ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

MICHEL HAREL

Convergence pour les processus empiriques éclatés

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 76, série *Probabilités et applications*, nº 1 (1983), p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1983__76_1_1_0>

CONVERGENCE POUR LES PROCESSUS EMPIRIQUES ECLATES

Michel HAREL

Université de LIMOGES

INTRODUCTION

Parmi les différentes méthodes envisagées pour établir des théorèmes de convergence pour des statistiques de rang relatives à des suites d'expériences Φ - mélangeantes et à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, L. Rüschendorf propose dans (1) d'exprimer ces statistiques sous la forme :

$$(\forall n \in N^*) \ (\forall x \in \mathbb{R}^k)^n \ T_n(x) = \int_{[0,1] \times [0,1]^k} M_{n,x}(s,u) \, d\,\mu_n(s,u)$$

où μ_n est une mesure signée sur $[0,1]^{1+k}$

et où M_n est le processus de rang tronqué défini par Balacheff et Dupont.

Pour obtenir des applications au comportement asymptotique des tests de rang effectivement utilisés, il est indispensable d'envisager des mesures signées μ_n qui ne convergent pas faiblement (en particulier de variations totales non bornées), on est alors conduit à exprimer $T_n(x)$ une fois convenablement centré et normalisé sous la forme :

$$\int_{[0,1] \times [0,1]^k} L_{n,x}(s,u) \frac{1}{r}(s,u) \, r(s,u) \, d\mu_n(s,u)$$

où L_n est de la forme $\dfrac{M_n - K_n}{\sqrt{n}}$ (où K_n est une fonction de centrage convenable)

Et à vérifier :

- la convergence faible des mesures signées $r(s,u)\,d\mu_n(s,u)$
- la convergence au sens de la topologie de Skorohod des processus $L_n \cdot \dfrac{1}{r}$ (autrement dit la convergence des processus M_n au sens de la topologie de Skorohod corrigée par r)

Dans cette formulation, r est une application continue de $[0,1]^{1+k}$ dans R_+ (et on note par convention $\frac{1}{r}(t) = 0$ si $r(t) = 0$) et il est clair qu'on ne peut obtenir des résultats de convergence (Skorohod corrigée) de la suite L_n que si la fonction r s'annule en tout t tel que $L_n(t) \overset{p.s}{=} 0$, c'est-à-dire en tout t $(=(t_o, \tilde{t})) \in [0,1] \times [0,1]^k$ vérifiant l'un des conditions suivantes :

(i) $t_o = 0$

(ii) $\tilde{t} \in \overleftarrow{[0,1]}^k = \{(t_1 \ldots, t_k) \; ; \; (\exists i) \; t_i = 0\}$ ($\overleftarrow{[0,1]}^k$ est appelé frontière inférieure de $[0,1]^k$)

(iii) $\tilde{t} = \tilde{1} = (1,\ldots,1)$

Une étude préalable à celle de la convergence de la suite L_n est celle de la suite des processus W_n empiriques normalisés tronqués définis par :

$$W_{n,x}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nto]} I_{(\bar{F}n\,(x_j) \leq \tilde{t})} - K_n(t) \quad (x = (x,^1., x^k)$$

Le passage de la convergence des (W_n) à celle des (M_n) est traité par Balacheff et Dupont (3) dans le cas de la topologie de Skorohod usuelle. Dans le présent travail, nous abordons seulement l'étude du processus (W_n) pour la topologie de Skorohod corrigée.

Cette étude a déjà été partiellement effectuée par nous en (2) par des fonctions r vérifiant (i) et (ii) ; par contre en imposant la condition (iii), nous avons été astreints à des conditions excessivement fortes sur la fonction de mélange, ce qui nous a conduits à penser qu'en exprimant les statistiques de rang sous la forme proposée par Rüschendorf, on ne pourra obtenir les résultats souhaités. Il semble préférable d'exprimer ces statistiques de rang au moyen de processus s'annulant à la fois sur la frontière inférieure et sur la frontière supérieure de $[0,1]^k$.

Les nouveaux processus que nous allons définir et que nous appellerons "processus éclatés" répondront à ces critères.

L'idée directrice est la suivante (exprimée ici pour $k = 1$) : on considère le processus W_n^* déduit de W_n par :

- si $(t_0,t_1) \in [0,1/2[^2$ $\quad W_n^* (t_0,t_1) = W_n (t_0,t_1)$

- si $(t_0,t_1) \in [1/2,1] \times [0,1/2[$

$$W_n^* (t_0,t_1) = W_n (t_0,t_1) - W_n (1,t_1) - W_n (t_0,0) + W_n (1,0)$$

- si $(t_0,t_1) \in [0,1/2[\times [1/2,1]$

$$W_n^* (t_0,t_1) = W_n (t_0,t_1) - W_n (t_0,1) - W_n (0,t_1) + W_n (0,1)$$

- si $(t_0,t_1) \in [1/2,1]^2$

$$W_n^* (t_0,t_1) = W_n (t_0,t_1) - W_n (t_0,1) - W_n (1,t_1) + W_n (1,1)$$

Ce processus s'annulle sur toute la frontière de $[0,1]$ et il s'agit de trouver des conditions sur les applications r de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}_+$ de la forme $r (t_0,t_1) = r_0 (t_0)\, r_1 (t_1)$ dont la restriction à chacun des quatre pavés $[0,1/2[^2$, $[1/2,1] \times [0,1/2[$, $[0,1/2[\times [1/2,1]$, $[1/2,1]^2$ admet un prolongement continu à la fermeture de ce pavé, et nulles sur la frontière de $[0,1]^2$ pour que sur chacun des quatre pavés la restriction de $W_n^* \frac{1}{r}$ converge faiblement au sens de la topologie de Skorohod.

L'espace D^*_{1+k} et la topologie de Skorohod associée

I - L'espace D^*_{1+k}

1°/ Définitions et notations

On reprend les notations de (3) sur les espaces D_k

On note : $I_0 = [0,1/2[$

$I_1 = [1/2,1]$

On pose pour tout : $\rho = (\rho_i)_{0 \leq i \leq k} \in \{0,1\}^{1+k}$

$$I_\rho = \prod_{i=0}^{k} I_{\rho_i}$$

Pour toute application f de $(0,1)^{1+k}$ dans R et tout pavé $\prod_{i=0}^{k} (a_i, b_i)$ inclus dans $[0,1]^{1+k}$, on note :

$$\Delta\left(f, \prod_{i=0}^{k} (a_i,b_i)\right) = \Delta_{\prod_{i=0}^{k} (a_i,b_i)} f$$

$$= \Delta_{\prod_{i=0}^{k-1} (a_i,b_i)} f(.,b_k) - \Delta_{\prod_{i=0}^{k-1} (a_i,b_i)} f(.,a_k)$$

(valeur sur le pavé de la mesure à signe de fonction de répartition f)

Soient $(x_0,\dots,x_k) \in I_\rho$ et $f \in D_{1+k}$

Alors, on pose :

$$f^*(x_0,\dots,x_k) = f((x_0,\dots x_k) + o_\rho) \quad \text{(voir (3))}$$

Enfin, on définit l'application γ par :

Si $(x_0,\dots, x_k) \in I_\rho$ et $f \in D_{1+k}$

$$(\gamma(f))(x_0,\dots,x_k) = \Delta\left(f^*, \prod_{i=0}^{k} J_{x_i}\right)$$

où si $0 \leq x_i < 1/2$ $J_{x_i} = [0, x_i]$

si $\frac{1}{2} \leq x_i \leq 1$ $J_{x_i} = [x_i, 1]$

Définition 1

On note D^*_{1+k} l'espace des fonctions f telles que pour tout $\rho \varepsilon \{0,1\}^{1+k}$ la restriction de f à I_ρ admette un prolongement $\bar{f}_\rho$ à $\bar{I}_\rho$ qui admet des limites dans les 2^{1+k} directions en tout point, et de plus est continue dans la direction ρ.

Lemme 1

On a γ (D_{1+k}) inclus dans D^*_{1+k}

2°/ Caractérisation de l'espace D^*_{1+k}

On appelle base de quadrillage eclaté de $[0,1]^{1+k}$ toute famille de k+1 suites finies d'éléments réels telle que chaque élément de chaque suite appartienne à $[0,1[$, que le premier élément de chaque suite soit égal à 0 et que 1/2 appartienne à chaque suite.

Soit, par exemple, $B = \{(t_i^j ; 1 \leq j \leq L_i, 0 \leq i \leq k)\}$ une telle base

Posons pout tout $i \varepsilon \{0,\dots,k\}$

$M_i^j = [t_i^j, t_i^{j+1}[$ si $t_i^{j+1} \leq 1/2$ $j \varepsilon \{1,\dots L_i\}$

$M_i^j = \{1/2\}$ si $t_i^j = 1/2$ $j \varepsilon \{1,\dots,L_i\}$

$M_i^{j+1} =]t_i^j, t_i^{j+1}]$ si $t_i^j \geq 1/2$ $j \varepsilon \{1,\dots,L_i+1\}$ (où par convention $t_i^{L_i+1} = 1$)

Alors l'ensemble des parties non vides de $[0,1]^{1+k}$ de la forme $\prod_{i=0}^{k} M_i^{s_i}$ où pour tout i, $s_i \varepsilon \{1,\dots,L_i+1\}$ est appelé quadrillage éclaté de $[0,1]^{1+k}$ de base B.

On note $\mathcal{R}^*$ l'ensemble des quadrillages éclatés de $[0,1]^{1+k}$

Pour tout quadrillage R appartenant à $\mathcal{R}^*$ de base $B = \{(t_i^j) ;$ $1 \leq j \leq L_i,\ 0 \leq i \leq k)\}$ on associe le nombre réel strictement positif

$$m(R) = \inf_{i \in \{0,\dots,k\}} \ \operatorname{Inf}_{0 \leq j \leq L_i} \{t_i^{j+1} - t_i^j\}$$

m (R) est appelé la perméabilité de R.

On note $\mathcal{R}^*_\delta$ le sous-ensemble des quadrillages de $\mathcal{R}^*$ de perméabilité strictement plus grande que δ.

Définition 2

Pour toute application f bornee de $[0,1]^{1+k}$ dans $\mathbb{R}$, on pose :

$$w'_*(f,\delta) = \operatorname{Inf}_{R \in \mathcal{R}^*_\delta} \ \max_{R \in R} \ \sup_{(t,t') \in R^2} |f(t) - f(t')|$$

Proposition 1

Soit f une application de $[0,1]^{1+k}$ dans $\mathbb{R}$, pour que f appartienne à D^*_{1+k} il faut et il suffit que :

$$\lim_{\delta \to 0} w'_*(f,\delta) = 0$$

3°/ On note :

$$C^*_{1+k} = \{f \ ; \ \forall \rho \in \{0,1\}^{1+k} \quad f_{/I_\rho} \text{ admet un prolongement continu à } \bar{I}_\rho\}$$

$$w_*(f,\delta) = \max_{\rho \in \{0,1\}^{1+k}} \ \sup_{(t,t') \in I_\rho} |f(t) - f(t')|$$

II - Topologie de Skorohod

1°/ Topologie de Skorohod associée à D^*_{1+k}

Soit Λ l'ensemble des applications λ continues, bijectives et $[0,1]$ dans $[0,1]$ vérifiant $\lambda(0) = 0 \quad \lambda(1/2) = 1/2 \quad \lambda(1) = 1$

Si $\lambda = (\lambda_0,\dots,\lambda_k)$ on note :

$$(f o \lambda)(x_0,\dots,x_k) = f(\lambda_0(x_0),\dots,\lambda_k(x_k))$$

$$d^*(f,g) = \operatorname*{Inf}_{\lambda \in \Lambda^{1+k}} \max. \{\| f - go\lambda \|, \| \lambda - i_{1+k} \|\}$$

(où i_{1+k} est l'application identique de $[0,1]^{1+k}$)

$$d^*_o(f,g) = \operatorname*{Inf}_{\lambda \in \Lambda^{1+k}} \max. \{\| f - go\lambda \|, ||| \lambda |||\}$$

avec $$||| \lambda ||| = \max_{o \leq i \leq k} \ \sup_{o \leq s_i < t_i \leq 1} \left| \operatorname{Log} \frac{\lambda_i(t_i) - \lambda_i(s_i)}{t_i - s_i} \right|$$

la distance d^* (d^*_o) et la topologie qu'elle définit sur l'ensemble des applications bornées de $(0,1)^{1+k}$ dans R sont dites de "Skorohod éclatée" (de "Skorohod modifiée éclatée")

2°/ Caractérisation des compacts de D^*_{1+k}

On peut montrer l'équivalent d'un théorème connu de Billingsley (généralisé à D_k par Balacheff et Dupont).

Proposition 2

Soit K une partie de D^*_{1+k}, la fermeture de K est compacte si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

P_1 - $\displaystyle\sup_{f \in K} \| f \| < +\infty$

$$P_2 - \lim_{\delta \to 0} \sup_{f \in K} w'_*(f,\delta) = 0$$

III - Convergence faible de probabilités sur D^*_{1+k}

Nous allons retrouver des résultats équivalents à ceux énoncés dans (3) par Balacheff et Dupont pour les espaces D_k.

1°/ Structure mesurable sur D^*_{1+k}

On note $\mathcal{D}^*_{1+k}$ la tribu borélienne associée à la topologie de Skorohod éclatée sur D^*_{1+k}

Proposition 3

$\mathcal{D}^*_{1+k}$ est la restriction à D^*_{1+k} de la tribu puissance sur $\mathbb{R}^{[0,1]^{1+k}}$ ($\mathbb{R}$ étant muni de la tribu borélienne).

2°/ Convergence faible

Une suite $(P_n\ ;\ n \in N)$ de probabilités sur $(D^*_{1+k}, \mathcal{D}^*_{1+k})$ est dite faiblement convergente si elle est faiblement convergente pour la topologie de Skorohod éclatée.

Pour tout $T \subset (0,1)^{1+k}$, on note Φ_T la projection de D^*_{1+k} sur R^T et pour toute probabilité P sur $(D^*_{1+k}, \mathcal{D}^*_{1+k})$

$T_P = \{t \in [0,1]^k\ ;\ P(\{f\ ;\ \Phi_{\{t\}}$ discontinue en f pour la topologie de Skorohod éclatée $\}) = 0\}$

Proposition 4

Soit $(P_n\ ;\ n \in N)$ une suite de probabilités sur $(D^*_{1+k}, \mathcal{D}^*_{1+k})$, alors elle admet une probabilité P sur $(D^*_{1+k}, \mathcal{D}^*_{1+k})$ pour limite faible si et seulement si sont vérifiées les conditions suivantes :

$$1 - (\forall \varepsilon > 0) \lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} P_n(\{f\ ;\ w'_*(f,\delta) \geq \varepsilon\}) = 0$$

2 - pour toute partie finie U de T_P, $\Phi_U\ (P_n)$ converge faiblement vers $\Phi_U(P)$ quand n tend vers l'infini.

Corollaire 1

Soit la suite $(P_n\ ;\ n \in N)$ de probabilités sur $(D^*_{1+k}, \mathcal{D}^*_{1+k})$ vérifiant :

1' - $(\forall\ \varepsilon > 0)\ \lim_{\delta \to 0}\ \limsup_{n \to \infty}\ P_n(\{f\ ;\ w_*(f,\delta) \geq \varepsilon\}) = 0$

2 - La condition de la proposition 4 vérifiée
alors la suite (P_n) admet P pour limite faible avec $P(C^*_{1+k}) = 1$

Convergence en loi du processus empirique normalisé tronqué éclaté corrigé pour la topologie de Skorohod

I - Nature des observations

Soit $x = (x^1,\dots,x^n)$ une suite de n observations dans $\mathbb{R}^k$, pour tout $i \in \{1,\dots k\}$, notons $\tilde{x}_i = (x_i^1,\dots x_i^n)$ la suite de $i^{\text{ème}}$ composantes des observations, F_{n,x_i} la fonction de répartition empirique associée à la suite x_i, F_n^j $(1 \leq j \leq n)$ la fonction de répartition de la marge P_n^j de la probabilité P_n régissant l'observation x dans $(\mathbb{R}^k)^n$ et $F_{n,i}^j$ $(1 \leq i \leq k)$ la fonction de répartition de la marge $P_{n,i}^j$

on note également :

$$\bar{F}_{n,i} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} F_{n,i}^j \qquad 1 \leq i \leq k$$

pour plus de détails voir (2)

Nous nous plaçons sur l'hypothèse de continuité suivante :

H_1 - les marges $P_{n,i}$ $(1 \leq i \leq k)$ de P_n sont supposées diffusées sur $\mathbb{R}^n$

le processus empirique W_n sur lequel nous travaillerons sera défini par :

$\forall\, t \in [0,1]^{1+k}$ avec $t = (t_0, t_1, \dots, t_k)$ $\tilde{t} = (t_1,\dots t_k)$

$$(W_n(t))\,(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nt_0]} I_{(\bar{F}_n(x^j) \leq \tilde{t})} - H_n^j\,(\tilde{t})$$

avec $H_n^j\,(t_1,\dots,t_k) = F_n^j\,(\bar{F}_{n,1}^{-1}\,(t_1),\dots,\bar{F}_{n,k}^{-1}(t_k))$

On suppose également que sont satisfaites les hypothèses suivantes :

H_2 - la suite $(c_n\,;\ n \in \mathbb{N}^*)$ des fonctions de covariance des processus W_n converge simplement vers une fonction c

H_3 - il existe une application décroissante $\Phi : N^* \to [0,1]$ vérifiant $\Phi(1)=1$, $\Sigma\, n\, \Phi^{1/2}(n) < +\infty$ et pour laquelle la suite $(P_n \; ; \; n \in N^*)$ est Φ mélangeante $n \in N^*$

H_4 - il existe une mesure μ sur $[0,1]^k$ finie positive à marges diffuses et vérifiant :

$(\forall\, n \in N^*)\; (\forall\, j \in \{1,\ldots,n\})\quad \forall\, B$ bloc de $(0,1)^k$

$\mu_n^j\,(B) \leq \mu\,(B)$

(μ_n^j est la probabilité ayant H_n^j pour fonction de répartition)

on note H la répartition de la mesure μ

II - Convergence en loi

1°/ Notations et définitions

Définition 3

On appelle fonction correctrice éclatée toute application r de $[0,1]^{1+k}$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant

(i) $\forall\, t \in [0,1]^{1+k}$

$r\,(t) = r_o\,(t_o)\,\tilde{r}\,(\tilde{t})$ avec $r\,(t_o) \geq 0 \qquad \tilde{r}\,(\tilde{t}) \geq 0$

(ii) $\forall\, \rho \in \{0,1\}^{1+k}$

$r_{/I_\rho}$ admet un prolongement continu sur $\bar{I}_\rho$

(iii) r est nul sur toute la frontière de $[0,1]^{1+k}$

2°/ Résultats préliminaires

Proposition 5

Soit X_n une suite de processus définie sur $((\mathbb{R}^k)^n,\, P_n,\, n \in N^*)$ à valeurs dans D^*_{1+k} convergeant en loi vers X_o gaussien et à trajectoires p.s.

dans C^*_{1+k} pour la topologie de Skorohod éclatée telle que les conditions 1' et 2 du corollaire 1 soient vérifiées.

Soit r une application de C^*_{1+k} positive ou nulle
Soit également pour tout α (>0)

$$R_\alpha = \{(v_0,\dots,v_k) \in [0,1]^{1+k} \; ; \exists i \in \{0,\dots,k\} \sup (v_i, 1-v_i) \leq \alpha\}$$

On suppose vérifiées les deux conditions suivantes :

(A) pour tout n, le processus $X_n . \frac{1}{r}$ est à trajectoires p.s. dans D^*_{1+k}

(B) $(\forall \delta > 0) \; (\forall \varepsilon > 0) \; (\exists \alpha > 0) \; (\exists n_0) \; (\forall n \geq n_0)$

$$P_n \left(\sup_{v \in R_\alpha} |X_n . \frac{1}{r}| > \delta\right) < \varepsilon$$

Alors la suite des processus $X_n . \frac{1}{r}$ converge aussi en loi vers le processus corrigé $X_0 . \frac{1}{r}$ (qui est lui même gaussien et à trajectoire p.s. dans C^*_{1+k}) pour la topologie de Skorohod éclatée.

Nous allons essayer de réaliser les conditions (A) et (B) pour le processus $\gamma\,(W_n)$

Le processus $\gamma\,(W_n)$ vérifie la condition (A) si on a l'hypothèse suivante :

H'_1 - r est une fonction correctrice éclatée telle que pour tout n et tout j $(1 \leq j \leq n)$ soit satisfaite la condition suivante :

pour tout $\tilde{t}$ appartenant à la frontière de $[0,1]^k$, on a

$$\lim_{\tilde{u} \to \tilde{t}} (\gamma'(H_n^j) . \frac{1}{\tilde{r}}) (\tilde{u}) = 0$$

où $\gamma'\,(H_n^j)$ est défini par

$$\forall\, (v_1,\dots,v_k) \in [0,1]^k$$

$$(\gamma'(H_n^j))\,(v_1,\dots,v_k) = \Delta\,(H_n^j, \prod_{i=1}^{k} J_{v_i})$$

Ce qui suit va consister à assurer la réalisation de la condition (B)

Pour cela, on va décomposer R_α en 2^{1+k} sous ensembles

$(R_\alpha^\rho)_{\rho \in \{0,1\}^{1+k}}$ définis par :

$\forall \rho \in \{0,1\}^{1+k} \qquad R_\alpha^\rho = R_\alpha \cap I_\rho$

et montrer que (B) est vérifiée sur chacun des sous ensembles R_α^ρ

Définition 4

Pour tout $J \subset \{0,1,\ldots,k\}$ une fonction f de $[0,1]^{1+k}$ dans $\mathbb{R}$ est dite J monotone éclatée si on a :

$\forall \rho \in \{0,1\}^{1+k}$

$\forall (t_i,t_i') \in R_\alpha^\rho$ tel que $\forall i \in J \quad t_i \overset{\rho_i}{\lesseqgtr} t_i'$

$f(t) \leq f(t')$

où $\overset{0}{\lesseqgtr} = \leq$ et $\overset{1}{\lesseqgtr} = \geq$

si $J = \{0,\ldots k\}$ on dit monotone

Définition 5

La fonction correctrice éclatée r est dite régulière si elle est monotone éclatée

On va montrer (B) pour des fonctions correctrices régulières

3°/ Convergence en loi

On note :

$F_1, F_2,\ldots,F_k$ les fonctions de répartition des marges de μ,

F_o la mesure uniforme sur $[0,1]$

H' la fonction de répartition de la mesure produit de μ et de la mesure uniforme sur $[0,1]$

Pour tout $f \in C^{*}_{1+k}$ et pour tout $\rho \in \{0,1\}^{1+k}$, β^{ρ} l'application qui a $f_{/I_{\rho}}$ associe son prolongement continu $\tilde{f}^{\rho}$ sur $\bar{I}_{\rho}$

Théorème

Supposons que :

1. (1,1) les conditions (H_1) à (H_4) et H_1' soient vérifiées
   (1,2) la fonction r est correctrice éclatée régulière

2. Pour tout $\rho \in \{0,1\}^{1+k}$

Il existe α (>0) tel que :

(2.1) sur $R^{\rho}_{\alpha} - [\vec{0,1}] \cup [\overleftarrow{0,1}]$

$\frac{1}{r}$ est de classe $\mathcal{C}_{k+1}$

si $J = \{j \in \{0,\dots,k\} \; ; \; \rho_j = 0\}$

pour tout $L \subset \{0,\dots,k\}$

si card $(J \cap L)$ est pair, $\partial_L(\frac{1}{r})$ prend des valeurs positives

si card $(J \cap L)$ est impair, $\partial_L(\frac{1}{r})$ prend des valeurs négatives

(2.2) il existe $c > \frac{3k+2}{k+2}$ tel que pour tout $L \subset \{0,\dots,k\}$

$$\Delta_{(J\cap L \,:\, t_i,\, t_i' \;;\; J - J\cap L \,:\, 0, t_i \;;\; (\complement J)\cap L \,:\, t_i', t_i \;;\; (\complement J) - (\complement J)\cap L \,:\, t_i, 1)} \beta^{\rho}(\gamma(H')) .$$

$$\frac{1}{(\beta^{\rho}(r))^{c}} \; (\, J\cap L : t_i' \;;\; J - J\cap L : t_i \;;\; (\complement J)\cap L : t_i \;;\; (\complement J) - (\complement J)\cap L : t_i')$$

et

$$\Delta_{(J\cap L \,:\, t_i,\, t_i' \;;\; J - J\cap L \,:\, 0, t_i \;;\; (\complement J)\cap L \,:\, t_i', t_i \;;\; (\complement J) - (\complement J)\cap L \,:\, t_i, 1)} \beta^{\rho}(\gamma(\prod_{i=0}^{k} F_i)) .$$

$$\frac{1}{(\beta^{\rho}(r))^{c}} \; (\, J\cap L : t_i' \;;\; J - J\cap L : t_i \;;\; (\complement J)\cap L : t_i \;;\; (\complement J) - (\complement J)\cap L : t_i')$$

Sont sur R_α^ρ des fonctions L monotones éclatées pour les variables t_i pour $i \varepsilon (J - J \cap L)$ et les variables t'_i pour $i \varepsilon (\complement J - (\complement J) \cap L)$ si on a

$$t_i \leqslant t'_i \quad \forall\, i \;\varepsilon\; J \cap L$$

$$t'_i \leqslant t_i \quad \forall\, i \;(\complement J) \cap L$$

(2.3) Pour tout $L \subset \{0,\dots,k\}$

$$\int_{R_\alpha^\rho} \left| \frac{1}{r^c}\, \partial_L\, (\gamma(H'))\, \partial_{\complement L} (\frac{1}{r}) \right| d\, \lambda^{1+k} < +\infty$$

$$\int_{R_\alpha^\rho} \left| \frac{1}{r^c}\, \partial_L\, (\gamma(\prod_{i=0}^{k} F_i))\, \partial_{\complement L} (\frac{1}{r}) \right| d\, \lambda^{1+k} < +\infty$$

Alors la suite des processus $\gamma(W_n).\frac{1}{r}$ converge en loi pour la topologie de Skorohod éclatée vers le processus $\gamma(W_o).\frac{1}{r}$ gaussien et à trajectoire p.s. dans C^*_{1+k}

La démonstration est une conséquence de la démonstration du théorème que nous avons énoncé dans (2).

Remarque

Ces conditions sont vérifiées pour :

$$H(t) = \prod_{i=0}^{k} t_i$$

$\forall\, \rho \;\varepsilon\; \{0,1\}^k \quad \forall\, t \;\varepsilon\; I_\rho$

$r(t) = (\prod_{i \varepsilon J} t_i \prod_{i \notin J} (1-t_i))^{1/2-\delta} \qquad J = \{i \;\varepsilon\; \{0,\dots,k\} \;;\; \rho_i = 0\} \quad 0 < \delta < 1/2$

B I B L I O G R A P H I E

(1) L. RÜSCHENDORF
On the empirical Process of Multivariate, dependent Random Variables

Journal of Multivariate Analysis 4, p. 469-478 (1974)

(2) M. HAREL
Convergence en loi pour la topologie de Shorohod du processus empirique multidimensionnel normalisé tronqué et semi-corrigé

Lecture Notes in Mathematics Springer-Verlag (1980) n° 821

(3) S. BALACHEFF et G. DUPONT
Sur la convergence des suites de processus multidimentionnels normalisés tronqués et mélangeants.

Thèse de 3ème cycle Université de Rouen (1979)

(4) P. BILLINGSLEY
Convergence of Probability Measures, Wiley (1968)

(5) P.J. BICKEL and J. WICHURA
Convergence criteria for multiparameter stochastic processes and some applications

Ann. of Math. Stat. Vol. 42 n° 5 p. 1656-1670 (1971)

Michel HAREL

Université de Limoges
I.U.T. - Département T.C.
Allée A. Maurois

87000 LIMOGES