ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

R. MARIE
J. PELLAUMAIL

Convergence géométrique pour la file M/H/1

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 85, série *Probabilités et applications*, n° 3 (1985), p. 57-64
<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1985__85_3_57_0>

CONVERGENCE GEOMETRIQUE POUR LA FILE M/H/1

R. MARIE et J. PELLAUMAIL

RESUME

On considère une file qui généralise la file M/H/1, notamment en prenant en compte les clients "impatients". Pour une telle file, on donne la solution exacte, sous forme explicite, à une constante multiplicative près K , de la probabilité y(n) d'avoir n clients dans la file. De plus, on prouve que $y(n) \leqslant C\ \delta^n$ avec $\delta < 1$, δ étant défini explicitement.

ABSTRACT

Let us consider a queue which generalizes the queue M/H/1 inasmuch as it takes into account the discouraged customers. Let y(n) be the steady state probability to have n customers in such a queue. The exact value of y(n) is given up to a normalizing constant K. Moreover, it is shown that $y(n) \leqslant C\ \delta^n$, $\delta < 1$ where δ is computable.

1. INTRODUCTION

Le but de cette étude est notamment de donner, sous forme explicite, les probabilités d'états $y(n)$, en régime stationnaire, pour une file qui généralise la file M/H/1 : la généralisation tient essentiellement au fait que l'on peut prendre en compte l'impatience des clients.

Pour cela, on établit une formule permettant de calculer, par récurrence croissante sur n, les probabilités $p(i,n)$ d'états "fictifs".

De plus, sous une hypothèse naturelle - temps de service strictement inférieur au délai entre deux interarrivées dans le cas de la file M/H/1 - on montre la convergence "géométrique" des probabilités $y(n)$ vers zéro. On note que cette convergence est établie même si l'ensemble des états "fictifs" est infini.

2. MODELE CONSIDERE

Ce modèle est supposé markovien stationnaire avec évolution en temps continu.

On suppose que l'ensemble des états est contenu dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ où $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers non négatifs; quitte à supposer que certains états ont une probabilité nulle, on peut donc prendre $E := (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ comme ensemble des états.

Pour tout couple (e,e') d'éléments de E, soit $c(e,e')$ le taux de passage de l'état e à l'état e', c'est à dire que :

$$c(e,e') := \lim_{dt \downarrow o} \frac{1}{dt} \text{ Proba } [\text{état } e' \text{ à } t+dt \mid \text{état } e \text{ à } t]$$

Soit $a(i,n)$, $d(i,n)$, $r(i,n)$ trois familles de réels positifs, indexées par E, avec, quel que soit i, $d(i,o) = 0$, quel que soit n, $\sum_{i=o}^{\infty} r(i,n) = 1$ et, quels que soient i et $n \geqslant 1$, $d(i,n) > 0$.

On suppose aussi que $a(i,n) > 0$ implique $a(i,n-1) > 0$. Par contre, on peut supposer qu'il existe s (resp. s') tel que $i \geqslant s$ (resp. $n \geqslant s'$) implique $r(i,k) = 0$, (resp. $a(j,n) = 0$).

Ces familles déterminent l'évolution du système de la façon suivante, quel que soit $n \geqslant o$:

(1) $c((i,n),(i,n+1)) := a(i,n)$

(2) $c((i,n+1),(j,n)) := d(i,n+1)r(j,n)$

(3) $c(e,e') = 0$ dans les autres cas.

L'exemple fondamental est celui de la file M/H/1 : une seule classe de clients, un seul serveur, discipline P.A.P.S., arrivées poissonniennes de taux a, loi de service de transformée de Laplace

$$\sum_{i=o}^{\infty} r(i) \frac{d(i)}{s+d(i)} \quad \text{où} \quad \sum_{i=o}^{\infty} r(i) = 1 .$$

On peut modéliser cette loi hyperexponentielle de façon markovienne en introduisant des états "fictifs". Quand le client en cours de service est dans l'état fictif i, la durée de son service est la loi exponentielle de taux d(i) ; quand il est servi, le client suivant passe dans l'état fictif j avec la probabilité r(j). On notera que les formules établies ultérieurement sont valables si l'ensemble de ces états fictifs est infini : bien entendu, pour l'implantation sur ordinateur, cet ensemble est supposé fini.

Pour que (1) et (2) soient valables même quand $n = o$, il convient d'introduire ces états fictifs même quand la file est vide. On a alors, pour cet exemple particulier et quel que soit $n \geqslant o$:

$a(i,n) = a$, $r(j,n) = r(j)$ et $d(i,n+1) = d(i)$

Les équations qui suivent sont valables dans un cadre beaucoup plus général que celui de la file M/H/1. Tout d'abord, on peut supposer que le taux d'arrivée a(i,n) dépend de la longueur n de la file : ceci permet de prendre en compte les clients "impatients" ou même un blocage complet à partir d'un certain seuil. On peut même supposer que a(i,n) dépend de l'état fictif i : si on sait que le service du client en cours de service sera probablement long, cela peut augmenter le taux d'impatience.

On peut aussi supposer que le taux de départ d(i,n) dépend non seulement de l'état fictif i mais aussi de la taille n de la file. De même, on peut supposer que r(i,n) dépend de n : si votre garagiste est surchargé, il acceptera plus facilement de régler votre embrayage que de le changer complètement !

3. PROBABILITES STATIONNAIRES

Dans ce qui suit, on ne s'intéresse qu'au cas stationnaire, encore que certains aspects de la méthodologie proposée resteraient utilisables dans le cas transitoire.

On pose donc, pour $n \geq 1$:

$p(i,n)$:= probabilité stationnaire pour qu'il y ait n clients dans la file, y compris celui en cours de service, et que ce client en cours de service soit dans l'état fictif i.

v := probabilité stationnaire pour la file d'être vide.

$p(i,o) := v\, r(i,o)$

$p(i,-1) := o$

En régime stationnaire, les équations à l'équilibre s'écrivent :

$$p(i,n)\left[d(i,n) + a(i,n)\right] = p(i,n-1)a(i,n-1) + r(i,n)q(n) \tag{4}$$

où

$$q(n) := \sum_{j=o}^{\infty} p(j,n+1)d(j,n+1)$$

On a aussi la relation suivante (cf.   ) :

$$q(n) = \sum_{j=o}^{\infty} p(j,n)a(j,n) \tag{5}$$

Ces équations (4) et (5) sont valables pour n=o avec les conventions introduites précédemment.

4. CALCUL DE q(n)

Si on sait calculer q(n), l'équation (4) permet d'obtenir p(i,n) par récurrence croissante sur n (avec i fixé). De plus, pour un grand nombre d'applications, la connaissance de la suite $(q(n))_{n \geq o}$ suffit (cf. remarque c) in fine).

Posons :

$$f(n,k) := \sum_{i=o}^{\infty} \frac{a(i,n)r(i,n-k)}{d(i,n-k)+a(i,n-k)} \prod_{j=o}^{k-1} \frac{a(i,n-j-1)}{d(i,n-j)+a(i,n-j)} \tag{6}$$

le produit Π étant pris égal à 1 pour k=o suivant la convention habituelle.

On vérifie facilement, par récurrence sur k, que :

$$q(n) = \sum_{i=o}^{\infty} a(i,n)p(i,n-k-1) \prod_{j=o}^{k} \frac{a(i,n-j-1)}{d(i,n-j)+a(i,n-j)} + \sum_{j=o}^{k} f(n,j)q(n-j)$$

Soit, pour k=n (compte tenu des conventions) :

(7) $$q(n) = \sum_{k=o}^{n} f(n,k)q(n-k)$$

d'où

(8) $$q(n) = \{\sum_{k=1}^{n} f(n,k)q(n-k)\}/[1-f(n,o)]$$

Remarques :

On peut donc calculer q(n) en fonction de la constante v, par récurrence croissante sur n, à partir des égalités (6) et (8) :

a) on note, quand l'ensemble des états fictifs est "relativement petit", que ces calculs nécessitent peu d'opérations et une faible taille mémoire.

b) Les formules ci-dessus vont nous permettre d'évaluer explicitement la vitesse de convergence de q(n) vers zéro sous des hypothèses très générales (cf. section 5).

c) Posons y(n) := probabilité pour qu'il y ait n clients dans la station ; si a(j,n) = a(n) ne dépend que de n, y(n) s'obtient directement à partir de a(n) :

(9) $$y(n) = q(n)/a(n)u$$

avec $$u := \sum_{k=o}^{\infty} q(k)/a(k)$$

5. MAJORATION DE q(n)

Théorème

On suppose qu'il existe une famille de réels positifs $(\lambda_i)_{o\leqslant i}$ *tels que, quels que soient* i *et* n, *on ait :*

$$a(i,n)/[d(i,n) + a(i,n)] \leqslant \lambda_i \quad \text{et}$$

$$a(i,n-1)/[d(i,n) + a(i,n)] \leqslant \lambda_i$$

On suppose aussi que $r(i,n) = r_i$ ne dépend pas de n et que

$$(10) \qquad \sum_i r_i \lambda_i/[1-\lambda_i] < 1 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Sup}_i. \lambda_i < 1 \qquad .$$

Soit ν la borne supérieure des réels $x \geqslant 1$ tels que $g(x) \leqslant 1$ où $g(x) := \sum_i r_i \lambda_i/[1-x\lambda_i]$.

La fonction g est continue (convergence normale pour une série de fonctions continues) au voisinage de 1 et $g(1) < 1$. On a donc $\nu > 1$. On a alors, quel que soit $n \geqslant o$:

$$q(n) \leqslant q(o).\nu^{-n}$$

Ceci implique évidemment :

$$\sum_{k \geqslant n} q(k) \leqslant q(o)\ \nu^{1-n}/(\nu-1)$$

<u>Preuve</u> :

Raisonnons par récurrence croissante sur n et supposons que, pour $j < n$, on a $q(j) \leqslant K\ \nu^{-j}$.

L'égalité (6) implique :

$$f(n,k) \leqslant \sum_{i=o}^{\infty} r_i\ \lambda_i^{k+1}$$

L'égalité (8) implique alors :

$$q(n) \leqslant [K/[1-f(n,o)] \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=o}^{\infty} r_i\ \lambda_i(\lambda_i\ \nu)^k\ \nu^{-n}$$

$$\leqslant \{K\ \nu^{-n}/[1-f(n,o)]\} \sum_{i=o}^{\infty} r_i\ \lambda_i^2\ \nu/[1-\lambda_i\ \nu]$$

Pour achever le raisonnement par récurrence, il suffit donc de prouver que

$$\sum_{i=o}^{\infty} r_i\ \lambda_i^2\ \nu/[1-\lambda_i\ \nu] \leqslant 1-f(n,o)$$

ou encore :

$$\sum_{i=o}^{\infty} r_i \lambda_i \left[\{\lambda_i \nu/[1-\lambda_i \nu]\}+1\right] \leqslant 1$$

Soit

$$\sum_{i=o}^{\infty} r_i \lambda_i/[1-\lambda_i \nu] \leqslant 1$$

ce qui est exactement l'hypothèse sur ν.

Enfin, pour n=o, on a K = q(o), ce qui achève la preuve du théorème.

6. REMARQUE

La majoration précédente montre que les inégalités (10) constituent une condition suffisante d'ergodicité pour la file considérée. Dans le cas particulier a(i,n) = a et $d(i,n) = d_i$, les inégalités (10) deviennent

$$\sum_{i=o}^{\infty} r_i/d_i < (1/a) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Sup.}_i \lambda_i < 1 \quad .$$

c'est à dire qu'on suppose que le temps moyen de service est strictement inférieur au temps moyen entre deux arrivées (condition naturelle).

7. CONCLUSION

Les équations (6) et (8) donnent explicitement q(n) ; on en déduit immédiatement les probabilités d'états "fictifs", par récurrence croissante sur n, à une constante multiplicative près (équations (4)). On a aussi (9) quand a(j,n) = a(n) ne dépend que de n.

Quand l'ensemble des états fictifs est fini, on note que tous les calculs sont explicites, n'utilisent ni inversion ni produit de matrices, et, de ce fait, requièrent un espace mémoire relativement faible. Plus précisément, si I désigne le nombre d'états fictifs, le calcul de y_n , n=0,...,N, est obtenu à l'aide d'un algorithme dont la complexité est d'ordre $O(I^2.N^2)$ dans le cas général.

De plus, sous les hypothèses de la section 5, la convergence géométrique de la suite $(q(n))_{n>o}$, avec un rayon de convergence $\delta := (1/\nu)$ calculable, permet de savoir "a priori" à quelle valeur N de n on peut "s'arrêter" pour le calcul de la constante de normalisation.

- REFERENCES -

[1] BREMAUD P., "Point Processes and Queues : Martingale Dynamics", Springer-Verlag, (1981).

[2] COHEN J.W., "The Single Server Queue", North-Holland, 2nd éd., (1982).

[3] GELENBE E., PUJOLLE G., "Introduction aux Réseaux de Files d'attente", Eyrolles, (1982).

[4] MARIE R.A., "Modélisation par Réseaux de Files d'attente", Thèse d'état, Univ. Rennes, Rennes, France, (Nov. 1978).

[5] MARIE R.A., PELLAUMAIL J.M., "Steady-State Probabilities for a Queue with a General Service Distribution and State-Dependent Arrivals", IEEE-TSE, vol. SE-9, n° 1, (Jan. 1983), pp. 109-113.

[6] NEUTS M.F., "Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models", The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland 21218, (1981), (QA 274.7.N48).

[7] SENGUPTA B., "The Spatial Requirement of an M/G/1 Queue, or : How to Design for Buffer Space", International Seminar on Modelling and Performance Evaluation Methodology, Paris, (Jan. 1983).

R. MARIE
IRISA/INRIA
Campus de Beaulieu
35042 RENNES Cédex

J. PELLAUMAIL
INSA
20, Avenue des Buttes de Coësmes
35043 RENNES Cédes

Reçu en Juillet 1984