ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

IDRIS ASSANI

Quelques résultats sur les opérateurs positifs à moyennes bornées dans L_P

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 85, série *Probabilités et applications*, n° 3 (1985), p. 65-72

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1985__85_3_65_0>

QUELQUES RESULTATS SUR LES OPERATEURS POSITIFS A MOYENNES BORNEES DANS L_p

Idris ASSANI

Résumé :

L'étude du théorème ergodique dominé par un opérateur à moyennes bornées dans L_p $(p > 1)$ est ramenée à l'étude du théorème ergodique dominé pour des contractions de L^1 (resp. L^∞) dont les puissances tendent vers zéro dans L_p.

On remarque que pour toute contraction positive de L^1 (X, Σ, μ) à moyennes bornées dans L_p (X, Σ, μ) (μ finie) le théorème de convergence presque sûre s'obtient dans L^1.

On montre que si T est une transformation non singulière à moyennes bornées dans L_p $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (μ finie) T vérifie le théorème ergodique ponctuel.

Summary :

The study of the dominated ergodic theorem for a L_p mean bounded positive operator $(p > 1)$ is reduced to the study of L^1 contraction (resp. L^∞ contraction) with powers converging to zero in L_p .

For every positive L_p mean bounded, L^1 contraction the almost sure convergence theorem is obtained in L^1.

We show that if T is a non singular L^p $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mean bounded transformation (μ finite), then T satisfies the individual ergodic theorem.

I) Définitions et notations.

Dans toute cette note nous considérons des opérateurs T sur des espaces $L_p(X,\mathcal{F},\mu)$ $1 \leq p \leq \infty$ construit sur un espace mesuré μ, étant σ finie. Un opérateur T de $L_p(\mu)$ dans $L_p(\mu)$ sera dit positif si $\forall\, f \in L_p$ $f \geq 0 \Longrightarrow Tf \geq 0$.

Définition I.1 : Un opérateur T de L_p est à puissances bornées si $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|T^n\|_p < +\infty$.

Un opérateur T de L_p est à moyenne bornées si

$$\sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq 1}} \|M_n(T)\|_p < +\infty \quad \text{où} \quad M_n(T) = \frac{I + \dots + T^{n-1}}{n}.$$

A tout opérateur T positif à moyennes bornées dans L_p on peut associer [1] un opérateur de Brunel A positif dans L_p avec $A = f(T)$ où $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ vérifiant :

i) A est à puissances bornées.

ii) Il existe une constante C telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,

$M_n(T) \leq C\, M_{[\sqrt{n+1}]}(A)$.

Définition I.2 : Soit $1 < p < +\infty$ et T un opérateur positif de $L_p(\mu)$ dans $L_p(\mu)$ à moyennes bornées, nous dirons que T vérifie le théorème ergodique dominé (T.E.D.) s'il existe $\gamma > 0$ telle que pour tout $f \in L_p(\mu)$

$$\|\sup_n M_n(T)(f)\|_p < \gamma \|f\|_p$$

$\gamma = \gamma(M,p)$ γ n'est fonction que de la borne M des $\|M_n(T)\|_p$ et de p.

II) Sur le théorème ergodique dominé pour les opérateurs positifs à moyennes bornées dans L_p $p > 1$.

Lemme II.1 : Soit $(X,\mathfrak{F},\mu)$ un espace mesuré, μ σ finie et T un opérateur positif de $L_p(\mu)$ tel que $\sup_{i\in\mathbb{N}} \|T^i\|_p \leq M < +\infty$. Alors $\forall$ n $\exists$ T_n opérateur positif de $L_p(\mu)$ dans $L_p(\mu)$ tel que :

a) $\sup_i \|T_n^i\|_p \leq M.$

b) $\|T_n^i\|_p \xrightarrow[i]{} 0.$

c) $\forall\, k\in\mathbb{N}$, $k\leq n$ on a $M_k(T) \leq M\, M_k(T_n)$.

Démonstration : Il suffit de prendre $T_n = \dfrac{T}{M^{1/n}}$.

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

Théorème II.2 : Soit $1<p<+\infty$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Tout opérateur positif à moyennes bornées dans L_p vérifie T.E.D.

ii) Tout opérateur positif à puissances bornées dans L_p vérifie T.E.D.

iii) Tout opérateur positif à puissances tendant vers zéro dans $L_p(\mu)$ et contraction de $L^1(\mu)$ vérifie T.E.D.

iv) Tout opérateur positif à puissances tendant vers zéro dans $L_p(\mu)$ et contraction de $L^\infty(\mu)$ vérifie T.E.D.

Démonstration : i) $\Longleftrightarrow$ ii) résulte dans un sens de l'opérateur de Brunel et de l'autre parce qu'un opérateur à puissances bornées est aussi à moyennes bornées.

ii) $\Longrightarrow$ iii) et ii) $\Longrightarrow$ iv) puisque l'ensemble des opérateurs à puissances bornées contient celui des opérateurs qui sont aussi des contractions de L^1 (resp. L^∞).

iii) $\Longrightarrow$ ii) soit $(X,\mathfrak{F},\mu)$ un espace mesuré μ,σ finie et $T;\ L_p(\mu)\to L_p(\mu)$ tel que $\sup_i \|T^i\|_p \leq M < +\infty$. D'après le lemme II.1

$$\forall\, f\in L_p(\mu) \quad f\geq 0,\ \forall\, n \text{ on a } \|\sup_{k\leq n} M_k(T)(f)\|_p \leq M\|\sup_{k\leq n} M_k(T_n)(f)\|$$

où $\|T_n^i\|_p \longrightarrow 0$ et $\sup_i \|T_n^i\|_p \leq M$.

Puisque $\|T_n^i\|_p \longrightarrow 0$ l'opérateur $I + T_n + T^2 + \ldots + T_n^r + \ldots = (I - T_n)^{-1}$

est bien défini et positif. De ce fait prenons $f > 0$ p.p. $f \in L^q$ alors

$$g = (I - T_n^*)^{-1} f \text{ est } > 0 \text{ p.p. et } T_n^*(g) \leq g.$$

Changeons de mesure en prenant $m(A) = \int_A g^q \, d\mu$ et prenons l'opérateur

P_n défini par $P_n(f) = \dfrac{T_n(f \cdot g^{\frac{1}{p-1}})}{g^{\frac{1}{p-1}}}$. Alors on a [2] $P_n^*(h) = \dfrac{T_n^*(h \cdot g)}{g}$

et $\|P_n^i\|_p \leq \|T_n^i\|_p \leq M$.

D'autre part T_n vérifie T.E.D. si et seulement si P_n vérifie T.E.D.

Puisque $P_n^*(1) \leq 1$, P_n est donc un opérateur à puissances tendant vers zéro et contraction de L^1. D'après l'hypothèse iii) $\exists\ \gamma(M,p)$ telle que :

$$\|\sup_k M_k(P_n)(f)\|_p \leq \gamma \|f\|_p, \ \forall f \in L_p(m)$$

et donc $$\|\sup_k M_k(T_n)(f)\|_p \leq \gamma \|f\|_p, \ \forall f \in L_p(\mu)$$

Par conséquent

$$\forall f \in L_p(\mu),\ f \geq 0 \text{ et } \forall n \text{ on a } \|\sup_{k \leq n} M_k(T)(f)\|_p \leq M\gamma(M,p) \|f\|_p$$

et donc $\|\sup_k M_k(T)(f)\| \leq M\gamma(M,p) \|f\|_p$

ce qui prouve ii).

iv) $\Longrightarrow$ ii) la démonstration de cette implication peut se faire de la même manière que iii) $\Longrightarrow$ ii). Au lieu de prendre un sous invariant strictement positif pour T_n^* on le prend pour T_n ce qui permet de se ramener à une contraction de L^∞.

<u>Remarques</u> :

1) Le cas $M = 1$ étant connu [3], nous avons supposé $M > 1$.

Les opérateurs T_n tendant en norme vers zéro vérifient T.E.D. puisqu'il existe $i(n)$ tel que $\|T_n^{i(n)}\|_p \leq 1$.

2) Si T est un opérateur positif contraction de $L^1(\mu)$, (μ finie) et à moyennes bornées dans $L^p(\mu)$ (pour un $p > 1$) la convergence presque sûre est obtenue comme conséquence directe d'un résultat de [4].
C'est ce qui exprime la proposition II.3.

<u>Proposition II.3</u> : Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré fini, T un opérateur positif contraction de $L^1(\mu)$ dans $L^1(\mu)$ à moyennes bornées dans $L^p(\mu)$, $1 < p < +\infty$. Alors

$$\forall f \in L^1(\mu) \qquad M_n(T)(f)$$

converge presque sûrement vers une fonction de $L^1(\mu)$.

III) <u>Un théorème ergodique ponctuel</u>.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré fini et ϕ une application de Ω dans Ω telle que $\phi^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ et $\mu(A) = 0 \Longrightarrow \mu(\phi^{-1}(A)) = 0$ pour tout A appartenant à $\mathcal{A}$. L'opérateur T défini par $Tf = f \circ \phi$ sera appelé une transformation non singulière.

<u>Théorème III.1</u> : Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré fini et ϕ une application de Ω dans Ω ayant les propriétés suivantes :

$$(1) \quad \phi^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$$

$$(2) \quad \forall A \in \mathcal{A} \qquad \mu(A) = 0 \Longrightarrow \mu(\phi^{-1}(A)) = 0$$

Si de plus $\sup_n \|M_n(T)\|_p \leqslant M < +\infty$ où $T = f \circ \phi$.
Alors $\forall f \in L^p(\mu)$ $M_n(T)(f)$ converge presque partout.

<u>Démonstration</u> : Considérons les mesures

$$A \in \mathcal{A} \qquad \mu_n(A) = \int_\Omega M_n(T)(1_A)\,d\mu = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mu(\phi^{-k}(A)) \qquad \begin{matrix} n \geq 1 \\ n \in \mathbb{N} \end{matrix}$$

on a $\mu_n(A) = \int_\Omega 1_A \times M_n(T^*)(1)\,d\mu$ et d'après le théorème ergodique en moyenne dans $L^q(\mu)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ [5]

$$\mu_n(A) \xrightarrow[n]{} \int_\Omega 1_A \times vo^*\,d\mu = m(A) \qquad \text{et de plus}$$

$$(*) \quad m(A) = m(\phi^{-1}(A)) \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Posons $E = \operatorname{supp} vo^* = \{\omega;\ vo^* \neq 0\}$. Remarquons que $\mu(E) > 0$ puisque $\int_\Omega vo^*\,d\mu = \mu(\Omega)$.

D'après [6] on a

$$\forall f \in L^p(\mu) \quad M_n(T)f \quad \text{converge presque sûrement sur } E.$$

Montrons que la convergence presque sûre a lieu sur tout Ω grâce à une propriété liée à ϕ propriété déjà remarquée dans [7] (théorème 12 p.683);

(**) μ P.s. si $\omega \in \Omega \setminus E$ alors $\exists\, m(\omega) \in \mathbb{N}$ tel que $\phi^{m(\omega)}_{(\omega)} \in E$.

Si ce n'était le cas il existerait $B \in \mathcal{A}$ de mesure positive $B \subset \Omega \setminus E$ tel que $\phi^m(B) \subset \Omega \setminus E$ $\forall m \geq 0$. Alors on aurait $B \subset \phi^{-m}(\Omega \setminus E)$ $\forall m \geq 0$

$$\text{et donc} \quad \mu(B) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mu(\phi^{-k}(\Omega \setminus E)) \quad \text{et} \quad \mu(B) \leq m(\Omega \setminus E) = 0$$

démontre la propriété annoncée.

Appelons

$Z_1 = \{\omega \in \Omega \setminus E\ ;\ \forall m \geq 0 \quad \phi^m(\omega) \in \Omega \setminus E\}$. D'après (**) Z_1 est négligeable.

Soit $f \in L^p(\mu)$, considérons N_f le négligeable en dehors duquel $M_n(T)(f)$ converge sur E. L'ensemble $\{\omega \in \Omega\ ;\ \exists\, m(\omega) \in \mathbb{N}$ tel que $\phi^{m(\omega)}(\omega) \in N_f\}$ est négligeable étant inclus dans $\bigcup_m \phi^{-m}(Nf) = Z_2^f$.

Alors si $\omega \in (\Omega \setminus E) \setminus (Z_2^f \cup Z_1)$ il existe $m_o = m(\omega) \in \mathbb{N}$ tel que $\phi^{m_o}(\omega) \in E \setminus N_f$.

On a

$$M_n(T)(f)(\omega) = \underbrace{\frac{(I+T+\dots+T^{m_o-1})(f)(\omega)}{n}}_{\xrightarrow[n]{} 0}$$

$$+ \underbrace{\frac{I+T+\dots+T^{n-m_o-1}}{n-m_o} f(\phi^m(\omega)) \times \frac{n-m_o}{n}.}_{(B)}$$

(B) est la limite de $M_n(T)f(\phi^{m_o}(\omega))$.

La convergence presque sûre est donc obtenue.

Remarques :

1) On peut obtenir l'existence de la mesure m vérifiant $m(A) = m(\phi^{-1}(A))$ sans utiliser le théorème en moyenne dans L^q. Pour cela on peut remarquer que la condition $T(1) = 1$ vérifiée par l'opérateur T assure par densité de L^∞ dans L^p la validité du théorème en moyenne dans L^p. $(\|\frac{T^nf}{n}\|_p \xrightarrow[n]{} 0)$. Par suite $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = m(A)$ existe. Puisque $\mu_n(A) \leq (\mu(\Omega))^{1/q} \times M\,\mu(A)^{1/p}$ le théorème de Radon-Nikodym assure l'existence de vo^* dans $L^1(\mu)$.

2) C.H. KAN a obtenu récemment dans [8] un résultat analogue au théorème II.2.

REFERENCES

[1] A. BRUNEL et R. EMILION : Sur les opérateurs positifs à moyennes bornées.
C.R.A.S. à paraître.

[2] R.V. CHACON et S.A. Mc GRATH : Estimates of positive contractions.
Pacific J. Math. 30 (1969) p.609-620.

[3] M.A. AKCOGLU : A pointwise ergodic theorem in L^p spaces.
Canad. J. Math. 27 (1975), p.1975-1982.

[4] Y. ITO : Uniform integrability and the pointwise ergodic theorem.
Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965) p.222-227.

[5] R. EMILION : Mean bounded operators and mean ergodic theorems.
A paraître.

[6] R. SATO : Ergodic theorems for semi-groups in L_p $1 < p < \infty$.
Tôhoku Math. Journal 26 (1974) p.73-76.

[7] N. DUNFORD et J.T. SCHWARTZ : Linear operators part I.
Interscience, New-York 1958.

[8] C.H. KAN : Ergodic properties of Lamperti operators II.
Canad. J. Math. 35 n°4 (1983) p.577-589.

Université PARIS VI
Laboratoire de Probabilités
4, Place Jussieu
Tour 56, couloir 56/46, 3ème étage
75230 PARIS Cédex 05

Reçu en Septembre 1984