$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a*b(n)x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)\ x^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b(n)}{n+1}\ x^{n+1}$$

$$- \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} na(n)\ u^{n-1}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b(n)u^{n+1}}{n+1}\right) du$$

et on a bien sur la formule équivalente en remplaçant a par c et b par d.

Mais

$$\lim_{x\uparrow 1} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b(n)x^n}{n+1} = \lim_n \frac{b(n)}{n} = 0$$

$$\lim_{x\uparrow 1} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d(n)x^n}{n+1} = \lim_n \frac{d(n)}{n} \in \mathbb{R}$$

$\lim_{x\uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} na(n)x^{n-1} = \mathbb{E}\ (T^{\mathcal{W}} \sum_{k=1}^{k=T^{\mathcal{W}}} \mathcal{W}_k')$, d'après le paragraphe c précédent.

$$\lim_{x\uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} nc(n)x^{n-1} = \mathbb{E}(T^{\mathcal{W}})$$

$$\lim_{x\uparrow 1} (1-x) \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} na(n)u^{n-1}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b(n)u^{n+1}}{N+1}\right) du = 0$$

et on a encore le même résultat en remplaçant a par c et b par d. Donc

$$\lim_{x\uparrow 1} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a*b(n)x^{n+1}}{n+1} = 0$$

$$\lim_{x\uparrow 1} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c*d(n)x^{n+1}}{n+1} = \lim_n \frac{1}{n} \mathbb{E}\ \left(\left(\sum_{k=1}^{k=n} W_k'\right)^2\right)$$

Mais

$$\lim_{n} \frac{1}{n} \mathbb{E}((\sum_{k=1}^{k=n} \mathcal{W}_k')^2) = \lim_{x\uparrow 1} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\mathbb{E}((\sum_{k=0}^{k=n} \mathcal{W}_k')^2)\ x^{n+1}$$

$$= \lim_{x\uparrow 1} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c * d(n)}{n+1}\ x^{n+1} = \lim_{n} \frac{1}{n} \mathbb{E}\ ((\sum_{k=1}^{k=n} W_k')^2)$$

et c'est ce qu'il fallait démontrer.

La démonstration nous permet d'énoncer le

THEOREME 7.3

Sous les hypothèses du théorème 7.1, et avec les mêmes notations, on a :

$$- \lim_{n} \frac{1}{n} \mathrm{Var}\ (\sum_{k=1}^{k=n} \mathcal{W}_k) = \sigma^2 = (1/\mathbb{E}(T))\ \mathrm{Var}\ (\sum_{k=1}^{k=T} W_k)$$

$$- \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \lim_{n} \frac{1}{n} \mathbb{E}\ ((\sum_{k=1}^{k=n} W_k^x - \mathbb{E}(\mathcal{W}_0))^2) = \sigma^2$$

La démonstration pour x est la même que précédemment.

Pour ne pas alourdir inutilement l'exposé, nous énonçons seulement deux théorèmes limites pour les GI/G/1. La démonstration de ces théorèmes se trouve dans D. L. IGLEHART (13), (14)). La nouveauté tient ici au fait que ce qui précède nous permet de modifier les hypothèses et la forme du théorème.

On note D $[0,\ 1]$, l'espace des fonctions continues à droite, limitées à gauche, sur $[0,\ 1]$, à valeurs réelles, muni de la topologie de Skorohod qui en fait un espace métrique complet. K est dans D $[0,\ 1]$ le compact

$$K = \{f / f(0) = 0,\ \int_0^1 (f'(t))^2\ dt \leqslant 1\}.$$

THEOREME 7.4

On suppose que $B \in L^4$. Alors

a) La suite en n de processus (où $t \in [0, 1]$)

$$t \mapsto \frac{\sum_{j=0}^{j=[nt]} W_j - nt\,\mathbb{E}(\mathcal{W})}{\sigma\sqrt{n}} \qquad ([x] = \text{partie entière de } x)$$

converge en Loi vers le mouvement Brownien standard quand n tend vers l'infini.

b) La suite en n de processus (où $t \in [0, 1]$)

$$t \quad \frac{\sum_{j=0}^{j=[nt]} W_j - nt\,\mathbb{E}(\mathcal{W})}{\sigma\sqrt{n}\ \mathrm{Log\ Log}\ n}$$

est relativement compact dans $D[0, 1]$, et l'ensemble de ses points limites est K quand n tend vers l'infini.

BIBLIOGRAPHIE

(1) BOROVKOV A. A. : Stochastic processes in queuing theory. Springer 1976

(2) CARTAN H. : Calcul différentiel. (Hermann)

(3) CELLIER D. : Méthode de fission pour l'étude de la récurrence des chaînes de Markov. Thèse de 3ème cycle, Rouen 1981

(4) CHARLOT F., GHIDOUCHE M., HAMANI M. : Irréductibilité et récurrence au sens de Harris des temps d'attente des GI/G/q - Z. Wahrscheinlichkeistheory verw. Gebiete 43 (1978) 187 à 203

(5) CHARLOT F., PUJOLLE J. : Recurrence in single server queues with impatient customers. Ann. Inst. Henri Poincarré, vol. XIV, n° 4 (1978) 399 à 410

(6) CHARLOT F. : Files d'attente définies par des équations de récurrence croissantes. Existence et unicité du régime stationnaire. Problèmes de récurrence. Exposé dactylographié de séminaire, Labo de Proba de Rouen (1981)

(7) CHOUAF B. : Equations de récurrence des files d'attente à plusieurs serveurs en hypothèse de stationnarité et semi-markoviennes. Thèse de magister, Institut de Mathématiques, U. S. T. H. B., Alger (1981)

(8) COGBURN R. : A uniform theory for sums of Markov chains transition probabilities. Annals of Probability, vol. 3, n° 2, 191 à 214 (1975)

(9) DALEY D. J. : The serial correlation coefficients of waiting times in a stationnary single server queue. J. Austral. Math. Soc., 8, 683 à 699

(10) DALEY D. J. : Single server queues with uniformily limited queuing time. J. Austral. Math. Soc., 4 (1964) 489 à 505

(11) GHIDOUCHE M. : Théorèmes limites pour les GI/G/q. Thèse de 3ème cycle, Rouen 1977

(12) GUELLIL A. : Files d'attente avec impatience en hypothèse de stationnarité et processus ponctuels. Thèse de magister, Inst. de Math., U. S. T. H. B., Alger 1983

(13) IGLEHART D. L. : Weak convergence in queuing theory. Adv. Appl. Prob., 5, 550 à 594 (1973)

(14) IGLEHART D. L. : Functionnals limits theorems for the GI/G/1 queues in light traffic. Adv. Appl. Prob., 3, 269 à 281 (1971)

(15) KIEFFER J., WOLFOWITZ J. : On the theory of queues with many servers. Trans. Amer. Sco., 78, 1 à 18 (1955)

(16) KIEFFER J., WOLFOWITZ J. : On the characteristique of the general queuing process with application to random walk. Ann. Math. Stat., n° 27, 147 à 161 (1956)

(17) KENDALL D. G. : Geometric ergodicity and the theory of queues. In "Mathematical methods in the social sciences". Editeurs : ARROW, KARLIN, SUPPES, Stanford, California (1960)

(18) LEMOINE A. J. : A simple proof of a known result in random walk theory. Annals of Proba., vol. 2, n° 2, 347 à 348 (1974)

(19) LOULOU R. : An explicit upper bound for the mean busy period in a GI/G/1 queue. J. Appl. Prob., 15, 452 à 455 (1978)

(20) LOYNES R. M. : The stability of queue with non-independant inter-arrival and service time. Proc. Cambridge Philos. Soc., 58, 497 à 520 (1962)

(21) MILLER H. D. : Geometric ergodicity for a class of Markov Chains. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 4, 354 à 373 (1966)

(22) NEVEU J. : Existence de régime stationnaire dans les files d'attente et théorème ergodique. Exposé de séminaire, PARIS VI, 1981 (Voir dans (5))

(23) NEVEU J. : Martingales à temps discret. Masson 1971

(24) PITTMAN J. W. : Uniform rates of convergence for markov chain transition prob. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 29, 193 à 227 (1974)

(25) WHITT W. : Embedded renewal process in the GI/G/s queus. J. Appl. Prob., 9, 650 à 658 (1972)

(26) CHUNG K. L. : Markov chains with stationary transition probabilities. Springer Verlag (1961)

F. CHARLOT
Cité du 5 Juillet, Bat. 17, n° 10

BAB EZZOUAR
W-d'Alger
Algérie

Reçu en Juin 1984

Sous forme définitive en Mai 1985