ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

RADKO MESIAR

La convergence presque sûre des T-moyennes de Césaro

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 85, série *Probabilités et applications*, nº 3 (1985), p. 31-43

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1985__85_3_31_0>

LA CONVERGENCE PRESQUE SURE DES T-MOYENNES DE CESARO

Radko MESIAR

Résumé :

Le but du présent travail est de donner les conditions, sous lesquelles la suite $(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \circ T^i)$ des T-moyennes de Césaro d'une suite p.s. convergente $(X_n), X_n \in L^1$, converge. La condition $\inf_{Z \in L^1} \sum_n P(|X_n|) \geq Z) = 0$ est suffisante pour assurer la convergence p.s. des T-moyennes de Césaro. Nous étudions la nécessité de cette condition. Le présent travail fait apparaître de nouvelles analogies entre la théorie ergodique et la théorie des espérances conditionnelles.

Summary :

We investigate the following problem : if $X_n \longrightarrow$, a.e., $X_n \in L^1$, $n = 1,2,..$, what can we say about the a.s. convergence of the sequence $(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \circ T^i)$ of the T-Cesaro averages. The condition $\inf_{Z \in L^1} \sum_n P(|X_n| \geq Z) = 0$ is a sufficient condition for the a.s. convergence of the mentioned T-Cesaro averages. We study the necessity of this condition. We present some new analogies between the ergodic theory and the theory of the conditional expectations.

(Ce travail a été fait durant le stage de l'auteur au Laboratoire de Probabilités).

Définition. - *Etant donné une transformation mesurable* T *de l'espace de probabilité* (Ω, α, P) *qui préserve* P, *pour une suite* $(X_n, n \in N)$ *dans* $L^1(\Omega, \alpha, P)$ *nous appelons la suite* $(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \circ T^i, n \in N)$ *la suite des* T*-moyennes de Césaro.* □

Nous nous occuperons de suites de v.a. nonnégatives intégrables, convergeant p.s. vers zéro, car le cas général s'en déduit facilement. Dans le présent travail, T est toujours une transformation mesurable de l'espace de probabilité qui préserve la mesure. Dans tous exemples, $\Omega =]0,1]$, $\alpha = \mathcal{B}$, $P = \lambda$.

Théorème 1. - *Soit* $(X_n, n \in N)$ *une suite de v.a. nonnégative intégrables,* $X_n \xrightarrow[n]{} 0$, *p.s., vérifiant la condition*

$$\inf_{Z \in L^1} \sum_n P(X_n \geq Z) = 0.$$

Alors pour tout T *la suite des* T*-moyennes de Césaro converge p.s. vers zéro.*

Démonstration. - Il existe une v.a. $Z_o \in L^1$, pour lequel $\sum_n P(X_n \geq Z_o) < \infty$.
Soit $Y_n = X_n I_{\{X_n < Z_o\}}$, $Q_n = X_n - Y_n = X_n I_{\{X_n \geq Z_o\}}$, $n = 1,2,\dots$

Car $0 \leq Y_n \in L^1$, $Y_n \xrightarrow[n]{} 0$, p.s., $\sup_n Y_n \leq Z_o \in L^1$, d'après MESIAR [3] nous avons pour tout T

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i \circ T^i \xrightarrow[n]{} 0, \text{ p.s.} \quad \text{(voir aussi MAKER [5]).}$$

Car $0 \leq Q_n \in L^1$, $\sum_n P(Q_n > 0) \leq \sum_n P(X_n \geq Z_o) < \infty$, nous avons pour tout T $Q_n \circ T^n \xrightarrow[n]{} 0$, p.s., alors

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Q_i \circ T^i \xrightarrow[n]{} 0, \text{ p.s., d'où}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \circ T^i = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \circ T^i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Q_i \circ T^i\right) \xrightarrow[n]{} 0, \text{ p.s.} \ \square$$

Remarque 1. - Le point essentiel de MESIAR [3] est dans la démonstration de l'affirmation suivante : soit $(A_n, n \in N)$ une suite d'ensemble mesurables, telle que $A_n \xrightarrow[n]{} A$, $P(A) = 0$; alors pour tout T nous avons

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{A_i} \circ T^i \xrightarrow[n]{} 0, \text{ p.s.}$$

La seule conditions $P(A) \to 0$ est trop faible pour assurer la convergence p.s. des T-moyennes de Césaro de la suite (I_{A_n}).

Par exemple, soit $(B_m, m \in N)$ une suite d'ensemble mesurables mutuellement indépendants, $P(B_m) \xrightarrow[m]{} 0$, $\sum_m P(B_m) = \infty$. Soit $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$, $A_{2^{k-1}+1} = A_{2^{k-1}+2} = \dots = A_{2^k} = B_{k+1}$, $k = 2,3,\dots$ Alors $\limsup_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{A_i} \geq \frac{1}{2}$, p.s. $\square$

En général, la condition $\inf_{Z \in L^1} \sum_n P(|X_n| \geq Z) = 0$ est suffisante pour la convergence p.s. des T-moyennes de Césaro de la suite $(X_n \in L^1, n \in N)$ convergente p.s. Il est naturel de se demander si c'est aussi une condition nécessaire, c'est-à-dire que si $0 \leq X_n \in L^1$, $X_n \xrightarrow[n]{} 0$, p.s., $\inf_{Z \in L^1} \sum_n P(X_n \geq Z) > 0$, alors il existe T pour lequel la convergence p.s. des T-moyennes de Césaro vers zéro n'a pas lieu. Nous montrerons que l'énoncé est trop fort sous cette forme. Nous pouvons seulement affirmer que si $\inf_{Z \in L^1} \sum_n P(X_n \geq Z) > 0$, dans un certain sens la convergence p.s. des T-moyennes de Césaro n'a pas lieu.

Lemme 1. - *Soit* $(X_n, n \in N)$ *une suite dans* L^1. *Alors*

$$\inf_{Z\in L^1} \sum_n P(|X_n| \geq Z) = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}.$$

Démonstration. - S'il existe au moins une v.a. $Z_o \in L^1$, pour laquelle $\sum_n P(|X_n| \geq Z_o) < \infty$, soit $Z_k = \sup(|X_1|,\dots,|X_k|,Z_o) + 1$, $k = 1,2,\dots$ Alors $Z_k \in L^1$, $\sum_n P(|X_n| \geq Z_k) \leq \sum_{n>k} P(|X_n| \geq Z_o) \xrightarrow[k]{} 0$, donc $\inf_{Z\in L^1} \sum_n P(|X_n| \geq Z) = 0$ □

D'après le lemme 1. les conditions $\inf_{Z\in L^1} \sum_n P(|X_n| \geq Z) = \infty$ et $\inf_{Z\in L^1} \sum_n P(|X_n| \geq Z) > 0$ sont equivalentes. La vérification de la condition $\inf_{Z\in L^1} \sum_n P(|X_n| \geq Z) = \infty$ peut être trop compliquée, car le tribu L^1 peut être très riche.

Lemme 2. - *Soit* $\inf_{Z\in L^1} \sum_n P(|X_n| \geq Z) = \infty$. *Alors*

1) $\sup_n |X_n| \notin L^1$

2) $\inf_{k\in N} \sum_n P(|X_n|) \geq k) = \infty$ □

En général, l'implication inverse n'est pas correct, ni pour les suites (X_n) dans L^1, $X_n \xrightarrow[n]{} 0$, p.s., comme montre l'Exemple 1. d'U. KRENGEL.

Exemple 1. - Soient $A_o, A_1, \dots, B_1, B_2, \dots$ une partition de l'espace Ω avec $P(A_i) = \frac{1}{3^{i+1}}$, $i = 0,1,\dots$, $P(B_j) = \frac{1}{2^{j+1}}$, $j = 1,2,\dots$

Soit $Z_o = \sum_{i=0}^{\infty} (i+2) I_{A_i} + I_B$, ou $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. Alors $Z_o \in L^1$.

Soit $n_k = 3^k$, $k = 0,1,\dots$, $c_i = 2^i$, $i = 1,2,\dots$, Quand existe-t-il T pour lequel les T-moyennes de Césaro d'une suite p.s. convergente ne convergent pas ? Etant donné une suite $(X_n, n \in N)$, $0 \leq X_n \in L^1$, $X_n \xrightarrow[n]{} 0$, p.s., nous supposons, que notre espace de probabilité (Ω, α, P) est assez riche pour qu'il existe d'une transformation mesurable T_* qui préserve P, et pour laquelle les v.a. $(X_n \circ T_*^n, n \in N)$ sont indépendantes. Sinon, nous nous occuperons d'une suite (X'_n) avec les mêmes distributions conjointes sur un espace produit. Sous ces conditions le lemme suivant donne une condition suffisante de non-convergence (p.s.) des T_*-moyennes de Césaro.

Lemme 3. - *Soit* $0 \leq X_n \in L^1$, $\sum_n P(X_n \geq n\varepsilon) = \infty$ *pour un certain* $\varepsilon > 0$. *Alors*

$$P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \circ T_*^i \xrightarrow[n]{} 0\right) = 0.$$

Démonstration. - Nous avons $\sum_n P\left(\frac{X_n \circ T_*^n}{n} \geq \varepsilon\right) = \sum_n P(X_n \geq n\varepsilon) = \infty.$

Car les évènements $\left(\left\{\frac{X_n \circ T_*^n}{n} \geq \varepsilon\right\}, n \in N\right)$ sont indépendants, le lemme de Borel-Cantelli donne $P\left(\frac{X_n \circ T_*^n}{n} \xrightarrow[n]{} 0\right) = 0$, ce qui implique le résultat. □

Lemme 4. - *Soit* $0 \leq X_n \in L^1$, $\sum_n P(X_n \geq n\varepsilon) < \infty$ *pour tout* $\varepsilon > 0$. *Alors pour tout* T,

$$\frac{X_n \circ T^n}{n} \xrightarrow[n]{} 0, \text{ p.s.}$$

Démonstration. - Si $\sum_n P\left(\frac{X_n \circ T^n}{n} \geq \varepsilon\right) < \infty$, pour p.t. $\omega \in \Omega$ le nombre des n, pour lesquels $\frac{X_n \circ T^n}{n}(\omega) \geq \varepsilon$, est fini. Donc pour tout $\varepsilon > 0$ nous avons

$\limsup_n \frac{X_n \circ T^n}{n} \leq \varepsilon$, p.s., et par conséquent $\frac{X_n \circ T^n}{n} \xrightarrow[n]{} 0$, p.s. $\square$

Grâce aux Lemmes 3. et 4. nous pouvons nous occuper de la condition "il existe $\varepsilon > 0$, pour lequel $\sum_n P(X_n \geq n\varepsilon) = \infty$" plutôt que de la non-convergence des T-moyennes de Césaro (plus précisément, nous pouvons éviter l'étude de la non-convergence de la suite $(\frac{X_n \circ T^n}{n})$).

Exemple 2. - Soit $X_{2^{m-1}} = m\, I_{]0,\frac{1}{m}]}$, $X_{2^{m-1}+k} = 0$, $m = 1,2,\ldots$; $k = 1,2,\ldots,2^{m-1}-1$.

Alors $0 \leq X_n \in L^1$, $X_n \xrightarrow[n]{} 0$, p.s., $\inf_{Z \in L^1} \sum_n P(X_n \geq Z) = \infty$, mais pour chaque $\varepsilon > 0$ nous avons

$$\sum_n P(X_n \geq n\varepsilon) = \sum_{\frac{2^{m-1}}{m} \leq \frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{m} < \infty \quad \square$$

Soit

(a) " *$0 \leq X_n \in L^1$, $X_n \xrightarrow[n]{} 0$, p.s., $\inf_{Z \in L^1} \sum_n P(X_n \geq Z) = \infty$* " ;

(b) " *il existe $\varepsilon > 0$, pour lequel $\sum_n P(X_n \geq n\varepsilon) = \infty$* " .

L'Exemple 2. montre, que (a) $\not\Longrightarrow$ (b). L'insertion de zéros dans la suite (X_n) conserve la propriété (a), mais elle peut rendre la propriété (b) fausse. Notons (c) la propriété

(c) " *il existe $\varepsilon > 0$ et une suite d'entiers $\{n_i\} \nearrow$, pour lesquelles $\sum_i P(X_{n_i} \geq i\varepsilon) = \infty$* " .

En remplaçant (b) par (c) cette difficulté est éliminée. Nous allons voir que c'est insuffisant.

Exemple 3. - Soit $X_{2^{m-1}+k} = m\, I_{]\frac{k}{m2^{m-1}};\frac{k+1}{m2^{m-1}}]}$, $m = 1,2,\ldots$, $k = 0,1,\ldots,2^{m-1}-1$.

Alors $0 \leq X_n \in L^1$, $X_n \xrightarrow[n]{} 0$, p.s., $\inf_{Z \in L^1} \sum_n P(X_n \geq Z) = \infty$, mais pour chaque $\varepsilon > 0$, $\{n_i\} \nearrow$, nous avons

$$\sum_i P(X_{n_i} \geq i\varepsilon) < [\frac{1}{\varepsilon} + 1] \cdot \sum_m \frac{1}{m2^{m-1}} < \infty \quad \square$$

L'Exemple 3. montre, que (a) $\not\Longrightarrow$ (c). Les v.a. X_n sont des "morceaux" des v.a. $Y_m = m\, I_{]0,\frac{1}{m}]} = \sum_k X_{2^{m-1}+k} = \sup_k X_{2^{m-1}+k}$. Et pour la suite (Y_n) nous avons $\sum_m P(Y_m \geq m) = \infty$! Le "découpage" des variables de la suite (X_n) conserve la propriété (a), mais en général il rend la propriété (c) fausse. De façon à éliminer cette nouvelle difficulté, affaiblissons (c) en

(d) " *il existe une suite d'entiers* $\{n_i\} \nearrow$, $n_o = 0$, *pour laquelle, pour les v.a.* $Y_i = \sup_{n_{i-1} < n \leq n_i} X_n$, $i = 1, 2, \ldots$, *nous avons*

$$- \sum_i P(Y_i \geq i) = \infty \text{ "}.$$

Grâce au Lemme 5., s'il existe pour un certain $\varepsilon > 0$ une suite $\{m_j\} \nearrow$, $m_o = 0$, telle que $\sum_j P(\sup_{m_{j-1} < m \leq m_j} X_m \geq j\varepsilon) = \infty$, alors il existe une suite $\{n_i\} \nearrow$ vérifiant (d).

Lemme 5. - *Soit* $0 \leq X_n \in L^1$, $X_n \xrightarrow[n]{} 0$, *p.s.*, $\sum_n P(X_n \geq n\varepsilon) = \infty$ *pour un certain* $\varepsilon > 0$. *Alors pour des v.a.* $Z_n = \sup_{m \leq k} X_{nk+m}$, $n = 1, 2, \ldots$, $k = [\frac{1}{\varepsilon} + 1]$, *nous avons* $0 \leq Z_n \in L^1$, $Z_n \xrightarrow[n]{} 0$, *p.s.*, $\sum_n P(Z_n \geq n) = \infty$.

Démonstration. - Il existe $m \in \{1, \ldots, k\}$, tel que $\sum_n P(X_{nk+m} \geq (nk + m)\varepsilon) = \infty$. Puisque $(nk + m)\varepsilon > n$, ceci implique le résultat. $\square$

Exemple 4. - Soit $Q_n = m\, I_{]\frac{1}{m+1}; \frac{1}{m}]}$, $m = 1, 2, \ldots$, alors $0 \leq Q_m \in L^1$, $Q_m \xrightarrow[m]{} 0$, p.s., $\sup_m Q_m \notin L^1$, mais $\sum_m P(Q_m > 0) = 1 < \infty$.

Soit $X_n = Q_i$ pour $m_{i-1} < n \leq m_i$, $i = 1,2,\ldots$, $m_i = \frac{i(i+1)(i+2)}{3}$. Alors $0 \leq X_n \in L^1$, $X_n \xrightarrow[n]{} 0$, p.s., $\inf_{Z \in L^1} \sum_n P(X_n \geq Z) = \infty$, mais pour chaque $\{n_i\} \nearrow$ nous avons $\sum_i P(Y_i \geq i) \leq 2 \sum_m P(Q_m \geq m) = 2 < \infty$, où $Y_i = \sup_{n_{i-1} < n \leq n_i} X_n$ □

L'Exemple 4. montre, que (a) $\not\Rightarrow$ (d). La "répétition" des v.a. permet d'obtenir la réalisation de (a) à partir d'une suite arbitraire (X_n) de départ vérifiant $0 \leq X_n \in L^1$, $X_n \xrightarrow[n]{} 0$, p.s., $\sup_n X_n \notin L^1$ (cf. Lemme 6 .) .

Cette répétition ne garantit pas en général la réalisation de (d). Nous espérons, que la propriété (e) élimine enfin toutes les difficultés.

(e) " *il existe une transformation injective* $f : N \to N$ *et une suite d'entiers* $\{n_i\} \nearrow$, *telles que pour les v.a.* $Y_i = \sup_{n_{i-1} < n \leq n_i} X_{f(n)}$, *nous avons* $\sum_i P(Y_i \geq i) = \infty$ ".

Le théorème suivant résume les résultats.

Théorème 2. - *Soit* $0 \leq X_n \in L^1$, $X_n \xrightarrow[n]{} 0$, *p.s., et*

(1) *il existe une transformation injective* $f : N \to N$ *et une suite d'entiers* $\{n_i\} \nearrow$, *telles que pour les v.a.* $Y_i = \sup_{n_{i-1} < n \leq n_i} X_{f(n)}$, $i = 1,2,\ldots$ *nous avons* $\sum_i P(Y_i \geq i) = \infty$;

(2) *il existe une transformation injective* $f : N \to N$, *une suite d'entiers* $\{n_i\} \nearrow$ *et* $\varepsilon > 0$, *tels que pour les v.a.* $Y_i = \sup_{n_{i-1} < n \leq n_i} X_{f(n)}$, $i = 1,2,\ldots$ *nous avons* $\sum_i P(Y_i \geq i\varepsilon) = \infty$;

(3) *il existe (dans un espace de probabilité convenable) une suite* (X'_n) *avec les mêmes distributions conjointes que la suite* (X_n), *une transformation mesurable* T *qui préserve la mesure, une transformation injective* $f : N \to N$

et une suite d'entiers $\{n_i\}\uparrow$, *telles que pour les v.a.*

$Y_i = \sup_{n_{i-1} < n \le n_i} X'_{f(n)}$, $i = 1,2,\ldots$ *nous avons* $0 \le Y_i \in L^1$, $Y_i \xrightarrow[i]{} 0$,

p.s., $P(\frac{Y_i \circ T^i}{i} \xrightarrow[i]{} 0) = 0$;

(4) *comme* (3), *en remplaçant la dernière convergence par*

$P(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i \circ T^i \xrightarrow[n]{} 0) = 0$:

(5) $\inf_{Z \in L^1} \sum_n P(X_n \ge Z) = \infty$;

(6) *pour chaque* $A \in \alpha$, *soit* $\sup X_n I_A \notin L^1$, $\inf_{k \in N} \sum_n P(X_n I_A \ge k) = \infty$,

soit $\sup X_n I_{A'} \notin L^1$, $\inf_{k \in N} \sum_n P(X_n I_{A'} \ge k) = \infty$;

(7) *pour chaque* $A \in \alpha$ *il existe une suite de réels* $\alpha_n \searrow 0$, *telle que*

soit $\sup X_n I_A \notin L^1$, $\sum_n P(\alpha_n X_n I_A \ge 1) = \infty$,

soit $\sup X_n I_{A'} \notin L^1$, $\sum_n P(\alpha_n X_n I_{A'} \ge 1) = \infty$.

Alors (1)<==> (2) <==> (3) ==> (4) ==> (5) ==> (6) <==> (7).

Démonstration. - L'implication (4) ==> (5) est une conséquence du Théorème 1. (notre espace de probabilité convenable, c'est soit l'espace d'origine, soit l'espace produit).

L'implication (5) ==> (6) est une conséquence du Lemme 2. La démonstration de l'équivalence (6) <==> (7) est simple. □

Pour achever de résoudre le problème de la convergence p.s. des T-moyennes de Césaro, il resterait à démontrer l'implication (5) ==> (4). Les autres résultats seraient la réciproque du Lemme 2. (l'implication (6) ==> (5) où (7) ==> (5)) est la réciproque du Lemme 3. (l'implication (4) ==> (3), où (4) ==> (2)).

Le lemme suivant est fondamental pour une nouvelle analogie entre la théorie ergodique et la théorie des espérances conditionnelles.

Lemme 6. - *Soit* $(X_n, n \in N)$ *une suite dans* L^1, $0 \le X_n$, $X_n \xrightarrow[n]{} 0$, *p.s.*, $\sup_n X_n \notin L^1$. *Alors il existe une transformation injective* $f : N \to N$ *et une transformation* $g : N \to N$, $g(m) = j$ *si* $m_{j-1} < m \le m_j$ *pour une suite d'entiers* $\{m_i\}\nearrow$ *convenable, et une suite d'entiers* $\{n_i\}\nearrow$ *telles que pour les v.a.*

$$Y_i = \sup_{n_{i-1} < n \le n_i} X_{g(f(n))} , \quad i = 1,2,\dots$$

nous avons $0 \le Y_i \in L_1$, $Y_i \xrightarrow[i]{} 0$, *p.s.*, $\sum_i P(Y_i \ge i) = \infty$.

Démonstration. - Puisque $\sup_{n \ge 1} X_n \notin L^1$, il existe $r_1 \in N$, tel que $\sum_{k=1}^{r_1} P(\sup_{n \ge 1} X_n \ge k) \ge 1$. Par induction, si nous avons déjà $r_1 < \dots < r_{i-1}$, il existe $r_i > r_{i-1}$, tel que $\sum_{k=r_{i-1}+1}^{r_i} P(\sup_{n \ge i} X_n \ge k) \ge 1$.

D'après le théorème d'Egoroff (et par induction), il existe une suite d'entiers $\{s_i\}$, telle que

$$\sum_{k=r_{i-1}+1}^{r_i} [P(\sup_{n \ge i} X_n \ge k) - P(\sup_{i \le n \le s_i+i-1} X_n \ge k) < \frac{1}{2^i}, \quad i = 1,2,\dots$$

Soit $r_o = 0$, $p_o = 0$, $p_i = r_i - r_{i-1}$, $i = 1,2,\dots$, $m_o = 0$, $m_j = \sum_{i=1}^{j} p_i I_{\{j,j+1,\dots\}}(i+s_i-1)$.

Tout $n \in N$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$n = \sum_{i=0}^{k-1} p_i s_i + s_k a + b - k + 1 , \quad \text{où} \quad a \in \{0,\dots,p_k - 1\} ,$$
$$b \in \{k,\dots,k+s_k - 1\} .$$

Egalement, tout $i \in N$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$i = \sum_{j=0}^{\ell-1} p_j + C , \quad \text{où} \quad C \in \{1,\dots,p_\ell\} .$$

Il suffit de poser

$$f(n) = \sum_{j=0}^{b-1} m_j + \sum_{i=0}^{k-1} p_i I_{\{b,b+1,\dots\}}(i+s_i-1) + a + 1 ,$$

$$n_o = 0 , \quad n_i = \sum_{j=0}^{\ell-1} p_j s_j + s_\ell C .$$

Donc $\displaystyle Y_i = \sup_{n_{i-1} < n \le n_i} X_{g(f(n))} = \sup_{\ell \le n \le s_\ell + \ell - 1} X_n ,$

$$\sum_i P(Y_i \ge i) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=r_{\ell-1}+1}^{r_\ell} P(\sup_{\ell \le n \le s_\ell+\ell-1} X_n \ge k) = \infty .$$

Notons, que les transformations f et g conservent la convergence p.s. de la suite (X_n), alors $X_{g(f(n))} \xrightarrow[n]{} 0$, p.s. $\square$

Le corollaire suivant complète les résultats de MESIAR [4].

Corollaire. - *Soit* $0 \le X_n \in L^1$, $X_n \xrightarrow[n]{} 0$, *p.s.. Alors*

I. Si $\sup_n X_n \in L^1$, *nous avons*

A) $\forall \mathfrak{F} \subset \alpha$, $E(X_n \mid \mathfrak{F}) \xrightarrow[n]{} 0$, *p.s.* *(DOOB [2])* ;

A') $\forall T$, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \circ T^i \xrightarrow[n]{} 0$, *p.s.* *(MESIAR [3])* .

II. Si $\sup_n X_n \notin L^1$, *nous avons*

B) En un certain sens la convergence p.s. des espérances conditionnelles n'a pas lieu. Plus précisément, il existe (dans un espace de probabilité convenable) une suite (X'_n) *avec les mêmes distributions conjointes que la suite* (X_n), *et une* σ*-algebra* $\mathcal{C}$, *telles que* $P(E(X'_n/\mathcal{C}) \longrightarrow 0) = 0$ *(BLACKWELL et DUBINS [1]) ;*

B') En un certain sens la convergence p.s. des T-moyennes de Césaro n'a pas lieu. Plus précisément, il existe (dans un espace de probabilité convenable) une suite (X'_n) *avec les mêmes distributions conjointes que la suite* (X_n), *une transformation mesurable* T *qui préserve la mesure, une transformation injective* $f : N \to N$, *une transformation* $g : N \to N$, $g(m) = j$ *si* $m_{j-1} < m \leq m_j$ *pour une suite d'entiers convenable* $\{m_j\} \uparrow$ *et une suite d'entiers* $\{n_i\} \uparrow$, *telles que pour les v.a.* $Y_i = \sup_{n_{i-1} < n \leq n_i} X_{g(f(n))}$, $i = 1, 2, ..,$ *nous avons*

$$0 \leq Y_i \in L^1, \; Y_i \xrightarrow[i]{} 0, \text{ p.s.}, \quad P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \circ T^i \xrightarrow[n]{} 0\right) = 0 \qquad \square$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] D . BLACKWELL - L.E.DUBINS : A converse to the dominated convergence theorem. Illinois J. Math., 7, 1963, p.508-514.

[2] J.L.DOOB : Stochastic processes. Willey, New-York, 1953.

[3] R.MESIAR : A generalisation of the individual ergodic theorem. Math. Slovaca 30, 1980, p.327-330.

[4] R.MESIAR : Martingales theorems in the ergodic theory. Circ. Math. di Palermo, Serie II, 2, 1982, p.187-191.

[5] P.T. MAKER : The ergodic theorem for a sequence of functions. Duke Math. J., 6, 1940, p.27-30.

Radko MESIAR
Université Paris VI
Laboratoire de Probabilités
4, Place Jussieu
Tour 56, Couloir 56/46, 3ème étage

75230 PARIS CEDEX 05

Radko MESIAR
Katedra matematiky SvFSVŠT
Radlinského 11

81368 BRATISLAVA
Tchécoslovaquie

Reçu en Mai 1984