ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

C. SUNYACH

Condition pour qu'une transformation d'un espace uniforme soit une contraction stricte, et applications

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 76, série *Probabilités et applications*, nº 1 (1983), p. 81-92

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1983__76_1_81_0>

CONDITION POUR QU'UNE TRANSFORMATION D'UN ESPACE UNIFORME SOIT UNE CONTRACTION STRICTE, ET APPLICATIONS.

C. SUNYACH

Université Paris VI

Etant donné un espace métrique (E,d) et une contraction stricte bijective T de E, il est clair que la suite $d(T^n x, T^n y)$ converge vers 0, uniformément sur tout ensemble $\{(x,y) : d(x,y) \leq t\}$. Le résultat principal de cet article en est une réciproque partielle : si une telle propriété de convergence a lieu pour la distance d, c'est que T est une contraction stricte pour une distance induisant une structure uniforme plus fine que celle de d (équivalente si T^{-1} est uniformément continue).

Si a désigne le point fixe de T et $(A_n, B_n) \in E \times Z$ une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées, ceci permet de donner des conditions explicites pour que la suite $T^{\sum_1^n B_i}(A_{n+1})$ converge vers a presque surement. Il s'agit donc d'un résultat d'approximation aléatoire de point fixe, l'indice de l'itération étant lui-même aléatoire. Il serait sans doute intéressant de rechercher d'autres types de conditions sous lesquelles cette propriété est réalisée, et des applications numériques du type "Monte-Carlo".

Lorsque T est un automorphisme d'un groupe ceci permet d'étudier la convergence de la suite

$$\prod_{n=1}^{N} T^{\sum_1^n B_i}(A_{n+1}),$$

(la loi du groupe étant notée multiplicativement), laquelle intervient dans l'étude des marches aléatoires sur le produit semi-direct de E par Z relativement à T (voir [4], [7] et [8]).

Notons que la condition ci-dessus est suffisante pour assurer l'existence (et l'unicité) d'un point fixe. Il m'a paru intéressant d'en donner une démonstration directe, en fait sous une hypothèse plus faible : il suffit que $d(T^n x, T^n y)$ converge quasi-uniformément vers 0 sur tout ensemble $\{(x,y) : d(x,y) \leq t\}$. Cette hypothèse est naturelle dans ce contexte : en effet si E est compact, T continue et si T^n converge simplement vers une fonction constante, cette suite converge quasi-uniformément. Il est facile de trouver des transformations ayant cette propriété mais telles que T^n ne converge pas uniformément ; il s'ensuit qu'elles ne pourront être des contractions strictes par rapport à une distance définissant la topologie de E.

I. Le résultat principal.

La démonstration s'inspire de la construction d'une famille d'écarts sur un espace uniforme (voir [2] § 1.4). Dans la suite, $(E,\mathcal{U})$ désignera un espace uniforme.

Lemme 1. Soient X une partie de $E\times E$ telle que $X \circ X \subset X$, $K \in [0,2]$ et g une fonction réelle positive définie sur X, tels que

$$g(x,t) \leq K \sup [g(x,y) , g(y,z), g(z,t)]$$

pour tous $(x,y) \in X$, $(y,z) \in X$ et $(z,t) \in X$.

Alors g satisfait l'inégalité

$$g(x,y) \leq K \sum_{0}^{n-1} g(x_i,x_{i+1})$$

pour tous $(x_i,x_{i+1}) \in X$ tels que $x_0 = x$ et $x_n = y$ et pour tous entiers n.

Preuve par récurrence (ibid. *prop. 1.2*).

Lemme 2. Soit $(U_n)_{n\in Z}$ une suite de parties symétriques de $E\times E$ contenant la diagonale et telles que $U_{n+1}^3 \subset U_n$ pour tout n, et soit $X = \bigcup_n U_n$.

Il existe une fonction réelle f sur X, vérifiant l'inégalité triangulaire et telle que

$$f^{-1} [0, \frac{1}{2^{n+1}}] \subset U_n \subset f^{-1} [0, \frac{1}{2^n}] \text{, pour tout } n \in Z.$$

Soit F une application de X dans lui-même. S'il existe $p \in Z$ tel que $F(U_n) \subset U_{n+p}$ (resp. $F^{-1}(U_n) \subset U_{n+p}$) pour tout $n \in Z$, alors $f \circ F \leq \frac{1}{2^{p-1}} f$ (resp $f \leq \frac{1}{2^{p-1}} f \circ F$), et $f \circ F \leq \frac{1}{2^p} f$ (resp. $f \leq \frac{1}{2^p} f \circ F$) si de plus F est surjective.

Preuve.

Posons $g = \sum_{n\in Z} \frac{1}{2^n} (1_{U_n} - 1_{U_{n+1}})$. Cette fonction vérifie

$$g(x,y) \leqslant \frac{1}{2^n} \iff (x,y) \in U_n,$$

or $U_{n+1}^3 \subset U_n$, donc l'hypothèse du lemme précédent est satisfaite avec $K=2$. Soit $f(x,y)$ la borne inférieure des sommes $\sum_0^{n-1} g(x_i,x_{i+1})$ où n est un entier arbitraire, $x_0=x$, $x_n=y$ et, pour tous i, (x_i,x_{i+1}) est arbitraire dans X.

Il est clair que $g/2 \leqslant f \leqslant g$, et les conclusions du lemme en découlent.

Théorème 1. Soit T une bijection de E dans lui-même telle que

1) Pour tous $(x,y) \in E\times E$ et pour tout entourage U, $(T^n x, T^n y)$ soit dans U pour n assez grand.

2) Il existe un entourage A sur lequel la propriété précédente est uniforme par rapport à $(x,y) \in A$.

Alors il existe un écart δ et un entier q tels que

$$\delta \circ \tilde{T}^q = \frac{1}{2}\delta \quad \text{et} \quad \{\delta < \frac{1}{2^{n+1}}\} \subset \tilde{T}^{qh} A \subset \{\delta < \frac{1}{2^n}\}^*$$

pour tous $n \in Z$. En particulier, la structure uniforme définie par δ est plus fine que $\mathcal{U}$, et lui est identique lorsque $\tilde{T}\,\mathcal{U} = \mathcal{U}$.

Preuve.

Remarquons tout d'abord que $\bigcup_{n\in Z} \tilde{T}^{np} A = E\times E$ pour tout entier p. En effet pour tout couple (x,y), $(T^{np}x, T^{np}y)$ est dans A pour n assez grand. Par ailleurs il existe un entier q tel que $(\tilde{T}^q A)^3 \subset A$. En effet il existe un entourage V tel que $V^3 \subset A$ et un entier q tel que $\tilde{T}^q(A) \subset V$. Posons $F = \tilde{T}^q$ et $U_n = F^n(A)$ $(n \in Z)$; cette suite vérifie

$$F(U_n) = U_{n+1} \quad \text{et} \quad U_{n+1}^3 \subset U_n .$$

La conclusion résulte alors du *lemme 2*.

Remarque.

L'écart $\delta' = \sum_{i=0}^{q-1} 2^{i/q}\, \delta \circ \tilde{T}^i$ vérifie $\delta' \circ T = 2^{-\frac{1}{q}}\delta'$. Les relations qui lient δ' et $\tilde{T}^n A$ sont moins simples que pour δ et $\tilde{T}^n A$.

---

* En posant $\tilde{T} = T \otimes T$

II. Cas d'un automorphisme d'un groupe.

Soit G un groupe localement compact et T un automorphisme de G tels que, pour tout $x \in G$, $T^n x$ converge vers le neutre. On sait que de tels automorphismes interviennent dans la théorie du renouvellement ([4], [7] et [8]) et le résultat ci-dessous, qui dit que T est une contraction stricte par rapport à une distance invariante, y joue un rôle important.

Dans ce cas on va bien entendu rechercher un écart invariant par le groupe.

Théorème 2. Soient G un groupe localement compact dénombrable à l'infini, T un automorphisme de G et K un sous-groupe compact de G tel que $TK=K$ et que, pour tous $x \in G$, la suite $(T^n x)_{n\geqslant 0}$ soit relativement compacte et ses valeurs d'adhérence soient dans K.

Il existe $c \in]0,1[$ et un écart invariant à droite f tel que $f(k.x,k'y)=f(x,y)$ pour tous $k,k' \in K$ et $x,y \in G$, que $\{f(e,.) \leqslant \varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ soit un système fondamental de voisinages de K (e désignant le neutre) et que $f \circ \tilde{T} = cf$.

Preuve.

D'après le théorème de Banach-Steinhaus $(T^n)_{n\geqslant 0}$ est équicontinue. Il existe donc un voisinage compact symétrique V de K tel que $T(V) \subset V$; et un entier q tel que $T^q(V^3) \subset V$. En posant

$$A = \{(x,y) : x.y^{-1} \in K.V.K\},$$

le *théorème 1* montre l'existence d'un écart h ayant les propriétés d'invariance indiquées et d'un entier q tel que $h \circ \tilde{T}^q = \frac{1}{2} h$, donc $f = \sum_{0}^{q-1} 2^{i/q}\, h \circ \tilde{T}^i$ convient. Notons que le résultat se traduit de manière naturelle sur l'espace homogène des classes $K.x$ $(x \in G)$.

Remarque.

Le résultat précédent possède un analogue continu évident, où la donnée est une représentation continue de R dans les automorphismes de G. La relation $f \circ \tilde{T} = cf$ sera remplacée par

$$f \circ \tilde{T}^1 = cf \quad \text{et} \quad f \circ \tilde{T}^t \leqslant f$$

pour tous $t \geqslant 0$.

Notons que si un tel automorphisme (resp. représentation) existe sur G, le groupe a une structure très particulière (ibid et [4]).

III. Itération aléatoire d'une transformation.

Lorsque $(E,\mathcal{U})$ est complet, une transformation T vérifiant les hypothèses du *théorème 1* possède un unique point fixe, soit a, et on sait que pour tout $x \in E$, $(T^n x)_{n\geq 0}$ converge vers a. Dans le théorème suivant, je donne des conditions pour que $T^{\sum_1^n B_i}(A_n)$ converge vers a presque surement, où (A_n,B_n) est une variable aléatoire à valeurs dans $E\times Z$. Voir l'introduction et [8] pour le cas d'un automorphisme d'un groupe.

Théorème 3. Soient (E,d) un espace métrique complet, T une bijection de E tels que $d \circ \tilde{T} \leq \beta d$, où $0 < \beta < 1$, et a le point fixe de T. Soit de plus (A_n,B_n) une suite de variables aléatoires à valeurs dans $E\times Z$, indépendantes et équidistribuées, B_1 ayant un moment d'ordre 1 et $EB_1 > 0$.

1) Soit φ une fonction positive sur E, nulle et continue en a, telle que $\alpha\varphi \leq \varphi \circ T$ ($\alpha \in]0,1]$). Si $T^{\sum_1^n B_i}(A_{n+1})$ converge vers a presque surement alors $\int_{\{\varphi>0\}} \mathrm{Log}^+ \varphi \, d\lambda < +\infty$, où λ est la loi de A_1.

2) S'il existe $x \in E$ tel que $E \log [1+d(x,A_1)] < +\infty$, alors

$$\limsup_n \left[d\left(T^{\sum_1^n B_i}(A_{n+1}),a\right) \right]^{\frac{1}{n}} \leq \beta^{EB_1} < 1 \quad \text{p.s.}$$

Preuve.

2) On sait que l'hypothèse entraine $\limsup_n [1+d(x,A_n)]^{\frac{1}{n}} \leq 1$ p.s. (voir [8]).

Considérons une épreuve ω telle que $\sum_1^n B_i(\omega)/n$ converge vers EB_1. Pour n assez grand, $\sum_1^n B_i(\omega)$ est positif, d'où

$$d\left(T^{\sum_1^n B_i(\omega)}(A_{n+1}(\omega),a\right) \leq \beta^{\sum_1^n B_i(\omega)} [d(A_{n+1}(\omega),x)+d(x,a)],$$

d'où le résultat annoncé.

1) D'après la loi des grands nombres il existe un entier k tel que presque surement $\sum_{1}^{n} B_i \leqslant kn$ pour n assez grand, donc $d(T^{kn}(A_{n+1}),a)$ converge vers 0 presque surement. D'après le lemme de Borel-Cantelli il en résulte que la série $\sum_{n} \lambda(\varphi \circ T^{kn} > t)$ est convergente pour tout $t > 0$.

Le nombre d'entiers n tels que $1 \leqslant \varphi \circ T^{kn}(x)$ est majoré par $(\mathrm{Log}\, \varphi(x)/\mathrm{Log}\, 1/\alpha^k)^+$ si $\varphi(x) > 0$, donc $1_{\varphi>0} \mathrm{Log}^+\varphi$ est λ-intégrable.

Exemple.

Si $\alpha d \leqslant d \circ \tilde{T}$ où $\alpha > 0$, on déduit de 1 que $E\,[\,1+\log d(x,A_1)\,] < +\infty$ pour tout $x \in E$.

IV. Remarques sur le théorème du point fixe de Banach.

Comme on l'a vu dans l'introduction il est naturel dans ce contexte d'introduire la convergence quasi-uniforme. Rappelons tout d'abord que si une suite de fonctions réelles continues f_n définies sur un espace compact X converge simplement vers une fonction continue, cette suite converge en fait quasi-uniformément ce qui signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout ensemble infini d'entiers R, il existe une partie finie R_0 de R telle que pour tout $x \in X$ on ait

$$\inf_{n \in R_0} |f_n(x)-f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Ces notions et résultats sont dus à C. Arzela. Voir [1] et [3].

Remarquons que si (X,d) est un espace métrique et T une transformation de X telle que T^n converge uniformément (resp. quasi-uniformément) vers une fonction constante, alors $d(T^n x,T^n y)$ converge vers 0 uniformément (resp. quasi-uniformément) par rapport à $(x,y) \in X \times X$. Le résultat principal de cette partie est une réciproque partielle à cette proposition.

Définition : On dit que x est asymptotiquement fixe si $T^n x$ converge vers x.
Si x est asymptotiquement fixe et si le graphe de T est fermé en x, alors x est fixe.

Si X est la réunion de 0 et de la suite $\frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$, et si $T\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1}$ et $T0=1$, il est clair que 0 est l'unique point asymptotiquement fixe de T et qu'il n'est pas fixe.

Théorème 4. Soient (E,d) un espace métrique complet, T une transformation de E et A un entourage de la diagonale de $E\times E$ (i.e. il existe $t > 0$ tel que $\{d \leq t\} \subset A$). Supposons que, quasi-uniformément sur A, la suite $d \circ \tilde{T}^n$ converge vers 0.

Soit $x \in E$. S'il existe un entier p tel que $(T^p x, T^{p+1}x) \in A$, la suite $(T^n x)$ converge vers un point asymptotiquement fixe ; notons le $a(x)$. Soit (x_n) une suite de E telle que, pour tout i, $\lim\limits_n d(x_n, T^i x_n) = 0$; alors $a(x_n)$ existe pour n assez grand et $\lim\limits_n d(x_n, a(x_n)) = 0$; en particulier si de plus $(x_n, x_m) \in A$ pour tous n et m assez grands, (x_n) converge vers un point asymptotiquement fixe.

Commentaires.

Soit $x \in E$ tel que $(x,Tx) \in A$ et X l'adhérence de la suite $(T^n x)$. Etant donné que cette suite converge, $d \circ \tilde{T}^n$ converge uniformément vers 0 sur $X\times X$. On voit donc que l'hypothèse de quasi-uniformité entraine en fait l'uniformité sur certaines parties, mais il n'y aura pas en général uniformité sur tout un entourage de la diagonale (voir un exemple ci-dessous).

Lorsque T est uniformément continue, la dernière assertion dit qu'une suite de points fixes approchés $(\lim\limits_n d(x_n, Tx_n) = 0)$, de diamètre assez petit $((x_n, x_m) \in A)$, converge vers un point fixe.

Preuve.

Soit donc (x_n) une suite telle que, pour tout i, $\lim\limits_n d(x_n, T^i x_n) = 0$. Commençons par montrer que pour tout $t > 0$ tel que $\{d \leq t\} \subset A$ il existe un entier N tel que $d(x_n, T^i x_n) \leq t$ pour tous $i \geq 0$ et $n \geq N$.

Sinon, il existerait des suites (n_p) et (i_p) telles que $d\left(x_{n_p}, T^{i_p} x_{n_p}\right) > t$ et $n_p \geq p$ pour tout p. La suite (i_p) converge vers $+\infty$ puisque $\lim\limits_n d(x_n, T^i x_n) = 0$

pour tout i. Posons $y_p = x_{n_p}$ et soit $\varphi(p)$ le plus petit entier q non nul tel que $d(y_p, T^q y_p) > t$. Il est clair que $\varphi(p)$ converge vers $+\infty$ avec p.

Etant donné que $d(y_p, T^{\varphi(p)-1} y_p) \leq t$ pour tout p, il existe un ensemble fini d'entiers R_0 tel que

$$\inf_{q \in R_0} d(T^q y_p,\ T^{q+\varphi(p)-1} y_p) \leq t/3$$

puisque $d \circ \tilde{T}$ converge quasi-uniformément vers 0 sur A. De plus, pour tout $q \in R_0$, on a $d(y_p,\ T^q y_p) \leq t/3$ et $d(T^{q-1+\varphi(p)} y_p,\ T^{\varphi(p)} y_p) \leq t/3$ pour tout p assez grand. D'où $d(y_p,\ T^{\varphi(p)} y_p) \leq t$ d'après l'inégalité triangulaire. Il y a donc contradiction.
Soit maintenant $x \in E$ pour lequel il existe p tel que $(T^p x,\ T^{p+1} x) \in A$ et posons $z_n = T^{p+n} x$ $(n \geq 0)$. Puisque $d \circ \tilde{T}^n$ converge simplement vers 0 sur A, $d(z_n, Tz_n)$ $= d(z_n, z_{n+1})$ converge vers 0, donc $d(z_n, T^i z_n)$ aussi, pour tout $i \geq 0$. La propriété préliminaire montre que (z_n) est une suite de Cauchy. Soit $a(x)$ sa limite. Pour n assez grand, $(z_n, a(x))$ est dans A, donc $\lim\limits_q d(z_{q+n},\ T^q a(x)) = 0$ et par suite $\lim\limits_q d(a(x),\ T^q a(x)) = 0$, ce qui montre que $a(x)$ est asymptotiquement fixe.

Il résulte alors aisément de la propriété préliminaire que $(x_n, Tx_n) \in A$ pour n assez grand et que $\lim\limits_n d(x_n, a(x_n)) = 0$. Si de plus $(x_n, x_m) \in A$ pour n et m assez grands la suite $a(x_n)$ sera constante pour n assez grand, car $\lim\limits_i d(T^i x_n,\ T^i x_m) = 0$ si $(x_n,\ x_m) \in A$, donc (x_n) converge, dans ce cas, vers un point asymptotiquement fixe.

Remarques.

On étend facilement ce résultat à un espace uniforme séparé dans lequel les suites de Cauchy convergent.

Exemples.

1) $E = [0, +\infty[$, T croissante et continue, $T(0) = 0$ et $T(x) < x$ si $x \neq 0$.

2) (E,d) est un espace métrique complet, θ est une transformation de $[0, +\infty[$, croissante et continue à droite telle que $\theta(0) = 0$ et $\theta(t) < t$ si $t \neq 0$, et $d \circ \tilde{T} \leq \theta \circ d$.

Cet exemple a été traité par E. Rakotch [5], et par B.K. Ray [6].

Corollaire 1. Soient (E,d) un espace métrique compact et T une transformation continue de E. Si $d \circ \tilde{T}^n$ converge simplement vers 0, T possède un point fixe et un seul.

Considérons l'espace $E \subset R$, constitué de 0 et de la suite $\frac{1}{n}$ $(n \geqslant 1)$ muni de la topologie de R, et la transformation T telle que $T1=0$, $T\frac{1}{n} = \frac{1}{n-1}$ si $n \geqslant 2$ et $T0=0$.

La transformation T est continue et T^n converge simplement vers 0, mais non uniformément puisque $T^{n-1}\,\frac{1}{n} = 1$ et $T^n\,\frac{1}{n} = 0$.

Corollaire 2. Soient (E,d) un espace métrique et (x_n) une suite de E. S'il existe $t > 0$ tel que $\lim_n d(x_{n+p}, x_{n+q}) = 0$ uniformément sur l'ensemble des couples (p,q) tels que $d(x_p,x_q) \leqslant t$, (x_n) est une suite de Cauchy.

Il suffit d'adapter le début de la preuve du *théorème 4* en utilisant la pseudo-transformation $Tx_n = x_{n+1}$ sur l'espace $E_0 = (x_n)$.
On peut aussi appliquer la méthode précédente aux semi-groupes continus de transformations. En voici un exemple :

Théorème 5. Soit A un champ de vecteurs continu sur R^n.
Supposons qu'il existe une application continue η de $[0,+\infty[$ dans R telle que $\eta(0) = 0$, $\eta(t) < 0$ si $t > 0$, $\int_0^1 \frac{du}{\eta(u)} = -\infty$ et que

(1) $\forall x,y \quad (Ax - Ay, x-y) \leqslant ||x-y||\ \eta(||x-y||)$

($||\ .\ ||$ désigne la norme euclidienne et $(,)$ le produit scalaire usuel). Alors le champ de vecteurs A s'annule en un point et un seul et toutes les courbes intégrales convergent vers ce point.

Preuve : On applique le *théorème 4* au semi-groupe engendré par A.

Application à un problème de surjectivité.

Voici une application, classique dans le cas des contractions strictes.

Proposition 6. Soient F un espace de Fréchet, d une distance invariante compatible et pour laquelle E est complet. Posons $|x| = d(x,0)$ si $x \in F$, et soit E la boule fermée de rayon unité, centrée à l'origine.

Soit $z \in F$ et τ_z la translation qui transforme l'origine en z. Soit U une application de $E+z = \tau_z(E)$ dans E. Si, pour tout $t > 0$, $|(U \circ \tau_z)^n(x)-(U \circ \tau_z)^n(y)|$ converge vers 0, quasi-uniformément sur $\{|x-y| \leqslant t\}$, l'équation $x-U(x) = z$ possède une unique solution sur $E+z$. De plus si $(x_n) \subset E+z$ est telle que $\lim_n |x_n-U(x_n)-z|=0$, la suite (x_n) converge vers cette solution.

Preuve.

Il suffit d'appliquer le *théorème 4* à $U \circ \tau_z$.

B I B L I O G R A P H I E

[1] ARZELA, C. Intorno alla continuita della somma di infinite funzioni continue. Rend. Accad. Sci. Bologna 79-84 (1883-1884).

[2] BOURBAKI, N. Topologie générale Ch. 9.

[3] DUNFORD, N and SCHWARTZ, J.T. linear operators Ch. IV §6.

[4] ELIE, L. Comportement asymptotique du noyau potentiel sur les groupes de Lie. Ann. Scie. Ecole Norm. Sup. XV 1982.

[5] RAKOTCH, E. A note on contractive mappings Proc. A.M.S 13 (1962) 459-465.

[6] RAY, B.K. On Ciric's fixed point theorem Fondamenta Mathematicae XCIV (1977).

[7] SUNYACH, C. Théorème du renouvellement pour les marches aléatoires sur un groupe non-unimodulaire.
C.R.A.S. Paris 295, série I, 1982.

[8] SUNYACH, C. Capacité et théorie du renouvellement II (à paraître).

English summary.

In this article we show that on a metric space (E,d), if T is a one to one mapping such that T^{-1} is uniformly continuous and $d(T^n x, T^n y)$ converges uniformly to 0 on $\{(x,y) : d(x,y) \leqslant t\}$ for all $t > 0$, then T is a strict contraction with respect to another metric equivalent to d.

This result yields conditions for the convergence of random iterates of T. When T is an automorphism of a group this result is useful for some problems concerning random walks on some semi-direct products of groups (cf. [7] and [8])

We conclude by a direct proof of the existence of a fixed point for such transformations (in fact a larger class), if the space is complete.

C. SUNYACH
Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)
Laboratoire de Probabilités
4, Place Jussieu
75230 PARIS Cédex 05