ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

YVES PERAIRE

Analyse relative

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 98, série *Mathématiques*, n° 28 (1992), p. 41-166

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1992__98_28_41_0>

Ann. Sci. Univ. Blaise Pascal (Clermont II), Sér. Math., Fasc. 28, pp. 41-166

.... le calcul infinitésimal est utile, quand il s'agit d'appliquer la Mathématique à la Physique, cependant ce n'est point par là que je prétends rendre compte de la nature des choses. Car je considère les quantités infinitésimales comme des fictions utiles

LEIBNIZ Phil., VI, 629

On pourrait dire, comme dans *l'Empereur de la lune*, que c'est tout comme ici partout et toujours, aux degrés de grandeur et de perfection près.

LEIBNIZ Phil., VI, 548 .

ANALYSE RELATIVE

INTRODUCTION .

Si l'on qualifie d'idéal tout ce qui n'est pas la réalité empirique, tout ce qui est de la même nature que la pensée, alors il nous faut admettre que les objets dont parle toute mathématique formalisée sont des objets idéaux . Cependant des mathématiciens, à chaque époque du développement des mathématiques, probablement parce que ces objets faisaient partie de leur univers mental et de leur champ d'activité quotidiens, et présentaient un caractère de stabilité qui les apparentait à la réalité matérielle la plus banale, ont eu tendance à les considérer comme étant "réels", et parfois comme ayant une existence indépendante de l'homme. Le doute se réinstalle chaque fois que sont introduits des objets, concepts ou méthodes radicalement nouveaux dégagés par un effort supplémentaire d'idéalisation; c'est ainsi qu' ont été qualifiés d'éléments idéaux ou de notions idéales en leur temps, les nombres imaginaires, les infinitésimaux introduits par les pioniers du calcul différentiel ou les nombres transfinis de Cantor. Pour notre part, nous considèrerons que l'ensemble des entiers naturels, le nombre

π.. etc....., tous les ensembles <u>définis</u> dans la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix, sont des ensembles idéaux du premier niveau.

Nous constuirons une théorie des ensembles dont le langage permettra de "traduire" au moyen de formules bien formées des énoncés métamathématiques du genre : l'ensemble vide, $\emptyset$, est un ensemble idéal du premier niveau, il existe un entier supérieur à tous les entiers du premier niveau d'idéalité. Dans [25], E. Nelson a construit une théorie des ensembles, la théorie IST, qui est une extension de ZFC et qui permet de désigner dans $\mathbb{N}$ des entiers supérieurs à tous les entiers du premier niveau d'idéalité, qu'il qualifie de standard dans le langage de IST, ce sont des nombres infiniment grands; intuitivement on peut considérer que ces nouvelles entités sont d'un degré d'idéalité supérieur à un. Nous voudrions que notre théorie des ensembles permette de traduire aussi ce dernier énoncé, portant sur des ensembles de IST, et bien d'autres. Nous souhaitons pouvoir attribuer formellement un degré d'idéalité déterminé, un, deux, trois,...etc... à certains ensembles. Aux infiniment grands de Nelson, il correspondra une hiérarchie d'entiers de différents degrés qui devront être vus comme des infiniment grands d'ordre un, d'ordre deux, (infiniment (infiniment grands)),...etc... Nous voudrions que notre théorie soit une extension de la théorie IST. Il est clair que si l'on veut pouvoir qualifier d'idéal <u>tout</u> ensemble défini dans ZFC, cela ne pourra se faire au moyen d'une définition <u>dans</u> ZFC; il nous faudra, d'une manière analogue à celle de Nelson utiliser un langage plus riche que celui de ZFC. On peut par exemple, enrichir ce dernier de nouveaux prédicats non définis à une place: id_1 , id_2. Nous pourrons alors former les énoncés :

(1) $id_1\,\mathbb{N}$, qui se lira : $\mathbb{N}$ est un ensemble idéal du premier ordre

(2) $\exists^{id_2} n \in \mathbb{N}\ \forall^{id_1} p \in \mathbb{N}\ (n > p)$

qui se lira, "il existe un entier n idéal d'ordre 2 supérieur à tout entier idéal d'ordre 1", et aussi:

(3) $\exists\ n \in \mathbb{N}\ \forall^{id_2} p \in \mathbb{N}\ (n > p)$

L'énoncé (2) affirme l'existence d'entiers que l'on pourrait qualifier d'infiniment grands, mais on savait le faire dans I.S.T.. Par contre, la formule (3) introduit quelque chose de nouveau en affirmant l'existence de nombres infiniment-(infiniment grands). Les ensembles idéaux d'ordre 1 correspondent aux ensembles standard de E.Nelson.

On peut démontrer que si l'on ajoutait les énoncés (1) (2) et (3) aux axiomes de ZFC, relativisés aux formules construites sans utiliser les nouveaux prédicats id_1 et id_2 , alors l'extension de Z.F.C.ainsi obtenue serait relativement consistante et même, conservative. Toutefois la théorie présentée ici sera plus générale; plutôt que d'introduire des prédicats non définis à une place nous avons choisi de <u>définir</u> ces prédicats dans un langage universel construit à partir du prédicat d'appartenance classique et d'un prédicat <u>non défini</u> à deux places, "$\mathcal{SR}$". L'écriture $x\mathcal{SR}y$ se lira " x est standard relativement à y " ou, d'une manière duale, y est idéal relativement à x. L'idée de généraliser la théorie de E.Nelson en remplaçant son prédicat à une place, " st " par un prédicat binaire de standardicité relative revient à Guy Wallet, de l'Université de Poitiers qui, à notre connaissance, l'a énoncée clairement pour la première fois en 1985, lors de discussions au congrès de Luminy, " Mathématiques finitaires et Analyse non standard" toutefois, on pourra trouver dans le travail de E.I. Gordon cité en [8], l'utilisation d'un prédicat de standardicité relative <u>défini dans IST</u>. Grâce à l'introduction de notre nouveau prédicat, nous pourrons dire que tout ensemble x a un degré de standardicité (celui de x) en imposant l'axiome $\forall x \; x\mathcal{SR}x$. La théorie des ensembles que nous construirons d'abord est une théorie relative des ensembles internes (nous l'appellerons RIST). Nous l'avons qualifiée de relative parce que tous les ensembles de cette théorie peuvent être comparés relativement à leur standardicité (ou à leur idéalité) et nous parlons d'ensembles <u>internes</u> parce que seules les formules du langage de ZFC sont admises pour décrire un sous-ensemble d'un référentiel donné, le schéma de compréhension ne s'étend pas à toutes les formules de RIST.

La théorie RIST est un cadre très général pour faire de l'analyse infinitésimale; on peut, par exemple, définir dans le langage de RIST une relation de proximité infinitésimale dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, $\to$, en posant $y \to x$ si $\forall \varepsilon > 0 \; (\varepsilon\mathcal{SR}x \Rightarrow |y - x| < \varepsilon)$.

Plus généralement, nous montrerons que:

a) à toute structure topologique correspond d'une manière naturelle une relation de proximité infinitésimale, $\to$, qui est une relation d'ordre externe, ainsi que des relations de proximité infinitésimale de divers niveaux , ${}^{t}\!\to$, l'indice t désignant un ensemble.

b) à toute structure uniforme, on peut associer naturellement des relations d'équivalence infinitésimale, ${}^{t}\approx$, qui sont des relations d'équivalence externe.

On peut utiliser les relations ${}^{t}\to$ et ${}^{t}\approx$ pour faire de l'analyse, nous ferons quelques pas dans cette direction dans le chapitre I paragraphe 4; toutefois chaque problème particulier ne nécessitant qu'un nombre fini de degrés d'idéalité, nous travaillerons plutôt dans une sous théorie de la théorie RIST qui nous semble d'une utilisation plus facile et plus mécanique. Le principe consiste à utiliser le prédicat $\mathcal{SR}$ de Wallet pour définir des prédicats d'idéalité à une place, en nombre intuitivement fini, en posant

$$\begin{aligned}
&\mathrm{id}_1(x) \text{ si } x\mathcal{SR}\alpha_1,\\
&\mathrm{id}_2(x) \text{ si } x\mathcal{SR}\alpha_2,\\
&\qquad\vdots\\
&\mathrm{id}_k(x) \text{ si } x\mathcal{SR}\alpha_k, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \text{ étant convenablement choisis.}
\end{aligned}$$

Dans la pratique, comme nous pourrons le constater en lisant les chapitre II et III, pour un problème ayant toutes ses constantes standard, nous n'utiliserons pas plus de trois prédicats id_p. Nous appellerons analyse relative, l'analyse mathématique dans le cadre de RIST (ou d'une sous-théorie de RIST).

Le bénéfice que nous entendons tirer des méthodes de l'analyse relative est essentiellement le même que celui que nous escomptions de l'analyse non standard: introduction de nouvelles entités, formulations plus compactes des propriétés et démonstrations plus directes.

Dans cette recherche de formulations plus compactes, X étant un espace topologique séparé et p un entier inférieur ou égal à n, nous avons été amenés à définir dans X les **ombres d'ordre p** de la manière suivante :

Donnons nous un ensemble # tel que $\# \notin X$; pour tout $x \in X$ on posera :

$$^{p}x = a \quad \text{si} \quad \exists^{\mathrm{id}_p} a \in X \ \ (x \ {}^{\alpha_p}\!\to a),$$

$$\text{et} \qquad {}^{p}x = \# \quad \text{si} \quad \forall\, a \in X \neg (x \ {}^{\alpha_p}\!\to a),$$

l'énoncé $x \ {}^{\alpha_p}\!\to a$ se lisant "x est proche de a d'ordre p". Nous conviendrons de poser ${}^{p}\# = \#$.

Dans le même esprit, nous définirons au chapitre III une notion de point de Cauchy qui remplace avantageusement la notion de filtre de Cauchy. Nous écrirons $\mathcal{C}_p(x)$ pour "x est un point de Cauchy" à l'ordre p. Il apparaît alors que, si $id_p(X)$, beaucoup des propriétés topologiques rencontrées couramment en analyse s'expriment d'une manière compacte au moyen de règles de déduction sans quantificateurs . Par exemple on a :

Si $q > p$:

X est :	compact	régulier	loc.compact	complet	quelconque
ssi de on peut déduire	$\dfrac{x \in X}{{}^p x \in X}$	$\dfrac{{}^p x \in X, {}^q x \in X}{{}^p({}^q x) = {}^p x}$	$\dfrac{{}^p x \in X}{{}^p({}^q x) = {}^p x}$	$\dfrac{C_p(x)}{{}^p x \in X}$	$\dfrac{{}^p({}^q x) \in X}{{}^p({}^q x) = {}^p x}$

On s'aperçoit que les conditions portant sur des suites, filtres ou filets dont l'analyse classique fait une abondante utilisation ont complètement disparu des formulations ci-dessus, et sont remplaçées par les règles de manipulation des ombres.

Nous signalerons un autre gain important lors du passage de IST à RIST : nous disposons d'un théorème de **transfert externe** . Grâce à ce principe nous pouvons, par exemple, tirer directement les énoncés " $\forall^p X$ [(X compact) $\Leftrightarrow \forall^q x \in X ({}^p x \in X)$] ", pour tous p et q tels que $p < q$, de l'énoncé " $\forall^1 X$ [(X compact) $\Leftrightarrow \forall x \in X (x \in X)$] ".

Nous verrons également que ce théorème de transfert permet d'accroître considérablement la puissance du schéma de standardisation à tel point qu'on peut le considérer comme une sorte de **shéma de compréhension externe**.

Chapitre I - La théorie relative des ensembles internes.

1 - Présentation de la théorie .

Comme annoncé dans l'introduction, le langage de cette nouvelle théorie des ensembles , que nous appellerons RIST, comporte un prédicat non défini à deux places en plus du classique prédicat d'appartenance de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel, ce prédicat sera noté $\mathcal{SR}$.

Si x et y sont deux ensembles de notre théorie, l'expression $x\mathcal{SR}y$ se lira : "x est standard relativement à y".

Nous appellerons formule interne toute formule bien formée du langage de RIST dans laquelle n'intervient pas le prédicat $\mathcal{SR}$.

Si α est un ensemble et si F est une formule quelconque du langage de RIST nous écrirons:

$\forall^{\alpha} x F$ pour $\forall x \ (x \,\mathcal{SR}\, \alpha \Rightarrow F)$, $\forall^{\neg\alpha} x F$ pour $\forall x \ ((\neg(x \,\mathcal{SR}\, \alpha)) \Rightarrow F)$,

$\forall^{\alpha \text{ fin}} x F$ pour $\forall^{\alpha} x \ (x \text{ fini} \Rightarrow F)$,

$\exists^{\alpha} x F$ pour $\exists x \ (x \,\mathcal{SR}\, \alpha \wedge F)$,

$\exists^{\alpha \text{ fin}} x F$ pour $\exists^{\alpha} x \ (x \text{ fini} \wedge F)$.

Nous dirons que les expressions $\forall^{\alpha}$, $\exists^{\alpha}$, $\forall^{\neg\alpha}$, $\exists^{\neg\alpha}$ sont des quantificateurs externes. Si $x\mathcal{SR}y$, nous dirons aussi que x est y-standard.

Les axiomes de RIST contiennent tous les axiomes de Z.F.C. relativisés aux formules internes. Cette dernière précision est importante, elle implique par exemple que l'on ne peut pas utiliser le schéma de compréhension pour définir un ensemble dont les éléments sont les entiers $\mathbb{N}$-standard. Toutefois, il nous arrivera par abus de langage de parler de tels "ensembles" bien qu'ils ne soient pas des ensembles de RIST. Nous dirons que ce sont des ensembles externes.

A ces axiomes nous ajouterons les suivants :

$\mathcal{SR}_1$: $\forall x\ x\mathcal{SR}x$.

$\mathcal{SR}_2$: $\forall x\,\forall y\,(x\,\mathcal{SR}\,y \vee y\,\mathcal{SR}x)$.

$\mathcal{SR}_3$: $\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x\,\mathcal{SR}\,y \wedge y\,\mathcal{SR}\,z \Rightarrow x\,\mathcal{SR}\,z)$.

On peut résumer les axiomes $\mathcal{SR}_1$, $\mathcal{SR}_2$ et $\mathcal{SR}_3$ en disant que la "collection" des ensembles est totalement "ordonnée" par $\mathcal{SR}$.

Les trois schémas d'axiomes qui suivent sont analogues aux schémas (I), (S) et (T) de E.Nelson dans [25].

Schéma d'axiomes de transfert : (T)

Si F(x, t_1, t_2, ..., t) est une formule interne avec x, t_1, ..., t_k comme seules variables libres et si α un ensemble fixé alors on a le principe de transfert (Tα) :

$T(\alpha,F)$: $\forall^\alpha t_1\ \forall^\alpha t_2 \ldots \forall^\alpha t_k\ (\ \forall^\alpha x\ F(x,t_1,t_2,\ldots,t_k) \Rightarrow\ \forall x\ F(x,t_1,t_2,\ldots,t_k)\ )$.

Il découle du schéma d'axiome ci-dessus qu'un ensemble X défini d'une manière unique par une formule close interne sans paramètres est α-standard pour tout α. On dira plus simplement qu'il est **standard** et on écrira st(X).

Schéma d'axiomes d'idéalisation : (I)

Si F(x,y) est une formule interne ayant x, y, comme variables libres et peut-être d'autres variables libres si α_1, α_2,... α_K, β sont des ensembles fixés tels que β n'est pas (α_1.α_2,...α_K)-standard, alors on a les principes d'idéalisation sur plusieurs niveaux suivants :

Idéalisation contrôlée :

I (α_1. α_2,... α_K; β; F) :

$[\forall^{\alpha_1,fin} z_1 \ldots \forall^{\alpha_k,fin} z_k \exists^\beta y\ \forall x_1 \in z_1 \ldots \forall x_k \in z_k F(x_1,\ldots,x_k,y)] \Leftrightarrow \exists^\beta y\ \forall^{\alpha_1} x_1 \ldots \forall^{\alpha_k} x_k\ F(x_1,\ldots,x_k,y)$.

Idéalisation non contrôlée :

I $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k; . ; F)$:

$$[\forall^{\alpha_1, fin} z_1 \dots \forall^{\alpha_k, fin} z_k \exists y \ \forall x_1 \in z_1 \dots \forall x_k \in z_k F(x_1,..,x_k,y)] \Leftrightarrow \exists y \ \forall^{\alpha_1} x_1 \dots \forall^{\alpha_k} x_k \ F(x_1,..,x_k,y).$$

Remarques :

- Si $\emptyset$ désigne l'ensemble vide, et si F est une formule interne I($\emptyset$;.; F) n'est autre que l'axiome d'idéalisation de IST, formulé autrement.
- Si la nécessité du "contrôle de l'idéalisation" nous est apparue assez tôt, au fur et à mesure de nos tentatives d'appliquer à l'analyse une version relative de IST, la nécessité de principes d'idéalisation sur plusieurs niveaux ne s'est dégagée qu'au moment où nous nous sommes intéressés à la syntaxe de RIST. Par exemple, si F(x,y,z) est une formule interne avec trois variables libres, n'ayant pas de constantes, et si $G \equiv \exists^{\gamma} z \ \forall^{\alpha} x \ \forall^{\beta} y \ F(x,y,z)$, avec γ non (α,β)-standard, alors le principe d'idéalisation contrôlée sur deux niveaux I$(\alpha,\beta; \gamma ; F)$ permet de commuter le groupe de quantificateurs externes " $\forall^{\alpha} \forall^{\beta}$ " et le quantificateur externe " $\exists^{\gamma}$ " : plus précisément on a : $G \Leftrightarrow \forall^{\alpha, fin} x' \forall^{\beta, fin} y' \ \exists^{\gamma} z \ \forall x \in x' \forall y \in y' \ F(x,y,z)$.

On voit maintenant qu'en appliquant trois transferts successifs, après avoir préalablement, si nécessaire, permuté "$\forall^{\alpha, fin} x'$" et "$\forall^{\beta, fin} y'$", G est équivalent à la formule interne :
$\forall^{fin} x' \forall^{fin} y' \ \exists^{\gamma} z \ \forall x \in x' \forall y \in y' \ F(x,y,z)$.

Nous allons maintenant donner une version relative du principe de standardisation de IST. Le schéma d'axiome de standardisation de IST affirme que pour tout référentiel standard et toute formule bien formée du langage de IST, il existe un ensemble standard dont les éléments standard sont exactement ceux du référentiel qui satisfont la formule.

Pour énoncer un principe relatif de même nature, il faut prendre quelques précautions.

En effet, soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, et n_0 un entier fixé qui ne soit pas standard. L'existence d'un tel entier découle facilement de I($\emptyset$;.; F) appliqué à la formule

$F(x,y) \equiv (x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge x \neq y)$. On voit facilement qu'il n'existe aucun ensemble E n_0-standard tel que pour tout p n_0-standard, $p \in E$ si et seulement si p n'est pas standard. En effet, si un tel ensemble E existait, il serait non vide puisqu'il contiendrait n_0, il contiendrait donc un plus petit élément m_0. Par (T), on obtient que m_0 est n_0-standard. D'autre part, il est non standard (c'est la propriété caractéristique des éléments n_0-standard de E), on a donc m_0 différent de O. Par (T), on obtient que que m_0-1 est n_0-standard et non standard. Ces deux dernières propriétés de m_0-1 impliquent qu'il est dans E et cela contredit la minimalité de m_0.

On voit donc qu'un principe relatif de standardisation ne saurait s'appliquer à toutes les formules du langage de RIST.

En fait, pour chaque ensemble fixé α, nous aurons un principe de standardisation au niveau α . Celui-ci s'appliquera à une classe particulière de formules externes, les formules **α-externes.**

Si nous notons $\mathcal{F}$ la collection des formules du langage de RIST, $\mathcal{F}_\alpha$ la famille des formules α-externes, alors $\mathcal{F}_\alpha$ sera la plus petite sous-collection de $\mathcal{F}$ telle que :

i) les formules élémentaires: $(x \in y)$, où x et y sont soit des variables soit des constantes, sont dans $\mathcal{F}_\alpha$,

ii) si F et G sont dans $\mathcal{F}_\alpha$, il en est de même de $\neg F$ et de $F \Rightarrow G$,

iii) si F(x,y) est une formule de $\mathcal{F}_\alpha$ alors $\exists$ y F(x,y) est une formule de $\mathcal{F}_\alpha$,

iv) si F(x,y) est une formule de $\mathcal{F}_\alpha$ et si β est un ensemble tel que α soit β-standard, alors $\exists^\beta y$ F(x,y) est dans $\mathcal{F}_\alpha$.

Nous particulariserons dans $\mathcal{F}_\alpha$ une sous famille $\mathcal{F}'_\alpha$, dont les éléments seront appelés des formules **strictement α-externes.**

$\mathcal{F}'_\alpha$ est la plus petite sous-collection de $\mathcal{F}$ contenant les formules élémentaires décrites dans i), qui vérifie les conditions de fermeture ii) iii) et à la place de iv) la condition suivante :

v) si F(x,y) est une formule de $\mathcal{F}'_\alpha$, alors $\exists^\alpha y$ F(x,y) est une formule de $\mathcal{F}'_\alpha$.

Nous pouvons énoncer maintenant :

<u>**Schéma d'axiome de standardisation :**</u> (S)

Si α est un ensemble , et si F(v,...) est une formule relativement α-externe, alors:

$(S(\alpha,F))$: $\forall^{\alpha} y\, \exists^{\alpha} z\, \forall^{\alpha} t\ (t \in z \Leftrightarrow (t \in y \wedge F(t,..)))$.

2- Quelques conséquences directes des axiomes.

Un référentiel Y et une formule quelconque F étant donnés, on ne peut pas en général parler de l'ensemble des éléments de Y qui satisfont à F car le schéma de compréhension ne peut être appliqué qu'à des formules internes; toutefois nous nous permettrons d'écrire une expression de la forme $E = \{t \in Y / F(t)\}$. L'expression entre accolades ne définit pas , en général , un ensemble de la théorie des ensembles RIST; cependant nous dirons, par un abus de langage contrôlé, que E est un ensemble externe.

Pour chaque référentiel α-standard fixé y, et chaque formule α-externe F, l'ensemble α-standard z dont l'existence est affirmée par $S(\alpha,F)$ est unique car deux parties α-standard de y définies au moyen de $S(\alpha,F)$, ont les mêmes points α-standard et il suffit d'appliquer $(T\alpha)$ pour voir quelles sont égales. Nous noterons cet ensemble $z = st_{\alpha}\{t \in y / F(t)\}$ ou $z = st\{t \in y / F(t)\}$ dans le cas où α est standard. On dira que z est le α-standardisé, ou le standardisé (dans le second cas), de l'ensemble externe $E = \{t \in y / F(x;t)\}$.

La démonstration des théorèmes 1, 2 et 3 qui suivent est la quasi-copie de la démonstration des théorèmes 1.2, 1.1 et 1.3 de [25].

THEOREME 1 :

Pour tous β et α tels que β n'est pas α-standard il existe un ensemble fini β-standard contenant tous les ensembles α-standard.

Démonstration:

Soient α et β tels que $\neg(\beta$ α-standard) et soit la formule interne: $F(x,y) \equiv (x \in y \wedge y \text{ fini})$. On a : $\forall^{\alpha,\text{ fin}} x' \exists^{\beta} y \ \forall x \in x' (x \in y \wedge y \text{ fini})$. En effet, pour chaque x' fini et α-standard, il suffit de prendre y = x', comme par hypothèse β n'est pas α-standard, il découle de $\mathcal{SR}_2$ que α est β-standard; donc, par $\mathcal{SR}_3$, on a que y est β-standard. On applique ensuite $(I\alpha;\beta;F)$, on obtient : $\exists^{\beta} y \ \forall^{\alpha} x \ (x \in y \wedge y \text{ fini})$, qui s'écrit aussi, $\exists^{\beta} y \ [\, y \text{ fini} \wedge \forall^{\alpha} x \ (x \in y)]$.

Corollaire:

Pour tous α et β avec β non α-standard, et tout ensemble X, il existe un ensemble fini β-standard ayant exactement les mêmes éléments α-standard que X.

Démonstration:

Soient α et β tels que β non α-standard, et soit X un ensemble quelconque. Si F est un ensemble fini contenant tous les ensembles α-standard, il est clair que l'ensemble $F_X = F \cap X$, est fini et contient les éléments α-standard de X et seulement ceux de X.

THEOREME 2 :

Soit X un ensemble. Alors, X est fini et α-standard si et seulement si tous ses éléments sont α-standard.

Démonstration:

Soit la formule $F(x,y) \equiv (\, x \neq y \ \wedge \ y \in X\,)$. Le membre de droite de l'équivalence $(I\alpha;.;F)$ est équivalent à :

$\exists y \in X\, (\neg\, (y\ \alpha\text{-standard}))$. En prenant la négation des membres extrêmes de $(I\alpha;.;F)$ on obtient: $\forall y \in X\, (\, y\ \alpha\text{-standard}\,) \Leftrightarrow \exists^{\alpha \text{ fin}} z\ \forall y\ \exists x \in z\ (y \notin X \vee x = y)$

$$\Leftrightarrow \exists^{\alpha \text{ fin}} z\ (X \subset z).$$

Si X est α-standard et fini, il suffit de prendre z = X pour voir que tous les éléments de X sont α-standard. Réciproquement, si tout élément de X est α-standard alors $z \in \mathcal{P}(z)$ pour un certain z α-standard et fini; mais si z est fini et α-standard, alors il en est de même pour $\mathcal{P}(z)$

donc, d'après ce qui vient d'être démontré, cela implique que tout élément de $\mathcal{P}(z)$ est α-standard. En particulier, X est α-standard comme de plus il est contenu dans un ensemble fini, il est également fini.

Remarques :

1- Il découle du théorème 1 que pour tout ensemble x, il existe un y qui n'est pas x-standard, il suffit de prendre un ensemble infini E contenant x, cet ensemble contiendra un élément non x-standard.

2- On obtient une théorie (RIST)' équivalente à RIST en remplaçant le principe d'idéalisation non contrôlée par l'axiome $\mathcal{SR}_4 : \forall x \exists y \neg(y \mathcal{SR} x)$. En effet, la remarque précédente exprime que $\mathcal{SR}_4$ est un théorème de RIST. Montrons que, réciproquement, si F(x,y) est une formule interne ayant x, y, comme variables libres et peut-être d'autres variables libres, et si $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k, \beta$ sont des ensembles fixés tels que β n'est pas $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k)$-standard, alors l'énoncé (1):

$[\forall^{\alpha_1, fin} z_1 \dots \forall^{\alpha_k, fin} z_k \exists y\ \forall x_1 \in z_1 \dots \forall x_k \in z_k F(x_1, \dots, x_k, y)] \Leftrightarrow \exists y\ \forall^{\alpha_1} x_1 \dots \forall^{\alpha_k} x_k\ F(x_1, \dots, x_k, y)$,

est un théorème de (RIST)'.

Supposons vérifié le premier membre de l'équivalence. Pour toute valeur des paramètres de F, il découle des axiomes $\mathcal{SR}_2$ et $\mathcal{SR}_3$ qu'il existe un γ tel que $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k$ et tous les paramètres de F soient γ-standard. Par $\mathcal{SR}_4$, on obtient un β tel que β ne soit pas γ-standard. On a $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k$ et tous les paramètres de F β-standard donc, par (T_β) on a:

$$[\forall^{\alpha_1, fin} z_1 \dots \forall^{\alpha_k, fin} z_k \exists y\ \forall x_1 \in z_1 \dots \forall x_k \in z_k F(x_1, \dots, x_k, y)] \Leftrightarrow$$
$$[\forall^{\alpha_1, fin} z_1 \dots \forall^{\alpha_k, fin} z_k \exists^{\beta} y\ \forall x_1 \in z_1 \dots \forall x_k \in z_k F(x_1, \dots, x_k, y)].$$

Il suffit d'apliquer I $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k; \beta; F)$ pour voir que le second membre de (1) est vérifié. Pour montrer l'implication converse, partons de l'énoncé : $\exists y\ \forall^{\alpha_1} x_1 \dots \forall^{\alpha_k} x_k\ F(x_1, \dots, x_k, y)$. Donnons nous un y tel que $\forall^{\alpha_1} x_1 \dots \forall^{\alpha_k} x_k\ F(x_1, \dots, x_k, y)$. Il existe un ensemble β tel que y soit β-standard et que β ne soit pas $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k)$-standard ni y-standard (c'est une conséquence de $\mathcal{SR}_2$ et $\mathcal{SR}_4$), on a donc $\exists^{\beta} y\ \forall^{\alpha_1} x_1 \dots \forall^{\alpha_k} x_k\ F(x_1, \dots, x_k, y)$ d'où l'on tire, en appliquant I $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k; \beta; F)$ de droite à gauche,

$\forall^{\alpha_1, \mathrm{fin}} z_1 \ldots \forall^{\alpha_k, \mathrm{fin}} z_k \exists^{\beta} y\ \forall x_1 \in z_1 \ldots \forall x_k \in z_k\ F(x_1,\ldots,x_k,y)$, qui implique

$\forall^{\alpha_1, \mathrm{fin}} z_1 \ldots \forall^{\alpha_k, \mathrm{fin}} z_k\ \exists y\ \forall x_1 \in z_1 \ldots \forall x_k \in z_k\ F(x_1,\ldots,x_k,y)$.

THEOREME 3 : (Théorème relatif de construction)

Si $A(v,w,..)$ est une formule α-externe alors:

(C_α) $\forall^\alpha X\ \forall^\alpha Y\ [\,(\forall^\alpha x \in X\ \exists^\alpha y \in Y\ A(x,y,..)) \Rightarrow \exists^\alpha f \in Y^X\ \forall^\alpha x \in X\ A(x,f(x),..)\,]$.

Démonstration:

Soit α un ensemble X et Y des ensembles α-standard et A(v,w) une formule α-externe. Si pour tout x dans X il existe un unique y α-standard dans Y tel que A(x,y) alors il suffit de prendre $f = st_\alpha \{(x,y) \in X \times Y \,/\, A(x,y)\}$. Dans le cas général, considérons la formule : $B(x,E) \equiv \forall^\alpha y \in E\ (\ y \in E \Leftrightarrow (y \in Y \wedge A(x,y))\ )$ puisque A(x,y) est une formule α-externe, il est clair qu'il en est de même de B(x,E). A tout x α-standard dans X on peut associer une partie α-standard, E_X, de Y telle que $B(x,E_X)$. L'ensemble B_X est nécessairement égal à $st_\alpha\{y \in Y \,/\, A(x,y)\}$ il est donc unique aussi, d'après la première partie de cette démonstration il existe une application α-standard F de X dans $\mathcal{P}(Y)$ telle que pour tout x t-standard, $F(x) = E_X$. Par hypothèse E_X est non vide donc, l'axiome du choix relativisé aux ensembles α-standard nous permet d'affirmer qu'il existe une application f, α-standard, de X dans Y telle que pour tout x α-standard de X $f(x) \in E_X$ et donc, telle que A(x,f(x)).

Le théorème précédent affirme que l'on a défini complètement une application α-standard dès que l'on a choisi l'image des éléments α-standard, cependant, la "procédure de choix" ne doit pas être trop externe.

Exemple:

Prenons pour X une partie finie de $\mathbb{N}$ contenant tous les entiers standard et prenons $Y = \mathbb{N}$. Alors, il n'existe aucune application f de X dans Y telle que f(n) = O si n est standard et f(n) = 1 si non . En effet, soit f une telle application et soit $E = \{ n \in X \,/\, f(n) = O \}$. E contient tous les entiers standard or, ceux-ci ne constituent pas un ensemble (Ceci se démontre comme l'énoncé analogue de IST) donc E contient un n_O non standard. On a donc $f(n_O) = 1$ ce qui contredit le fait que $n_0 \in E$.

Remarques:

1. Si X est α-standard et si F est un ensemble fini contenant tous les éléments α-standard de X alors $X = st_\alpha F \cap X$.

2. Si X est infini, l'ensemble F ci-dessus n'est pas α-standard car s'il en était ainsi on pourrait, en utilisant l'axiome de transfert , montrer que $X \subset F$ ce qui contredit le fait que X est infini.

3. Il découle du théorème 2 que si n et p sont deux entiers tels que $p < n$ alors, p est n-standard. Cela implique que si n n'est pas α-standard standard alors, les entiers α-standard sont tous inférieurs à n.

On voit en lisant les théorèmes 1 et 2 à quel point la définition mathématique dans ZFC du mot fini lui donne un sens différent de son sens intuitif.

On peut traduire la remarque 3 précédente en disant que l'ordre usuel dans $\mathbb{N}$ est compatible avec la standardicité. Nous allons montrer que la propriété d'existence d'un ordre compatible avec la standardicité est liée à la dénombrabilité de X. Plus précisément, nous dirons qu'un ordre $\preccurlyeq$ sur un ensemble X α-standard est **compatible avec la standardicité**, si, pour tout x tel que α x-standard, $y \preccurlyeq x$ implique y x-standard (Dans la cas où X est standard, il est clair que la condition α x-standard est superflue).

Nous énoncerons alors:

THEOREME 4 :

Si X est un ensemble α-standard, alors X est dénombrable si et seulement si il existe sur X un ordre total α-standard compatible avec la standardicité.

Démonstration:

Supposons X α-standard et dénombrable. Il existe alors une bijection α-standard φ de X sur $\mathbb{N}$. Soit l'ordre $\preccurlyeq$ sur X défini par $y \preccurlyeq x$ si et seulement si $\varphi(y) \leq \varphi(x)$. On a bien une relation α-standard, et l'ordre est total. Soient x et y deux éléments de X tels que α soit x-standard et $y \preccurlyeq x$; les conditions φ α-standard et α x-standard impliquent φ x-standard donc $\varphi(x)$ est x-standard; comme $\varphi(y) \leq \varphi(x)$ la remarque 3 nous dit que $\varphi(y)$ est $\varphi(x)$-standard, il est donc x-standard, l'application φ^{-1} étant x-standard (comme φ), on obtient que $y = \varphi^{-1}[\varphi(y)]$ est x-standard.

Réciproquement, supposons donné sur un ensemble X α-standard, un ordre total $\preccurlyeq$ α-standard compatible avec la standardicité. Soit F une partie finie de X telle que $X = st_\alpha F$. Pour tout $x \in X$, posons $X_x = \{y \in X / y \preccurlyeq x\}$, n_x = cardinal de X_x. Dans le cas où x est α-standard, tous les éléments de X_x sont α-standard donc, $X_x \subset F$. Puisque F est fini, il en est de même de X_x; n_x est donc un entier α-standard. On peut donc utiliser le théorème de constuction pour définir une application $\varphi : X \to \mathbb{N}$, en associant à tout élément x α-standard l'entier n_x ; on vérifie que φ est injective, X est donc dénombrable.

3- L'analyse dans RIST.

On peut utiliser le cadre de RIST pour faire de l'analyse toutefois, dans ce paragraphe, nous n'irons pas très loin dans les applications et certains théorèmes serons donnés sans démonstration. Les applications seront développées plus largement au paragraphe suivant dans une sous-théorie de RIST.

Voici quelques propriétés liant la standardicité d'un couple à celle de ses coordonnées.

PROPRIETES :

1- Pour tous ensembles a et b, a et b sont (a,b)-standard.

2- Pour tous a, b et c : si a et b sont c-standard alors (a,b) est c-standard.

3- Pour tous a, b et b' : si b est b'-standard alors (a,b) est (a,b')-standard.

Les propriétés 1 et 2 s'obtiennent immédiatement en revenant à la définition des couples et en utilisant le principe de transfert.

Démontrons la propriété 3. Soient a, b et b' avec b b'-standard. D'après $\mathcal{SR}_2$, on a :
b a-standard ou a b-standard.

- Si b a-standard puisque, par $\mathcal{SR}_1$, a est a-standard, la propriété 2 nous dit que (a,b) est a-standard. Comme a est (a,b')-standard, selon la propriété 1,il suffit d'appliquer $\mathcal{SR}_3$ pour voir que (a,b) est (a,b')-standard.

-Supposons que a est b-standard. On a alors :

[b b'-standard et b' (a,b')-standard (propriété 1)] implique b (a,b')-standard ($\mathcal{SR}_3$),

[a (a,b')-standard (propriété 1) et b (a,b')-standard] implique (a,b) (a,b')-standard (propriété 2).

A tout espace topologique $(X,\mathcal{O})$ t-standard, X étant l'ensemble sous jacent et $\mathcal{O}$ l'ensemble des ouverts, et à tout s tel que t est s-standard, on peut associer une **relation de proximité infinitésimale** $\overset{s}{\to}$ en posant, pour tous x et y dans X, $y \overset{s}{\to} x$ si et seulement si x est s-standard et, si tout ouvert U s-standard contenant x contient y. On notera $\mathcal{O}(x)$ l'ensemble des ouverts contenant x.

PROPRIETE 4 :

Si X est séparé et si s est tel que X s-standard alors,

$\forall x \in X \ \forall y \in X$ [$(y \neq x$ et $y \overset{s}{\to} x) \Rightarrow$ s y-standard].

Démonstration:

Supposons qu'il existe dans X des éléments x et y tels que $y \neq x$, $y \overset{s}{\to} x$ et s non y-standard . D'après l'axiome $\mathcal{SR}_2$ y est s-standard donc, en transférant au niveau s-standard la propriété de séparation on obtient qu'il existe un ouvert s-standard $U \in \mathcal{O}(x)$ tel que $y \notin U$. Cela contredit le fait que $y \overset{s}{\to} x$.

Corollaire:

$\forall x \in X \ \forall y \in X$ [$y \overset{s}{\to} x \Rightarrow$ x y-standard].

Démonstration :

Si x = y, il suffit d'appliquer $\mathcal{SR}_1$. Si $y \neq x$ on vient de voir que s est y-standard, comme par définition de la relation $\overset{s}{\to}$, on a x s-standard, la propriété x y-standard découle de $\mathcal{SR}_3$.

En adaptant la démonstration du théorème 2A du paragraphe II on obtient ,

THEOREME 5 :

Si X est t-standard alors:

$$X \text{ est séparé } \Leftrightarrow \forall^t (a,b) \in X \times X \ \forall x \in X \ \left((x\ {}^{t}\!\!\rightarrow a) \wedge (x\ {}^{t}\!\!\rightarrow b) \Rightarrow a = b \right).$$

Nous définirons sur X une relation binaire $\rightarrow$ en posant $y \rightarrow x$ si et seulement si $y\ {}^{(X,x)}\!\!\rightarrow x$. Nous dirons que $\rightarrow$ est la **relation générale de proximité infinitésimale** attachée à la topologie de X. (Nous écrirons d'une manière abrégée que $\rightarrow$ est la r. g.p.i. associée à la topologie de X).

Remarques :

1- $y \rightarrow x$ implique x y-standard.

2-Dans le cas où X est standard, si x et y sont deux éléments de X, $y \rightarrow x$ équivaut à $y\ {}^{x}\!\!\rightarrow x$. Cela vient du fait que si X est standard un ouvert est (X,x)-standard si et seulement si il est x-standard. En effet la propriété 1 précédente implique que x est (X,x) standard donc, U x-standard implique, par $\mathcal{S}\mathcal{R}_3$, que U est (X,x)-standard. Réciproquement, si U est (X,x)-standard, comme X est a-standard pour tout a il est x-standard, on a donc x x-standard et X x-standard, ce qui implique que (X,x) est x-standard d'après la propriété 2; on applique encore $\mathcal{S}\mathcal{R}_3$ et on obtient que U est (X,x)-standard.

PROPRIETE 5 :

La r.g.p.i. associée à une topologie séparée sur X est un ordre externe.

Démonstration:

Il est immédiat que la relation $\rightarrow$ est réflexive. Elle est aussi transitive, en effet si $z \rightarrow y$ et $y \rightarrow x$, cela équivaut à $z\ {}^{(X,y)}\!\!\rightarrow y$ et $y\ {}^{(X,x)}\!\!\rightarrow x$; Si un ouvert U (X,x)-standard contient x, alors il contient aussi y . D'après le corollaire de la propriété 4 x est y-standard donc, d'après, la propriété 3, (X,x) est (X,y)-standard et en appliquant $\mathcal{S}\mathcal{R}_3$, on obtient que U est (X,y)-standard.Puisque $z\ {}^{(X,y)}\!\!\rightarrow y$ et $y \in U$, on a $z \in U$. Ceci étant vrai pour tout ouvert U (X,x)-standard contenant x, on a donc $z\ {}^{(X,x)}\!\!\rightarrow x$, ce qui équivaut à $z \rightarrow x$.

Il reste à démontrer que la relation $\rightarrow$ est antisymétrique. Donnons nous deux éléments de X, x et y, tels que $x \rightarrow y$ et $y \rightarrow x$, cela équivaut à $x \overset{(X,y)}{\rightarrow} y$ et $y \overset{(X,x)}{\rightarrow} x$. Posons t = (X,x). D'après la propriété 1, x et X sont t-standard, d'après le corollaire de la propriété 4, $x \overset{(X,y)}{\rightarrow} y$ implique que y est x-standard donc, par $\mathcal{SR}_3$, on a que y est t-standard. On a donc :
X , x et y t-standard , avec $y \overset{t}{\rightarrow} x$ et $y \overset{t}{\rightarrow} y$. Il suffit d'appliquer le théorème 5 pour conclure que x = y.

On a défini les relations externes $\overset{t}{\rightarrow}$ et $\rightarrow$ au moyen des ouverts mais en retour on peut utiliser ces relations pour donner des caractérisations externes des ouverts. Nous aurons le théorème suivant dont la démonstration se fera en utilisant et en adaptant la démonstration du théorème 3A du chapitre II.

THEOREME 6 :

Si U est une partie X-standard de X et t un ensemble tel que X est t-standard, alors les conditions suivantes sont équivalentes:

i) *U est ouvert,*

ii) $\forall x \in U\ \forall y \in X \quad (y \overset{t}{\rightarrow} x \Rightarrow y \in U)$,

iii) $\forall x \in U\ \forall y \in X \quad (y \rightarrow x \Rightarrow y \in U)$.

En appliquant le théorème 6 au complémentaire de F on démontre:

THEOREME 7 :

Si F est une partie X-standard de X et t un ensemble tel que X est t-standard, alors les conditions suivantes sont équivalentes:

i) *F est fermé,*

ii) $\forall y \in F\ \forall y \in X \quad (y \overset{t}{\rightarrow} x \Rightarrow x \in F)$,

iii) $\forall y \in F\ \forall x \in X \quad (y \rightarrow x \Rightarrow x \in F)$.

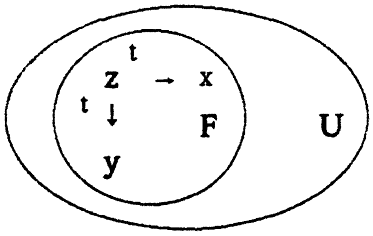
La propriété 5 admet la réciproque partielle suivante :

PROPRIETE 6 :

Si tout point de X admet un système fondamental de voisinages fermés, alors la r.g.p.i. associée à la topologie de X est un ordre si et seulement si la topologie de X est séparée.

<u>Démonstration:</u>

Plaçons nous sous les hypothèses du théorème, soient z, x, y et t = X tels que, $z \overset{t}{\to} x$ et $z \overset{t}{\to} y$. Il suffit de montrer que x = y et appliquer le théorème 5.



Montrons que $y \overset{t}{\to} x$. Pour tout $U \in \mathcal{O}(x)$ tel que U t-standard, il existe un voisinage t-standard fermé F de x contenu dans U; par définition de la relation $\overset{t}{\to}$, F étant un voisinage de x, on a $z \in F$. Il suffit d'appliquer le théorème 7 pour voir que $y \in F$ et donc, à U. On a donc, $y \overset{t}{\to} x$. Cela implique que $y \to x$ car, x et X étant t-standard il en est de même de (X,x), et tout ouvert (X,x)-standard est t-standard d'après $\mathcal{SR}_3$.

En permutant les rôles de x et de y on montre que $x \to y$. On termine en disant que les relations $y \to x$ et $x \to y$ impliquent que x = y car la relation $\to$ est antisymétrique.

Si $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ sont deux ensembles d'ouverts définissant des topologies τ et τ' X-standard sur un même ensemble X, et si $\to$ et $\to'$ sont les r.g.p.i. associées à τ et τ' respectivement on a alors :

THEOREME 8 :

(τ est plus fine que τ') $\Leftrightarrow \forall x, y \in X \ (y \to x \ \Rightarrow \ y \to' x)$.

<u>Démonstration:</u>

($\Leftarrow$) Soit $U \in \mathcal{O}'$. Pour tout $x \in U$ et tout $y \in X$ tels que $y \to x$, on a $y \to' x$ donc, $y \in U$ d'aprés le théorème 6 appliqué a la topologie τ'. En appliquant le même théorème à la topologie τ on obtient que $U \in \mathcal{O}$ donc, $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ et τ est plus fine que τ'.

($\Rightarrow$) Si τ est plus fine que τ' et si y et x sont deux éléments de X tels que $y \to x$, tout U (X,x)-standard de $\mathcal{O}$ contenant x, contient aussi y, cela est vrai en particulier si $U \in \mathcal{O}'$ puisque $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$. On a donc, $y \to' x$.

Après ce qui précède, il est extrêmement tentant de vouloir définir toute topologie en se donnant une relation générale de proximité infinitésimale, cette dernière étant éventuellement construite à partir de r.g.p.i associées à d'autres topologies . Supposons que $\to$ soit une relation binaire externe quelconque sur un ensemble X, peut-on définir les ouverts X-standard d'une topologie de X par la condition : U ouvert ssi ($x \in U$ et $y \to x$ impliquent $y \in U$) ? Dans les cas ou la réponse est affirmative, la r.g.p.i. associée à la topologie ainsi définie coïncide-t-elle avec la relation $\to$?

Dans les exemples ci-dessous, nous allons définir des relations externes sur des espaces topologiques, et nous regarderons de quelle manière ces relations peuvent être associées à des topologies.

Exemples :

Dans le but de simplifier les formulations, tous les espaces et toutes les topologies seront supposés standard, mais il est clair que cela ne nuit pas à la généralité.

1- Si $(X,\mathcal{O})$ et $(X',\mathcal{O}')$ sont deux espaces topologiques si $\to$ est la r.g.p.i associée à la topologie τ de X, et si $\to'$ la r.g.p.i associée à la topologie τ' de X', nous définirons une relation externe $\to''$ sur le produit cartésien $X \times X'$ en posant :

pour tous $(x,x'), (y,y') \in X \times X'$, $(y,y') \to'' (x,x')$ ssi $y \;{}^{(x,x')}\!\!\to x$ et $y' \;{}^{(x,x')}\!\!\to' x'$.

2- Si X est l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\to$ la r.g.p.i correspondant à la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ nous définirons deux relations externes dans X, $\to_s$ et $\to_u$ en posant, pour tous f et g dans X:

$$f \to_s g \text{ si et seulement si } \forall^{g} x \in \mathbb{R} \;\; f(x) \to g(x)\,,$$

$$f \to_u g \text{ si et seulement si } \forall x \in \mathbb{R} \;\; f(x) - g(x) \;{}^{g}\!\!\to 0.$$

3- Si X est un espace topologique standard avec sa r.g.p.i $\to$ et si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence standard sur X on définira une relation externe $\to'$ sur l'ensemble quotient

$X' = X/\mathcal{R}$ en posant pour toutes classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$, $\bar{x}$ et $\bar{y}$, d'éléments de X:

$$\bar{x} \to' \bar{y} \text{ si et seulement si il existe } u \in \bar{x} \text{ et } v \in \bar{y} \text{ tels que } u \to v.$$

Nous ne multiplierons pas les exemples. Si on regarde de plus près les relations externes définies plus haut, on voit que la relations $\to'$, $\to_s$ et $\to_u$ définies dans les exemples 1 et 2 sont des relations d'ordre. Le lecteur aura deviné que les relations $\to'$, $\to_s$ et $\to_u$ ne sont autres que les relations de proximité infinitésimales attachées respectivement, à la topologie produit sur $X \times X'$, à la topologie de la convergence ponctuelle et à la topologie de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Nous donnerons la démonstration pour ce qui concerne la relation $\to_s$.

Démonstration : Nous noterons par le même symbole , $\to$, r.g.p.i. asociées à la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ et à la topologie τ_s de la convergence ponctuelle sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Pour tout ensemble fini F et tout nombre réel positif ε, nous poserons $V(F, \varepsilon) = \{ h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \forall x \in F \ |h(x)| < \varepsilon \}$. Nous savons que pour tout $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, les ensembles de la forme $g + V(F,\varepsilon)$ forment un système fondamental de voisinages ouverts de g pour la topologie τ_s.

Soient f et $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ tels que $f \to g$. Montrons que l'on a $f(x) \to g(x)$ pour tout x g-standard. Donnons nous un nombre réel ε tel que $\varepsilon > 0$ et ε g(x)-standard. Comme , g et x sont g-standard, il en est de même de g(x) et, par $\mathcal{SR}_3$ de ε. On en déduit alors que le voisinage $g + V(\{x\},\varepsilon)$ de g, est g-standard. Comme $f \to g$ on a $f \in g + V(\{x\},\varepsilon)$, ce qui équivaut à $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$. Réciproquement, supposons que l'on a $f(x) \to g(x)$ pour tout x g-standard. Donnons nous un voisinage g-standard de g de la forme $g + V(F, \varepsilon)$ avec F fini, $\varepsilon > 0$, F et ε g-standard. Il découle du théorème 2 que tous les éléments de F sont g-standard donc, pour tout $x \in F$, on a $f(x) \to g(x)$. Comme g g(x)-standard et ε g-standard impliquent que ε est g(x)-standard, on a $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in F$ ce qui s'écrit aussi $f \in g + V(F,\varepsilon)$.

Nous remarquerons que si on se donne une relation $\to'$ externe ou interne sur un ensemble X, que nous suposerons standard, si on pose :

$$\mathcal{O}(\to') = \text{st}\,\{ U \subset X / \forall^{st} x \,\forall\, y \ ((y \to' x \wedge x \in U) \Rightarrow y \in U \},$$

alors, $\mathcal{O}(\to')$ satisfait aux axiomes définissant une famille d'ouverts pour une topologie standard. En effet,

$\mathcal{O}(\to')$ est standard et $\forall^{st}U,V \in \mathcal{O}(\to')\ \forall^{st} x\ \forall\ y\ ((y \to' x\ \wedge\ x \in U\cap V) \Rightarrow y \in U\cap V)$

donc $\forall^{st}U,V \in \mathcal{O}(\to')\ U\cap V \in \mathcal{O}(\to')$. Il suffit d'appliquer l'axiome de transfert pour finir de démontrer que $\mathcal{O}(\to')$ est stable pour les intersections finies. Montrons que $\mathcal{O}(\to')$ est stable pour la réunion. Grâce à (T), il suffit de montrer qu'il est stable pour les réunions standard. Soit donc $\mathcal{V} \in \mathcal{P}(\mathcal{O}(\to'))$ standard. Par (T) on obtient que la partie de X, $V = \bigcup_{U \in \mathcal{V}} U$ est un ensemble standard. Montrons que $V \in \mathcal{O}(\to')$. Pour tout x standard de V, il existe un $U \in \mathcal{V}$ tel que $x \in U$. Grâce à (T), on sait que l'on peut choisir U standard. Si $y \to' x$ et si U est choisi standard il découle de la définition de $\mathcal{O}(\to')$ que $y \in U$ et donc, que $y \in V$. On a donc démontré que $V \in \mathcal{O}(\to')$.

$\mathcal{O}(\to')$ étant un ensemble d'ouverts pour une topologie sur X on peut lui associer une r.g.p.i, $\to$. Il découle du théorème 6 que $\mathcal{O}(\to) = \mathcal{O}(\to')$. Cela n'implique pas que $\to$ et $\to'$ coïncident, toutefois on a le théorème suivant, dont la démonstration est immédiate :

THEOREME 9 :

$\forall^{st} x \in X\ \forall\ y \in X\ (\ y \to' x\ \Rightarrow\ y \to x\ )$.

Revenons à la relation $\to'$ définie dans l'exemple 3. Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence standard sur l'espace topologique standard X, si $\to$ est la r.g.p.i. associée à la toplogie de X, si $\to'$ est la relation binaire définie sur l'ensemble quotient $X' = X/\mathcal{R}$ par la condition $\bar{x} \to' \bar{y}$ si et seulement si il existe $u \in \bar{x}$ et $v \in \bar{y}$ tels que $u \to v$ on a alors :

THEOREME 10 :

Si $\bar{\mathcal{O}}$ est l'ensemble des ouverts pour la topologie quotient sur X', alors on a $\mathcal{O}(\to') = \bar{\mathcal{O}}$.

<u>*Démonstration :*</u>

Soit $s: X \to X' = X/\mathcal{R}$ la surjection canonique .Démontrons l'inclusion $\mathcal{O}(\to') \subset \bar{\mathcal{O}}$. Soit $U \in \mathcal{O}(\to')$, U standard, et $V = s^{-1}(U) = \bigcup_{\bar{u} \in U} \bar{u}$. Pour tous v, w tels que v standard, $v \in V$, et $w \to v$ on a $\bar{v} \in U$ et , par définition de la relation $\to'$, $\bar{w} \to' \bar{v}$. De la définition de $\mathcal{O}(\to')$ on tire que $\bar{w} \in U$ et donc $w \in V$. Cela montre que V est ouvert donc, par définition de la topologie quotient, $U \in \bar{\mathcal{O}}$.

Pour établir l'inclusion inverse $\bar{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}(\to')$ donnons nous un ouvert standard U pour la topologie quotient. Pour tout $\bar{x}$ standard dans U et tout $\bar{y}$ tels que $\bar{y} \to' \bar{x}$, il existe $u \in \bar{x}$ et $v \in \bar{y}$ tels que $v \to u$. $u \in \bar{x}$ implique $u \in s^{-1}(U)$, qui est ouvert par définition de la topologie quotient. On a donc, grâce au théorème 6, $v \in s^{-1}(U)$ ce qui équivaut à $\bar{v} = \bar{y} \in U$. On a donc, $U \in \mathcal{O}(\to')$.

On voit donc que, même si $\to'$ n'est pas la r.g.p.i. associée à la topologie quotient , elle peut servir à définir les ouverts standard de cette topologie.

Les théorèmes 11 et 12 se démontrent A5 et A10 du chapitre 2.

THEOREME 11 : (Critère externe de quasi-compacité)

L'espace topologique t-standard X est compact si et seulement si, pour tout $x \in X$, il existe $a \in X$ tel que $x \ {}^{t}\!\!\to a$.

Si on note de la même manière les relations de proximité infinitésimale dans X et Y on a:

THEOREME 12 : (Critère externe de continuité)

Si X et Y sont deux espaces topologiques t-standard et f une application t-standard de X dans Y et si t est s-standard alors f est continue au point x t-standard si et seulement si :

$\forall y \in X \ (y \ {}^{s}\!\!\to x \ \Rightarrow \ f(y) \ {}^{t}\!\!\to f(x))$.

Dans le cas ou X, Y et f sont standard on a plus simplement:

__Corollaire:__

L'application f de X dans Y est continue au point x si et seulement si :

$\forall y \in X \ (y \to x \ \Rightarrow \ f(y) \to f(x))$.

Nous avons maintenant tous les outils pour démontrer que, dans les cas ou X est un espace vectoriel topologique standard et F un sous espace vectoriel standard de X, si $\to'$ est la r.g.p.i. associée à la topologie quotient sur l'ensemble $X/_F$, alors on a :

THEOREME 13 :

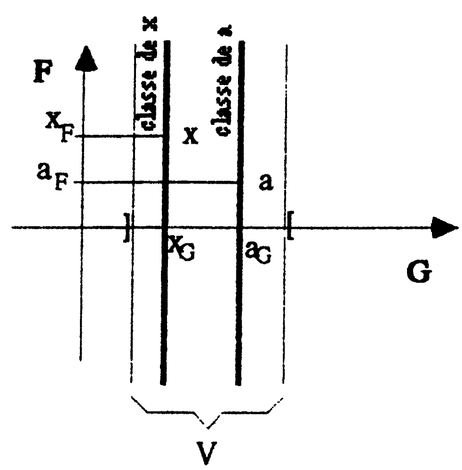
Si F admet un supplémentaire topologique, alors pour tous $\bar{x}$ et $\bar{a}$ dans $X/_F$:

$\bar{x} \to' \bar{a}$ si et seulement si il existe $x' \in \bar{x}$ et $a' \in \bar{a}$ tels que $x' \to a'$.

__Démonstration:__

On désignera encore respectivement par $\mathcal{O}$ et $\bar{\mathcal{O}}$ l' ensemble des ouverts pour la topologie de X et pour la topologie quotient.

Il est clair que la condition est suffisante car, par définition de la topologie quotient, la surjection canonique est continue. Nous appliquerons donc le théorème précédent à la surjection canonique et au point a'. Montrons que la condition est nécessaire. Pour cela donnons nous $\bar{x}$ et $\bar{a}$ dans $X/_F$ tels que $\bar{x} \to' \bar{a}$.



Si G est un supplémentaire topologique de F nous noterons $\mathcal{O}_G$ l'ensemble des ouverts pour la topologie de G et $\to_G$ la r.g.p.i. associée à $\mathcal{O}_G$. Si on décompose x et a dans X = G + F sous la forme $x = x_G + x_F$, $a = a_G + a_F$ avec x_G, $a_G \in$ G et x_F, $a_F \in$ F, alors a_G et a_F sont $\bar{a}$-standard. Soit V un ouvert a_G-standard de $\mathcal{O}_G$ contenant a_G. L'ensemble V + F est un ouvert saturé de X donc, son image $\bar{V}$ par la surjection canonique est un ouvert de $X/_F$. Comme $\bar{a} = \bar{a}_G$ et $a_G \in V$, on a $\bar{a} \in \bar{V}$, comme d'autre part on a $\bar{x} \to' \bar{a}$ et $\bar{V}$ $\bar{a}$-standard (car

[V a_G-standard et a_G $\bar{a}$-standard] $\Rightarrow$ V $\bar{a}$-standard, V $\bar{a}$-standard $\Rightarrow$ V $\bar{a}$-standard), alors $\bar{x} = \bar{x}_G \in \bar{V}$. On en déduit que $x_G = v + f$ avec $v \in V$ et $f \in F$. Comme x_G admet aussi la décomposition $x_G = x_G + O_F$ dans la somme directe $X = G \oplus F$ on a $v = x_G$. Donc $x_G \in V$. Ceci étant vrai pour tout voisinage V a_G-standard de a_G, on a $x_G \to_G a_G$, ce qui équivaut à $x_G \to a_G$ car la topologie de G est la trace sur G de la topologie de X.

Si (X, $\mathcal{E}$) est un espace uniforme t-standard ayant X comme ensemble sous-jacent et $\mathcal{E}$ comme ensemble d'entourages de la diagonale et si s est un ensemble tel que t est s-standard on peut définir une relation d'équivalence infinitésimale ${}^{s}\!\approx$ dans X en posant, pour tous x et y dans X, $x \;{}^{s}\!\approx\; y$ si et seulement si pour tout entourage s-standard, u, de la diagonale $(x,y) \in u$.

On peut alors obtenir les critères externes suivants:

Si on note par les mêmes symboles les relations d'équivalence infinitésimale dans les espaces X et Y on a :

THEOREME 14 :

Si X et Y sont t-standard et si f est une application t-standard de X dans Y alors, si t est s-standard, f est uniformément continue si et seulement si:

$$\forall x,y \in X \;(\; y \;{}^{s}\!\approx x \;\Rightarrow\; f(y) \;{}^{t}\!\approx f(x) \;).$$

THEOREME 15 :

Soit (f_n) une suite d'applications de X dans Y . Supposons que X, Y et (f_n) sont t-standard. et que t est s-standard alors (f_n) converge uniformément vers la fonction f si et seulement si:

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \forall x \in X \;(\; n \;{}^{t}\!\!\to \infty \;\Rightarrow\; f_n(x) \;{}^{t}\!\approx f(x) \;).$$

Ici, $n \;{}^{t}\!\!\to \infty$ signifie $1/n \;{}^{t}\!\!\to 0$ pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

Nous ne démontrerons pas ces théorèmes. Leur preuve est une adaptation facile de démonstrations analogues dans le chapitre II.

Il est clair que l'on aurait pu énoncer les théorème 12, 14 et 15 seulement pour s=t mais cela limitait sérieusement l'usage que l'on pouvait faire de ces critères comme on pourra le constater en étudiant l'exemple qui suit.

Exemple:

Soient X une partie de $\mathbb{R}$, et (f_n) une suite de fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction f de X dans $\mathbb{R}$. On se propose de démontrer en utilisant les critères externes que f est continue. Remarquons d'abord que $b \overset{t}{\to} a$ pour la topologie de $\mathbb{R}$ équivaut à $b \overset{t}{\simeq} a$ pour la structure uniforme de $\mathbb{R}$ et a t-standard.

Soient $x \in X$ et t tels que x, X, (f_n) soient t-standard. Le principe de transfert implique que f est aussi t-standard. Soit m tel que $m \overset{t}{\to} \infty$, on a alors f_m m-standard.
Pour tout $y \in X$ tel que $y \overset{m}{\simeq} x$ on a :
$f(y) \overset{t}{\simeq} f_m(y) \overset{m}{\simeq} f_m(x) \overset{t}{\simeq} f(x)$ d'aprés les théorèmes 14 et 15. On a donc
$y \overset{m}{\simeq} x \Rightarrow f(y) \overset{t}{\simeq} f(x)$. Il suffit d'appliquer le théorème 12 pour conclure.

4- La sous-théorie GISTn.

Dans la pratique de l'analyse nous n'utiliserons jamais qu'un nombre fini de degrés de standardicité, même si ce nombre n'est pas connu à l'avance. En ce qui nous concerne nous n'avons jamais dans nos applications utilisé plus de quatre degrés de standardicité. A cause de cela et aussi parce qu'il est est plus facile de travailler avec des degrés pré-sélectionnés qu'avec une notion de standardicité relative, nous développerons nos méthodes dans le cadre d'une sous-théorie de RIST, la théorie GISTn , l'indice n désignant le nombre de degrés de standardicité utilisé. La théorie GISTn comportera à la place du prédicat non défini $\mathcal{SR}$, n prédicats définis dans RIST de la manière suivante.

Soit α_1 un ensemble standard. On peut déduire de (I) que pour tout entier intuitif n aussi grand que l'on veut, on peut sélectionner des éléments : α_1, α_2,..., α_n tels que, $\neg(\alpha_2 \mathcal{SR} \alpha_1)$, $\neg(\alpha_3 \mathcal{SR} \alpha_2)$,........, $\neg(\alpha_n \mathcal{SR} \alpha_{n-1})$. On remarquera que, d'après $\mathcal{SR}2$, on a alors $\alpha_1 \mathcal{SR} \alpha_2$, $\alpha_2 \mathcal{SR} x_3$, ..., $\alpha_{n-1} \mathcal{SR} \alpha_n$.

Si p est un entier inférieur ou égal à n, et x un ensemble α_p-standard, nous dirons que x est **idéal d'ordre p** et nous écrirons id_p (x). Avec ce vocabulaire, les ensembles standard sont donc des ensembles du premier degré d'idéalité, ce qui peut correspondre à une certaine intuition. En vue de simplifier les écritures nous écrirons désormais, $\forall^1$, $\forall^2$.., $\exists^1$, $\exists^2$...à la place de $\forall^{\alpha_1}$, $\forall^{\alpha_2}$..,$\exists^{\alpha_1}$, $\exists^{\alpha_2}$..nous remarquerons donc que les symboles $\forall^1$,$\forall^2$..,$\exists^1$,$\exists^2$.. n'ont plus le même sens que dans le §1, les indices supérieurs ne sont plus des ensembles mais des marques. Pour numéroter les entiers intuitifs de 1 à n on aurait pu utiliser les notations $\forall'$, $\forall''$.., $\exists'$, $\exists''$...,. Nous nous permettrons cependant, pour comparer ces entiers d'utiliser, abusivement, des expressions de la forme p < q ou p ≤ q.

Nous dirons que les quantificateurs $\forall^p$, $\exists^p$ pour p ≤ n, sont des quantificateurs externes d'ordre p tandis que $\forall$ et $\exists$ sont des quantificateurs internes. Nous dirons parfois, pour des raisons de commodité, que les quantificateurs internes sont des quantificateurs externes d'ordre ∞.

Nous définirons de la manière habituelle les formules bien formées à partir des prédicats $\in$, id_1, id_2, ...et id_n. Parmi les formules bien formées , conformément avec ce qui précède, nous appellerons formules internes celles dans lesquelles n'intervient aucun des prédicats id_1, id_2, ...ou id_n. Pour tout entier p inférieur à n, les formules α_p-externes seront appelées plus simplement des formules <u>p-externes</u> , tandis que nous appellerons <u>strictement p-externes</u> les formules précédemment qualifiées de strictement α_p-externes.

Nous pouvons énoncer maintenant les axiomes de GISTn, ce sont les shémas de théorèmes de RIST suivants :

PRINCIPE DE GRADUATION :

Si p et q sont deux entiers inférieurs ou égaux à n et si p est inférieur à q on a:

(G_{pq}) $\qquad\qquad \forall x\, (id_p(x) \Rightarrow id_q(x))$.

PRINCIPE D'IDEALISATION :

Si F(x,y) est une formule <u>interne</u> avec $x_1,..,x_k$ et y comme variables libres et éventuellement d'autres variables, si $p_1 < p_2 <... p_k < q \leq n$ on a alors les principes d'idéalisation sur plusieurs niveaux suivants :

<u>Idéalisation contrôlée :</u>

$(I_{p_1,.., p_k; q})$:

$(\forall^{p_1,fin} z_1 ... \forall^{p_k,fin} z_k \exists^q y\ \forall x_1 \in z_1 ... \forall x_k \in z_k\ F(x_1,..,x_k,y)) \Leftrightarrow \exists^q y\ \forall^{p_1} x_1 ... \forall^{p_k} x_k\ F(x_1,...x_k,y)$.

<u>Idéalisation non contrôlée :</u>

$(I_{p_1,.., p_k;})$:

$(\forall^{p_1,fin} z_1 ... \forall^{p_k,fin} z_k \exists y\ \forall x_1 \in z_1 ... \forall x_k \in z_k\ F(x_1,..,x_k,y)) \Leftrightarrow \exists y\ \forall^{p_1} x_1 ... \forall^{p_k} x_k\ F(x_1,...,x_k,y)$.

PRINCIPE DE STANDARDISATION :

(S_p) Si $F(t...)$ est une formule p-externe *pouvant avoir d'autres variables libres que t alors,*

$$\forall^p y\ \exists^p z\ \forall^p t\ (t \in z \Leftrightarrow (t \in y \wedge F(t,..))).$$

PRINCIPE DE TRANSFERT :

Si p est un entier inférieur à n et $F(x,t_1, t_2,...,t_k)$ une formule interne avec $x,t_1, t_2,...,t_k$ comme seules variables libres alors:

$$(T_p) \qquad \forall^p t_1\ \forall^p t_2 .... \forall^p t_k\ (\forall^p x\, F(x,t_1, t_2,...,t_k) \Rightarrow \forall x\, F(x,t_1, t_2,...,t_k)).$$

Notations :

Pour tout référentiel y tel que $id_p(y)$, l'ensemble z dont le schéma d'axiomes (S_p) affirme l'existence sera noté $z = st_p\{ t \in y / F(t) \}$.

Si Y est une partie quelconque d'un ensemble Z tel que $id_p(Z)$, on notera plus simplement st_pY au lieu de $st_p \{ t \in Z : t \in Y \}$. On dira que $st_p Y$ est le p-standardisé de Y. Ceci n'entraine aucune possibilité d'ambiguité car, si Z_1 et Z_2 sont deux ensembles idéaux d'ordre p contenant Y, alors $st_p \{ t \in Z_1 : t \in Y \}$ et $st_p \{ t \in Z_2 : t \in Y \}$ sont deux ensembles idéaux d'ordre p ayant les mêmes éléments idéaux d'ordre p, ils sont donc égaux.

Remarques:

1- Il n'y a pas en général, équivalence entre les formules

$\exists^q y\ \forall^{p_1} x_1 ... \forall^{p_k} x_k\ F(x_1,...,x_k,y)$ et $\exists y\ \forall^{p_1} x_1 ... \forall^{p_k} x_k\ F(x_1,...,x_k,y)$ qui apparaissent aux membres de droite de $(I_{p_1,..., p_k; q})$ et $(I_{p_1,..., p_k;})$ respectivement.

Contre-exemple:

Le principe d'idéalisation nous permet de conclure à l'existence d'un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall^2 p \in \mathbb{N}\ (n > p)$. Soit donc un tel n et soit la formule :

$$F(x,y) \equiv (x \in \mathbb{N} \ \wedge \ y \in \mathbb{N} \ \wedge \ (x > y) \ \wedge \ (x \geq n)).$$

Il est clair que l'on a : $\exists y\ \forall^1 x\, F(x, y)$, il suffit de prendre $y = n$, mais que l'on n'a pas : $\exists^2 y\ \forall^1 x\, F(x, y)$.

2- Si la formule $F(x_1,...x_k,y)$ n'a pas d'autres variables que $x_1,...x_k$ et y et si toutes les constantes qui interviennent sont <u>idéales d'ordre q</u> avec $p_1 < p_2 <... p_k < q \leq n$, alors on a grâce à (T_q) :

$$\forall^{p_1,fin} z_1 ... \forall^{p_k,fin} z_k$$

$$[(\exists^q y \ \forall x_1 \in z_1 ... \forall x_k \in z_k F(x_1,...x_k,y)) \Leftrightarrow \exists y \ \forall x_1 \in z_1 ... \forall x_k \in z_k F(x_1,...x_k,y)]$$

donc : $(\exists^q y \ \forall^{p_1} x_1 ... \forall^{p_k} x_k F(x_1,...x_k,y)) \Leftrightarrow \exists y \ \forall^{p_1} x_1 ... \forall^{p_k} x_k F(x_1,...x_k,y)$.

Avant d'aborder le paragraphe 5, re-formulons dans GISTn le schéma de théorème 2. On obtient :

THEOREME 16 : (Principe de construction)

$(C_p; p)$: $\forall^p X \ \forall^p Y \, [(\forall^p x \in X \ \exists^p y \in Y F(x,y)) \Rightarrow \exists^p \bar{y} \in Y^X \ \forall^p x \in X \ F(x,\bar{y}(x)))$

5- La syntaxe de RIST- Algorithme de réduction- Transfert externe .

Soit la caractérisation dans IST de la compacité d'un espace topologique standard. Celle-ci s'écrit :

(1) : $\forall^{st} X \, (X \text{ compact} \Leftrightarrow \forall x \in X \ \exists^{st} a \in X \, (x \simeq a))$.

Il est tout à fait clair que, si on définit une relation " $^p\simeq$ " en substituant " id_p" à "st" dans la définition de la relation " $\simeq$ ", on obtient :

(2) : $\forall^p X \, (X \text{ compact} \Leftrightarrow \forall x \in X \ \exists^p a \in X \, (x \ {}^p\!\simeq a))$.

Traduite dans le langage de GISTn, (1) devient :

(1'): $\forall^1 X \, (X \text{ compact} \Leftrightarrow \forall x \in X \ \exists^1 a \in X \, (x \ {}^1\!\simeq a))$.

Nous dirons que l'on est passé de (1') à (2) par un **transfert externe**, bien qu'une signification différente soit attribuée à ce terme dans la littérature sur IST. Ceci se généralise à toute caractérisation dans IST d'une propriété interne.

Nous avons établi plus bas, que certaines propriétés internes se caractérisaient agréablement dans GISTn en utilisant plusieurs degré d'idéalité. Ainsi, nous avons établi que si $p < q$:

(3): $\forall^p X\ (X \text{ régulier} \Leftrightarrow \forall x \in X\ [(\ (\exists^p a \in X\ (x \overset{p}{\simeq} a)\ ) \wedge \exists^q b \in X\ (x \overset{q}{\simeq} b)\ ) \Rightarrow b \overset{p}{\simeq} a\ ])$.

En fait, nous remarquerons que le niveau des indices p et q dans une preuve de (3) n'est pas important, seule importe la relation $p < q$. la formule (3), peut donc se déduire par un changement d'indices de la caractérisation :

(4): $\forall^1 X\ (X \text{ régulier} \Leftrightarrow \forall x \in X\ [(\ (\exists^1 a \in X\ (x \overset{1}{\simeq} a)\ ) \wedge \exists^2 b \in X\ (x \overset{2}{\simeq} b)\ ) \Rightarrow b \overset{1}{\simeq} a\ ])$.

Nous appellerons également transfert externe le passage de (3) à (4).

Dans les deux exemples présentés, le transfert d'indice a été possible parce que, disposant d'une preuve des énoncés (3) et (4), nous avons pu faire un raisonnement métamathématique sur le rôle des niveaux d'idéalité dans cette preuve. Toutefois si on se donne une formule externe quelconque, il n'est pas du tout évident que l'on obtiendra une formule équivalente, par des changements d'indices respectant l'ordre des indices.

Ceci nous amènera à nous poser quelques questions. Supposons qu'un ensemble idéal d'ordre p soit défini dans GISTn en appliquant le principe de standardisation à une formule Φ, p-externe.

1- Cet ensemble, peut-il être caractérisé d'une manière interne? (Nous savons qu'un ensemble défini avec unicité par une formule interne à partir de paramètres id_p est id_p , cela découle de (T_p), mais nous n'avons pas dit que la réciproque était vraie.)

2- Peut-on alors opérer des transferts d'indices analogues à ceux que nous avons pu effectuer dans les exemples précédents ?

E.Nelson a donné une réponse positive dans [25], quand Φ est une formule de IST (Dans notre langage , une formule strictement 1-externe). Il a même construit un algorithme qui réduit toute formule externe de IST (à condition que les quantificateurs soient bornés par des ensembles standard) à une formule interne, ayant les mêmes variables libres, qui lui est équivalente pour toutes valeurs standard des paramètres. La seconde question n'a pas de sens dans IST

Tout au long de ce chapitre nous allons construire un algorithme qui réduit toute formule p-externe ayant ses quantificateurs bornés par des ensembles idéaux d'ordre p, a une formule interne équivalente. Nous aurons donc une généralisation à RIST, de l'algorithme de réduction de E.Nelson. Nous en déduirons un théorème général de transfert externe.

Dans la suite, nous dirons qu'une formule ayant ses quantificateurs bornés par des ensembles idéaux d'ordre p est **p-bornée**.

Pour commencer, nous allons voir comment le théorème 16, qui peut être considéré comme un principe de choix avec contrôle de l'idéalité de la fonction de choix, peut être généralisé. Enonçons d'abord un lemme.

LEMME :

Si F(t) est une formule strictement p-externe p-bornée, alors il existe une formule interne A(u,v,t) telle que: $F(t) \Leftrightarrow \forall^p u\ \exists^p v\ A(u,v,t)$*, les variables u et v évoluant dans un ensemble idéal d'ordre p.*

La démonstration du lemme n'est qu'une simple adaptation de la démonstration d'une propriété analogue énoncée par E.Nelson dans [26]. Il suffit de remplacer chaque occurrence du prédicat "st", chez Nelson, par le prédicat "id_p". Dans la suite, $\bar{y}$, $\bar{v}$ et $\bar{\bar{v}}$ désignerons des fonctions.

THEOREME 17 : (choix sur un niveau)

Si F est une formule <u>strictement p-externe</u> p-bornée on a :

<u>*Choix contrôlé :*</u>

$(C_{p;q})$ *si* $p < q \leq n$, $\forall^p x\ \exists^q y\ F(x,y) \Rightarrow (\exists^q \bar{y}\ \forall^p x\ F(x,\bar{y}(x)))$,

<u>*Choix non contrôlé :*</u>

$(C_{p;})$ *si* $p \leq n$, $\forall^p x\ \exists y\ F(x,y) \Rightarrow (\exists \bar{y}\ \forall^p x\ F(x,\bar{y}(x)))$.

(Ici x et y évoluent dans des domaines idéaux d'ordre p non désignés)

Démonstration

C'est une adaptation de la preuve du théorème 5 dans [26]

D'après le lemme, il existe une formule interne $A(u,v,x,y)$ telle que

$$F(x,y) \Leftrightarrow \forall^p u\, \exists^p v\, A(u,v,x,y).$$

Démontrons la première implication. Si on part du premier membre on a:

$$\begin{aligned}
\forall^p x\, \exists^q y\, F(x,y) &\Leftrightarrow \forall^p x\, \exists^q y\, \forall^p u\, \exists^p v\, A(u,v,x,y) \\
&\Leftrightarrow \forall^p x\, \exists^q y\, \exists^p \bar{v}\, \forall^p u\, A(u,\bar{v}(x,u),x,y) \quad (Cp;p) \\
&\Leftrightarrow \forall^p x\, \exists^p \bar{v}\, \exists^q y\, \forall^p u\, A(u,\bar{v}(x,u),x,y) \\
&\Leftrightarrow \forall^p x\, \exists^p \bar{v}\, \forall^{p,\,fin} u'\, \exists^q y\, \forall u \in u'\, A(u,\bar{v}(x,u),x,y) \quad (Ip;q) \\
&\Leftrightarrow \exists^p \bar{\bar{v}}\, \forall^p x\, \forall^{p\ fin} u'\, \exists^q y\, \forall u \in u'\, A(u,\bar{\bar{v}}(x,u),x,y) \quad (Cp;p)
\end{aligned}$$

(compte tenu du fait que la formule $\forall^{p,\,fin} u'\, \exists^q y\, \forall u \in u'\, A(u,\bar{\bar{v}}(x,u),x,y)$ est p-externe).

Si on part du second membre on obtient:

$$\begin{aligned}
&\exists^q \bar{y}\, \forall^p x\, F(x,\bar{y}(x)) \Leftrightarrow \\
&\exists^q \bar{y}\, \forall^p x\, \forall^p u\, \exists^p v\, A(u,v,x,\bar{y}(x)) \Leftrightarrow \quad (C_{p;p}) \\
&\exists^q \bar{y}\, \exists^p \bar{v}\, \forall^p x\, \forall^p u\, A(u,\bar{v}(x,u),x,\bar{y}(x)) \Leftrightarrow \\
&\exists^p \bar{v}\, \exists^q \bar{y}\, \forall^p x\, \forall^p u\, A(u,\bar{v}(x,u),x,\bar{y}(x)) \Leftrightarrow \quad (Ip;q) \\
&\exists^p \bar{v}\, \forall^{p,\,fin} x'\, \forall^{p,\,fin} u'\, \exists^q \bar{y}\, \forall x \in x'\, \forall u \in u'\, A(u,\bar{v}(x,u),x,\bar{y}(x)).
\end{aligned}$$

Il faut donc démontrer que:

$$\exists^p \bar{\bar{v}}\, \forall^p x\, \forall^{p,\,fin} u'\, \exists^q y\, \forall u \in u'\, A(u,\bar{\bar{v}}(x,u),x,y)$$

$$\Downarrow$$

$$\exists^p \bar{v}\, \forall^{p,\,fin} x'\, \forall^{p,\,fin} u'\, \exists^q \bar{y}\, \forall x \in x'\, \forall u \in u'\, A(u,\bar{v}(x,u),x,\bar{y}(x)).$$

Pour montrer l'implication, prenons $\bar{v} = \bar{\bar{v}}$. Pour u' fixé tel que $id_p(u')$ considérons la formule , $B(x,y) \equiv \forall u \in u'\, A(u,\bar{\bar{v}}(x,u),x,y)$.

Comme tous les éléments de x' sont idéaux d'ordre p (propriété des ensembles finis) le premier membre de l'implication implique: $\forall^q x \in x'\, \exists^q y\, B(x,y)$, d'où l'on déduit par (Cp;p), $\exists^q \bar{y}\, \forall^q x \in x'\, B(x,\bar{y}(x))$ et, du fait que tous les éléments de x' sont idéaux d'ordre q, ils sont même idéaux d'ordre p :

$\exists^q \bar{y}\ \forall x \in x'\ B(x,\bar{y}(x))$. Ceci achève notre preuve.

Corollaire:

Si F est une formule q-externe p-bornée on a :

$(C_{p;q})$ *si* $p < q \leq n$, $\forall^p x\ \exists^q y\ F(x,y) \Rightarrow \exists^q \bar{y}\ \forall^p x\ F(x,\bar{y}(x))$,

Démonstration:

Soient X et Y les domaines respectifs de x et y. Pour une valeur fixée des paramètres apparaissant dans F, F étant q-externe, l'ensemble

$Z = st_q\ \{(x,y) \in X \times Y\ /\ F(x,y)\ \}$ existe et :

$(\forall^p x\ \exists^q y\ F(x,y)) \Leftrightarrow (\forall^p x\ \exists^q y\ (x,y) \in Z) \Leftrightarrow (\exists^q \bar{y}\ \forall^p x\ (x,y) \in Z) \Leftrightarrow (\exists^q \bar{y}\ \forall^p x\ F(x,y))$.

THEOREME 18: (choix sur plusieurs niveaux)

Si F est q-externe p-bornée on a:

Choix contrôlé :

$(C_{p_1,..,p_k;\,q})$: *si* $p_1 < p_2 < p_k \leq q \leq n$,

$\forall^{p_1} x_1\ \forall^{p_2} x_2 ... \forall^{p_k} x_k\ \exists^q y\ F(x_1,..x_k,y) \Rightarrow$

$$\exists^q \bar{y}\ \forall^{p_1} x_1\ \forall^{p_2} x_2 ... \forall^{p_k} x_k\ \exists^q y\ F(x_1,..x_k,\bar{y}(x_1,...,x_k)).$$

Choix non contrôlé :

$(C_{p_1,..,p_k;\ })$: *si* $p_1 < p_2 < p_k < n$,

$\forall^{p_1} x_1\ \forall^{p_2} x_2 ... \forall^{p_k} x_k\ \exists y\ F(x_1,..x_k,y) \Rightarrow$

$$\exists \bar{y}\ \forall^{p_1} x_1\ \forall^{p_2} x_2 ... \forall^{p_k} x_k\ \exists^q y\ F(x_1,..x_k,\bar{y}(x_1,...,x_k)).$$

Démonstration:

Démontrons $(C_{p_1,..,p_k;\,q})$.

a) Cas ou $p_k < q$.

Nous savons, d'après le corollaire du théorème 16 que le théorème est vrai pour k=1. supposons que celui-ci soit vrai pour tout $k \leq m-1$, montrons qu'il reste vrai pour m. Partons de (1) : $\forall^{p_1} x_1 ... \forall^{p_m} x_m\ \exists^q y\ F(x_1,x_2,...x_m,y)$

On a la suite d'équivalences suivante :

$$(1)$$

$$\Updownarrow\ (C_{p_2,..p_m};\ q)$$

$$\forall^{p_1} x_1\ \exists^q \bar{y}\ \forall^{p_2} x_2 \ldots \forall^{p_m} x_m\ F(x_1,\ldots x_m,\bar{y}(x_1,x_2,\ldots x_m))$$

$$\Updownarrow\ (I_{p_2,..p_m};\ q)$$

$$\forall^{p_1} x_1\ \ \forall^{p_2,\mathrm{fin}} x'_2 \ldots \forall^{p_m,\mathrm{fin}} x'_m\ \exists^q \bar{y}\ \ \forall\, x_2 \in x'_2 \ldots \forall\, x_m \in x'_m\ \ F(x_1,\ldots x_m,\bar{y}(x_1,x_2,\ldots x_m))$$

$$\Updownarrow\ (P)$$

$$\forall^{p_2,\mathrm{fin}} x'_2 \ldots \forall^{p_m,\mathrm{fin}} x'_m\ \forall^{p_1} x_1\ \ \exists^q \bar{y}\ \ \forall\, x_2 \in x'_2 \ldots \forall\, x_m \in x'_m\ \ F(x_1,\ldots x_m,\bar{y}(x_1,x_2,\ldots x_m))$$

$$\Updownarrow\ (C_{p_1};\ q)$$

$$\forall^{p_2,\mathrm{fin}} x'_2 \ldots \forall^{p_m,\mathrm{fin}} x'_m\ \ \exists^q \bar{y}\ \forall^{p_1} x_1\ \forall\, x_2 \in x'_2 \ldots \forall\, x_m \in x'_m\ \ F(x_1,\ldots x_m,\bar{y}(x_1,x_2,\ldots x_m))$$

$$\Updownarrow\ (I_{p_1};\ q)$$

$$\forall^{p_2,\mathrm{fin}} x'_2 \ldots \forall^{p_m,\mathrm{fin}} x'_m \forall^{p_1,\mathrm{fin}} x'_1 \exists^q \bar{y} \forall x_1 \in x'_1 \forall x_2 \in x'_2 \ldots \forall x_m \in x'_m\ F(x_1,\ldots x_m,\bar{y}(x_1,x_2,\ldots x_m))$$

$$\Updownarrow\ (I_{p_1,\ p_2,..p_m};\ q)$$

$$\exists^q \bar{y}\ \ \forall^{p_1} x_1\ \forall^{p_2} x_2 \ldots \forall^{p_k} x_k\ \ F(x_1,..x_k,\bar{y}(x_1,\ldots,x_k)).$$

Ceci achève notre démonstration .

b) Cas ou $p_k = q$.

Partons de (2) : $\forall^{p_1} x_1\ \forall^{p_2} x_2 \ldots \forall^{p_k} x_k\ \ \exists^{p_k} y\ F(x_1,..x_k.y)$.

Par $(C_{p_k;\ p_k})$, (2) équivaut à :

$$\forall^{p_1} x_1 \ldots \forall^{p_{k-1}} x_{k-1}\ \exists^{p_k} \bar{y}\ \forall^{p_k} x_k\ F(x_1,..x_{k-1},\bar{y}(x_1,\ldots,x_k)).$$

La formule $\forall^{p_k} x_k\ F(x_1,..x_{k-1},\bar{y}(x_1,\ldots,x_k))$ étant p_k-externe, comme $p_{k-1} < p_k$, on est dans le cas du a). On a donc ;

$\exists^{p_k} \bar{\bar{y}}\ \forall^{p_1} x_1 .. \forall^{p_{k-1}} x_{k-1}\ (\forall^{p_k} x_k\ F(x_1,x_2,\ldots x_{k-1},\ \bar{\bar{y}}(x_1,x_2,\ldots x_{k-1})(x_1,x_2,\ldots x_k)))$, ce qui peut s'écrire plus simplement :

$$\exists^{p_k} \bar{\bar{y}}\ \forall^{p_1} x_1 .. \forall^{p_{k-1}} x_{k-1}\ \forall^{p_k} x_k\ F(x_1,x_2,\ldots x_{k-1},\ \bar{y}(x_1,x_2,\ldots x_k)) .$$

La preuve de $(C_{p_1,\ldots,p_k;}\ )$ est analogue à celle de $(C_{p_1,..,p_k;}\ q)$, dans le cas a).

Le théorème suivant est, "dans la pratique", une généralisation du principe d'idéalisation $(I_{p1,..,pk;\ q})$ initial :

THEOREME 19 : (principe d'idéalisation externe)

Si F est une formule q-externe p-bornée avec $x_1,..,x_k$ et y comme variables libres et éventuellement d'autres variables, si $p1 < p2 <\dots pk < q \le n$ alors :

$(I_{p1,..,pk;\ q})$:

$$(\forall^{p_1,fin} z_1 \dots \forall^{p_k,fin} z_k \exists^q y\ \forall x_1 \in z_1 \dots \forall x_k \in z_k\ F(x_1,\dots,x_k,y)) \Leftrightarrow \exists^q y\ \forall^{p_1} x_1 \dots \forall^{p_k} x_k\ F(x_1,\dots,x_k,y)).$$

Démonstration:

Soient $X_1,\dots X_k$, et Y les domaines respectifs de $x_1,..,x_k$ et y. Pour une valeur fixée des paramètres apparaissant dans F, F étant q-externe, l'ensemble

$Z = st_q \{ (x_1,\dots,x_k,y) \in X_1 \times \dots X_k \times Y / F(x_1,\dots,x_k,y) \}$ existe et :

$(\forall^{p_1,\ fin} x_1' \subset X_1 \dots \forall^{p_k,\ fin} x_k' \subset X_k\ \exists^q y \in Y\ \forall x \in x_1' \dots \forall x \in x_1'\ F(x_1,\dots,x_k,y)) \Leftrightarrow$

$(\forall^{p_1,\ fin} x_1' \subset X_1 \dots \forall^{p_k,\ fin} x_k' \subset X_k\ \exists^q y \in Y\ \forall x \in x_1' \dots \forall x \in x_1'\ (x_1,\dots,x_k,y) \in Z) \Leftrightarrow$

$(\exists^q y \in Y\ \forall^{p_1} x_1 \in X_1 \dots \forall^{p_k} x_k \in X_k\ (x_1,\dots,x_k,y) \in Z) \Leftrightarrow$

$(\exists^q y \in Y\ \forall^{p_1} x_1 \in X_1 \dots \forall^{p_k} x_k \in X_k\ F(x_1 \dots x_k,y))$.

Remarques :

1- Si nous avons présenté ce théorème comme une généralisation du principe $(I_{p1,\dots,\ pk;\ q})$ initial, bien que l'hypothèse "F p-bornée" soit une restriction, c'est que celle-ci n'est pas très limitative; dans la pratique de l'analyse, tous les objets utilisés sont éléments d'ensembles standard. Par contre, la possibilité d'appliquer l'idéalisation à une famille de formules externes, est une extension significative.

2- On peut certainement, en s'inspirant de ce qui a déjà été fait dans IST, appliquer le principe d'idéalisation à une classe plus large de formules. Nous nous en abstiendrons dans ce travail.

Nous avons maintenant en main les règles à partir desquelles nous pourrons construire notre algorithme. Ce sont les règles (T_p), $(I_{p1,\dots,\ pk;\ q})$, $(I_{p1,\dots,\ pk;})$, $(C_{p1,\dots,\ pk;\ q})$,

$(C_{p_1,..,\ p_k};)$, ainsi que la règle, que nous noterons (P), qui permet de commuter deux quantificateurs existentiels ou deux quantificateurs universels, que ceux-ci soient internes ou externes.

Dans ce qui suit nous dirons qu'une formule est sous forme prénexe si elle est de la forme $F \equiv Q_1{}^{p_1}x_1\ Q_2{}^{p_2}x_2 \ldots Q_k{}^{p_k}x_k\ A(x_1,x_2,\ldots x_k)$, avec A interne, chaque Q_i étant un quantificateur et chaque p_i étant, soit un degré d'idéalité soit le symbole ∞. Les expressions $\forall^\infty$ et $\exists^\infty$ sont une autre écriture pour $\forall$ et $\exists$. Nous conviendrons, pour tout degré d'idéalité q, de poser $q < \infty$.

Nous observerons que, dans notre définition des formules sous forme prénexe, la formule A peut comporter des quantificateurs, il ne s'agit donc pas exactement de la définition usuelle.

Nous admettrons que toute formule de GISTn peut être réduite à une formule équivalente sous forme prénexe.

Soient $P = (p_1 \ldots p_r)$ et $Q = (q_1 \ldots q_s)$, les p_i et les q_j étant soit des degrés d'idéalité, soit ∞. On appellera $\forall^P\exists^Q$-formule, une formule qui s'écrit, sous une forme abrégée (on oublie les variables): $F \equiv \forall^{p_1} \ldots \forall^{p_r} \exists^{q_1} \ldots \exists^{q_s} A$, avec A interne, et on appellera $\exists^Q\forall^P$-formule, une formule de la forme : $F \equiv \exists^{q_1} \ldots \exists^{q_s} \forall^{p_1} \ldots \forall^{p_r} A$, avec A interne. Par extension, toute formule interne sera à la fois une $\forall^P\exists^Q$-formule et une $\exists^Q\forall^P$-formule pour tous P et Q.

THEOREME 20 :

Toute $\forall^P\exists^Q$-formule (resp. toute $\exists^Q\forall^P$-formule) p-externe et p-bornée peut être réduite au moyen d'un algorithme à une $\exists^Q\forall^P$-formule équivalente (resp. à une $\forall^P\exists^Q$-formule) également p-externe et p-bornée .

Démonstration :

Soit $F \equiv \forall^{p_1} \ldots \forall^{p_r} \exists^{q_1} \ldots \exists^{q_s} A$ une $\forall^P\exists^Q$-formule.

Première étape : On écrit les indices p_i d'une part et q_j d'autre part dans l'ordre croissant. Il suffit pour cela d'appliquer la règle (P).

Deuxième étape : On déplace les quantificateurs $\forall p_j$ en suivant le protocole suivant :

Si $p_r \leq q_1$:

On applique $(Cp_1,...,p_r; q_1)$ à la formule q_1-externe $\exists^{q_2}...\exists^{q_s} A$, on obtient :

$F \Leftrightarrow F_1 \equiv \exists^{q_1}\forall^{p_1}...\forall^{p_r} \exists^{q_2}...\exists^{q_s} A_1$, $\exists^{q_2}...\exists^{q_s} A_1$, A_1 étant une formule interne. On applique ensuite $(Cp_1,...,p_r; q_2)$ à la formule q_2-externe $\exists^{q_3}.....\exists^{q_s} A_1$, on obtient :

$F_1 \Leftrightarrow F_2 \equiv \exists^{q_1} \exists^{q_2} \forall^{p_1}...\forall^{p_r} \exists^{q_3}...\exists^{q_s} A_2$, A_2 étant une formule interne .... Au bout de s application du principe de choix on obtient :

$F_1 \Leftrightarrow F_2 .... \Leftrightarrow F_{s-1} \Leftrightarrow F_s \equiv \exists^{q_1}...\exists^{q_s} \forall^{p_1}...\forall^{p_r} A_s$, avec A_s interne.

Si $p_r > q_1$:

Soit u le plus petit indice tel que p_u soit supérieur à un q_j. Pour chaque k, soit j(k) le plus grand tel que $p_k > q_{j(k)}$.

a) on utilise dans l'ordre où ils sont énoncés les principes,

$(Iq_1,..,q_{j(r)}; p_r)$, $(Iq_1,..,q_{j(r-1)}; p_{r-1})$,...$(Iq_1,..,q_{j(u)}; p_u)$. On obtient alors une formule équivalente de la forme:

$$\forall^{p_1}...\forall^{p_{u-1}} \exists^{q_1}...\forall^{p_u} \exists^{q_{j(u)+1}}...\forall^{p_r}\exists^{q_{j(r)+1}}...\exists^{q_s} A_1,$$

avec A_1 interne si $u > 1$ et $p_r \leq q_s$. La tête de formule $\forall^{p_1}...\forall^{p_{u-1}}$ n'apparaitra que si $u > 1$, la queue de la formule $\exists^{q_{j(r)+1}}...\exists^{q_s} A_1$ sera réduite à A_1 si $p_r > q_s$.

b) On utilise les principes de choix pour regrouper derrière $\forall^{p_r}$, les quantificateurs universels qui le précèdent. On procède ainsi :

- on pousse le groupe de quantificateurs $\forall^{p_1}...\forall^{p_{u-1}}$, s'il existe, derrière $\forall^{p_u}$, en utilisant $(Cp_1,..,p_{u-1}; q_1)$,... $(Cp_1,..,p_{u-1}; q_{j(u)})$.
- on pousse le groupe de quantificateurs $\forall^{p_1}...\forall^{p_{u-1}} \forall^{p_u}$ derrière $\forall^{p_{u+1}}$, en utilisant $(Cp_1,..,p_u; q_{j(u)+1})$,... $(Cp_1,..,p_u; q_{j(u+1)})$, si nécessaire, (Si on n'a pas $j(u) = j(u+1)$, auquel cas les quantificateurs $\forall^{p_1}$, $\forall^{p_{u-1}}$, $\forall^{p_u}$, $\forall^{p_{u+1}}$ sont déjà regroupés) ....
- on pousse, si nécessaire, le groupe de quantificateurs $\forall^{p_1}...\forall^{p_{u-1}} \forall^{p_{u-1}}$ derrière $\forall^{p_r}$, en utilisant $(Cp_1,..,p_{r-1}; q_{j(r-1)+1})$,... $(Cp_1,..,p_{r-1}; q_{j(r)})$.

On arrive ainsi, en un nombre fini d'étapes, à une formule équivalente à F de la forme :
$\exists^{q_1}\ldots\exists^{q_s}\forall^{p_1}\ldots\ldots\forall^{p_r} A_1$ si $p_r > q_s$ auquel cas, la réduction est terminée, de la forme $\exists^{q_1}\ldots\exists^{q_{j(r)}}\forall^{p_1}\ldots\forall^{p_r}\exists^{q_{j(r)+1}}\ldots\exists^{q_s} A_1$, si $p_r \leq q_s$. Dans ce dernier cas on termine la réduction en utilisant $(C_{p_1,\ldots,p_r};\, q_{j(r)+1}),\ldots\ldots, (C_{p_1,\ldots,p_r};\, q_s)$.

Il est absolument necessaire de respecter la procédure indiquée pour opérer la conversion . En particulier, il est recommandé de ne pas être trop pressé de faire passer les quantificateurs universels à l'extrème droite.

Exemple: Soit une formule 1-bornée de la forme :

$\forall^1 \forall^3 \forall^7 \exists^2 \exists^5 A$, avec A- interne

<u>Mauvaise stratégie</u>

$\forall^1 \forall^3 \forall^7 \exists^2 \exists^5 A$

(1) $(I_{2,5;7})$

(2) $(I_{2;3})$

(3) $(C_{3;5})$ ← **Faute** ! En effet, on aboutit à $\forall^1 \exists^2 \exists^5 \forall^3 \forall^7 B$, on ne peut pas faire passer $\forall^1$ après $\exists^5$ (sinon après avoir fait marche arrière) car la formule $\forall^3 \forall^7 B$ n'est pas 5-externe.

<u>Bonne stratégie</u>

$\forall^1 \forall^3 \forall^7 \exists^2 \exists^5 A$

(1) $(I_{2,5;7})$

(2) $(I_{2;3})$

(3) $(C_{1;2})$ ← **On ne laisse pas trainer $\forall^1$!**

(4) $(C_{1,3;\,5})$. C'est terminé.

L'algorithme obtenu en remplaçant chaque occurrence de $\forall$ par $\exists$, et chaque occurrence de $\exists$ par $\forall$ dans l'algorithme précédent, permet de réduire toute $\forall^P\exists^Q$ en une $\exists^Q\forall^P$-formule.

THEOREME 21 :

Toute formule p-externe p-bornée peut être réduite, au moyen d'un algorithme, à une formule, $\forall^P\exists^Q$-formule équivalente , également p-externe et p-bornee.

<u>*Démonstration :*</u>

Soit F une formule p-externe.

Première étape:

On met F sous forme prénexe. Si F est interne, c'est terminé, sinon, on aura:

$$F \Leftrightarrow G \equiv Q_1{}^{p1}\, Q_2{}^{p2} \ldots Q_k{}^{pk}\, A, \text{ avec A interne. } k \geq 1.$$

Deuxième étape:

Le lemme nous dit que la formule strictement p_k-externe, $Q_k{}^{pk}$ A, équivaut à une formule de la forme, $\forall^{pk}\exists^{pk}$ B, avec B interne. On cherche ensuite le plus petit indice r tel que Q_{p_r} soit le quantificateur $\forall$. si r = 1, c'est fini. Si r > 1, on aura :

$G \Leftrightarrow Q_1{}^{p1} \ldots \exists^{pr-1}\, \forall^{pr} \ldots \forall^{pk}\, \exists^{pk}\, B$. En appliquant l'algorithme du théorème précédent à $\forall^{pr} \ldots \forall^{pk}\, \exists^{pk}\, B$ on obtient une formule équivalente à G de la forme

$$Q_1{}^{p1} \ldots \exists^{pk}\, \exists^{pr-1} \forall^{pr} \ldots \forall^{pk}\; B_1 \text{ avec } B_1 \text{ interne.}$$

On applique ensuite encore l'algorithme pour reduire la formule $\exists^{pk}\, \exists^{pr-1}\, \forall^{pr} \ldots \forall^{pk}\; B_1$. à une formule de la forme $\forall^{pr} \ldots \forall^{pk}\, \exists^{pk}\, \exists^{pr-1}\; B_2$. On a donc

$$G \Leftrightarrow G_1 \equiv Q_1{}^{p1} \ldots \forall^{pr} \ldots \forall^{pk}\, \exists^{pk}\, \exists^{pr-1}\; B_2 .$$

Troisième étape:

On applique ensuite à G_1, le même traitement qu'à G. En un nombre fini d'itération du procédé, on aboutit à une $\forall^P\exists^Q$-formule équivalente à F, pour un certain P et un certain Q.

On appelle formule **pré-réduite** toute formule de la forme

$F \equiv Q_1{}^{p1}\, Q_2{}^{p2} \ldots Q_k{}^{pm}\, A$, avec A interne telle que $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_m$.

THEOREME 22 :

Toute formule p-externe p-bornée peut être réduite, au moyen d'un algorithme, à une formule p-externe pré-réduite.

<u>*Démonstration:*</u>

Soit F une formule p-externe p-bornée.

Première étape:

On réduit F, au moyen de l'algorithme du théorème 21, a une $\forall^P\exists^Q$-formule équivalente qui, après avoir réordonné p_i et les q_j sera de la forme :

$G \equiv \forall^{p_1}...\forall^{p_r}\exists^{q_1}...\exists^{q_s}$ A, avec A interne, $p_1 < p_2 <...< p_r$, $q_1 < q_2 <...< q_s$.

Si $p_r \leq q_1$, c'est fini. Si $p_r > q_1$:

Deuxième étape:

On déplace le quantificateur $\forall^{p_r}$,

α) à la droite de $\exists^{q_s}$, à l'aide de $(I_{q_1,..,q_s};\ p_r)$ si $p_r > q_s$,

β) à la gauche de $\exists^{q_m}$, où m est le plus premier entier tel que $p_r \leq q_m$, à l'aide de $(I_{q_1,..,q_{m-1}};\ p_r)$ si $p_r \leq q_s$. Si $p_{r-1} \leq q_1$, c'est fini. Si $p_{r-1} > q_1$:

Troisième étape:

On déplace le quantificateur $\forall^{p_{r-1}}$,

α) à la droite de $\exists^{q_{s-1}}$, à l'aide de $(I_{q_1,..,q_s};\ p_r)$ si $p_{r-1} > q_{s-1}$,

β) à la gauche de $\exists^{q_u}$, où u est le plus premier entier tel que $p_{r-1} \leq q_u$, à l'aide de $(I_{q_1,..,q_{u-1}};\ p_{r-1})$ si $p_{r-1} \leq q_{s-1}$. Si $p_{r-2} \leq q_1$, c'est fini. Sinon :

Quatrième étape:

On réitère la troisième étape, en remplaçant successivement r et s par r-1 et s-1, r-2 et s-2 etc... jusqu'à ce que l'on ait une formule équivalente pré-réduite.

Corollaire 1:

Toute formule p-externe p-bornée, peut être réduite à l'aide d'un algorithme, pour toutes valeurs idéales d'ordre p des paramètres, à une formule interne équivalente.

Démonstration :

Soit F une formule p-externe. Si on applique l'algorithme du théorème 22, on aboutit à une formule équivalente à F de la forme

$\forall^{p_1} \ldots \forall^{p_r} \exists^{q_1} \ldots \exists^{q_s}$ A, avec A interne, $p \leq p_1 < p_2 < \ldots < p_r$, $q_1 < q_2 < \ldots < q_s$, avec toutes les constantes dans A idéales d'ordre p. Il suffit d'ajouter à l'algorithme précédent :

Cinquième étape:

On applique successivement (Tq_s), (Tq_{s-1}),... (Tq_1), (Tp_r), (Tp_{r-1}),... (Tp_1).

Remarques:

1- On peut préciser l'énoncé en remarquant que les étapes de l'algorithme sont indépendantes des valeurs idéales d'ordre p attribuées aux paramètres

2- L'algorithme décrit ci-dessus ne fait intervenir les principes de transfert que dans la dernière étape.

Le corollaire suivant permet d'appliquer le principe du choix contrôlé sur un seul niveau, à une classe de formules plus étendue que celle des théorèmes 17 et 18.

Corollaire 2 :

Si F est une formule p-externe p-bornée, si $p < q \leq n$ et si F n'utilise aucun des prédicats $id_{p+1},\ldots,id_{q-1}$ alors on a :

$(C_{p;\,q})$ $\quad \forall^p x\, \exists^q y\, F(x,y) \;\Rightarrow\; \exists^q \bar{y}\, \forall^p x\, F(x,\bar{y}(x))$.

Démonstration :

Soit F une formule satisfaisant aux hypothèses du corollaire 2, soit

$G \equiv Q_1{}^{p_1}\, Q_2{}^{p_2} \ldots Q_m{}^{p_m}$ A avec A interne, une formule pré-réduite équivalente à F. Plaçons nous dans le cas ou F n'est ni strictement p-externe ni q-externe, ces cas particuliers relèvent respectivement des théorèmes 16 et 17. On peut alors écrire:

$G \equiv Q_1{}^{p}\, Q_2{}^{p} \ldots Q_k{}^{p}\, Q_{k+1}{}^{p_{k+1}} \ldots Q_m{}^{p_m}$ A, avec $q \leq p_{k+1} \leq p_{k+2} \leq \ldots \leq p_m$.

Ecrivons G sous une forme non abrégée on a :

$G(x,y) \equiv Q_1{}^p x_1 \ldots Q_k{}^p x_k\, [Q_{k+1}{}^{p_{k+1}} x_{k+1} \ldots Q_m{}^{p_m} x_m\, A(x_1,x_2,\ldots x_k,x_{k+1},\ldots x_m ,x,y)]$.

Notons $X_1,X_2,\ldots X_m$, X et Y, les domaines respectifs (idéaux d'ordre p) de $x_1,x_2,\ldots x_m$, x et y .

Posons :

$S = st_q\{ \ (x_1,\ldots x_k,x,y) \in X_1 \times \ldots X_k \times X \times Y \,/\, Q_{k+1}{}^{p_{k+1}} x_{k+1} \ldots Q_m{}^{p_m} x_m\, A(x_1,\ldots x_m,x,y) \ \}$.

On a $\forall^p x\, \exists^q y\, F(x,y) \;\Leftrightarrow$

$\forall^p x\, \exists^q y\, G(x,y) \;\Leftrightarrow$

$\forall^p x\, \exists^q y\, Q_1{}^p x_1 \ldots Q_k{}^p x_k\, (x_1,\ldots x_k,x,y) \in S$.

Il suffit d'appliquer le théorème 17 à la formule strictement p-externe p-bornée,

$H(x,y) \equiv Q_1{}^p x_1 \ldots Q_k{}^p x_k\, (x_1,\ldots x_k,x,y) \in S$, on obtient :

$\exists^q \bar{y}\, \forall^p x\, H(x,\bar{y}(x))$ comme

$\exists^q \bar{y}\, \forall^p x\, Q_1{}^p x_1 \ldots Q_k{}^p x_k\, (x_1,\ldots x_k,\, x,\, \bar{y}(x)\,) \in S \;\Leftrightarrow$

$\exists^q \bar{y}\, \forall^p x\, Q_1{}^p x_1 \ldots Q_k{}^p x_k\, Q_{k+1}{}^{p_{k+1}} x_{k+1} \ldots Q_m{}^{p_m} x_m\, A(x_1,\ldots x_m,\, x,\, \bar{y}(x)\,) \;\Leftrightarrow$

$\exists^q \bar{y}\, \forall^p x\;\; F(x,\, \bar{y}(x)\,)$, la preuve est terminée.

THEOREME 23: (Transfert externe)

Soit F une formule p-externe p-bornée . Convenons que ∞ est un degré d'idéalité et notons chaque occurrence de $\forall$ ou $\exists$ dans F, respectivement par $\forall^\infty$ ou $\exists^\infty$. Si F fait intervenir les degrés d'idéalité $p_1,\ldots, p_m \in \{p, 2,\ldots, n, \infty\}$, pour tous $q_1,\ldots, q_m \in \{p, 2,\ldots, n, \infty\}$ tels que $p_i < p_j$ ssi $q_i < q_j$, la formule F' obtenue en remplaçant chaque p_j par q_i est équivalente à F.

<u>*Démonstration:*</u>

Soit F vérifiant les hypothèses du théorème. Soit G une formule équivalente à F de la forme

$G \equiv Q_1{}^{p_1} x_1\, Q_2{}^{p_2} x_2 \ldots\ldots Q_k{}^{p_k} x_k\, A(x_1,x_2,\ldots x_k)$, $A(x_1,x_2,\ldots x_k)$ étant une formule interne <u>sans quantificateurs</u> .

Si on fait fonctionner l'algorithme pour réduire G à une formule interne et si on remonte l'algorithme en remplaçant chaque p_j par q_j, on obtient :

$G \Leftrightarrow G' \equiv Q_1{}^{q_1} x_1\, Q_2{}^{q_2} x_2 \ldots\ldots Q_k{}^{q_k} x_k\, A(x_1,x_2,\ldots x_k)$. En passe ensuite de G' à F'en appliquant dans l'ordre inverse les règles qui ont conduit de F à G .

Applications:

1- Si on traduit dans notre langage la caractérisation externe dans IST de la compacité d'un espace topologique, celle-ci devient :

$\forall^1 X\ ({}^{\infty}(X \text{ compact}) \Leftrightarrow \forall^{\infty} x \in X\ \exists^1 a \in X\ (x \ {}^1\!\approx a))$, ${}^{\infty}(X \text{ compact})$ étant la formule obtenue en remplaçant les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, respectivement par $\forall^{\infty}$ et $\exists^{\infty}$. En appliquant le théorème 23, on obtient, en remplaçant les indices 1 et ∞ respectivement par des indices p et q tels que $p < q \leq \infty$:

$\forall^p X\ ({}^q(X \text{ compact}) \Leftrightarrow \forall^q x \in X\ \exists^p a \in X\ (x \ {}^p\!\approx a))$. Ici, ${}^q(X \text{ compact})$ est la formule obtenue en remplaçant les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, respectivement par $\forall^q$ et $\exists^q$. Comme, par (T_q), " ${}^q(X \text{ compact})$" équivaut à " X compact " on obtient la cartactérisation suivante :

$\forall^p X\ (X \text{ compact} \Leftrightarrow \forall^q x \in X\ \exists^p a \in X\ (x \ {}^p\!\approx a))$.

2- Si $h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on écrira ${}^p h = g$ si $id_p(g)$ et $f \ {}^p\!\approx g$ pour la topologie de la convergence simple. Soit l'ensemble $\mathscr{A}$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ défini par : (*)

$\mathscr{A} = st_1\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,/\, \forall^2 \tau \in \mathbb{R}\ (\exists^1 g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}\ {}^1f_\tau = g) \text{ et } (\exists^3 \sigma \in \mathbb{R}\ ({}^2f_\sigma = {}^1f_\tau \text{ et } {}^1f_{\sigma-\tau} = f))\}$, où , pour chaque s, f_s désigne la fonction $t \to f(t+s)$.

Il découle du principe de standardisation que cet ensemble est bien défini, du théorème 22, nous tirons que cet ensemble peut être caractérisé d'une manière interne, on peut même obtenir une telle caractérisation en faisant fonctionner l'algorithme, et du théorème 23, on peut tirer des caractérisations des éléments non standard de A . Par exemple, si $id_2(f)$, on a :

$f \in A \Leftrightarrow \forall^3 \tau \in \mathbb{R}\ ({}^2f_\tau \neq \# \text{ et } (\exists^4 \sigma \in g\ ({}^3f_\sigma = {}^2f_\tau \text{ et } {}^2f_{\sigma-\tau} = f))$, mais aussi:

$f \in A \Leftrightarrow \forall^3 \tau \in \mathbb{R}\ ({}^2f_\tau \neq \# \text{ et } (\exists \sigma \in g\ ({}^3f_\sigma = {}^2f_\tau \text{ et } {}^2f_{\sigma-\tau} = f))$.

On voit que la possibilité de réaliser des transferts externes augmente considérablement la puissance du principe de standardisation et rend beaucoup moins gênante l'impossibilité d'élargir aux formules externes le schéma de compréhension de ZFC.

En effet, plaçons nous dans le cas où Φ est une formule externe bornée, sans paramètres ou avec tous ses paramètres standard. Si on définit $Y = st_1\{x \in Z : \Phi(x)\}$, avec Z standard, alors tout x de Y , <u>standard ou non</u> peut être caractérisé, indirectement, au moyen de Φ. En effet, soit $x \in Z$, quelconque. Fixons un ensemble α, qui n'est pas forcément dans la liste, non limitative, des α_i ayant servi à la construction de GISTn, tel que x soit α-standard . Si necessaire élargissons GISTn en une théorie GISTm de telle sorte qu'il corresponde à α un niveau d'idéalité p dans GISTm, et que le nombre de degrés soit suffisant. Soit Φ' une formule construite à partir de Φ en remplaçant l'indice 1 par l'indice p, les autres indices étant modifiés de manière à respecter l'ordre des indices. On aura alors $x \in Y \Leftrightarrow (x \in Z$ et $\Phi'(x))$. Car le théorème 23 nous dit que la formule : $\forall^1 x \in Z\,(x \in Y \Leftrightarrow \Phi(x))$, équivaut à $\forall^p x \in Z\,(x \in Y \Leftrightarrow \Phi'(x))$.

(*) L'ensemble $\mathcal{A}$, qui sera étudié avec plus de détails dans le chapitre 3, est l'ensemble des fonctions presque-automorphes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Chapitre II - L'analyse dans GISTn

A/ Structures topologiques et relations de proximité infinitésimales

Selon la situation nous noterons $(X,\mathcal{O})$ ou $(X,\mathcal{T})$ un espace topologique ayant X comme ensemble sous-jacent. $\mathcal{O}$ désigne l'ensemble des ouverts, et $\mathcal{T}$, d'une manière plus vague la topologie sur X. Si a est un élément de X nous noterons:

$\mathcal{O}(a) = \{ U \in \mathcal{O} \,/\, a \in U \}$, $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.

Définition 1:

Si on a $id_p X$ si $x \in X$ et $a \in X$ nous dirons que x est <u>infiniment proche de a d'ordre p</u> si: $id_p(a)$ et $\forall^p U \in \mathcal{O}(a)\ (x \in U)$. Nous écrirons alors: $x \overset{p}{\rightarrow} a$ .On dira aussi que x est <u>presque-idéal dordre p</u>.

Remarques: La dernière condition équivaut à $\forall^p V \in \mathcal{V}(a)\ (x \in U)$, $id_p(x)$ équivaut à $x \overset{p}{\rightarrow} x$. La définition de la relation $\overset{p}{\rightarrow}$ utilise le prédicat id_p aussi, nous la soupçonnerons a priori d'être une relation externe . En fait si $id_p(a)$ et si on note $h_p(a) = \{ x \in X / x \overset{p}{\rightarrow} a \}$ alors $\overset{p}{\rightarrow}$ est interne si et seulement si $h_p(a)$ est un ensemble interne et on sait que cela ne se produit que dans le cas ou le filtre des voisinages de a est principal. Si la topologie est séparée, cela implique que a est un point isolé. Pour le démontrer il suffit d'adapter la preuve de W.A.Luxemburg dans [22] théorème 2.2.6.

1 - Propriétés des relations $\overset{p}{\rightarrow}$:

PROPRIETE 1 :

Si $q \geq p$ et $id_p(a)$ alors, $(x \overset{q}{\rightarrow} a \Rightarrow x \overset{p}{\rightarrow} a)$.

C'est une conséquence immédiate de la définition 1.

PROPRIETE 2 :

Si $q \geq p$: $(x \,{}^{q}\!\!\to y$ *et* $y \,{}^{p}\!\!\to a) \Rightarrow x \,{}^{p}\!\!\to a$.

<u>*Démonstration:*</u>

Soit $U \in \mathcal{O}(a)$ tel que $id_p\, U$. $y \,{}^{p}\!\!\to a \Rightarrow y \in U$ donc, $U \in \mathcal{O}(y)$ d'après (G_{pq}) on a $id_q\, U$ donc, puisque $x \,{}^{q}\!\!\to y$, $x \in U$.

PROPRIETE 3 :

Si $E \subset X$ *et si* $id_q\,(E)$ *avec* $q > p$ *, alors pour tout* $x \in X$ *on a :*

$$(\forall y \in E \;\; y \,{}^{p}\!\!\to x) \Leftrightarrow (\forall^{q} y \in E \;\; y \,{}^{p}\!\!\to x).$$

<u>*Démonstration:*</u>

$(\Rightarrow)$ C'est trivial. $(\Leftarrow)$ .Soient $x \in X$ et $U \in \mathcal{O}(x)$ tels que $id_p\,(x,U)$, grace au théorème de graduation nous avons $id_q(x,U)$. Donc, le théorème de transfert nous permet d'écrire,

$$[\, \forall^{q} y \;(y \in E \Rightarrow y \in U)\,] \Leftrightarrow [\, \forall y \;(y \in E \Rightarrow y \in U)\,].$$

L'équivalence étant vraie pour tout U idéal d'ordre p, la propriété est démontrée.

Dans la suite, nous abrègerons la formulation $(\forall y \in E \;\; y \,{}^{p}\!\!\to x)$ en écrivant : $E \,{}^{p}\!\!\to x$.

PROPRIETE 4 :

Si $E \subset X$ *et si* $id_q\,(E)$ *avec* $q > p$ *, alors pour tout* $x \in X$ *on a :*

$$(\exists y \in E \;\; y \,{}^{p}\!\!\to x) \Leftrightarrow (\exists^{q} y \in E \;\; y \,{}^{p}\!\!\to x) .$$

<u>*Démonstration:*</u>

L'énoncé $\exists y \in E \;\; y \,{}^{p}\!\!\to x$ est équivalent à $id_p(x) \wedge (\exists y \in E \;\; \forall^{p} U \in \mathcal{O}(x) \,(y \in U))$. De la deuxième remarque suivant l'énoncé des axiomes de $(GIST^{\circ})_n$ on tire l'équivalence:

$(\exists y \in E \;\; \forall^{p} U \in \mathcal{O}(x) \,(y \in U)) \Leftrightarrow (\exists^{q} y \in E \;\; \forall^{p} U \in \mathcal{O}(x) \,(y \in U))$. Comme le second membre de l'équivalence équivaut à $\exists^{q} y \in E \;\; y \,{}^{p}\!\!\to x$, cela achève la démonstration.

THEOREME 1 :

Si $a \in X$ et $id_p\,(X,a)$, alors il existe $U_0 \in \mathcal{O}(a)$ tel que $id_{p+1}(U_0)$ et $U_0 \overset{p}{\to} a$.

<u>Démonstration:</u>

On applique le théorème d'idéalisation à la formule:

$\Phi(U,V) \equiv (\, U \in \mathcal{O}(a) \wedge V \in \mathcal{O}(a) \wedge V \subset U\,)$.

2 - Caractérisations externes de propriétés topologiques élémentaires:

THEOREME 2 : *Si $id_p\, X$ alors:*

X est séparé $\Leftrightarrow$ $\forall^p\,(a,b) \in X \times X$ $\forall x \in X$ $((x \overset{p}{\to} a) \wedge (x \overset{p}{\to} b) \Rightarrow (a = b))$.

<u>Démonstration:</u>

($\Rightarrow$): Supposons X séparé si $\exists^p(a,b) \in X \times X$ $\exists x \in X$ $(\,(x \overset{p}{\to} a) \wedge (x \overset{p}{\to} b) \wedge (a \neq b)\,)$ alors, $\exists^p\, U \in \mathcal{O}(a)$ $\exists^p\, V \in \mathcal{O}(b)$ $(U \cap V = \emptyset)$ ors, $(x \overset{p}{\to} a \wedge x \overset{p}{\to} b) \Rightarrow x \in U \cap V$.
C'est une contradiction. ($\Leftarrow$) $\forall^p\,(a,b) \in X \times X$ tel que $a \neq b$ le théorème 1 nous fourni deux ouverts U et V appartenant respectivement à $\mathcal{O}(a)$ et $\mathcal{O}(b)$ et tels que $U \overset{p}{\to} a$ et $V \overset{p}{\to} a$ respectivement. Si $\forall x \in X$ $(\,(x \overset{p}{\to} a) \wedge (x \overset{p}{\to} b) \Rightarrow (a = b)\,)$ alors $U \cap V$ est vide car, si $U \cap V$ contenait un élément x on aurait $(x \overset{p}{\to} a) \wedge (x \overset{p}{\to} b)$ et en conséquence, $a = b$. Il suffit d'appliquer encore le théorème de transfert pour conclure.

A partir d'ici, toutes les topologies seront suposées séparées.

THEOREME 3 :

Si $A \subset X$, $a \in X$ et $id_p\,(X,A,a)$, si on note int A l'intérieur de A alors, pour $q > p$, les conditions suivantes sont équivalentes:

i) $a \in \text{int}\, A$.

ii) $\forall\ x \in X\ (x \overset{p}{\to} a \ \Rightarrow\ x \in A)$.

iii) $\forall^q\ x \in X\ (x \overset{p}{\to} a \ \Rightarrow\ x \in A)$.

<u>Démonstration:</u>

i) $\Rightarrow$ ii) : $a \in \text{int}\, A \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{O}(a)\ (U \subset A) \Leftrightarrow \exists^p\, U \in \mathcal{O}(a)\ (U \subset A)$. Par définition de la relation $\overset{p}{\to}$, si $x \overset{p}{\to} a$ on a $x \in U$ donc, $x \in A$. La preuve de ii) $\Rightarrow$ iii) est triviale.

iii) $\Rightarrow$ i) : Soit U_0, fourni par le théorème 1, tel que $U_0 \in \mathcal{O}(a)$, $id_{p+1}(U_0)$ et $U_0 \xrightarrow{p} a$. On déduit de iii) et du théorème de transfert que $U_0 \subset A$ donc, $a \in \text{int}\, A$.

En appliquant le théorème 3 à $A = X - B$ on démontre:

THEOREME 4 :

Si $B \subset X$, $a \in X$ et $id_p\,(X,B,a)$, si $\bar{B}$ désigne l'adhérence de B dans X alors, pour $q>p$, les conditions suivantes sont équivalentes:

i) $a \in \bar{B}$.

ii) $\exists\ x \in X\ (x \xrightarrow{p} a\ \ \wedge\ x \in B)$.

iii) $\exists^q\ x \in X\,(x \xrightarrow{p} a\ \ \wedge\ x \in B)$.

On a aussi:

THEOREME 5 :

Si $A \subset X$ et $id_p\,(X,A)$, pour tout $q > p$ les conditions suivantes sont équivalentes :

i) *A est quasi-compact.*

ii) $\forall x \in A\ \exists a \in A\ \ x \xrightarrow{p} a$.

iii) $\forall^q x \in A\ \exists a \in A\ \ x \xrightarrow{p} a$.

<u>Démonstration:</u>

i) $\Rightarrow$ ii): Supposons que $\exists\ \bar{x} \in A\ \ \forall^p\ a \in A\ \ \exists^p U_a \in \mathcal{O}(a)\ \ (\bar{x} \notin U_a)$. D'aprés le théorème de construction il existe une application $\mathbf{U}: A \longrightarrow \mathcal{O}$ telle que,

$\forall^p\ a \in A\ \ (\, a \in \mathbf{U}(a) \wedge \bar{x} \notin \mathbf{U}(a)\,)$. Cela implique (utiliser le théorème de transfert) que $\{\, U(x)\,\}_{x\in A}$ recouvre A. Comme A est compact et idéal d'ordre p il existe une partie finie F de A, que l'on peut choisir idéale d'ordre p grâce au théorème de transfert et telle que $\{\, \mathbf{U}(x)\,\}_{x\in F}$ recouvre A. On a donc $\bar{x} \in \mathbf{U}(x)$ pour un $a \in F$. Comme id_p F et F fini on a $id_p\,(a)$, c'est impossible d'aprés la construction de $\mathbf{U}$.

L'implication ii) $\Rightarrow$ iii) est triviale. Pour établit l'implication iii) $\Rightarrow$ i) supposons que A n'est pas compact. Il existe donc un recouvrement $\mathcal{R}$ de A par des ouverts dont on ne peut extraire aucun recouvrement fini . On peut supposer $id_p\, \mathcal{R}$ grâce au théorème de transfert.

Si on applique le théorème d'idéalisation à la formule ,

$F(U,x) \equiv ((U \in \mathcal{R}) \wedge (x \in A) \wedge (x \notin U))$ on obtient un élément $\bar{x}$ tel que $id_{p+1}(\bar{x})$, ce qui implique $id_q(\bar{x})$, qui n'est élément d'aucun élément de $\mathcal{R}$ idéal d'ordre p. Ceci implique que $\bar{x}$ n'est infiniment proche d'ordre p d'aucun élément de A idéal d'ordre p.

Remarque:

On peut démontrer les théorèmes 1 à 6 également de la manière suivante:

a) On écrit les théorèmes correspondant de IST, en remplaçant les formules de la forme st (x) par des formules du type $\exists^{st} y\ (y = x)$,

b) On remplace chaque occurence de l'indice supérieur "st" par un un indice 1,

c) On applique le théorème 23, de transfert externe, du chapitre 1 paragraphe 5.

Exemples :

1) Nous avons déjà démontré le théorème 5 par cette technique, dans les applications du théorème de transfert externe.

2) Démontrons le théorème 1.

a) On a le théorème de IST :

$\forall^{st} X\ \forall^{st} a \in X\ \exists U_0 \in \mathcal{O}(a)\ \forall x \in U_0\ x \simeq a.$

b) Dans GISTn, ce dernier énoncé s'écrit :

$\forall^1 X\ \forall^1 a \in X\ \exists U_0 \in \mathcal{O}(a)\ \forall x \in U_0\ x \overset{1}{\rightarrow} a$, que l'on peut aussi développer en :

$\forall^1 X\ \forall^1 a \in X\ \exists^\infty U_0 \in \mathcal{O}(a)\ \forall^\infty x \in U_0\ \forall^1 U \in \mathcal{O}(a)\ (x \in U).$

c) On remplace les indices 1 et ∞ par de indices p et q tels que $p < q$, on obtient le théorème :

$\forall^p X\ \forall^p a \in X\ \exists^q U_0 \in \mathcal{O}(a)\ \forall^q x \in U_0\ \forall^p U \in \mathcal{O}(a)\ (x \in U)$. Si on remarque que la sous-formule, $\forall^q x \in U_0\ \forall^p U \in \mathcal{O}(a)\ (x \in U)$, est équivalente, toujours grâce au transfert externe, à la formule, $\forall^\infty x \in U_0\ \forall^p U \in \mathcal{O}(a)\ (x \in U)$, on obtient après supression des indices ∞ et retour à la définition de $\overset{p}{\rightarrow}$, le théorème :

$\forall^p X\ \forall^p a \in X\ \exists^q U_0 \in \mathcal{O}(a)\ \forall x \in U_0\ x \overset{p}{\rightarrow} a.$

Les opérateurs de passage à l'ombre:

Si X est un espace séparé tel que id_p X, fixons un ensemble # tel que # $\notin$ X nous pouvons définir un opérateur " ${}^{p}.$ ", sur X $\cup$ {#} de la manière suivante. Si $x \in X$ nous poserons:

α) ${}^{p}x = a$ si $x \xrightarrow{p} a$,

β) ${}^{p}x = \#$ si $\forall a \in X \neg (x \xrightarrow{p} a)$. Nous poserons aussi:

γ) ${}^{p}\# = \#$.

Nous dirons que ${}^{p}x$ est l'ombre d'ordre p de x pour la topologie de X.

Notre définition de l'ombre diffère dans son esprit des définitions correspondantes que l'on peut trouver chez A.Robinson ou E.Nelson : nous nous donnons la liberté d'appliquer mécaniquement l'opérateur "${}^{p}.$" à tout élément, même s'il n'est pas presque-idéal d'ordre p. Nous aurons ainsi des formulations encore plus compactes :
la formulation ${}^{p}x = \#$ nous semble plus directe que l'énoncé $\forall a \in X \neg (x \xrightarrow{p} a)$.

Remarques:

1- $\forall x \in X$ ($id_p(x) \Leftrightarrow {}^{p}x = x$) .

2- On peut reformuler la propriété 3 en utilisant les opérateurs d'ombre. On aura, si id_p X et si $q \geq p$: $[({}^{q}x \in X) \wedge ({}^{p}({}^{q}x) \in X)] \Rightarrow {}^{p}({}^{q}x) = {}^{p}x$.

3- L'égalité ${}^{p}({}^{q}x) = {}^{p}x$ n'est pas toujours vérifiée si ${}^{q}x = \#$ ou ${}^{p}({}^{q}x) = \#$.
Nous trouverons dans III des exemples où ${}^{p}x = \#$ et ${}^{q}x \neq \#$, d'autres où ${}^{p}x \neq \#$ et ${}^{q}x = \#$ et un exemple dans lequel ${}^{q}x \neq \#$ tandis que ${}^{p}({}^{q}x) = \#$.

4- On voit que sous les hypothèses du théorème 4, on a A compact si et seulement si $\forall x (x \in A \Rightarrow {}^{p}x \in A)$, A relativement compact si et seulement si $\forall x (x \in A \Rightarrow {}^{p}x \in X)$

5- On peut parfois définir d'une manière plus astucieuse ${}^{p}x$ quand x n'est pas presque-idéal d'ordre p ainsi, si X est $\mathbb{R}$ avec sa topologie usuelle, on peut choisir un élément # infiniment grand d'ordre n et définir les ombres d'ordre $p \leq n$ par les seules conditions α) et β) ci-dessus;

la condition γ) sera automatiquement satisfaite .

THEOREME 6 :

Si $id_p\, X$ et si q est un entier quelconque, $q > p$, alors,

X est régulier $\Leftrightarrow$ $\forall x,y,z \in X \ \big((y \,{}^{p}\!\!\rightarrow x) \wedge (y \,{}^{q}\!\!\rightarrow z) \big) \Rightarrow (z \,{}^{p}\!\!\rightarrow x)$.

En termes plus imagés, X est régulier ssi étant donné le diagramme:

$$\begin{tikzcd} y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & x \\ z \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

, on peut le compléter par une flèche d'ordre p de z vers x.

<u>*Démonstration:*</u> ($\Rightarrow$) Toutes les constantes étant id_p la régularité de X peut s'énoncer, $\forall^p x \in X\ \forall^p U \in \mathcal{O}(x)\ \exists^{p \text{ fermé}} V_U \in \mathcal{V}(x)\ (V_U \subset U)$. Soit $U \in \mathcal{O}(x)$ tel que $id_p U$. Si le premier membre de l'équivalence est vérifié pour x, y et z , $id_p V_U$ et $y \,{}^{p}\!\!\rightarrow x$ impliquent que $y \in V_U$. Comme V_U est fermé, $id_q\, V_U$ et $y \,{}^{q}\!\!\rightarrow z$ impliquent que $z \in V_U$ et donc, $z \in U$. Ceci étant vrai pour tout U idéal d'ordre p on a bien $z \,{}^{p}\!\!\rightarrow x$.

($\Leftarrow$). Supposons vérifié le deuxième membre de l'équivalence. Soit $x \in X$ idéal d'ordre p et soit $U \in \mathcal{O}(x)$, idéal d'ordre p. Montrons qu'il existe un voisinage fermé de x contenu dans U. Pour cela, prenons $U_0 \in \mathcal{O}(x)$ tel que $id_{p+1}\, U_0$ et $U_0 \,{}^{p}\!\!\rightarrow x$. Montrons que $V = \overline{U}_0$ convient. Il est clair que V est un voisinage fermé de x. Pour voir qu'il est contenu dans U il suffit de lire le diagramme:

$$\begin{tikzcd} y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q=p+1"'] & x \\ z & \end{tikzcd}$$

On voit que $z \in V = \overline{U}_0 \Rightarrow \exists y \in U_0\ y \,{}^{q}\!\!\rightarrow z$. Par hypothèse cela implique $z \,{}^{p}\!\!\rightarrow x$ et, puisque U est un ouvert idéal d'ordre p, $z \in U$. On a donc $V \subset U$.

Remarques:

1-Si on a q>p, on a prouvé au cours de la démonstration précédente qu'un espace idéal dordre p est régulier si et seulement si id_q E et E $\overset{p}{\to}$ x impliquent $\bar{E} \overset{p}{\to}$ x.

2-On peut caractériser la régularité d'un espace idéal d'ordre p en utilisant les opérateurs d'ombre. On obtient : X régulier $\Leftrightarrow$ $\forall y \in X\,[({}^q y \in X) \wedge ({}^p y \in X)] \Rightarrow {}^p({}^q y) = {}^p y$.

On remarque que cette caractérisation n'utilise qu'un seul quantificateur.

THEOREME 7

Sous les mêmes hypothèses que pout le théorème 6 on a:

X est localement compact $\Leftrightarrow$ $\forall x,y \in X\,[\,y \overset{p}{\to} x \Rightarrow \exists z \in X\ (y \overset{q}{\to} z \wedge z \overset{p}{\to} x)\,]$.

<u>*Démonstration:*</u>

($\Rightarrow$) Supposons X localement compact.Soient x et y dans X tel que y $\overset{p}{\to}$ x.

$y \overset{p}{\to} x \Leftrightarrow \forall^p V \in \mathcal{V}(x)\ (y \in V) \Leftrightarrow \forall^{p,\text{compact}} V \in \mathcal{V}(x)\ (y \in V)$ (Car il existe un système fondamental de voisinage compact de x). Soit V un voisinage compact de x tel que id_p V. Il découle de la définition de la relation $\overset{p}{\to}$ que y $\in$ V.

Du théorème 4 on tire que $\exists z \in V\ (y \overset{q}{\to} z)$ et de la caractérisation externe de la séparation que z est indépendant du voisinage compact V. On a donc ,

$\forall^{p,\text{compact}} V \in \mathcal{V}(x)\ (z \in V)$ ce qui équivaut à $z \overset{p}{\to} x$.

($\Leftarrow$) Nous remarquerons tout d'abord que si $\forall x,y \in X\,[\,y \overset{p}{\to} x \Rightarrow \exists z \in X\ (y \overset{q}{\to} z \wedge z \overset{p}{\to} x)\,]$ alors, en vertu du théorème 6, X est régulier. Il suffit de prouver que si x est idéal d'ordre p alors x admet un voisinage compact. Pour cela donnons nous un voisinage U_0 de x tel que $id_q\, U_0$, q=p+1, $U_0 \overset{p}{\to}$ x. La régularité de X implique que $\bar{U}_0 \overset{p}{\to}$ x donc, pour tout y $\in \bar{U}_0$, y $\overset{p}{\to}$ x.On a donc, par hypothèse, un z tel que y $\overset{q}{\to}$ z. Il découle du théorème 3 que z $\in \bar{U}_0$. On déduit la compacité de $\bar{U}_0$ du théorème 4.

Remarques:

1- Si X est localement compact, ${}^p x = \# \Rightarrow {}^q x = \#$.

2- On peut caractériser la locale compacité à l'aide des opérataurs d'ombre par ;

X localement compact $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X\,({}^p x \in X \Rightarrow {}^p({}^q x) = {}^p x)$.

Nous résumerons, pour X séparé, les caractérisations externes données par les théorèmes 5, 6 et 7 , ainsi que la propriété A2 dans le tableau suivant avec id_p X et p < q:

X est :	**compact**	**régulier**	**localement compact**	**quelconque**
ssi de	$x \in X$	${}^px \in X,\ {}^qx \in X$	${}^px \in X$	${}^px \in X,\ {}^p({}^qx) \in X$
on peut déduire:	${}^px \in X$	${}^p({}^qx) = {}^px$	${}^p({}^qx) = {}^px$	${}^p({}^qx) = {}^px$

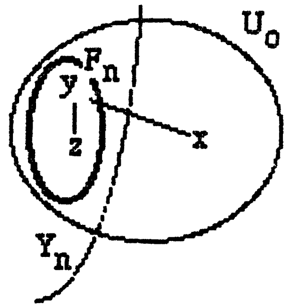
On voit aisément en lisant le tableau que tout espace localement compact est régulier . Il est un petit peu moins évident moins évident qu'un espace compact est localement compact. Démontrons cette dernière propiété: Supposons X compact et soit $x \in X$; puisque X est compact on a , d'aprés la première colonne, ${}^px \in X$, ${}^qx \in X$ et ${}^p({}^qx) \in X$; il suffit de lire la dernière colonne pour obtenir ${}^p({}^qx) = {}^px$.

THEOREME 8 : (Théorème de Baire)

Si X est localement compact et si $Y: \mathbb{N} \to \mathcal{P}(X)$ est une suite d'ouverts denses dans X alors $\bigcap_{n\in \mathbb{N}} Y_n$ est dense dans X.

<u>Démonstration:</u>

Il suffit de démontrer le théorème pour X et Y standard. Donnons nous un élément standard x de X. Soit U_0 idéal d'ordre deux tel que $U_0 \in \mathcal{O}(x)$ et $U_0 \to x$. Comme X est régulier (il est localement compact) et que les Y_n sont des ouverts denses dans X, il existe une suite décroissante $F = (F_n)$ de voisinages fermés telle que $F_0 \subset U_0 \cap Y_0, \ldots, F_{n+1} \subset F_n \cap Y_n \ldots$ Le principe de transfert nous permet de dire que l'on peut prendre F telle que id_2 (F). Donnons nous un entier n_2, $n_2 \overset{2}{\to} +\infty$, et un élément y de F_{n_2} . Comme X est localement compact, il existe un élément z tel que $y \overset{2}{\to} z$ et $z \overset{1}{\to} x$.



Pour tout entier n idéal d'ordre deux $F_{n2} \subset F_n \subset Y_n$ donc $y \in F_n$ et, comme F_n est fermé et et $id_2(F_n)$, $z \in F_n$. Comme $F_n \subset Y_n$ on a, $\forall^2 n \in \mathbb{N}\ (z \in F_n)$ d'ou l'on tire par transfert, $\forall n \in \mathbb{N}\ (z \in F_n)$ donc, $z \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Y_n$. Comme $z \overset{1}{\to} x$ cela montre que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ est dense dans X.

Remarque: Dans la démonstration précédente, nous avons utilisé la définition classique de la régularité des espaces topologiques (pour construire la suite F de voisinages fermés). Cela nous laisse partiellement insatisfait.

Problème: Trouver une preuve du théorème de Baire n'utilisant que les propriétés des relations $\overset{q}{\to}$ dans les espaces localement compacts.

3 - Ombres d'ordre p d'une partie interne.

Si Y est une partie interne quelconque de l'espace séparé $(X, \mathcal{T})$ idéal d'ordre p. De manière analogue à ce qui a été fait par Robinson dans [35] et traduit dans IST dans [21], nous définirons l'ombre d'ordre p de Y pour la topologie de X. C'est l'ensemble idéal d'ordre p, noté ${}^pY$, défini au moyen du principe de standardisation par :

$$\forall^p x \in X\,(x \in {}^pY \Leftrightarrow \exists y \in Y\ (x = {}^py)).$$

On vérifiera que, du fait que la formule $\exists y \in Y\ (x = {}^py)$ est une formule p-externe, cette définition est bien correcte. Il n'y a pas en général de relations d'inclusion entre les ombres d'ordre p d'un ensemble interne pour différents p.

Exemples:

$X = \mathbb{R}$ avec sa topologie usuelle, $p = 1$. Donnons nous deux infinitésimaux strictement positifs ε et δ tels que $id_2(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$, $\delta^2 \to 0$.

Soient des intervalles de $\mathbb{R}$, $A = [\,0 \;\; 1 - \varepsilon + \delta[$, $B = [0 \;\; 1 + \varepsilon + \delta[$, $C =]- \varepsilon \;\; 1 - \varepsilon[$ on a alors,

${}^1A = [\,0 \;\; 1]$ et ${}^2A = [\,0 \;\; 1 - \varepsilon]$ donc, ${}^2A$ est strictement inclus dans ${}^1A$;

${}^1B = [\,0 \;\; 1]$ et ${}^2A = [\,0 \;\; 1 + \varepsilon]$ donc, ${}^1B$ est strictement inclus dans ${}^2B$;

${}^1C = [\,0 \;\; 1]$ et ${}^2C = [- \varepsilon \;\; 1 - \varepsilon]$ donc, il n'y a aucune relation d'inclusion entre ${}^2C$ et ${}^1C$.

Les propriétés suivantes sont immédiates.

PROPRIETE 5 :

Si $id_q\,(Y)$ alors ${}^qY = \bar{Y}$.

COROLLAIRE :

Pour tout $q \geq p$ on a ${}^q({}^pY) = \overline{{}^qY}$.

PROPRIETE 6 :

Pour tout $q > p$ on a ${}^p({}^qY) \subset {}^pY$.

Démonstration:

Il suffit de montrer que tout élément idéal d'ordre p de ${}^p({}^qY)$ est élément de ${}^pY$. Soit x un tel élément. Par définition il existe un $y \in {}^qY$ tel que $y \overset{p}{\to} x$. D'aprés la propriété 4 du chapitre II, on sait que l'on peut choisir y idéal d'ordre q. On peut alors exprimer la propriété $y \in {}^qY$ en disant qu'il existe un $z \in Y$ tel que $z \overset{q}{\to} y$. On a donc le diagamme de proximité infinitésimale: $z \overset{q}{\to} y \overset{p}{\to} x$, d'où l'on tire $z \overset{p}{\to} x$. Comme $z \in Y$, cela prouve que $x \in {}^pY$ et achève la démonstration.

PROPRIETE 7 :

Si X est localement compact alors, pour tout $q > p$ on a ${}^p({}^qY) = {}^pY$.

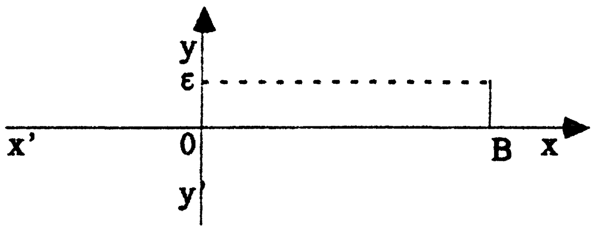
Démonstration:

Il suffit de montrer que tout élément idéal d'ordre p de ^{p}Y est élément de $^{p}(^{q}Y)$ pour établir l'inclusion $^{p}(^{q}Y) \supset {}^{p}Y$. L'inclusion inverse est la propriété 2. Soit donc x un élément de ^{p}Y idéal d'ordre p. Par définition il existe un $y \in Y$ tel que $y \stackrel{p}{\to} x$. D'aprés la caractérisation externe des espaces localement compacts il existe un $z \in X$ tel que $y \stackrel{q}{\to} z$ et $z \stackrel{p}{\to} x$. Les conditions $y \stackrel{q}{\to} z$ et $y \in A$ impliquent que $z \in {}^{q}Y$ donc: $x \in {}^{p}(^{q}Y)$ et l'inclusion est démontrée.

Dans les cas où X n'est pas localement compact, l'inclusion de la propriété 2 peut être stricte.

Contre-exemple:

Nous prendrons pour X l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient donnés deux réels B et ε tels que $B \stackrel{2}{\to} +\infty$, $\varepsilon \stackrel{1}{\to} 0$ et $id_2(\varepsilon)$. Soit la fonction f ci dessous,



définie par f(x) = 0 pour tout x différent de 0 ou de B, et $f(0) = f(B) = \varepsilon$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ nous noterons f_a la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui a tout réel t associe $f_a(t) = f(a+t)$. Nous prendrons

$Y = \{f_a\}_{a \in \mathbb{R}}$. Montrons que ^{2}Y est vide. En anticipant un peu la suite de ce texte, nous admettrons que $f \stackrel{2}{\to} g$ pour la topologie de la convergence uniforme équivaut à $f(t) - g(t) \stackrel{2}{\to} 0$ pour tout t, pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$. Soit $g \in X$ telle que $g \in {}^{2}Y$; il existe alors une fonction $f_a \in Y$ telle que $f_a \stackrel{2}{\to} g$, f_a ne prend que les valeurs idéales d'ordre deux : 0 ou ε. Pour tout t, $f_a(t) - g(t) \stackrel{2}{\to} 0$ donc $g = f_a$ ceci est une contradiction car f_a n'est pas idéale d'ordre deux. Pour s'en convaincre on peut remarquer que si f_a était idéal d'ordre deux alors il en serait de même de $f_a^{-1}\{\varepsilon\} = \{-a, B - a\}$ or, grâce au choix de B (infiniment grand d'ordre deux) on ne peut avoir simultanément $id_2(a)$ et $id_2(B-a)$. On a donc $^{2}Y = \emptyset$ et aussi $^{1}(^{2}Y) = \emptyset$. Il reste à établir que $^{1}Y \neq \emptyset$. c'est une évidence: la fonction nulle est dans ^{1}Y!

La démonstration du théorème suivant est identique, à l'indice q près, à celle que l'on peut trouver dans [25] p.1178 .

THEOREME 9 :

Pour toute partie Y de X et tout $q \geq p$, ${}^qY$ est fermé dans X.

Démonstration:

Soit x un élément de $\overline{{}^qY}$ tel que id_q (x). Pour tout ouvert $U \in \mathcal{O}(x)$ tel que id_q (U) , il existe un élément tel que id_q (y) et $y \in U \cap {}^qY$. Par définition de ${}^qY$, il existe un $z \in Y$ tel que $z \overset{q}{\rightarrow} y$; comme U est ouvert et idéal d'ordre q on a $z \in U$ on a donc démontré que $\forall^q U\in\mathcal{O}(x)\ \exists y\ (y \in U \cap Y)$ d'où l'on tire, en utilisant le fait qu'une intersection idéale d'ordre q finie d'ouvert est un ouvert idéal d'ordre q, $\forall^{q\ \mathrm{fin}}\ \mathcal{V} \subset \mathcal{O}(x)\ \exists y\ \ \forall U\in\mathcal{V}\ (y \in U \cap Y)$. En utilisant le principe d'idéalisation , on en déduit l'existence d'un y tel que $\forall^q U\in\mathcal{O}(x)\ (y \in U \cap Y)$. On a donc $y \overset{q}{\rightarrow} x$ et $y \in Y$ ce qui implique $x \in {}^qY$.

4 - Fonctions, limite simple et double, valeur d'adhérence.

Dans ce paragraphe $(X_1,\mathcal{O}_1)$, $(X_2,\mathcal{O}_2)$ et $(X_3,\mathcal{O}_3)$ sont trois espaces topologiques séparé idéaux d'ordre p. Nous utiliserons les mêmes symboles $\overset{q}{\rightarrow}$ pour désigner les relations de proximité infinitésimales dans chacun de ces trois espaces.

THEOREME 10 :

Si $a \in X_1$, $b \in X_2$, $f: X_1 \rightarrow X_2$, si id_p (a,b,f) alors si $r > q \geq p$ les conditions suivantes sont équivalentes.

i) $\lim_{x\rightarrow a} f(x) = b$.

ii) $\forall x\in X_2\ (\ x \overset{q}{\rightarrow} a \ \Rightarrow\ f(x) \overset{p}{\rightarrow} a\ )$.

iii) $\forall^r x\in X_2\ (\ x \overset{q}{\rightarrow} a \ \Rightarrow\ f(x) \overset{p}{\rightarrow} a\ )$.

Démonstration:

i) $\Rightarrow$ ii). Supposons que i) est vérifié et soit $x \in X_2$ tel que $x \overset{q}{\rightarrow} a$ .Soit $U \in \mathcal{O}_1(b)$ tel que id_p U. Par définition de la limite il existe un ouvert $V\in \mathcal{O}_2(a)$, que l'on peut supposer idéal d'ordre q, tel que $f(V) \subset U$. Puique $x \overset{q}{\rightarrow} a$, $x \in V$ donc $f(x) \in U$. Ceci étant vrai pour tout U idéal d'ordre p on a bien $f(x) \overset{p}{\rightarrow} a$. La preuve de ii) $\Rightarrow$ iii) est triviale. Pour établir l'implication iii) $\Rightarrow$ i) il suffit de prouver que ,

$\forall^p U \in \mathcal{O}_1(b)\ \exists V \in \mathcal{O}_2(a)\ (f(V) \subset U)$. Soit donc $U \in \mathcal{O}_1(b)$ idéal d'ordre p et Soit U_0 donné par le théorème 1 tel que $U_0 \overset{p}{\rightarrow} a$ .Si iii) est vérifié on a $\forall^r x \in U_0\ (f(x) \in U)$ donc, grace au théorème de transfert, $\forall\ x \in U_0\ (f(x) \in U)$. On voit donc qu'il suffit de prendre $V = U_0$.

Remarque :

La lecture de cette démonstration laisse au lecteur habitué à l'analyse dans IST, une impression de "déjà vu". En effet, nous avons dans IST :

(1) $\forall^{st} f, a, b\ (\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall x \in X_2\ (x \simeq a \Rightarrow f(x) \simeq a))$, et la démonstration bien connue de ce dernier énoncé dans IST, ressemble a celle du théorème 10. Aussi, pouvons-nous penser à utiliser le principe de transfert externe pour établir notre théorème. Pour cela, nous traduirons d'abord (1) dans le langage de $(GIST)_n$ ce qui donne :

(2) $\forall^1 f, a, b\ (\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall x \in X_2\ (x \overset{1}{\rightarrow} a \Rightarrow f(x) \overset{1}{\rightarrow} a))$.

Si on applique le transfert externe, sous la forme donnée au §5 du chapitre 1, avec $p_1 = 1$, $p_2 = \omega$ et $p'_1 = p$, $p'_2 = \omega$ ou r , on obtient les caractérisation (3) ou (4) ci-dessous :

(3) $\forall^p f, a, b\ (\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall x \in X_2\ (x \overset{p}{\rightarrow} a \Rightarrow f(x) \overset{p}{\rightarrow} a))$,

(4) $\forall^p f, a, b\ (\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall^r x \in X_2\ (x \overset{p}{\rightarrow} a \Rightarrow f(x) \overset{p}{\rightarrow} a))$.

Les deuxièmes membres de l'équivalence dans (3) et (4) sont des cas particulier des conditions ii) et iii) du théorème 4. Cependant, on peut avoir exactement i) et ii) au deuxième membre de la manière suivante . On remarque que pour des constantes standard :

$\forall x \in X_2\ (x \overset{1}{\rightarrow} a \Rightarrow f(x) \overset{1}{\rightarrow} a) \Leftrightarrow$

$\forall x \in X_2\ [(\forall^1 U \in \mathcal{O}(a)\ (x \in U)) \Rightarrow \forall^1 V \in \mathcal{O}(b)\ (f(x) \in V)] \Leftrightarrow$

$\forall x \in X_2\ \forall^1 V \in \mathcal{O}(b)\ \exists^1 U \in \mathcal{O}(a)\ [(x \in U) \Rightarrow (f(x) \in V)] \Leftrightarrow$

$\forall^1 V \in \mathcal{O}(b)\ \forall x \in X_2\ \exists^1 U \in \mathcal{O}(a)\ [(x \in U) \Rightarrow (f(x) \in V)] \Leftrightarrow \qquad (I_1)$

$\forall^1 V \in \mathcal{O}(b)\ \exists^{1fin} U' \subset \mathcal{O}(a)\ \forall x \in X_2\ \exists U \in U'\ [(x \in U) \Rightarrow (f(x) \in V)]$

On en tire par des transferts en cascade que, pour f, a et b idéaux d'ordre p :

$\forall x \in X_2 \ [(\forall^p U \in \mathcal{O}(a)\ (x \in U)) \Rightarrow \forall^p V \in \mathcal{O}(b)\ (f(x) \in V)]$ équivaut à

(5) $\forall^p V \in \mathcal{O}(b)\ \exists^{q\text{fin}} U' \subset \mathcal{O}(a)\ \forall^r x \in X_2\ \exists U \in U' [(x \in U) \Rightarrow (f(x) \in V)])$ et à

(6) $\forall^p V \in \mathcal{O}(b)\ \exists^{q\text{fin}} U' \subset \mathcal{O}(a)\ \forall x \in X_2\ \exists U \in U' [(x \in U) \Rightarrow (f(x) \in V)])$.

Comme (5) $\Leftrightarrow \forall^r x \in X_2 \ [(\forall^q U \in \mathcal{O}(a)\ (x \in U)) \Rightarrow \forall^p V \in \mathcal{O}(b)\ (f(x) \in V)]$ et

(6) $\Leftrightarrow \forall x \in X_2 \ [(\forall^q U \in \mathcal{O}(a)\ (x \in U)) \Rightarrow \forall^p V \in \mathcal{O}(b)\ (f(x) \in V)]$,

on retrouve, pour f, a et b idéaux d'ordre p :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} f(x) = b &\Leftrightarrow (\forall x \in X_2 \ (x \overset{p}{\to} a \Rightarrow f(x) \overset{p}{\to} a))\\ &\Leftrightarrow (\forall^r x \in X_2 \ (x \overset{q}{\to} a \Rightarrow f(x) \overset{p}{\to} a))\\ &\Leftrightarrow (\forall x \in X_2 \ (x \overset{q}{\to} a \Rightarrow f(x) \overset{p}{\to} a)).\end{aligned}$$

Si $D \subset X_2 \times X_3$, $f : D \to X_1$, $(a,b) \in \bar{D}$ et $c \in X_1$, on dit classiquement que $\lim_{x \to a} (\lim_{y \to b} f(x,y)) = c$ si, $\exists V \in \mathcal{V}(a)\ \forall x \in V\ \lim_{y \to b} f(x,y) = g(x)$ existe et $\lim_{x \to a} g(x) = c$. On a alors,

THEOREME 11 :

Si $id_p (f,a,b,c)$ et si $r > q \geq p$, si X_1 est régulier, les conditions suivantes sont équivalentes.

i) $\lim_{x \to a} (\lim_{y \to b} f(x,y)) = c$.

ii) $\forall y \in X_3 \forall z \in X_3 \forall^q x \in X_2\ [(x,y) \in D \wedge (x,z) \in D \wedge x \overset{p}{\to} a \wedge y \overset{q}{\to} b \wedge z \overset{q}{\to} b]$

$\Rightarrow [{}^q f(x,y) = {}^q f(x,z) \in X_1 \wedge f(x,y) \overset{p}{\to} c]$.

iii) $\forall^r y \in X_3 \forall^r z \in X_3 \forall^q x \in X_2\ [(x,y) \in D \wedge (x,z) \in D \wedge x \overset{p}{\to} a \wedge y \overset{q}{\to} b \wedge z \overset{q}{\to} b]$

$\Rightarrow [{}^q f(x,y) = {}^q f(x,z) \in X_1 \wedge f(x,y) \overset{p}{\to} c]$.

Démonstration:

Pour ne pas alourdir la démonstration nous supposerons que $D = X_2 \times X_3$. i) $\Rightarrow$ ii). Si i) est vérifié.Il existe un voisinage V de x, idéal d'ordre p, tel que $\lim_{y \to b} f(x,y) = g(x)$ existe pour tout $x \in V$. Grâce au théorème 8 on a, pour tous x, y et z tels que $id_q (x)$, $x \overset{p}{\to} a$, $y \overset{q}{\to} b$ et $z \overset{q}{\to} b$ d'une part, $f(x,y) \overset{q}{\to} g(x) \overset{p}{\to} c$ d'où l'on tire $f(x,y) \overset{p}{\to} c$; d'autre part $f(x,z) \overset{q}{\to} g(x)$. L'implication ii) $\Rightarrow$ iii) est triviale.Montrons que iii) $\Rightarrow$ i). Soit $U_O \in \mathcal{O}_2(a)$ tel que $id_q\ U_O$ et $U_O \overset{p}{\to} a$, fixons $y \overset{q}{\to} b$. Le théorème de construction nous dit qu'il existe une fonction g: $U_0 \to X_1$ telle que $\forall^q\ x \in U_0\ {}^q f(x,y) = g(x)$. La condition iii) implique que $\forall^q\ x \in U_0$ $\lim_{y\to b} f(x,y) = g(x)$, le théorème de transfert nous permet d'affirmer que cela est vrai pour tout x dans U_0. En appliquant à nouveau le théorème de transfert, on montre que :

$\exists^p V \in \mathcal{O}(a)\ \exists^p h: V \to X_1$ tels que , $\forall x \in V\ \ \lim_{y\to b} f(x,y) = h(x)$.

On a donc le diagramme de proximité infinitésimale suivant:

$$\begin{array}{l} f(x,y) \xrightarrow{q} h(x) \\ {\scriptstyle p}\downarrow \\ c \end{array} \quad , \quad \text{pour tout } x \xrightarrow{p} a \ \ (\text{donc, dans } V)$$

tel que id_q (x). Puisque X_1 est régulier, on peut compléter le diagramme avec une flèche d'ordre p de h(x) vers c. On a donc $\forall^q x \in X_2\ \ (x \xrightarrow{p} a \Rightarrow h(x) \xrightarrow{p} c)$, ce qui équivaut à $\lim_{x\to a} h(x) = c$.

Remarque:

La condition $\forall^q x\ \forall y\ \ [(\ x \xrightarrow{p} a\ \wedge y \xrightarrow{q} b) \Rightarrow f(x,y) \xrightarrow{p} c\ ]$ ne suffit pas à assurer l'existence de la double limite. En effet, soit la fonction f: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x \sin(1/y)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. On a $(\ x \xrightarrow{1} 0\ \wedge y \xrightarrow{2} 0) \Rightarrow f(x,y) \xrightarrow{1} 0$ puisque $\sin(1/y)$ est borné mais f(x,y) n'a de limite quand y tend vers O pour aucun $x \neq O$.

5 - Ombres et filets.

Les théorèmes 1 à 9 de ce chapitre sont des caractérisations externes de notions classiques. Ces caractérisations utilisent les relations de proximité infinitésimale ou les opérateurs de passage à l'ombre. Dans le cas ou les espaces topologiques sont séparés on peut n'utiliser que les passage à l'ombre. Nous connaissons des caractérisations classiques (internes) de ces mêmes notions à l'aide des filets et des limites de filets mais nous pensons qu'un point d'un espace topologique est un objet plus élémentaire qu'un filet et que l'opération de passage à l'ombre d'ordre q à un caractère plus mécanique que le passage à la limite. Aussi chaque fois que nous le pourrons, nous utiliserons les caractérisations en terme d'ombres, ou de relations de proximité infinitésimale. Nous allons étudier d'une manière plus approfondie le lien entre ombres et limites de filets.

Rappelons que, si $(X,\mathcal{O})$ est un espace topologique et J un ensemble dans lequel est définie une relation $\prec$ de préordre filtrant à droite, on appelle filet dans X toute application $\varphi: i \to x_i$ de J dans X. On note habituellement $\varphi = (x_i)_{i \in J}$.

Rappellons que,dans tout ce paragraphe, on a supposé $id_p\,(X,\mathcal{O})$. Donnons nous un entier $q \geq p$. Supposons que $(J,\prec)$ sont définis comme plus haut et que $id_p\,(J,\prec)$

Si $j \in J$, Nous dirons que j est infiniment grand d'ordre q si : $\forall^q i \in j\ (i \prec j)$. Le contexte excluant généralement toute ambiguité, nous écrirons alors encore : $i \overset{q}{\to} \infty$ en utilisant encore le même symbole $\overset{q}{\to}$. Nous rappellerons également que si $a \in X$, on dit que $(x_i)_{i \in J}$ converge vers a si:

$\forall U \in \mathcal{O}(a)\ \exists \underline{i} \in J\ \forall i \in J\ (\underline{i} \prec i) \Rightarrow x_i \in U$. On démontre, la preuve est analogue à celle du théorème 10, que pour $r > q \geq p$ on a, si $id_p\,((x_i)_{i \in J})$:

$$\begin{aligned} (x_i)_{i \in J} \text{ converge vers a} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall^r i \in J\ (i \overset{q}{\to} \infty \Rightarrow x_i \overset{p}{\to} a) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall i \in J\ (i \overset{q}{\to} \infty \Rightarrow x_i \overset{p}{\to} a). \end{aligned}$$

Soient $A \subset X$ et $a \in \bar{A}$ tels que $id_p\,(A,a)$. On sait que si $(x_i)_{i \in J}$ est un filet dans A ($x_i \in A$ pour tout i) idéal d'ordre p alors $i \overset{p}{\to} \infty \Rightarrow x_i \overset{p}{\to} a$. Il vient alors naturellement les questions suivantes:

Question A: Soit $a \in \bar{A}$ et soit $x \in A$ tel que $x \overset{p}{\to} a$; existe t-il un filet $(x_i)_{i \in J}$ dans A, idéal d'ordre p tel que $(x_i)_{i \in J}$ converge vers a et $x_i = x$ pour un certain i, $i \overset{p}{\to} \infty$?

Dans le cas ou X est un espace métrique, on sait que l'on peut, pour exprimer l'idée de limite, remplacer les filets par des suites aussi ,

Question B: Si X est un espace métrique, existe t-il une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans A, idéale d'ordre p tel que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a et $x_n = x$ pour un certain n, $n \overset{p}{\to} \infty$?

Montrons d'abord que la réponse à la question B est généralement: non.

Exemple :

Prenons $X = \mathbb{R}$ muni de sa topologie ordinaire, (p=1) et a = 0. Désignons par S_0 l'ensemble des suites numériques qui convergent vers 0. On a:

$\forall^{1 fin} (F_1, F_2) \subset S_0 \times \mathbb{N}^* \ \exists x \in \mathbb{R} \ \forall (u, n) \in (F_1, F_2) \ [x \notin \mathrm{Im}(u) \wedge |x| < 1/n]$ car la réunion des images des suites de F_1 est dénombrable tandis que l'intervalle $]-1/n \ \ 1/n[$ à la puissance du continu pour tout $n \neq 0$. Il suffit d'appliquer le théorème d'idéalisation pour voir que:

$\exists x \in \mathbb{R} \ \ \forall^1 (u, n) \in S_0 \times \mathbb{N}^* \ [x \notin \mathrm{Im}(u) \wedge |x| < 1/n]$ · On a donc $x \to 0$ et x n'est dans l'image d'aucune suite standard.

Pour la question A, si X est métrisable alors la réponse est affirmative.

THEOREME 12 :

Si X est métrisable, si A est une partie de X si $a \in \bar{A}$, si $x \in A$ et $x \overset{p}{\to} a$ alors, il existe un filet $\varphi = (x_i)_{i \in J}$ dans A tel que $id_p(\varphi)$ et φ converge vers a, et un indice $\underline{i} \in J$ tels que $\underline{i} \overset{p}{\to} \infty$ pour le préordre sur J et $x_{\underline{i}} = x$.

<u>Démonstration:</u>

Soit d une distance idéale d'ordre p définissant la topologie de X. Si le point a est isolé la preuve est triviale car, dans ce cas $a \in A$ et il suffit de prendre pour φ le filet constant qui ne prend que la valeur a. Si a n'est pas isolé, on a alors $a \in \overline{A - \{a\}}$. Prenons $J = A - \{a\}$ et soit la relation binaire $\prec$ sur J définie par $i \prec j$ si et seulement si $d(i,a) \geq d(j,a)$. Il est clair que la relation $\prec$ est réflexive et transitive a cause des propriétés définissant la distance, c'est donc une relation de préordre. Le préordre $\prec$ est filtrant à droite car, si i et j sont dans J, $\varepsilon = \min \{ d(i,a), d(j,a) \}$ est strictement positif, comme $a \in \overline{A - \{a\}}$ il existe $k \in J = A - \{a\}$ tel que $d(k,a) \leq \varepsilon$; cette inégalité implique que $i \prec k$ et $i \prec k$. On voit aussi que $x \overset{p}{\to} a$ pour la topologie de X équivaut à $x \overset{p}{\to} \infty$ pour le préordre sur J. En effet, pour tout $y \in J$, si $id_p(y)$ alors $id_p(d(y,a))$ donc, puisque $x \overset{p}{\to} a$ et $d(y,a) > 0$: $d(x,a) \leq d(y,a)$, ce qui équivaut à $y \prec x$. On a donc $x \overset{p}{\to} \infty$ pour le préordre sur J. Réciproquement, si $x \overset{p}{\to} \infty$ pour le préordre sur J et si ε est un réel strictement positif et si on choisit un $y \in J$ tel que $id_p(y)$ et $d(a,y) < \varepsilon$

alors, $y \prec x$ donc $d(a,x) \leq d(a,y) < \varepsilon$. Cela implique que $x \xrightarrow{p} a$. Il suffit pour conclure de voir que le filet $\varphi = (x_i)_{i \in J}$ tel que $x_i = i$ pour tout $i \in J$ convient.

Abordons le cas plus général ou la topologie sur X est engengrée par une famille $\mathcal{D}$ d'écarts. Nous pouvons toujours supposer que si $\mathcal{D}_1$ est une partie finie de $\mathcal{D}$ alors l'écart $D_1 = \operatorname{Max} \mathcal{D}_1$ est dans $\mathcal{D}$. Fixons nous une partie finie $\mathcal{D}_0$ de $\mathcal{D}$ telle que $id_{p+1}\ \mathcal{D}_0$ et contenant tous les écarts idéaux d'ordre p. Nous poserons alors $D = \operatorname{Max} \mathcal{D}_0$. Nous allons voir que nous pouvons exprimer beaucoup de propriétés en utilisant le seul écart D à la place de la famille infinie $\mathcal{D}$. Pour tous $d \in \mathcal{D}$, $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, nous poserons
$B_d(x, \varepsilon) = \{ y \in X / d(x,y) < \varepsilon \}$.

THEOREME 13 :

$(X,\mathcal{O})$ est séparé $\Leftrightarrow \forall^p x, y \in X \ (D(x,y) = 0 \Rightarrow x=y)$.

<u>*Démonstration:*</u>

$(\Rightarrow)$. Le théorème de transfert nous permet d'écrire que:

X séparé $\Leftrightarrow \forall^p x, y \in X \ (x \neq y \Rightarrow \exists^p d \in \mathcal{D}\ \exists^p \varepsilon > 0\ B_d(x,\varepsilon) \cap B_d(y,\varepsilon) = \emptyset)$.

Supposons donc X séparé et soient x et y dans X idéaux d'ordre p tels que $D(x,y) = O$,

$\forall^p\ d \in \mathcal{D}\ \ 0 \leq d(x,y) \leq D(x,y) = 0$; on aboutit à une contradiction.

$(\Leftarrow)$. Il suffit de montrer que, si pour tout couple de points idéaux d'ordre p et distincts on a $D(x,y) \neq 0$ alors ces points peuvent être séparés. C'est immédiat: en effet; si x et y sont de tels point si on pose $D(x,y) = \varepsilon$, on a $\varepsilon > 0$ et à cause de l'inégalité du triangle appliquée à l'écart D on a $B_D(x,\varepsilon/3) \cap B_D(y,\varepsilon/3) = \emptyset$.

On peut aussi exprimer la convergence dans X d'un filet idéal d'ordre p à l'aide du seul écart D.

THEOREME 14 :

Si $\varphi = (x_i)_{i \in J}$ est un filet danx X tel que $id_p\ \varphi$ alors,

$$\lim_{i \to \infty}(x_i) = x \Leftrightarrow \lim_{i \to \infty} D(x_i, x) = 0.$$

Démonstration:

($\Rightarrow$). Soit $\varphi = (x_i)_{i \in J}$ un filet danx X tel que $id_p\ \varphi$ et $\lim_{i \to \infty}(x_i) = x$ et $q = p+1$.

$i \overset{q}{\to} \infty \Rightarrow x_i \overset{q}{\to} x$ d'aprés la caractérisation externe de la limite d'un filet idéal d'ordre q mais il est facile de voir que $x_i \overset{q}{\to} x$ équivaut à $\forall^q\ d \in \mathscr{D}\ \ d(x_i,x) \overset{q}{\to} 0$ (Cette dernière flèche est attachée à la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$) on a donc en particulier,

$i \overset{q}{\to} \infty \Rightarrow D(x_i,x) \overset{q}{\to} 0$, ce qui équivaut à $\lim_{i \to \infty} D(x_i,x) = 0$.

($\Leftarrow$). Si $\lim_{i \to \infty} D(x_i,x) = 0$ alors , $i \overset{q}{\to} \infty \Rightarrow D(x_i,x) \overset{q}{\to} 0$ donc :

$i \overset{q}{\to} \infty \Rightarrow \forall^p\ d \in \mathscr{D}\ \ d(x_i,x) \le D(x_i,x) \overset{q}{\to} 0$ ce qui implique encore $i \overset{q}{\to} \infty \Rightarrow \forall^p\ d \in \mathscr{D}$ $d(x_i,x) \overset{p}{\to} 0$. Cette dernière formule peut aussi s'écrire: $i \overset{q}{\to} \infty \Rightarrow x_i \overset{p}{\to} x$ ce qui équivaut à $\lim_{i \to \infty}(x_i) = x$.

B - Structures uniformes:

Dans ce chapitre $(X,\mathscr{E})$ désignera une structure uniforme idéale d'ordre p sur l'ensemble X. $\mathscr{E}$ est l'ensemble des entourages de la diagonale. La donnée de $(X,\mathscr{E})$ permet de définir pour tout $q \ge p$ une relation externe $\overset{q}{\approx}$ en posant:

Définition 2:

Si x et y sont dans X nous dirons que x et y sont équivalents d'ordre q et nous écrirons $x \overset{q}{\approx} y$ *si:* $\forall^q\ u \in \mathscr{E}\ \ (x,y) \in u$.

On supposera X muni de la topologie, que nous supposerons séparée, associée à sa structure uniforme nous noterons encore $\overset{q}{\to}$ la relation de proximité infinitésimale d'ordre q pour cette topologie. On a alors les propriétés évidentes suivantes:

PROPRIETES :

8- Pour tous x et y dans X si $p \leq q \leq n$ alors: $x \overset{q}{\approx} y \Rightarrow (x \overset{p}{\approx} y)$

9- Pour chaque q, $\overset{q}{\approx}$ *est une relation d'équivalence.*

10- Pour tous x et y dans X : $x \overset{q}{\rightarrow} y \Leftrightarrow (x \overset{q}{\approx} y \wedge id_q(y)$*).*

11- Pour tous x, y et a dans X tels que $x \overset{q}{\rightarrow} a$ *on a :* $y \overset{q}{\rightarrow} a \Leftrightarrow x \overset{q}{\approx} y$.

Il découle trés simplement des propriétés que la topologie associée à une structure uniforme est régulière. En effet soient x, y et z tels que $x \overset{p}{\rightarrow} y$ et $x \overset{q}{\rightarrow} z$. Il découle de la propriété 10 que l'on a $x \overset{p}{\approx} y$ et $x \overset{q}{\approx} z$, de la propriété 8 que $x \overset{p}{\approx} z$, de la propriété 9 que $y \overset{p}{\approx} z$ et de la propriété 10 que $z \overset{p}{\rightarrow} y$.

Nous allons définir ci-dessous une nouvelle notion qui va nous permettre de restreindre encore l'usage des filtres ou des filets.

Définition 3:

Nous dirons que le point x de X est un point de Cauchy à l'ordre q ($q \geq p$) et nous écrirons $\mathfrak{C}_q(x)$ *si:* $\forall^q u \in \mathcal{E}\ \exists^q a \in X\ (x,a) \in u$.

Il est évident que l'on a toujours $^{\circ q}x \in X \Rightarrow \mathfrak{C}_q(x)$.

Nous noterons que, si l'on traduit dans GISTn la définition des points non uniformément innaccessible qui figure dans [21], on obtient la définition des points de Cauchy à l'ordre 1.

PROPRIETE 12 :

Si x est un point de Cauchy à l'ordre q et si $x \overset{q}{\approx} y$ *alors, y est de Cauchy à l'ordre q.*

<u>*Démonstration:*</u>

Soit x un point de Cauchy à l'ordre q et soit y tel que $x \overset{q}{\approx} y$, Soit $u \in \mathcal{E}$ idéal d'ordre q quelconque; il existe $w \in \mathcal{E}$ tel que $w^2 \subset u$ et id_q (w).

Par définition des points de Cauchy, il existe a tel que id_q (a) et $(x,a) \in w$, d'autre part,

$x \,{}^{q}\!\simeq y \Rightarrow (y,x) \in w$; comme $((y,x) \in w \ \wedge \ (x,a) \in w) \Rightarrow (y,a) \in w^2$, on a $(y,a) \in u$. donc, y est de Cauchy à l'ordre q.

Le théorème suivant établit une correspondance entre points de Cauchy et filets de Cauchy. Rappelons qu' un filet $(x_i)_{i \in I}$ est dit de Cauchy si I étant muni du préordre filtrant à droite, $\prec$, on a: $\forall u \in \mathcal{E}\ \exists i_o \in I\ \forall i \in I\ \forall j \in I\ [\ (i_o \prec i \ \wedge i_o \prec j) \Rightarrow (x_i, x_j) \in u\ ]$.

Le lecteur démontrera lui même le théorème suivant

THEOREME 15 :

Si $(x_i)_{i \in I}$ est un filet idéal d'ordre p, si $r > q \geq p$, les conditions suivantes sont équivalentes:

i) $(x_i)_{i \in I}$ *est un filet de Cauchy,*

ii) $\forall\, i \in I\ \forall\, j \in I\ (\, i \,{}^{q}\!\!\to \infty \ \wedge \ i \,{}^{q}\!\!\to \infty) \Rightarrow x_i \,{}^{p}\!\simeq x_j$,

iii) $\forall^r\, i \in I\ \forall^r\, j \in I\ (\, i \,{}^{q}\!\!\to \infty \ \wedge \ i \,{}^{q}\!\!\to \infty) \Rightarrow x_i \,{}^{p}\!\simeq x_j$

Le théorème suivant établit une correspondance entre points de Cauchy et filets de Cauchy.

THEOREME 16 :

Si x est un point de X alors, x est un point de Cauchy à l'ordre p si et seulement si il existe un filet de Cauchy $(x_i)_{i \in I}$ idéal d'ordre p et un indice $i \,{}^{p}\!\!\to \infty$ tel que $x_i \,{}^{p}\!\simeq x$.

<u>*Démonstration:*</u>

Soit $(x_i)_{i \in I}$ un filet de Cauchy idéal d'ordre p et soit $i \in I$ tel que $i \,{}^{p}\!\!\to \infty$ pour le préordre sur I . Par définition des filets de Cauchy et grâce au théorème de transfert on a: $\forall^p u \in \mathcal{E}\ \exists^p i_o \in I\ \forall k \in I\ \forall j \in I\ [\ (i_o \prec k \ \wedge i_o \prec j) \Rightarrow (x_k, x_j) \in u$. En particulier , nous aurons $(x_i, x_{io}) \in u$, x_i est donc un point de Cauchy comme $x_i \,{}^{p}\!\simeq x$, x est également un point de Cauchy d'aprés la propriété 12. Réciproquement, soit x un point de Cauchy à l'ordre p. On a : $\forall^p u \in \mathcal{E}\ \exists^p a \in X\ (x,a) \in u$ donc, on peut appliquer le théorème de construction. On obtient une fonction idéale d'ordre p de $\mathcal{E}$ dans X, $u \to x_u$, telle que $\forall^q u \in \mathcal{E}\ (x, x_u) \in u$. Prenons $I = \mathcal{E}$ et soit la relation $\prec$ dans I définie par $x \prec y$ si

$y \subset x$; montrons que $(x_u)_{u \in I}$ est un filet de Cauchy: Soient u et $u_o \in \mathcal{E}$ tels que u_o, $id_p(u_o,u)$ et $u_o^2 \subset u$; on a,

$\forall^p v \in \mathcal{E}\ \forall^p w \in \mathcal{E}\ [\,(u_o < v \wedge u_o < w) \Rightarrow ((x,x_v) \in u_o \wedge (x,x_w) \in u_o\,]$.

Comme u_o est symétrique, $(x,x_v) \in u_o \Rightarrow (x_v,x) \in u_o$ donc $(x_v,x_w) \in u_o^2$ et donc $(x_v,x_w) \in u$. Il suffit d'appliquer le théorème de transfert pour conclure que $(x_u)_{u \in I}$ est un filet de Cauchy. Montrons que $w\ {}^p\!\!\to\infty$ implique $x_w\ {}^p\!\!\approx x$: Pour cela, donnons nous $u \in \mathcal{E}$ idéal d'ordre p arbitraire. $(x_u)_{u \in I}$ est un filet de Cauchy donc, il existe $u_o \in \mathcal{E}$ tel que $id_p(u_o)$ et $\forall v \in \mathcal{E}\ \forall w \in \mathcal{E}\ [\,(u_o < v \wedge u_o < w) \Rightarrow (x_v,x_w) \in u\,]$ on aura donc, pour $w\ {}^p\!\!\to\infty$, $(x_{u_o}, x_w) \in u$. Si on choisit $u_o \subset u$, ce qui est toujours possible, on aura , puisque $(x,x_{u_0}) \in u_0$, $(x,x_w) \in u^2$. Comme u est un entourage de la diagonale idéal d'ordre p quelconque, cela implique $x_w\ {}^p\!\!\approx x$.

Remarque:

Si $(x_i)_{i \in I}$ est un filet de Cauchy idéal d'ordre p, l'existence d'un w tel que $w\ {}^p\!\!\to\infty$ et $x_w\ {}^p\!\!\approx x$ implique que pour tout $i\ {}^p\!\!\to\infty$, $x_i\ {}^p\!\!\approx x$.

Nous avons la caractérisation externe suivante de la complétude:

THEOREME 17 :

Pour tout $q \geq p$ les conditions suivantes sont équivalentes,

i) X est complet,

ii) $\forall x \in X \quad (\mathcal{C}_p(x) \Rightarrow {}^p x \in X)$,

iii) $\forall^q x \in X \quad (\mathcal{C}_p(x) \Rightarrow {}^p x \in X)$.

<u>Démonstration:</u>

i) $\Rightarrow$ ii) : Supposons X complet et soit x tel que $\mathcal{C}_p(x)$ d'aprés le théorème 16, il existe un filet de Cauchy $(x_i)_{i \in I}$ idéal d'ordre p et $i\ {}^p\!\!\to\infty$ tel que $x_i\ {}^p\!\!\approx x$. Comme X est complet, $(x_i)_{i \in I}$ est convergent donc ${}^p x_i \in X$ et, puisque $x_i\ {}^p\!\!\approx x$: ${}^p x \in X$.

l'implication ii) $\Rightarrow$ iii) est évidente. Pour l'implication iii) $\Rightarrow$ i): supposons vérifiée la condition iii). Il suffit de montrer que tout filet de Cauchy idéal d'ordre p est convergent.

Soit $(x_i)_{i \in I}$ un tel filet et soit $i \in I$ tel que $i\ {}^p\!\!\to\infty$ et $id_q(i)$, d'aprés le théorème 16 on a $\mathcal{C}_p(x_i)$

donc, la condition iii) implique que ${}^px_i \in X$. Si j est un autre indice tel que $j \xrightarrow{p} \infty$ on a, puique le filet est de Cauchy, $x_i{}^p \approx x_j$ donc ${}^px_i = {}^px_j$. Le filet $(x_i)_{i \in I}$ est donc convergent. CQFD.

Rappelons une définition classique: Une partie A d'un espace uniforme $(X,\mathcal{E})$ est dite totalement bornée si:

$$\forall u \in \mathcal{E} \ \exists^{fin} F \subset X \ \forall x \in A \ \exists z \in F \ (x,z) \in u.$$

Le théorème suivant fournit des caractérisations externes des parties totalement bornées.

THEOREME 18 :

Si $A \subset X$ et $id_p\, A$ et si $q > p$ les conditions suivantes sont équivalentes:

i) A est totalement borné,

ii) $\exists^{fin} F \subset X \ \forall x \in A \ \exists z \in F \ x \overset{p}{\approx} z$,

iii) $\exists^{q\,fin} F \subset X \ \forall x \in A \ \exists z \in F \ x \overset{p}{\approx} z$.

Nous laissons la démonstration au lecteur.

THEOREME 19 :

Si $A \subset X$ et $id_p\, A$, (A est totalement bornée) $\Rightarrow \ \forall x \in A \ \mathcal{C}_p(x)$.

<u>*Démonstration:*</u>

Supposons A vérifiant les hypothèses du théorème et totalement borné. Soit x quelconque dans A. A totalement borné équivant à:

$\forall^p u \in \mathcal{E} \ \exists^{p\,fin} F \subset X \ \forall x \in A \ \exists z \in F \ (x,z) \in u$ mais $id_p\, F$ et F fini impliquent que $id_p\,(z)$ donc, x est un point de Cauchy d'ordre p.

Le théorème suivant est classique mais sa démonstration dans GISTn est d'une simplicité remarquable.

THEOREME 20 :

Si X est complet et si A est une partie totalement bornée de X , alors A est relativement compacte.

Démonstration:

Il suffit de faire la démonstration avec id_p A. Fixons un entier q > p. Pour tout $a \in \bar{A}$ tel que id_q (a) on a le diagramme de proximité infinitésimale:

$$\begin{array}{l} x \overset{q}{\rightarrow} a \\ p \downarrow \\ x_0 \end{array} \qquad \text{avec } x \in A \text{ et } x_0 \in X.$$

L'existence de la flèche verticale provient de ce que x est de Cauchy d'ordre p, d'aprés le théorème 19, et de la caractérisation externe, théorème 17, de la complétude. On tire du diagramme que ${}^{p}a = x_0 \in \bar{A}$ donc, d'aprés le théorème 5 , $\bar{A}$ est compact.

Remarques:

1- La démonstration dans GISTn de la complétude d'un espace compact est triviale car si tout point est presque- id_p cela est vrai en particulier de tout point de Cauchy.

2- Si q > p on n'a pas en général $\mathfrak{C}_q(x) \Rightarrow \mathfrak{C}_p(x)$.

Exemple:

$X = \mathbb{R}$, p = 1, q = 2. Soit x tel que id_2 (x) et $x \overset{1}{\rightarrow} \infty$. On a $\mathfrak{C}_2(x)$, puique id_2 (x) mais, $\forall^1 a \in X \quad |x-a| \geq 1$ puisque $x \overset{1}{\rightarrow} \infty$ donc, on n'a pas $\mathfrak{C}_1(x)$.

3- Si X est complet idéal d'ordre p et localement compact, alors, pour q > p, on a :

$\forall\ x \in X\ (\ \mathfrak{C}_p(x) \Rightarrow \mathfrak{C}_q(x)\ )$. En effet $\mathfrak{C}_p(x) \Rightarrow {}^{p}x \in X$ d'après le théorème 17 et, d'après le théorème 7, ${}^{q}x \in X$. On a donc $\mathfrak{C}_q(x)$.

Problème: Cette dernière propriété reste-t-elle vraie dans des situations plus générales ?

C - Espaces fonctionnels:

Dans ce chapitre $(Y,\mathcal{O})$ est un espace topologique régulier, $(Z,\mathcal{E})$ un espace uniforme, $X = Z^Y$ l'ensemble des applications de Y dans Z. Nous supposerons $(Y,\mathcal{O})$ et $(Z,\mathcal{E})$ idéaux d'ordre p. On distinguera dans X la topologie de la convergence simple, τ_s , celle de la convergence uniforme sur les compacts , τ_c, et celle de la convergence uniforme, τ_u. La toplogie sur Z sera la topologie associée à $\mathcal{E}$ et sera supposée régulière. Nous noterons pae les mêmes symboles $^q\!\to$, $^{oq}.$, $^q\!\approx$, les relations de proximité infinitésimales, les ombres et les relations d'équivalence infinitésimale pour les topologies de Y et de Z ainsi que pour la topologie τ_s sur X. Dans X, on notera $\mathcal{U}_s$, $\mathcal{U}_c$, $\mathcal{U}_u$, les structures uniformes associées respectivement à τ_s , τ_c , τ_u . On notera $(.\,^q\!\to .)_u$, $(^{oq}.)_u$, $(.\,^q\!\approx .)_u$, $(.\,^q\!\to .)_c$, $(^{oq}.)_c$, $(.\,^q\!\approx .)_c$, les relations de proximité infinitésimale, les ombres et les relations d'équivalence infinitésimale d'ordre q, pour τ_u et τ_c respectivement.

Nous désignerons par $\mathcal{C}$ (X) l'ensemble des applications continues de X.

PROPRIETES :

Si $q > p$, $f,g \in X$ et $id_p\,(f,g)$ on a:

13- $f \,^p\!\approx g \iff \forall^p\, t \in Y \quad f(t) \,^p\!\approx g(t).$

14- $(f\,^p\!\approx g)_c \iff [\forall t \in Y (^p t \in Y \Rightarrow f(t) \,^p\!\approx g(t))] \iff [\forall^q\, t \in Y (^p t \in Y \Rightarrow f(t)\,^p\!\approx g(t))].$

15- $(f\,^p\!\approx g)_u \iff [\,\forall t \in Y \quad f(t) \,^p\!\approx g(t)] \iff [\forall^q\, t \in Y \quad f(t)\,^p\!\approx g(t)].$

16- $(f\,^p\!\approx g)_u \Rightarrow (f\,^p\!\approx g)_c \Rightarrow f\,^p\!\approx g\,.$

Les théorème 21 et 22 suivants sont classiques, nous allons voir comment on peut les démontrer simplement dans GISTn.

THEOREME 21 :

$\mathcal{C}(X)$ est fermé dans (X, τ_c).

<u>Démonstration:</u>

$\forall f \in X\ \forall^{p+1} g \in \mathcal{C}(X)\ \forall^p x \in Y$ si $(g \to f)_c$ et $y \,^{p+1}\!\to x$ on a :

$$f(y) \,^{p+1}\!\approx g(y) \,^{p+1}\!\approx g(x) \,^p\!\to f(x).$$

Donc, $f(y) \,^p\!\to f(x)$. Céla implique que $f \in \mathcal{C}(X)$ donc, $\mathcal{C}(X)$ est fermé dans (X, τ_c).

THEOREME 22 : (Ascoli)

Si H est une partie équicontinue de X telle que, pour tout $x \in Y$ H(x) est relativement compact alors, H est relativement compacte pour τ_C.

<u>Démonstration:</u>

Il suffit de la faire dans la cas où id_p H. Soit $f \in H$; pour tout x dans Y, ${}^pf(x) \in Z$ puisque H(x) est relativement compact dans Z. D'après C_p il existe une fonction g idéale d'ordre p telle que pour tout y idéal d'ordre p, ${}^pf(y) = g(y)$ ce qui s'écrit encore, ${}^pf = g$. Soit q fixé tel que $p < q \leq n$. Puique g est adhérent à H pour τ_S, il existe $h \in H$ tel que ${}^qh = g$. Soit maintenant un élément $t \in Y$ tel que ${}^pt \in Y$. On a alors, si ${}^p\approx$ et ${}^q\approx$ désignent des relations d'équivalence infiitésimales pour la structure uniforme de Z :

$$g(t) \; {}^q\!\approx h(t) \; {}^p\!\approx h({}^pt) \; {}^p\!\approx f({}^pt) \; {}^p\!\approx f(t).$$

La deuxième et la quatrième équivalence proviennent de l'équicontinuité de H, la première et la troisième des égalités ${}^pf = {}^qh = g$. On conclut, en utilisant les propriété 8, 9 puis 14, que $(f^q - g)_C$ et donc, d'après le théorème 5, que H est relativement compact.

Dans le théorème suivant, Y sera $\mathbb{N}$ et Z, l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. X sera donc l'ensemble des suites complexes. Danx X nous distinguerons les sous-ensembles ℓ^∞, c et c_0 des suites bornées, des suites convergentes et des suites qui convergent vers zéro. Nous définirons la norme $\|\,.\,\|$ sur ℓ^∞en posant, pour $f \in \ell^\infty$, $\| f \| = \sup \{ |f(k)| : k \in \mathbb{N} \}$. Nous allons alors démontrer trés simplement avec nos méthodes que, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire usuelles :

THEOREME 23 :

ℓ^∞, c et c_0 sont des espaces de Banach.

<u>Démonstration:</u>

Soit f un point de Cauchy dans ℓ^∞tel que id_2 (f). Par définition $\forall^1 \varepsilon > o \; \exists^1 g \; \| f- g \| < \varepsilon$. Cela implique que $\forall^1 \varepsilon > o \; \forall^1 k \;\; \| f(k) - g(k) \| < \varepsilon$. g(k) étant standard pour tout k standard, cela implique que , pour tout k standard, f(k) est un point de Cauchy dans $\mathbb{C}$ muni de son uniformité usuelle. $\mathbb{C}$ étant complet, chaque f(k) est presque-standard pour k standard.Donc

$g = {}^1f \in X$. Il reste à montrer que $g = ({}^1f)_u . \forall^1 \varepsilon > o\ \exists^1 h(\| f - h \| < \varepsilon \wedge \| {}^1f - h \| < \varepsilon)$. La deuxième partie de le conjonction découle du fait que pour tout k standard $\| {}^1f(k) - h(k) \| < \varepsilon$ et de (T_1). Si on applique (I_1) on obtient: $\exists^1 h\ (h \overset{1}{\approx} f \ \wedge \ h \overset{1}{\approx} {}^1f)$ pour l'équivalence associée à la norme $\|.\|$. On a donc $f \overset{1}{\approx} {}^1f$; comme f borné et $f \overset{1}{\approx} {}^1f$ impliquent ${}^pf$ borné on a : $f \overset{1}{\rightarrow}{}_o {}^1f$ dans ℓ^∞. Cela implique que ℓ^∞ est complet. Pour montrer que c et c_0 sont complets, il suffit de remarquer que si $f \overset{1}{\rightarrow} {}^1f$ dans ℓ^∞, alors $\| f \|$ est majoré par un standard, et que si $k \overset{2}{\rightarrow} +\infty$ et $\lim_{k \to +\infty} f(k) = l$, alors on a : ${}^1f(k) \overset{1}{\approx} f(k) \overset{2}{\rightarrow} l \overset{1}{\rightarrow} {}^1l \in \mathbb{C}$.
Donc $\lim_{k \to +\infty} {}^1f(k) = {}^1l$. Si $l = 0$, on a ${}^1l = 0$ et la démonstration est terminée.

Dans les théorèmes 24 et 25 qui suivent, Y sera supposé muni d'une structure uniforme $\mathcal{U}$ définissant sa topologie. Nous rappellons qu'une partie B de Y est dite bornée si il existe un entourage de la diagonale, u, et un point a de Y tel que, pour tout x dans B, $(a,x) \in u$.
Un point x d'un espace uniforme idéal d'ordre p sera dit ^{p}limité, et nous écrirons ${}^p\lim(x)$ si il est contenu dans un ensemble borné idéal d'ordre p. Pour p=1 on dira plus simplement que x est limité et on écrira lim(x). Nous noterons $\mathcal{K}(X)$ l'ensemble des applications compactes de X. Le théorème suivant est une caractérisation externe des applications compactes. On peut trouver dans [35] un énoncé analogue (Théorème 4.6.4) mais la preuve donnée par A.Robinson est moins radicalement externe.

THEOREME 24 :

$\forall^1 f \in X\ (f \in \mathcal{K}(X) \Leftrightarrow (\lim (x) \Rightarrow {}^1x \in Z).$

<u>*Démonstration:*</u>

Rappelons qu'une application est compacte si, par définition, l'image de tout ensemble borné est relativement compacte.

$(\Rightarrow)$: Supposons que $f \in \mathcal{K}(X)$ et soit x limité, par définition $\exists^{1,\text{ borné}} B \subset Y\ (x \in B)$.
Cela implique $f(x) \in f(B)$ et comme B est relativement compact, ${}^1f(x) \in Z$ d'aprés le critére externe de compacité relative

$(\Leftarrow)$: Il suffit de montrer que l'image par f d'un borné standard est relativement compacte.
Soit donc B un ensemble borné et standard, $\forall y \in f(B)\ \exists x \in B\ (y = f(x)),\ x \in B \Rightarrow \lim(x)$

donc ${}^{1}f(x) \in Z$.

Voici encore un théorème classique et sa preuve dans GISTn.

THEOREME 25 :

Si Z est complet alors $\mathcal{K}(X)$ est fermé dans (X, τ_U).

Démonstation:

Soit f adhérent à $\mathcal{K}(X)$ pour τ_U. Nous allons montrer que si f est standard alors f satisfait au critère externe de compacité énoncé dans le théorème 24. Soit $x \in Y$ tel que lim(x), on a:

$\forall^1 u \in \mathcal{E}\ \exists^1 g \in \mathcal{K}(X)\ \ \forall x \in Y\ \ (f(x), g(x)) \in u$.

$(g \in \mathcal{K}(X) \wedge \lim(x)) \Rightarrow {}^1g(x) \in u$ comme $\forall^1 u \in \mathcal{E}\ (g(x), {}^1g(x)) \in u$ on a,

$\forall^1 u \in \mathcal{E}\ (f(x), {}^1g(x)) \in u^2$; f(x) est donc un point de Cauchy , Z étant complet cela implique ${}^1f(x) \in Z$. On a donc $f \in \mathcal{K}(X)$.

Le théorème 26 donne une caractérisation externe simple de l'ensemble des points de continuité de la limite ponctuelle d'un filet de fonctions continues . Pour cela introduisons quelques notations. Si f sont deux éléments deX et u un entourage de la diagonale Δ dans Z X Z, nous poserons $E(f,g,u) = \{ t \in Y / (g(t),f(t)) \in u \}$. On écrira $u \overset{1}{\rightarrow} \Delta$ si, $\forall^1 w \in \mathcal{E}\ (u \subset w)$ L'existence d'un u tel que $u \overset{1}{\rightarrow} \Delta$ se déduit aisément du théorème d'idéalisation. On peut alors énoncer:

THEOREME 26 :

Si f est une fonction standard adhérant à $\mathcal{C}(X)$ pour τ_S alors,

$\forall^2 u \in \mathcal{E}\ \forall^3 g \in \mathcal{C}(X)\ [(g \overset{2}{\rightarrow} f\ \wedge u \overset{1}{\rightarrow} \Delta) \Rightarrow \forall^1 t_o \in Y\ (f \text{ continue en } t_o \Leftrightarrow t_o \in \operatorname{int} E(f,g,u))]$.

Démonstration:

Soient f,g et u vérifiant les hypothèses du théorème et soit t_o un point de continuité standard quelconque de Y. Pour tout $t \in Y$ tel que $t \overset{3}{\rightarrow} t_o$ on a :

$g(t) \overset{3}{\approx} g(t_o) \overset{2}{\approx} f(t_o) \overset{3}{\approx} f(t)$ d'ou l'on tire $g(t) \overset{2}{\approx} f(t)$. u étant idéal d'ordre 2, cela implique $(g(t),f(t)) \in u$ donc: $\forall t\ (t \overset{3}{\rightarrow} t_o \Rightarrow t \in E(f,g,u))$ comme on a id3 E(f,g,u) cela implique que $t_o \in \text{int } E(f,g,u)$. Réciproquement si t_o est standard et $t_o \in \text{int } E(f,g,u)$, pour tout t tel que $t \overset{3}{\to} t_o$ on a: $f(t) \approx g(t) \overset{3}{\approx} g(t_o) \overset{2}{\approx} f(t_o)$. Ceci implique $f(t) \approx f(t_o)$ donc, f est continue en t_o.

On peut dire aussi que si on note $E_C(f)$ l'ensemble des pointe de continuité de f alors:

$$E_C(f) = st (\text{ int } E(f,g,u)).$$

COROLLAIRE :

Si Z est un espace métrique et si f est la limite simple d'une suite standard (f_n) de fonctions continues alors, pour tout $\varepsilon \to o$ tel que $id_2(\varepsilon)$ et tout $n \overset{2}{\to} \infty$ on a:

$E_C(f) = st (\text{ int } E(n,\varepsilon))$ où $E(n, \varepsilon) = \{ t \in Y / \ d(f_n(t),f(t)) < \varepsilon \}$ et d est la distance définissant la structure uniforme de Z.

On peut démontrer que $E_C(f)$ peut être défini d'une manière interne par la formule:

$$E_C(f) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{m=0}^{\infty} \text{int } E(n , \frac{1}{m}) \ .$$

Cette dernière formule est démontrée d'une manière classique (interne) dans [37].

Remarquons que l'on peut tirer du théorème 26 une caractérisation externe de tous les points de continuité, même si ceux-ci ne sont pas standard, de la limite ponctuelle d'une suite de fonctions continues. Il suffit pour cela d'appliquer le théorème de transfert externe.

Quelques mots sur l'intégrale de Lebesgue. Nous ne développerons pas ici une théorie non standard de l'intégrale de Lebesgue. Pour ce sujet, nous renverrons le lecteur à la littérature sur le sujet, voir [21] et sa bibliographie. Dans [21], on peut trouver le critère suivant d'intégrabilité au sens de Lebesgue.

Si $\mathcal{E}$ est l'ensemble des fonctions en escalier sur $[0,1]$ et f une fonction standard de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, alors on a :

f est intégrable au sens de Lebesgue $\Leftrightarrow$

$\forall^{st} \varepsilon > 0 \ \exists \varphi \in \mathcal{E} \ \exists \psi \in \mathcal{E} \ [\forall x \in [0,1] \ \ \psi(x) \le f(^0x) \le \varphi(x) \wedge {}^{o}(\int \varphi) \ne \pm\infty \wedge \int \varphi - \psi < \varepsilon].$

Dans l'énoncé précédent, l'ombre ${}^0(\int \varphi)$ est relative à la topologie de l'espace compact $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty , +\infty\}$.

Nous allons donner des caractérisations dans GISTn, équivalentes à cette dernière, mais utilisant un quantificateur de moins.

THEOREME :

Une application standard $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Lebesgue si et seulement si :

$$\exists \varphi \in \mathcal{E}\ \exists \psi \in \mathcal{E}\ [\ \forall x \in [0,1]\ \ \psi(x) \leq f({}^2x) \leq \varphi(x) \wedge {}^2(\int\varphi) \neq \pm\infty \wedge \int \varphi - \psi \overset{1}{\simeq} 0].$$

Démonstration :

Traduite dans notre langage, la caractérisation de O.Loos devient :

(1) $\forall^1 \varepsilon > 0\ \exists \varphi , \psi \in \mathcal{E}\ [\ (\forall x \in [0,1]\ \ \psi(x) \leq f({}^1x) \leq \varphi(x)\ ) \wedge {}^1(\int\varphi) \neq \pm\infty \wedge \int\varphi - \psi < \varepsilon]$.

Puisque toutes les constantes de (1) sont standard on obtient, en appliquant le théorème de transfert externe que (1) équivaut à :

(2) $\forall^2 \varepsilon > 0\ \exists \varphi , \psi \in \mathcal{E}\ [\ (\forall x \in [0,1]\ \ \psi(x) \leq f({}^2x) \leq \varphi(x)\ ) \wedge {}^2(\int\varphi) \neq \pm\infty \wedge \int\varphi - \psi < \varepsilon]$.

Soit ε_0 un infiniment petit idéal d'ordre 2, alors (2) implique :

(3) $\exists \varphi \in \mathcal{E}\ \exists \psi \in \mathcal{E}\ [\ (\forall x \in [0,1]\ \ \psi(x) \leq f({}^2x) \leq \varphi(x)\ ) \wedge {}^2(\int\varphi) \neq \pm\infty \wedge \int\varphi - \psi < \varepsilon_0]$,

d'où on tire :

(4) $\exists \varphi \in \mathcal{E}\ \exists \psi \in \mathcal{E}\ [\ (\forall x \in [0,1]\ \ \psi(x) \leq f({}^2x) \leq \varphi(x)\ ) \wedge {}^2(\int\varphi) \neq \pm\infty \wedge \int\varphi - \psi \overset{1}{\simeq} 0]$.

L'énoncé :

(5) $\forall^1 \varepsilon > 0\ \exists \varphi , \psi \in \mathcal{E}\ [\ (\forall x \in [0,1]\ \ \psi(x) \leq f({}^2x) \leq \varphi(x)\ ) \wedge {}^2(\int\varphi) \neq \pm\infty \wedge \int\varphi - \psi < \varepsilon]$,

est une conséquence de (4). Après avoir vérifié que toutes ses constantes sont standard, appliquons le théorème de transfert externe à la formule

$$\exists \varphi \in \mathcal{E}\ \exists \psi \in \mathcal{E}\ [\ (\forall x \in [0,1]\ \ \psi(x) \leq f({}^2x) \leq \varphi(x)\ ) \wedge {}^2(\int\varphi) \neq \pm\infty \wedge \int\varphi - \psi < \varepsilon\ ],$$

on voit que celle-ci équivaut à :

$$\exists \varphi \in \mathcal{E}\ \exists \psi \in \mathcal{E}\ [\ (\forall x \in [0,1]\ \ \psi(x) \leq f({}^1x) \leq \varphi(x)\ ) \wedge {}^1(\int\varphi) \neq \pm\infty \wedge \int\varphi - \psi < \varepsilon\ ];$$

donc, (5) équivaut à l'énoncé (1). Les énoncés (4) et (1) sont donc équivalents, c'est ce qu'il fallait démontrer.

Utilisons notre critère d'intégrabilité pour démontrer que la fonction caractéristique de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, $f = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0.1]}$, est intégrable sur $[0,1]$ au sens de Lebesgue. Considérons une suite standard $r_1, r_2, .. r_n, ...$ numérotant les rationnels de $[0,1]$. Soit N un entier infiniment grand d'ordre 2 et $\delta > 0$ tel que $\delta \overset{1}{\approx} 0$ et id2(δ).

Posons $\varphi = \sum_{n \leq N} \chi_{[rn - \delta/2^n ,\, rn + \delta/2^n] \cap [0.1]}$, $\psi = 0$. On a $\int \varphi - \psi \leq 2\delta \sum_{n \leq N} 1/2^n \leq 2\delta \approx 0$.

D'autre part, si $x \in [0,1]$ la relation $\varphi(x) \leq f(^2x) \leq \Psi(x)$ découle du fait que, si $^2x \in \mathbb{Q}$, alors ^2x est un r_n, avec id2(n) donc, $x \in [r_n - \delta/2^n , r_n + \delta/2^n]$. Cela implique

$$\psi(x) = 0 \leq f(^2x) \leq 1 \leq \varphi(x).$$

III - Travaux pratiques:

1- Généralités

Dans ce chapitre, nous allons appliquer à l'étude des fonctions oscillantes, les méthodes présentées dans les chapitres précédents . Nous désignons sous ce nom des fonctions définies sur un groupe commutatif $\mathbb{G}$ qui repassent "assez régulièrement" par des valeurs "voisines" quand la variable parcours $\mathbb{G}$. Ces fonctions sont des généralisations raisonnables des fonctions périodiques. Nous nous limiterons pour notre part à l'étude des fonctions presque-périodiques et presque automorphes. On peut trouver une étude de ces dernières, par des méthodes classiques, dans [2] et [37]. Dans [35], T.Sari a abordé l'étude des fonctions presque-périodiques par les méthodes de l'analyse non standard. Nous montrerons que les méthodes de l'analyse relative permettent d'étendre ses résultats aux fonctions presque-automorphes, en particulier nous mettrons en évidence l'existence d'un groupe de presque-automorphie, qui coïncide avec le groupe des presque-périodes dans le cas presque-périodique, et rendent, d'une manière générale, plus facile l'étude de ces fonctions : les définitions sont beaucoup plus compactes que les définitions classiques de Bohr et Bochner, et les preuves sont plus élémentaires tout en restant suffisamment intuitives .

Nous travaillerons dans une sous-théorie GISTn de RIST.

Le lecteur pourra constater que tout au long de cette étude, hormis dans la partie qui établit l'équivalence entre les définitions classiques de la presque-automorphie et nos propres définitions, nous n'utiliserons jamais les suites filtres et filets pour traduire la notion de limite, et très rarement les périphrases du style " $\forall\varepsilon\ \exists\ \delta$ .... " . En fait, une grande partie de nos preuve sont des déductions à partir des règles de manipulations des ombres de différents degrés et pout différentes topologies (Voir page 81 la liste des principales règles utilisées).

Dans ce chapitre X désignera l'ensemble $\mathbb{R}^{\Lambda X\ \mathbb{G}}$ des applications de $\Lambda X\ \mathbb{G}$ dans $\mathbb{R}$, où $\mathbb{G}$

est un groupe commutatif dont la loi interne sera notée + et l'élément neutre O, Λ est un ensemble de paramètres qui pourra être vide. Nous travaillerons avec deux topologies sur X : La topologie τ_s de la convergence simple et la topologie τ_u de la convergence uniforme sur $\Lambda X \mathbb{G}$. Pour ce chapitre nous adopterons les notations spéciales suivantes :

${}^{p}\!\sim$ désignera la relation d'équivalence infinitésimale d'ordre p pour la structure uniforme de la convergence ponctuelle dans X, ainsi que pour la structure uniforme usuelle dans $\mathbb{R}$.

${}^{p}\!\approx$ désignera la relation d'équivalence infinitésimale d'ordre p pour la structure uniforme de la convergence uniforme dans X.

Nous adopterons une définition des ombres différentes de celle adoptée dans le chapitre II. Fixons un élément # de $\mathbb{R}$ supérieur à tout réel x tel que $id_n(x)$, # est infiniment grand d'ordre n. On notera également # la fonction constante qui prend la seule valeur #.

Si x est un réel presque idéal d'ordre p, et si f et g sont deux fonctions presque idéales d'ordre p, pour τ_s et τ_u respectivement, la définition de l'ombre d'ordre p sera celle du chapitre II. Nous noterons :

${}^{p}x$ l'ombre d'ordre p de x pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$,

${}^{p}f$ l'ombre d'ordre p de f pour la topologie de la convergence ponctuelle,

${}^{pu}g$ l'ombre d'ordre p de g pour la topologie de la convergence uniforme.

Si x est un nombre réel non presque idéal d'ordre p , si f et g sont des fonctions de X qui, pour τ_s et τ_u respectivement, ne sont pas presque idéales d'ordre p, on posera :

$${}^{p}x = \#,\ {}^{p}f = \#,\ {}^{pu}g = \#,$$

Nous allons donner sous forme de règles de manipulation des ombres, et regrouper dans un tableau une série des propriétés les plus souvent utilisées par la suite. Pour tout p inférieur ou égal à n on a :

Si $f \in X$ et si $\sigma \in \mathbb{G}$ nous appellerons σ-translatée f_σ de f la fonction de X définie par :

$$\text{pour tout } (x,t) \in \Lambda X \mathbb{G},\ f_\sigma(x,t) = f(x,t+\sigma).$$

Règles d'utilisation des ombres.

Par souci de lisibilité, nous admettrons que dans une expression faisant apparaître des translations et des passages à l'ombre, les opérations de translation précèdent toujours les passages aux ombres ainsi, nous pourrons écrire, par exemple :

$${}^{p}f_{\sigma} \text{ au lieu de } {}^{p}(f_{\sigma}),\quad {}^{p}({}^{p}f_{\sigma})_{\tau} \text{ au lieu de } {}^{p}(({}^{p}(f_{\sigma}))_{\tau}).$$

Règle 1 : ${}^{p}\# = \#$.

Règle 2 : ${}^{p}\# = {}^{pu}\# = \#$.

Règle 3 : Si $x \in \mathbb{R}$ ${}^{p}x = \#$ $\Leftrightarrow$ $|x|$ est infiniment grand d'ordre p.

Règle 4 : Si ${}^{pu}f \neq \#$ alors ${}^{pu}f = {}^{p}f$.

Règle 5 : ${}^{p}f \neq \#$ $\Leftrightarrow$ $\forall^{p}\,(x,t)$ ${}^{p}f(x,t) \neq \#$

Règle 6 : Si $1 \leq p \leq q \leq n$, si $id_q(f)$ et ${}^{p}f \neq \#$ alors, ${}^{pu}f \neq \#$ (et donc ${}^{pu}f = {}^{p}f$ d'aprés la règle 4) si et seulement si : $\forall^{q}\,(x,t) \in \Lambda \times \mathbb{G}$ ${}^{p}(f(x,t) = {}^{p}([{}^{p}f](x,t)$.

Règle 7 : Si $1 \leq p \leq q \leq n$, ${}^{p}f \neq \#$ et ${}^{qu}f \neq \#$ alors: ${}^{p}({}^{q}f) = {}^{p}f$.

Règle 8 : Si $|f|$ est majoré par un nombre M tel que $id_p(M)$, $p < n$, alors, ${}^{p}f \neq \#$.

(En corollaire, pour tout q tel que $p \leq q \leq n$, on a ${}^{q}f \neq \#$ car $id_p(M) \Rightarrow id_q(M)$.)

Règle 9 : Si $1 \leq p \leq q \leq n$, ${}^{pu}f \neq \#$ et ${}^{qu}f \neq \#$ alors: ${}^{pu}({}^{qu}f) = {}^{pu}f$.

Règle 10 : Si $|f|$ est majorée et ${}^{pu}f = g$ alors, $|g|$ est majorée (par un M tel que $id_p(M)$)

Règle 11: Si $1 \leq p \leq q \leq n$ et ${}^{qu}f \neq \#$, alors: ${}^{p}({}^{qu}f) = {}^{p}f$.

Règle 12 : Pour tout $\sigma \in \mathbb{G}$ si ${}^{pu}f = g \neq \#$, alors ${}^{p}f_{\sigma} = {}^{p}g_{\sigma}$.

Règle 13 : $\forall^{p}\, \sigma \in \mathbb{G}$ ${}^{p}f_{\sigma} = ({}^{p}f)_{\sigma}$

Règle 14 : $\forall\, \sigma,\tau \in \mathbb{G}$ ${}^{pu}({}^{pu}f_{\sigma})_{\tau} = {}^{pu}f_{\sigma+\tau}$

La démonstration des propriétés énoncées dans les règles précédentes est laissée au lecteur. Les quelques exemples qui suivent nous éclairerons mieux sur les rapports existant entre les différentes ombres.

Dans les figures ci-dessous, pour les fonctions dont les graphes sont représentés dans les figures 1 à 5 avec

$\Lambda = \emptyset$, $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ on a : A infiniment grand, id2(A), B infiniment grand d'ordre deux, $\varepsilon \overset{1}{\sim} 0$, id2($\varepsilon$), $\delta \overset{2}{\sim} 0$.

${}^1f_1 = 0$, ${}^{1u}f_1 = \#$, ${}^2f_1 = {}^{2u}f_1 = f_1$. ${}^1({}^{2u}f_1) = f_1$, ${}^{1u}({}^{2u}f_1) = {}^{1u}f_1$.

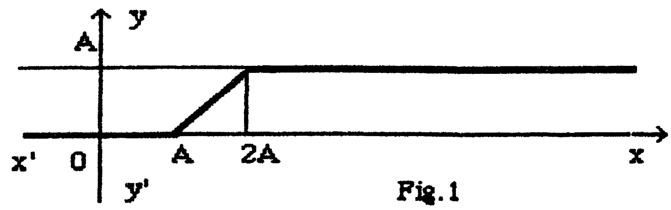


Fig.1

${}^1f_2 = 0$, ${}^2f_2 = {}^{1u}f_2 = {}^{2u}f_2 = \#$.

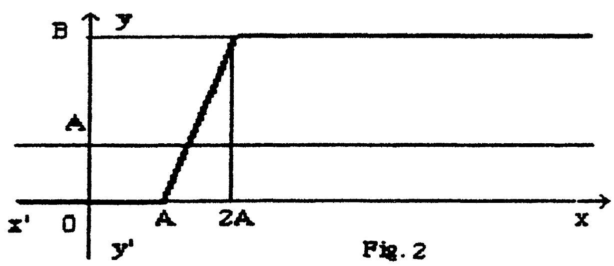


Fig.2

${}^1f_3 = {}^{1u}f_3 = \#$, ${}^2f_3 = {}^{2u}f_3 = f_3$. ${}^1({}^2f_3) = {}^1f_3$, ${}^{1u}({}^{2u}f_3) = {}^{1u}f_3$, ${}^1({}^{2u}f_3) = {}^1f_3$

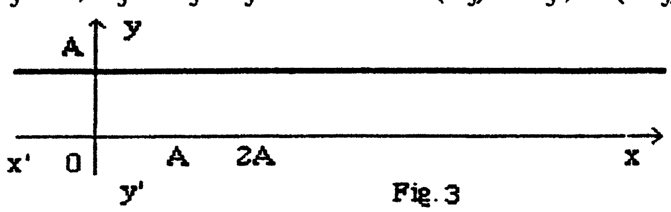


Fig.3

${}^1f_4 = 0$, ${}^2f_4 = {}^{1u}f_4 = \#$, ${}^{2u}f_4 = f_1$. ${}^1({}^2f_4) \neq {}^1f_4$, ${}^{1u}({}^{2u}f_4) = {}^{1u}f_1 = \# = {}^{1u}f_4$.

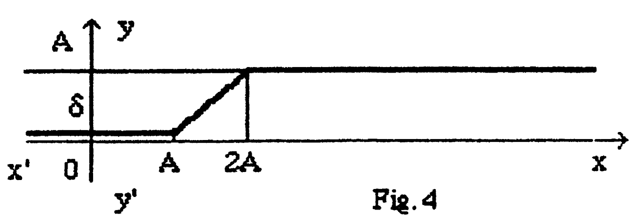


Fig.4

${}^1f_5 = {}^2f_5 = {}^{1u}f_5 = 0$, ${}^{2u}f_5 = \#$. ${}^1({}^{2u}f_5) \neq {}^1f_5$

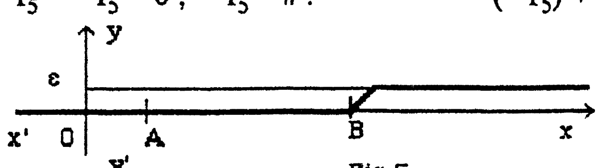


Fig.5

Remarques:

1-Si on réécrit le tableau de la page 55 en remplaçant tout énoncé de la forme $^{r}x \in X$ par l'énoncé $^{r}x \neq \#$. On peut tirer de l' exemple de la figure 1 où 2 que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n'est pas régulier pour la convergence ponctuelle. A partir de l'exemple de la fonction f_5, on peut retrouver que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n'est pas localement compact pour la topologie de la convergence uniforme.

2-La règle 9 exprime que X est régulier pour la topologie de la convergence uniforme.

2 - Fonctions oscillantes.

Si A est une partie de X, nous noterons :

adh A , l'adhérence de A pour la topologie de la convergence simple,

$adh_u A$, l'adhérence de A pour la topologie de la convergence uniforme.

Pour tout $f \in X$, avec les notations précédentes pour les σ-translatés on posera : $H(f) = \{f_\sigma / \sigma \in \mathbb{G}\}$. Dans le cas ou $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ il est facile de voir que si f est périodique, alors H(f) est compact pour la topologie de la convergence uniforme. En remplaçant la compacité par la relative compacité nous obtenons la généralisation suivante de la périodicité, que l'on peut trouver aussi dans [2] et [6].

Définition 1:

On dira qu'une fonction $f \in X$ est presque-périodique si H(f) est relativement compact pour la topologie de la convergence uniforme.

Nous noterons $\mathbb{P}\mathbb{P}$ l'ensemble des fonctions presque-périodiques de $\mathbb{G}$ dans $\mathbb{R}$.

On aura donc, pour une fonction f telle que $id_P(f)$, $f \in \mathbb{P}\mathbb{P} \Leftrightarrow \forall \tau \in \mathbb{G} \ {}^{pu}f_\tau \neq \#$.

THEOREME 1:

Si f est presque périodique et si $g \in adh_u H(f)$ alors $adh_u H(f) = adh_u H(g)$.

Démonstration:

Il suffit de la faire pour f et g standard. Soient g et f standard,

$g \in adh_u H(f) \Leftrightarrow \exists\, \sigma \in \mathbb{G}\ g = {}^{1u}f_\sigma$. Si $\tau \in \mathbb{G}$ on a pour tout $h \in X$,

$h = {}^{1u}g_\tau \Leftrightarrow h = {}^{1u}f_{\sigma+\tau}$ donc, $h \in adh_u H(g) \Leftrightarrow h \in adh_u H(f)$.

COROLLAIRE: *$\mathbb{PP}$ est fermé pour la topologie de la convergence uniforme.*

La propostion suivante donne une caractérisation externe de la presque périodicité qui ne fait intervenir *que la topologie de la convergence ponctuelle.*

THEOREME 2:

Si $id_P(f)$, $p = 1, 2.., n$ alors $f \in \mathbb{PP} \Leftrightarrow \forall\, \sigma, \tau \in \mathbb{G}\ {}^{p}f_\sigma \neq \#$ et ${}^{p}f_{\sigma+\tau} = {}^{p}({}^{p}f_\sigma)_\tau$.

Démonstration:

L'implication $(\Rightarrow)$ est immédiate car . $f \in \mathbb{PP} \Rightarrow \forall\, \sigma, \tau \in \mathbb{G}\ {}^{pu}f_{\sigma+\tau} \neq \#$, la règle 14 implique que ${}^{pu}f_{\sigma+\tau} = {}^{pu}({}^{pu}f_\sigma)_\tau$ et les règles 1. 2 et 4 impliquent que ${}^{p}f_{\sigma+\tau} = {}^{p}({}^{p}f_\sigma)_\tau$.

Pour la réciproque, on sait, par hypothèse que pour pour tout $\sigma \in \mathbb{G}\ {}^{p}f_\sigma \neq \#$. Il suffit de démontrer que ${}^{p}f_\sigma = {}^{pu}f_\sigma$. Cela découle de la ligne suivante :

$\forall\, t \in \mathbb{G}\ {}^{p}(f_\sigma(t)) = {}^{p}f_{\sigma+t}(0) = {}^{p}f_{\sigma+t}(0) = ({}^{p}({}^{p}f_\sigma)_t)(0) = {}^{p}({}^{p}f_\sigma)_t(0) = {}^{p}({}^{p}f_\sigma)(t)$.

Remarque 3:

On peut énoncer le théorème précédent jusqu'à un valeur de p fixée quelconque à condition de choisir une théorie GISTn avec n assez grand.

Définition 2:

Une partie P de $\mathbb{G}$ (P peut être externe) sera dite relativement dense dans $\mathbb{G}$ si il existe une partie finie F de $\mathbb{G}$ telle que $\mathbb{G} = \bigcup_{t \in F} \{t\} + P$.

Nous pouvons maintenant énoncer,

THEOREME 3 : (Caractérisation géométrique de la presque périodicité.)

Si $id_p(f)$ *alors f est presque-périodique si et seulement si l'ensemble (externe)*

$\Pi_p(f) = \{\tau \in \mathbb{G} \,/\, \forall t \in \mathbb{G}\ f(\tau+t) \overset{p}{\simeq} f(t)\}$ *est relativement dense dans* $\mathbb{G}$.

Démonstration:

Nous utiliserons le théorème 20 du chapitre II. Si $id_p(f)$ on a :

[f presque-périodique] $\Leftrightarrow$ [H(f) relativement compact] $\Leftrightarrow$ [il existe une partie finie de X, $\{f_{a_1}, f_{a_2}, \dots, f_{a_n}\}$, telle que pour tout $s \in \mathbb{G}$, il existe $i(s) \in \{1,2,\dots,n\}$ tel que $f_s \simeq f_{a_{i(s)}}$] $\Leftrightarrow$ [il existe une partie finie $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ de $\mathbb{G}$ telle que $\mathbb{G} = \bigcup_{1 \le i \le n} \{a_i\} + \Pi_p(f)$]. ∎

Remarques:

4- Pour tout τ, $\tau \in \Pi_p(f)$ équivaut à ${}^{pu}f_\tau = f$.

5- On peut utiliser le théorème 3 pour démontrer le corollaire du théorème 1. En effet, soient f et g dans X telles que st(g), $id_2(f)$ et $g = {}^{1u}f$. Pour tout $\tau \in \Pi_2(f)$ on a:

${}^{1u}g_\tau = {}^{1u}f_\tau = {}^{1u}({}^{2u}f_\tau) = {}^{1u}f = g$ donc: $\Pi_2(f) \subset \Pi_1(g)$ donc, si $\Pi_2(f)$ est relativement dense dans $\mathbb{G}$ il en est de même de $\Pi_1(g)$ et il suffit d'appliquer le théorème 3 ∎

Définition 3:

La fonction $f \in \mathbb{R}^{\Lambda \times \mathbb{G}}$ *est dite presque-périodique par rapport à t uniformément sur* Λ *si f est bornée et si l'ensemble* $H(f) = \{f_\tau : \tau \in \mathbb{G}\}$ *est relativement compact pour la topologie de la convergence uniforme.*

En adaptant les démonstrations des théorèmes 2 et 3 on obtient sans difficulté:

THEOREME 2U: (Caractérisation topologique ponctuelle de l'uniforme presque-périodicité)

Si $id_p(f)$, $p \le n$, *et si* $f \in \mathbb{R}^{\Lambda \times \mathbb{G}}$ *alors, f est presque-périodique uniformément sur* Λ $\Leftrightarrow$

$\forall \sigma, \tau \in \mathbb{G}\ ({}^{p}f_\sigma \neq \#$ et ${}^{p}f_{\sigma+\tau} = {}^{p}({}^{p}f_\sigma)_\tau\ )$.

THEOREME 3U : (Caractérisation géométrique de l'uniforme presque-périodicité.)

Si $id_P(f)$ alors f est presque-périodique uniformément sur Λ si et seulement si l'ensemble (externe) $\Pi_p(f) = \{\tau \in \mathbb{G} \,/\, \forall (x,t) \in \Lambda \times \mathbb{G} \;\; f(x,\tau+t) \overset{p}{\sim} f(x,t)\}$ est relativement dense dans $\mathbb{G}$.

Définition 4:

Nous dirons qu'une fonction $f \in X$ est presque-automorphe si elle est élément de l'ensemble $\mathbb{PA} = st\{ f \in X : \forall \sigma \in \mathbb{G} \;\; {}^1({}^1f_\sigma)_{-\sigma} = f \}$.

On a donc, pour une fonction standard : $f \in \mathbb{PA} \Leftrightarrow \forall \sigma \in \mathbb{G} \;\; {}^1({}^1f_\sigma)_{-\sigma} = f$.

Remarque 4:

Il découle immédiatement de la définition, que si k est un nombre réel et si f et g sont deux fonctions presque-automorphes, alors f+g, kf, |f| et max(f,g) sont presque-automorphes.

Nous allons montrer que même si f n'est pas standard, on peut caractériser les éléments de $\mathbb{PA}$ a l'aide des ombres.

THEOREME 4:

Si $id_P(f)$ et si $p < q \leq n$, alors on a :

$f \in \mathbb{PA} \Leftrightarrow [\, \forall \sigma \in \mathbb{G} \;\; {}^p({}^pf_\sigma)_{-\sigma} = f \,] \Leftrightarrow [\, \forall^q \sigma \in \mathbb{G} \;\; {}^p({}^pf_\sigma)_{-\sigma} = f \,]$.

<u>*Démonstration:*</u>

Il suffit d'appliquer le principe de transfert externe ∎

Remarque 7:

Toute fonction presque-périodique est presque-automorphe. Il suffit de le démontrer pour une fonction standard. Pour cela on utilisera le théorème 2 avec $\sigma = \tau$. La réciproque est fausse.

Voici un exemple trés simple, dû à Furstemberg et donné sans démonstration par W.A. Veech dans [37], d'une fonction presque-automorphe qui n'est pas presque-périodique. Son comportement, toutefois, est loin d'être aberrant.

Soit $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ la fonction $n \to \mathrm{SGN}(\sin(n))$. On a donc $f(n) = 1$ si $\sin(n) > 0$, $f(n) = -1$ si $\sin(n) < 0$ et $f(0) = 0$. La situation $\sin(n) = 0$ n'a lieu que pour la seule valeur zéro!

a). Montrons que f est presque-automorphe. La fonction f est standard; l'égalité ${}^{1}({}^{1}f_m)_{-m} = f$ étant trivialement vérifiée pour m standard, il sufit de la vérifier pour m non standard, ce qui équivaut à $|m|$ infiniment grand. Soit donc m tel que $|m|$ soit infiniment grand.

$\forall^{1} n \quad {}^{1}f_m(n) = {}^{1}\mathrm{SGN}(\sin(n+m)) = \mathrm{SGN}(\sin(n+m)) = f(n+m).$

Soit α un nombre réel standard tel que $\sin(\alpha) = {}^{1}\sin(m)$; un tel α existe parce que $\sin(m)$ est dans l'intervalle compact $[-1\ 1]$. On a alors aussi $\cos(\alpha) = {}^{1}\cos(m)$ et, en utilisant les identités trigonométriques classiques, on obtient:

$$\forall^{1} n \in \mathbb{Z} \quad \sin(n+m) \sim \sin(n+\alpha) \quad (1).$$

De la formule (1) on tire que :

$${}^{1}f_m(n) = \mathrm{SGN}(\sin(n+m)) = \mathrm{SGN}(\sin(n+\alpha)) \quad (2),$$

dans tous les cas ou $\sin(n+\alpha) \neq 0$. La situation où $\sin(n+\alpha) = 0$ est exceptionnelle et ne se produit, à cause de l'irrationnalité de π, que pour une valeur standard n_o de la variable au plus. Les deux fonction qui apparaissent dans l'égalité des termes extrêmes de (2) étant standard on a, par transfert:

$\forall\, n \in \mathbb{Z} - \{n_o\}\ {}^{1}f_m(n) = \mathrm{SGN}(\sin(n+\alpha))$ d'où l'on tire, en particulier,

$$({}^{1}f_m)_{-m}(n) = \mathrm{SGN}(\sin(n-m+\alpha)) \qquad (3).$$

Montrons que : $\quad \forall^{1} n \in \mathbb{Z} \quad \sin(n-m+\alpha) \sim \sin(n) \qquad (4).$

Soit n standard on a les égalités,

$$\begin{aligned}\sin(n+m+\alpha) &= \sin(n-m)\cos(\alpha) + \cos(n-m)\sin(\alpha)\\ &= [\sin(n)\cos(m) - \sin(m)\cos(n)]\cos(\alpha) + [\cos(n)\cos(m) + \sin(m)\sin(n)]\sin(\alpha)\\ &\sim [\sin(n)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\cos(n)]\cos(\alpha) + [\cos(n)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\sin(n)]\sin(\alpha)\\ &= \sin(n)(\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)) = \sin(n).\end{aligned}$$

Comme $|m|$ est infiniment grand on a $n\text{-}m \neq n_o$ donc, $\sin(n-m+\alpha) \neq 0$ d'ou l'on tire, compte tenu de (3) et (4) :

$\forall^1 n \in \mathbb{Z}$ $({}^1f_m)_{-m}(n)$ = SGN (sin (n-m+α)) = SGN(sin(n)) = f(n) ce qui s'écrit aussi,

${}^1({}^1f_m)_{-m} = f$ et montre que f est presque-automorphe.

Montrons que f n'est pas presque-périodique. Les entiers étant densément répartis modulo 2π, il existe un entier non nul m tel que sin(m) ${}^1\!\sim 0$ et cos(m) ${}^1\!\sim 1$. On en déduit que pour tout n standard, sin(n+m) ${}^1\!\sim$ sin(n) .

$\forall^1$ n $\neq$ 0 SGN(sin(n+m)) = SGN(sin(n)) car sin(n) $\neq$ 0 donc, en utilisant le principe de tranfert, on voit que, si on pose ε = SGN(sin(m)) on a, pour tout n standard ou non :

$$({}^1f_m)(n) = \begin{cases} f(n) \text{ si } n \neq 0 \\ \varepsilon \quad \text{si } n = 0 . \end{cases}$$

Pour montrer que

${}^{1u}f_m \neq {}^1f_m$ il suffit de voir que ${}^{1u}f_m(-m) = 0$ et ${}^1f_m(-m) = f(-m) \neq 0$, car nous avons pris garde à prendre m non nul !

Les fonctions presques automorphes non presque-périodiques restent des fonctions assez régulières et se rencontrent assez fréquemment dans la pratique. Dans beaucoup de cas les équations différentielles presque-périodiques produisent des solutions presque-automorphes .

THEOREME 5:

Toute fonction presque-automorphe est bornée.

Démonstration:

Supposons f standard et non non bornée, il existe alors un réel σ tel que ${}^1f(\sigma) = \#$. Cela implique ${}^1f_\sigma = \#$, $({}^1f_\sigma)_{-\sigma} = \#$, ${}^1({}^1f_\sigma)_{-\sigma} = {}^1\# = \# \neq f$ donc, f n'est pas presque-automorphe ∎

Le théorème suivant donne une autre manière de produire des fonctions presque-automorphes.

THEOREME 6:

Soit $f \in \mathbb{R}^{\Lambda \times \mathbb{G}}$ une fonction presque-périodique uniformément sur Λ, $\mathcal{F} = \{f(x,.) : x \in \Lambda\}$. Alors, toute fonction $g \in$ adh $\mathcal{F}$ est presque automorphe.

<u>*Démonstration:*</u>

$\forall^1 g \in X \ \ (g \in \text{adh}\, \mathcal{F} \ \Leftrightarrow \exists f(x,.) \in \mathcal{F} \ \ {}^2f(x,.) = g).$

$\forall^2 \sigma \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{array}{c}
{}^2f(x,.) = g \\
\Downarrow \\
{}^2f_\sigma(x,.) = g_\sigma \qquad \text{parce que } \sigma \text{ est idéal d'ordre 2} \\
\Downarrow \\
{}^1({}^2f_\sigma(x,.)) = \ {}^1f_\sigma(x,.) = {}^1g_\sigma \\
\Downarrow \\
{}^1({}^1f_\sigma(x,.))_{-\sigma} = {}^1({}^1g_\sigma)_{-\sigma}
\end{array}
$$

f uniformément preque-périodique implique que ${}^1({}^1f_\sigma(x,.))_{-\sigma} = {}^1f = g$ donc ,

$$g = {}^1({}^1g_\sigma)_{-\sigma}$$

D'aprés le théorème 4, cela implique que g est presque automorphe.

Remarque 8:

Dans la démonstration précédente, nous n'avons utilisé que le fait que f est uniformément presque-automorphe sur Λ. En réalité, Veech a établi dans [37] , à partir de définitions classiques de la presque-périodicité, de la presque périodicité uniforme sur un ensemble et de la presque automorphie équivalentes aux notres, qu'une fonction f de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$ est presque-automorphe <u>si et seulement si</u> elle est la limite ponctuelle d'un filet de fonctions presques-périodiques, uniformément presque-automorphes.

Le théorème suivant donne quelques caractérisations de la presque-automorphie qui, bien que faisant intervenir des ombres de plusieurs ordres sont parfois d'une utilisation plus facile que la définition 4.

THEOREME 7:

Si $f \in X$ et $id_1(f)$, alors les conditions a), b), c), d) et e) ci-dessous, sont équivalentes :

a) $f \in \mathbb{P}\mathbb{A}$,

b) $\forall^2 \tau \in \mathbb{G}\ [\ {}^1f_\tau \neq \#$ et $\forall\ \sigma \in \mathbb{G}\ ({}^2f_\sigma = {}^1f_\tau \Rightarrow {}^1f_{\sigma-\tau} = f)\ ]$,

c) $\forall^2 \tau \in \mathbb{G}\ [\ {}^1f_\tau \neq \#$ et $\exists\ \sigma \in \mathbb{G}\ ({}^2f_\sigma = {}^1f_\tau$ et ${}^1f_{\sigma-\tau} = f)\ ]$,

d) $\forall\ \tau \in \mathbb{G}\ [\ {}^1f_\tau \neq \#$ et $\forall\ \sigma \in \mathbb{G}\ \ \forall^3 \tau' \in \mathbb{G}\ ({}^3f_\sigma = {}^2f_{\tau'} = {}^1f_\tau \Rightarrow {}^1f_{\sigma-\tau'} = f)\ ]$.

On peut ajouter à ces conditions toutes celles qui peuvent en être déduites par un transfert externe.

<u>Démonstration:</u>

a) $\Rightarrow$ b) : $\forall^2 \tau$ (f bornée et standard) $\Rightarrow$ ${}^1f_\tau \neq \#$.

$\forall\sigma\ (\ ({}^2f_\sigma = {}^1f_\tau \Rightarrow {}^2f_{\sigma-\tau} = ({}^2f_\sigma)_{-\tau} = ({}^1f_\tau)_{-\tau} \Rightarrow {}^1({}^2f_{\sigma-\tau}) = {}^1f_{\sigma-\tau} = {}^1({}^1f_\tau)_{-\tau} = f$

La dernière égalité exprime la définition des fonctions presque-automorphes. Les autres découlent des règles de manipulation des ombres énumérées page 81.

b) $\Rightarrow$ c): $\forall^2 \tau$ b) $\Rightarrow$ ${}^1f_\tau \neq \#$. On a donc ${}^1f_\tau \in$ adh (H(f)) cela implique qu'il existe un $f_\sigma \in H(f)$ tel que ${}^2f_\sigma = {}^1f_\tau$. Pour un tel σ, b) $\Rightarrow$ ${}^1f_{\sigma-\tau} = f$.

c) $\Rightarrow$ a): On utilisera le théorème 4. Donnons nous un élément τ de $\mathbb{G}$ tel que $id_2(\tau)$. D'aprés c) on a ${}^1f_\tau \neq \#$ et $\exists\ \sigma \in \mathbb{G}\ ({}^2f_\sigma = {}^1f_\tau$ et ${}^1f_{\sigma-\tau} = f$). Pour ce σ là on a :

$$f = {}^1f_{\sigma-\tau} = {}^1({}^2f_{\sigma-\tau}) = {}^1({}^2f_\sigma)_{-\tau} = {}^1({}^1f_\tau)_{-\tau}.$$

Nous venons d'établir l'équivalence de a), b) et c). Montrons l'équivalence de a) et d).

a) $\Rightarrow$ d) : Supposons a). $f \in \mathbb{P}\mathbb{A}$ implique d'après b) :

$$\forall^2 \tau' \in \mathbb{G}\ \forall\ \sigma \in \mathbb{G}\ ({}^2f_\sigma = {}^1f_{\tau'} \Rightarrow {}^1f_{\sigma-\tau'} = f)\ ,$$

ce qui donne par (T) :

$$\forall^3 \tau' \in \mathbb{G}\ \forall\ \sigma \in \mathbb{G}\ ({}^3f_\sigma = {}^2f_{\tau'} \Rightarrow {}^2f_{\sigma-\tau'} = f)\ ,$$

d) est donc vérifié.

d) $\Rightarrow$ a) : Pour tout τ tel que ${}^1f_\tau \neq \#$ il existe, d'aprés le théorème 4 du chapitre II, un élément τ' idéal d'ordre 3 tel que ${}^2({}^1f_\tau)_{-\tau'} = {}^1({}^1f_\tau)_{-\tau}$ et ${}^2f_{\tau'} = {}^1f_\tau$ car $({}^1({}^1f_\tau)_{-\tau} . {}^1f_\tau)$ est dans l'adhérence de $\{(({}^1f_\tau)_{-\sigma}, f_\sigma) : \sigma \in \mathbb{G}\}$. De même, il existe un σ tel que ${}^3f_\sigma = {}^2f_{\tau'}$. Si d) est vrai on a : $f = {}^1f_{\sigma-\tau'} = {}^1({}^3f_{\sigma-\tau'}) = {}^1({}^3f_\sigma)_{-\tau'} = {}^1({}^1f_\tau)_{-\tau'} = {}^1({}^2({}^1f_\tau)_{-\tau'} = {}^1({}^1({}^1f_\tau)_{-\tau} = {}^1({}^1f_\tau)_{-\tau}$.

donc, f est presque automorphe ∎

THEOREME 8:

$\mathbb{PA}$ est fermé pour la topologie de la convergence uniforme.

<u>*Démonstration:*</u>

Il suffit de montrer que si $id_2(f)$, $f \in \mathbb{PA}$ et ${}^{1u}f = g$, alors $g \in \mathbb{PA}$. D'après le théorème 5, f est bornée et, d'après la règle 9, g est bornée; on peut donc, pour tout s, parler de ${}^pf_s$ dès que $p \geq 2$ et de ${}^pg_s$ pour tout p. Soit $\tau \in \mathbb{G}$, montrons que ${}^1({}^1g_\tau)_{-\tau} = g$.

Comme $({}^1g_\tau, {}^1({}^1g_\tau)_{-\tau}) \in$ adh $\{(g_\tau, ({}^1g_\tau)_{-\tau})\}$ dans $X \times X$ pour la topologie produit des topologies de la convergence simple on a : $\exists^3\tau' \in \mathbb{G}$ $({}^2g_{\tau'}, {}^2({}^1g_\tau)_{-\tau'}) = ({}^1g_\tau, {}^1({}^1g_\tau)_{-\tau})$.

De même,il existe $\sigma \in \mathbb{G}$ tel que $({}^3f_\sigma, {}^3g_\sigma) = ({}^2f_{\tau'}, {}^2g_{\tau'})$. Comme f est presque automorphe, il découle du théorème 7 que ${}^2f_{\sigma-\tau'} = f$. Si on prend les ombres d'ordre un des deux membres on obtient $g = {}^1f = {}^1({}^2f_{\sigma-\tau'}) = {}^1f_{\sigma-\tau'} = {}^1g_{\sigma-\tau'}$ (On a utilisé les règles 7 et 12). Donc: ${}^1g_{\sigma-\tau'} = g$.

Cette dernière égalité implique que g est presque-automorphe car,

${}^1g_{\sigma-\tau'} = {}^1({}^3g_{\sigma-\tau'}) = {}^1({}^3g_\sigma)_{-\tau'} = {}^1({}^2g_{\tau'})_{-\tau'} = {}^1({}^1g_\tau)_{-\tau'} = {}^1({}^2({}^1g_\tau)_{-\tau'}) = {}^1({}^1({}^1g_\tau)_{-\tau}) = {}^1({}^1g_\tau)_{-\tau}$ ∎

3 - Caractérisation géométrique des fonctions presque-automorphes.

Si ε est un réel strictement positif et F un ensemble fini on posera:

$A(f,F,\varepsilon) = \{ \tau \in \mathbb{G} \ / \ \forall t \in F \ | f(t+\tau) - f(t) | < \varepsilon \}$.

On posera également $A(f) = \{ \tau \in \mathbb{G} \ / \ \forall^1 t \in \mathbb{G} \ / \ f(t+\tau) \sim f(t) \}$.

Remarques:

9- Si f est continue et si il existe un $\tau \in A(f)$ tel que ${}^1\tau$ est différent de # et de 0 alors, f est ${}^1\tau$-périodique (Démonstration évidente, on peut reprendre celle de T.Sari dans [35] pour les fonctions presque-périodiques) .

10- La propriété $\sigma \in A(f)$ équivaut à ${}^1f_\sigma = f$. On en déduit que si f est presque-automorphe alors pour tout $\sigma \in \mathbb{G}$ si $\sigma \in A(f)$, $-\sigma \in A(f)$. En effet ${}^1f_{-\sigma} = {}^1({}^1f_\sigma)_{-\sigma} = f$.

11- Si f est presque-périodique, pour tout $\tau \in A(f)$ on a ${}^{1u}f_\tau \neq \#$ et il découle de la règle 4 que ${}^{1u}f_\tau = {}^1f_\tau = f$ donc, $\tau \in \Pi(f)$ et $A(f) \subset \Pi(f)$, comme l'inclusion inverse est imédiate on a : $A(f) = \Pi(f)$.

12- Si f est presque-automorphe, nous savons démontrer que A(f) est stable pour l'addition et donc, compte tenu de la remarque 10, que A(f) est un groupe. La démonstration qui est esquissée dans la remarque13 à la fin de ce chapitre, ne nous satisfait pas, car elle utilise une démonstration d' analyse classique , avec des filets, donnée par Veech dans [37].

<u>Problème</u>: Trouver une démonstration compacte de la propriété que A(f) est un groupe quand $f \in \mathbb{PA}$.

Une autre caractérisations externe de la relative densité de A(f) :

THEOREME 9:

Si p = 2, 3,...et si f est standard alors,

A(f) est relativement dense dans $\mathbb{G} \Leftrightarrow \forall \tau \in \mathbb{G}\ \exists^p \sigma \in \mathbb{G}\ \tau - \sigma \in A(f)$.

LEMME 1:

Si A est une partie interne de $\mathbb{G}$, p = 2, 3,... et si id2 (A) alors,

A relativement dense dans $\mathbb{G} \Leftrightarrow \forall s \in \mathbb{G}\ \exists^p t \in \mathbb{G}\ s - t \in A$

<u>Démonstration:</u>

A est R.D. dans $\mathbb{G} \Leftrightarrow \exists^{fin} F \subset \mathbb{G}\ \forall s \in \mathbb{G}\ \exists t \in F\ s\text{-}t \in A$ donc

A est nonR.D. dans $\mathbb{G} \Leftrightarrow \forall^{fin} F \subset \mathbb{G}\ \exists s \in \mathbb{G}\ \forall t \in F\ s\text{-}t \notin A$

$\Leftrightarrow \forall^{pfin} F \subset \mathbb{G}\ \exists s \in \mathbb{G}\ \forall t \in F\ s\text{-}t \notin A$ (Principe de transfert)

$\Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{G}\ \forall^p t \in \mathbb{G}\ s\text{-}t \notin A$ (Principe d'idéalisation) donc:

A est R.D. dans $\mathbb{G} \Leftrightarrow \forall s \in \mathbb{G}\ \exists^p t \in \mathbb{G}\ s\text{-}t \in A$. ∎

Fixons un $\varepsilon_o > o$ et un ensemble fini F_O tels que, $\varepsilon_o \simeq 0$, F_O contient tous les standard et id2 (ε_o, F_O). Soit $A_O(f) = A(f, \varepsilon_o, F_O)$ on a alors,

LEMME 2:

Si f est standard, $A(f)$ relativement dense dans $\mathbb{G}$ $\Leftrightarrow$ $A_0(f)$ relativement dense dans $\mathbb{G}$ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > o\ \forall^{fin} F \subset \mathbb{G}\ A(f,F,\varepsilon)$ relativement dense dans $\mathbb{G}$.

<u>*Démonstration.*</u>

Elle découle des inclusions $A_0(f) \subset A(f) \subset A(f,F,\varepsilon)$ pour F et ε standard et du principe de transfert.

<u>*Démonstration du théorème 9*</u>: ($\Rightarrow$): Il découle des lemmes 1 et 2 que: $A(f)$ R.D. $\Leftrightarrow$ $A_0(f)$ R.D. $\Leftrightarrow$ $(\forall s \in \mathbb{G}\ \exists^p t \in \mathbb{G}\ s\text{-}t \in A_0(f)) \Rightarrow \forall s \in \mathbb{G}\ \exists^p t \in \mathbb{G}\ s\text{-}t \in A(f)$. ($\Leftarrow$): $(\forall s \in \mathbb{G}\ \exists^p t \in \mathbb{G}\ s\text{-}t \in A(f)) \Rightarrow \forall^{1\,fin} F \subset \mathbb{G}\ \forall^1 \varepsilon > 0\ \forall s \in \mathbb{G}\ \exists^p t \in \mathbb{G}\ s\text{-}t \in A(f,F,\varepsilon)$ car, pour F et ε standard $A(f) \subset A(f,F,\varepsilon)$. Donc, d'aprés le lemme 1, $A(f,F,\varepsilon)$ est relativement dense dans $\mathbb{G}$ pour tous F et ε standard et pour tous F, ε grâce au principe de transfert. On conclut en utilisant le lemme 2. ∎

THEOREME 10:

Si f est presque-automorphe et standard alors $A(f)$ est relativement dense dans $\mathbb{G}$.

<u>*Démonstration:*</u>

Pour tout $\sigma \in \mathbb{G}$, f presque-automorphe implique ${}^2({}^2f_\sigma)_{-\sigma} = f$. ${}^2({}^2f_\sigma)_{-\sigma} = f$ implique: $\exists\,\tau\ \forall t \in F_0\ |({}^2f_\sigma)_{-\tau}(t) - f(t)| < \varepsilon_0$ (prendre $\sigma = \tau$). Par le principe de transfert on obtient : $\exists^2\tau\ \forall t \in F_0\ |({}^2f_\sigma)_{-\tau}(t) - f(t)| < \varepsilon_0$. Or, $\forall t \in F_0\ |({}^2f_\sigma)_{-\tau}(t) - f(t)| < \varepsilon_0$ implique ${}^1({}^2f_\sigma)_{-\tau} = f$, on a donc ${}^1f_{\sigma-\tau} = {}^1({}^2f_{\sigma-\tau}) = {}^1({}^2f_\sigma)_{-\tau} = f$. On conclut en utilisant le théorème 9 ∎

THEOREME 11:

Si f est standard bornée et si il existe un ensemble idéal d'ordre 2 , A_0, relativement dense dans $\mathbb{G}$ et tel que $A_0 - A_0 \subset A(f)$ alors, f est presque-automorphe.

<u>*Démonstration:*</u>

Soit $\tau \in \mathbb{G}$, idéal d'ordre trois. Comme f est standard et bornée on a ${}^2f_\tau \neq \#$. On cherche $\sigma \in \mathbb{G}$ tel que ${}^3f_\sigma = {}^2f_\tau$ et $\sigma\text{-}\tau \in A(f)$ (Théorème 7). Comme on a A_0 relativement dense dans $\mathbb{G}$ et id2 (A_0), alors on a, d'aprés le lemme 1 du théorème 9 : $\exists^2\tau' \in \mathbb{G}$ tel que $\tau\text{-}\tau' \in A_0$.

Soit $A_O' = \{\tau'\} + A_O$ et $\mathcal{F}_O = \{ f_\sigma : \sigma \in A_O' \}$. On a ${}^2f_\tau \in \text{adh}\, \mathcal{F}_O$, comme $\mathcal{F}_O$ est idéal d'ordre deux, il existe un $\sigma \in A_O'$ el que ${}^3f_\sigma = {}^2f_\tau$. Il est aisé de constater que ce σ là convient car $\sigma\text{-}\tau = (\sigma\text{-}\tau') - (\tau'\text{-}\tau)$, $(\sigma\text{-}\tau') \in A_O$, $(\tau'\text{-}\tau) \in A_O$ et $Ao - Ao \subset A(f)$ ∎

Nous avons donné plus haut un exemple f de fonction presque-automorphe non presque-périodique. Le lecteur souhaitera peut être un exemple dans lequel f est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Le théorème suivant nous permet de construire un tel exemple.

THEOREME 12:

Toute fonction presque automorphe de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ peut être prolongée en une fonction presque-automorphe et continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

<u>*Démonstration:*</u>

Si $x \in \mathbb{R}$, nous noterons n_x le plus grand entier relatif tel que $n_x \le x < n_x+1$. Donnons nous une fonction $f_O \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, presque-automorphe. Soit la fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ obtenue en "bouchant linéairement les trous" du graphe de f_O. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

(1): $f(x) = (x\text{-}n_x)f_O(n_x+1) - (n_x+1\text{-}x)f_O(n_x)$.

Pour montrer que f est presque-automorphe il suffira d'établir l'inclusion $A(f_O) \subset A(f)$. Donnons nous $\tau \in A(f_O)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $n_{x+\tau} = n_x + \tau$ parce que $\tau \in \mathbb{Z}$ donc,

(2): $f(x+\tau) = (x\text{-}n_x)f_O(n_x+1+\tau) - (n_x+1\text{-}x)f_O(n_x+\tau)$.

En retranchant membre à membre les égalités (1) et (2) on obtient,

$f(x+\tau) - f(x) = (x\text{-}n_x)[f_O(n_x+1+\tau) - f_O(n_x+1)] - (n_x+1\text{-}x)\,[f_O(n_x+\tau) - f_O(n_x)]$.

Comme $|x\text{-}n_x| \le 1$ et $|n_x+1\text{-}x| \le 2$ et que x standard implique n_x et n_x+1 standard on obtient, pour tout x standard $f(x+\tau) - f(x) \overset{1}{\sim} 0$ donc, $\tau \in A(f)$. ∎

Equivalence de notre notion de presque-automorphie avec la définition classique.

Bien que nous n'utiliserons probablement jamais la caractérisation de Bochner de la presque-automorphie nous allons nous assurer qu'il s'agit bien de la même notion que celle qui a fait l'objet de la définition 4. Nous aurons donc l'énoncé suivant :

Si f est une application de $\mathbb{G}$ dans $\mathbb{R}$ les conditions suivantes sont équivalentes:

i) f est presque-automorphe,

ii) pour tout filet (ai) dans $\mathbb{G}$ il existe un sous filet (bi) de (ai) et une fonction $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{G}}$ tels que $\lim_{i \to +\infty}(f_{bi}) = g$ et $\lim_{i \to +\infty}(g_{-bi}) = f$ (les limites sont les limites ponctuelles).

Démonstration:

Il suffit de la faire pour f standard.

i) $\Rightarrow$ ii).

Si (ai) est un filet dans $\mathbb{G}$ d'aprés le théorème du produit de Tychonoff il existe un sous filet (bi) de (ai) et une fonction $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{G}}$ tels que $\lim_{i \to +\infty}(f_{bi}) = g$. Cela équivaut à, pour tout i infiniment grand, ${}^{1}f_{bi} = g$. Comme f est presque-automorphe on aura, toujours pour i infiniment grand, ${}^{1}({}^{1}f_{bi})_{-bi} = {}^{1}g_{-bi} = f$ donc $\lim_{i \to +\infty}(g_{-bi}) = f$.

ii) $\Rightarrow$ i).

Soit $\sigma \in \mathbb{G}$. Si f vérifie ii) alors $|f|$ est majoré (par un standard) sinon il existerait une suite (a_n) dans $\mathbb{G}$ telle que $\lim_{n \to +\infty}(|f_{an}|) = +\infty$. Pour aucun sous filet (b_n) de (a_n) et aucune fonction g on ne peut avoir $\lim_{n \to +\infty}(f_{bn}(0)) = g(0)$ fini. On en déduit que ${}^{1}f_\sigma \neq \#$. Soit $E = \{f_\sigma, ({}^{1}f_\sigma)_{-\sigma}\}$. Si f est majoré par le standard M, il en est de même de $({}^{1}f_\sigma)_{-\sigma}$ donc, ${}^{1}({}^{1}f_\sigma)_{-\sigma} \neq \#$. On a $({}^{1}f_\sigma, {}^{1}({}^{1}f_\sigma)_{-\sigma}) \in$ adh E dans $H(f) \times H({}^{1}f_\sigma)$, pour la topologie de la convergence ponctuelle donc, il existe un filet (ai) dans $\mathbb{G}$ tel que

$$\lim_{i \to +\infty}(f_{ai}, ({}^{1}f_\sigma)_{-ai}) = ({}^{1}f_\sigma, {}^{1}({}^{1}f_\sigma)_{-\sigma}).$$

Si (bi) est un sous filet de (ai) vérifiant ii) alors, on a :

$$g = \lim_{i \to +\infty}(f_{bi}) = {}^{1}f_\sigma \text{ et } \lim_{i \to +\infty}(g_{-bi}) = \lim_{i \to +\infty}(({}^{1}f_\sigma)_{-bi}) = {}^{1}({}^{1}f_\sigma)_{-\sigma} = f \quad \blacksquare$$

Remarque 13 :

Du lemme 2-1-2 dans [37], énoncé,pour $\mathbb{G}$ pas forcément commutatif, on peut tirer l'énoncé suivant en revenant au cas commutatif et à nos notations :

Si f est presque -automorphe alors,

$\forall\ \varepsilon > 0\ \forall^{\text{fini}}\ F \subset \mathbb{G}\ \exists\ \varepsilon' > 0\ \exists^{\text{fini}}\ F' \supset F\ [A(f,F',\varepsilon') - A(f,F',\varepsilon') \subset A(f,F,\varepsilon)]$. On en déduit facilement pour f standard, compte tenu de l'inclusions $A(f) \subset A(f,F,\varepsilon)$ pour tout F fini standard et tout ε standard positif, que <u>A(f) est un groupe</u>.

Tout le travail que nous venons de développer se généralise aisément aux cas où $\mathbb{G}$ n'est pas commutatif au prix d'une légère complication.

Chapitre IV - Consistance relative de RIST

A- Extensions successives ajustées d'une superstructure .

Pour établir la consistance relative de RIST, nous avons besoin de construire une suite intuitivement finie d' extensions $S \to {}^2S \to \cdots {}^pS \to \cdots {}^wS$, d'un ensemble S convenablement choisi, qui satisfont à de bonnes propriétés. Nous anticiperons en annonçant déjà que ${}^2S$ sera la U-ultrapuissance de S selon un ultrafiltre U correctemment choisi, que ${}^3S$ sera la $^*U$-*ultrapuissance de ${}^2S$, ${}^4S$ sera la $^{**}U$-**ultrapuissance de ${}^3S$ etc..... Les notions que nous venons d'évoquer , ultrapuissances et *ultrapuissances d'un ensemble, saturation etc.. sont précisées ci-dessous.

Notations et définitions.

Dans ce qui suit, S sera une *superstructure complète bâtie sur un ensemble E.* Rappelons ce qu'est la superstructure complète bâtie sur un ensemble E.

L'ensemble E étant donné on définit inductivement les ensembles:

$$E_o = E \text{ , } E_1 = E_0 \cup \mathcal{P}(E_o),\ldots\ldots, E_n = E_{n-1} \cup \mathcal{P}(E_{n-1}) \ldots\ldots$$

On pose $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_n$, S est la superstructure complète bâtie sur E on a :

$$E_o \subset E_1 \subset \ldots. E_n \subset E_{n+1} \ldots.. \subset S.$$

On a aussi la propriété :

Si $x \in E_n$, avec $n > 0$, si $x \notin E_0$ et si $t \in x$, alors $t \in E_{n-1}$.

<u>*Démonstration*</u>:

Supposons $x \in E_n - E_0$. Soit n_o le plus petit entier tel que $x \in E_{n_o}$; on a : $x \in E_{n_o} \wedge x \notin E_{n_o-1}$ donc, $x \in \mathcal{P}(E_{n_o-1})$. On en déduit que, si $t \in x$ alors $t \in E_{n_o-1}$. Comme $E_{n_o-1} \subset E_{n-1}$, on a $t \in E_{n-1}$.

Avant de poursuivre, remarquons qu'il n'était pas strictement indispensable, pour notre preuve de consistance d'étendre une superstructure complète cependant , outre que nous avons trouvé plus confortable de procéder ainsi, nous pensons que ces extensions présenterons une utilité pour des applications ultérieures, non abordées dans ce travail. Nous pensons, en particulier, à une éventuelle généralisation des méthodes de complétions (hull methods) qui ont été appliquées dans [5,12,13,14,22,30,31].

Nous noterons $\mathcal{F}$ l'ensemble intuitif des formules du langage de ZFC ayant tous leurs quantificateurs bornés (toutes leurs variables liées sont astreintes à évoluer dans un ensemble fixé). Si $A(x_1,\dots,x_n)$ est une formule de $\mathcal{F}$ ayant au plus n variables libres $x_1,\dots,x_n$, si $a_1,\dots,a_n$ sont des ensembles et R une relation binaire nous noterons $A_R(a_1,\dots,a_n)$ la formule obtenue en remplaçant chaque occurence des x_i par a_i et chaque occurence de $\in$ par la relation R.
Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ deux ensembles, R et R' deux relations binaires sur $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ respectivement, nous poserons :

Définition 1:
Nous dirons que ($\mathcal{M}'$, R') est une i-extension de ($\mathcal{M}$, R) ou, plus simplement, une extension de ($\mathcal{M}$,R) si il existe une injection, i, de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}'$ telle que, pour toute formule $A(x_1,\dots,x_n)$ de $\mathcal{F}$, avec n variables libres et tous $a_1,\dots,a_n$ dans $\mathcal{M}$: $A_R(a_1,\dots,a_n) \Leftrightarrow A_{R'}(i(a_1),\dots,i(a_n))$.

Dans ce cas, nous écrirons : $(\mathcal{M},R) \rightarrow_i (\mathcal{M}',R')$ ou, $(\mathcal{M},R) \rightarrow (\mathcal{M}',R')$ si aucune ambiguité n'est à craindre. Si R et R' sont les relations d'appartenance sur $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ respectivement, on écrira plus simplement $\mathcal{M} \rightarrow_i \mathcal{M}'$ ou, $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$. Si on a une extension $(\mathcal{M},R) \rightarrow_i (\mathcal{M}',R')$, si $A(x_1,\dots,x_n)$ est une formule de $\mathcal{F}$, et si $a_1,\dots,a_n \in \mathcal{M}$, on dira que l'énoncé $A_{R'}(i(a_1),\dots,i(a_n))$ est le <u>transféré dans ($\mathcal{M}'$,R')</u> de $A_R(a_1,\dots,a_n)$ ou que $A_{R'}(i(a_1),\dots,i(a_n))$ a été obtenu en appliquant à $A_R(a_1,\dots,a_n)$ la <u>propriété de transfert</u>.

Nous prendrons la liberté, tout au long de ce chapitre, de désigner par le même symbole "$\in$", le prédicat d'appartenance de la théorie des ensembles, et les relations d'appartenance sur $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$.
Supposons construite une suite ${}^2S$, ${}^3S$, ..., ${}^pS$, ..., ${}^wS$ ... d' ensembles, telle que :

$${}^1S = S \rightarrow {}^2S \rightarrow {}^3S \cdots\cdots \rightarrow {}^wS \rightarrow \cdots$$

Si i et j sont tels que $i \leq j \leq w$, nous noterons, pour tout $x \in {}^{i}\mathbb{S}$, ${}^{j}x$ l'image de x dans ${}^{j}\mathbb{S}$ si $i < j$, et nous poserons ${}^{i}x = x$. On aura donc, si $i \leq j \leq k \leq w$, pour tout $x \in {}^{i}\mathbb{S}$, ${}^{k}({}^{j}x) = {}^{k}x$.

Définition 2:

Si A et B sont des éléments de ${}^{i}\mathbb{S}$, et si $f : A \to B$ est une application, nous dirons que f est une application ^{i}interne de A dans B si $f \in {}^{i}\mathbb{S}$.

Si Y et Z sont deux éléments de ${}^{i}\mathbb{S}$ on montre, en transférant dans ${}^{i}\mathbb{S}$ l'énoncé correspondant sur $\mathbb{S}$, qu'il existe un ensemble, élément de ${}^{i}\mathbb{S}$ que nous noterons $(Y^{Z})_{i\text{-int}}$ et tel que:

(1) $\forall f \in {}^{i}E \ (f \in (Y^{Z})_{i\text{-int}} \Leftrightarrow$ (f est une application ^{i}interne) de Z dans Y)) .

On démontre par transfert également que:

(2) Si A et B sont des éléments de ${}^{i}\mathbb{S}$ et si $i < j$ on a alors: $({}^{j}A^{{}^{j}B})_{j\text{-int}} = {}^{j}(A^{B})$

(3) $\forall n \in {}^{i}\mathbb{N} \ \exists! \mathbb{F}_n \in {}^{i}\mathbb{S} \ \forall t \in {}^{i}\mathbb{S} \ (t \in \mathbb{F}_n \Leftrightarrow (t \in {}^{i}\mathbb{N} \text{ et } t \,{}^{i}\!\leq n))$.

On peut alors poser les définitions suivantes:

Définition 3:

Si $F \in {}^{i}\mathbb{S}$, nous dirons que F est ^{i}<u>fini</u> si: $\exists n \in {}^{i}\mathbb{N} \ \exists f \in (\mathbb{F}_n{}^{F})_{i\text{-int.}}$ (f est une bijection).

On démontre par transfert, que si $i < j$ alors on a:

(4) $\forall F \in {}^{i}\mathbb{S}$ (F ^{i}fini $\Leftrightarrow$ ${}^{j}F$ ^{j}fini).

• Nous noterons par $\underline{\mathbb{P}}$ l'ensemble des poly-indices entiers non nuls, strictement croissants,

$$\underline{\mathbb{P}} = \{ (p_1, p_2, .. p_k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times ... \mathbb{N}^* : k \in \mathbb{N}^*, \ p_1 < p_2 < .. < p_k \}$$

• Si $P = (p_1, p_2, .. p_k) \in \underline{\mathbb{P}}$, si $A \in \mathbb{S}$, ${}^{P}\mathbb{S}$ et ${}^{P}A$ sont des écritures abrégées pour les produits cartésiens : ${}^{p_1}\mathbb{S} \times {}^{p_2}\mathbb{S} \times ... {}^{p_k}\mathbb{S}$) et ${}^{p_1}A \times {}^{p_2}A \times ... {}^{p_k}A$ respectivement . On aura donc, en particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, ${}^{(p)}\mathbb{S} = {}^{p}\mathbb{S}$ et ${}^{(p)}A = {}^{p}A$.

• Si $P = (p_1, p_2, .. p_k) \in \underline{\mathbb{P}}$, nous poserons $s(P) = \mathrm{Sup}\{ p_1, p_2, .. p_k \} = p_k$.

- Si $P = (p_1, p_2,.. p_k) \in \underline{\mathbf{P}}$, si $A = (A_1, A_2,\ldots,A_k)$ et $B = (B_1, B_2,\ldots,B_k)$ sont deux éléments de ${}^P\mathcal{S}$, nous écrirons $A \mid\subset B$ pour $(A_1 \subset B_1)$ et $(A_2 \subset B_2)$ et ... $(A_k \subset B_k)$,

  si $x = (x_1, x_2,\ldots,x_k)$, nous écrirons $x \mid\in B$ pour $(x_1 \in B_1)$ et $(x_2 \in B_2)$ et ... $(x_k \in B_k)$.
- Si $P = (p_1, p_2,.. p_k) \in \underline{\mathbf{P}}$, si $x = (x_1, x_2,\ldots,x_k) \in {}^P\mathcal{S}$ et si $j > s(P)$, nous poserons ${}^jx = ({}^jx_1, {}^jx_2,\ldots{}^jx_k)$.

Remarque: Dans ce qui précède, x n'est pas en général élément d'un ${}^i\mathcal{S}$ (avec $i \le j$), ${}^jx$ n'est donc pas l'image de x dans ${}^j\mathcal{S}$, pour une extension ${}^i\mathcal{S} \to {}^j\mathcal{S}$ toutefois, dans le cas où les coordonnées de x sont dans un même ${}^i\mathcal{S}$ avec $i \le j$, nous savons démontrer que $({}^jx_1, {}^jx_2,\ldots{}^jx_k)$ est l'image de $(x_1, x_2,\ldots,x_k)$ dans l'extension ${}^i\mathcal{S} \to {}^j\mathcal{S}$. La notation est donc cohérente.

Définition 4:

Si $P = (p_1, p_2,.. p_k) \in \underline{\mathbf{P}}$ et si $F = (F_1, F_2,.. F_k) \in {}^P\mathcal{S}$, nous dirons que F est ^{P}<u>fini</u> si chaque coordonnée F_i de F est ^{p_i}finie.

Définition 5:

Soient $P = (p_1, p_2,.. p_k) \in \underline{\mathbf{P}}$, si s et j sont des entiers tels que tels que $s(P) \le s \le j$, $B \in {}^P\mathcal{S}$ et $b \in {}^j\mathcal{S}$. Si $A \in {}^j\mathcal{S}$ et $b \subset (A)^{k+1}$, (on dira que b est une relation (k+1)-aire ^{j}interne sur A) nous dirons que b est ^{P}<u>concourante sur B dans ${}^s\mathcal{S}$</u> si,

$$\forall F \in {}^P\mathcal{S}\ (\ (F \mid\subset B \text{ et } F\ {}^P\text{fini}\ ) \Rightarrow \exists y \in {}^s\mathcal{S}\ \ \forall x \mid\in F\ ({}^jx, {}^jy) \in b\ ).$$

Pour P = (1) et s = j, nous dirons plus simplement que b est concourante sur B.

Avec b, B et A comme dans la définition précédente et $i < s \le j$ nous poserons:

Définition 6:

Nous dirons que b est B-idéalisable dans ${}^s\mathcal{S}$ si, $\exists y \in {}^sE\ \forall x \mid\in B\ ({}^jx, {}^jy) \in b$).

Soient des ensembles ${}^2\mathbf{M}$, ${}^3\mathbf{M}$, ..., ${}^p\mathbf{M}$...., ${}^w\mathbf{M}$, tels que ${}^1\mathbf{M} \rightarrow {}^2\mathbf{M} \rightarrow {}^3\mathbf{M} \cdots\cdots \rightarrow {}^w\mathbf{M}$.

On notera $\mathcal{F}(p)$ la famille de formules telle que :

si x et y sont des variables ou des éléments de ${}^w\mathbf{M}$, $(x \in y)$ est dans $\mathcal{F}(p)$,

si F et F' sont dans $\mathcal{F}(p)$ alors, $F \wedge F'$ et $\neg F$ sont dans $\mathcal{F}(p)$,

si $X \in {}^q\mathbf{M}$, avec $p \leq q \leq w$, et si la formule F(x), où x est une variable libre, est dans $\mathcal{F}(p)$, alors $\exists x \in X \;\; F({}^w x)$ est dans $\mathcal{F}(p)$. Nous dirons que les formules de $\mathcal{F}(p)$ sont des *p-formules sur* ${}^w\mathbf{M}$.

Le résultat principal est le suivant :

THEOREME :

Pour tout ensemble S*, il existe une suite d'ensembles,* ${}^2S$, ..., ${}^pS$...,${}^wS$,... *telle que :*

i) $S = {}^1S \rightarrow {}^2S \rightarrow {}^3S \cdots\cdots \rightarrow {}^wS \cdots$

ii) *Si* $P = (p_1, p_2,.. p_k) \in \underline{P}$ *et si* $1 \leq s(P) < s \leq j$ *, alors pour tout* $B \in {}^PS$ *et toute relation* *(k+1)-aire* $b \in {}^jS$ *:*

b est ^{P}*concourante sur B dans* ${}^sS$ *si et seulement si b est B-idéalisable dans* ${}^sS$*.*

iii) Si $p \leq w$ *et si E(y) est une p-formule sur* ${}^wS$ *avec y comme seule variable libre, alors :*

$$\forall Z \in {}^pS \;\; \exists Y \in {}^pS \;\; \forall x \in {}^pS \;(\; x \in Y \Leftrightarrow t \in Z \wedge E({}^w x))$$

Nous dirons que ${}^2S$, ..., ${}^pS$...,${}^wS$,...est une suite d'extensions successives ajustées de S.

On pourra trouver démontrée, sous différentes formes dans [1,4,17,22], et avec des notations différentes des nôtres, l'existence pour tout S d'un ensemble ${}^2S$ tel que :

i) $S \rightarrow {}^2S$,

iii) pour tout $B \in S$ et toute relation binaire $b \in {}^2S$: b est concourante sur B dans ${}^2S$ si et seulement si b est B-idéalisable dans ${}^2S$.

En réalité on a même un résultat plus général (voir [22]) : B peut être une partie quelconque de ${}^2S$, B n'est pas forcément interne (élément de ${}^2S$). Bien sûr, pour énoncer dans notre langage une proposition correspondant à celle qui figure dans [22], il nous faudrait généraliser les définitions 5 et 6 au cas où B n'est plus interne .

Chez les auteurs cités précédemment, ${}^2S$ est une ultrapuissance bornée de E selon un *$\mathcal{K}$-bon ultrafiltre*, $\mathcal{K}$ étant un cardinal supérieur à card(S). La notion de $\mathcal{K}$-bon ultrafiltre et ses liens avec la saturation des ultrapuissances ont été étudiés par H.J.Keisler, [17,18], en particulier il a établi l'existence de $\mathcal{K}$-bon ultrafiltres pour tout cardinal infini. Un énoncé plus précis de son théorème d'existence est donné dans [17,22] et démontré dans [17]. Rappelons la définition des $\mathcal{K}$-bon ultrafiltres.

*Si I est un ensemble infini, et si $\mathcal{K}$ est un cardinal, nous dirons qu'un ultrafiltre **U** sur I est $\mathcal{K}$-bon si:*

a) il est δ-incomplet,

*b) si card(X) < $\mathcal{K}$ et si f est une application croissante du filtre de Fréchet $\mathfrak{Fr}(X)$ sur X dans **U** alors, il existe une application h de $\mathfrak{Fr}$ (X) dans **U** telle que pour tous F et G dans $\mathfrak{Fr}$(X), $h(F) \subset f(F)$ et $h(F \cap G) = h(F) \cap h(G)$.*

Démonstration du théorème.

S étant donné comme précédemment, on se donne un $\mathcal{K}$-bon ultrafiltre **U** sur un ensemble I, avec $\mathcal{K}$ > card(S) . Pour construire les extensions successives de S vérifiant les trois propriétés du théorème principal, nous avons choisi de travailler dans un univers suffisamment riche pour contenir S et I , qui soit un ensemble, et qui soit fermé pour les opérations ensemblistes usuelles, intersection, réunions passage à l'ensemble des parties . Cela impliquera qu'il sera stable pour les produits cartésiens, qu'il contiendra **U** etc.... La superstructure complète **X** bâtie sur un ensemble T contenant S et I fera l'affaire.

L'univers **X** étant choisi une fois pour toutes, nous construirons suite $\mathbf{X}$, ${}^2\mathbf{X}$,$\cdots$ ${}^p\mathbf{X}$,$\cdots{}^w\mathbf{X}\cdots$, telle que $\mathbf{X} \to {}^2\mathbf{X} \to \cdots {}^p\mathbf{X} \cdots\to {}^w\mathbf{X} \to \cdots$, et vérifiant de plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, ${}^p\mathbf{X} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} {}^pT_n$ (${}^pT_n$ est une écriture simplifiée pour ${}^p(T_n)$, qu'il ne faut surtout pas confondre avec $({}^pT)_n$!).

Les ensembles ${}^2S$,$\cdots$ ${}^pS$,$\cdots{}^wS\cdots$, seront les images de S respectivement dans ${}^2\mathbf{X}$,$\cdots$ ${}^p\mathbf{X}$,$\cdots{}^w\mathbf{X}\cdots$.

Il nous faut donc:

a) construire ${}^2\mathbf{X}$,$\cdots$ ${}^p\mathbf{X}$,$\cdots{}^w\mathbf{X}\cdots$,

b) vérifier les conditions i), ii) et iii) pour la suite ${}^2\mathbf{S}, \cdots {}^p\mathbf{S}, \cdots {}^w\mathbf{S} \cdots$.

a) Construction de la suite ${}^2\mathbf{X}, \cdots {}^p\mathbf{X}, \cdots {}^w\mathbf{X} \cdots$

Soit $p \geq 1$, si $p > 1$, supposons que nous ayons construit ${}^2\mathbf{X}, \cdots {}^p\mathbf{X}$ tels que $\mathbf{X} \to {}^2\mathbf{X} \to \cdots {}^p\mathbf{X}$ et pour tout $k \leq p$, ${}^k\mathbf{X} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} {}^kT_n$, construisons ${}^{p+1}\mathbf{X}$ à partir de ${}^p\mathbf{X}$.

Si $x \in {}^i\mathbf{X}$ avec $i < p$, notons ${}^px$ l'image de x dans l'extension ${}^i\mathbf{X} \to {}^p\mathbf{X}$. Nous conviendrons de poser ${}^ix = x$

Construisons d'abord un ensemble ${}^{p+1}\mathbf{X}'$, et une relation binaire $\in_{p+1}$ sur ${}^{p+1}\mathbf{X}'$; tels que $({}^p\mathbf{X}, \in) \to ({}^{p+1}\mathbf{X}', \in_{p+1})$.

Pour cela, nous définirons sur $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} {}^p[(T_n)^I]$, deux relations binaires notées respectivement "ρ_p" et "$\approx_p$" en posant, pour tous $f, g \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} {}^p[(T_n)^I]$:

$$f \, \rho_p \, g \Leftrightarrow \{ i \in {}^pI ; f(i) \in g(i) \} \in {}^p\mathbf{U},$$

$$f \approx_p g \Leftrightarrow \{ i \in {}^pI ; f(i) = g(i) \} \in {}^p\mathbf{U}.$$

On démontre sans aucune difficulté que la relation $\approx_p$ est une relation d'équivalence, grâce aux propriétés suivantes, qui sont des propriétés des filtres si $p = 1$, et qui s'obtiennent en transférant ces propriétés dans ${}^p\mathbf{X}$ si $p > 1$:

a) ${}^pI \in {}^p\mathbf{U}$,

b) $(u \in {}^p\mathbf{U} \text{ et } v \in {}^p\mathbf{U}) \Rightarrow u \cap v \in {}^p\mathbf{U})$,

c) $\forall w \in {}^p\mathbf{X} \; [\; (\exists u \in {}^p\mathbf{U} \; (u \subset w \subset {}^pI)) \Rightarrow w \in {}^p\mathbf{U} \;]$.

Si $f \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} {}^p[(T_n)^I]$, nous noterons $cl_p(f)$ la classe d'équivalence de f pour $\approx_p$, nous noterons ${}^{p+1}\mathbf{X}'$ l'ensemble des classes d'équivalences. La relation ρ_p étant compatible avec la relation $\approx_p$, vérification immédiate, nous définirons ensuite une relation binaire $\in_{p+1}$ sur ${}^{p+1}\mathbf{X}'$ en posant : Pour tous f et g dans $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} {}^p[(T_n)^I]$, $cl_p(f) \in_{p+1} cl_p(f) \Leftrightarrow f \, \rho_p \, g$.

Si $x \in {}^p\mathbf{X}$, alors l'application constante $x : {}^pI \to {}^p\mathbf{X}$, telle que $x(i) = x$ pour tout $i \in_p {}^pI$ est dans ${}^p\mathbf{X}$ (utiliser pour le démontrer, le transfert dans l'extension $\mathbf{X} \to {}^p\mathbf{X}$ de l'énoncé dans $\mathbf{X}$: $\forall x \in T_n \; \exists f \in (T_n)^I \; \forall i \in I \; ((i,x) \in f) \;)$.

On peut donc définir une injection $i_p : {}^p\mathbf{X} \to {}^{p+1}\mathbf{X}'$ en posant, pour tout $x \in {}^p\mathbf{X}$, $i_p(x) = cl_p(x)$.

Nous noterons : $\mathrm{Red}\,{}^p(\mathbf{X}^I) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} {}^p[(T_n)^I]$. On a alors,

PROPOSITION 1 :

$({}^p\mathbf{X}, \in) \to_{i_p} ({}^{p+1}\mathbf{X}', \in_{p+1})$.

La démonstration est une conséquence immédiate du lemme suivant:

LEMME 1 :

Si $A(x_1, x_2,...,x_n)$ est une formule de $\mathcal{F}$ ayant exactement n variables libres, si $f_1, f_2,......f_n$ sont des éléments de $\mathrm{Red}\,{}^p(\mathbf{X}^I)$, alors on a :

$A_{\in_{p+1}}(cl_p(f_1), cl_p(f_2),...cl_p(f_n)) \Leftrightarrow A_{\rho_p}(f_1, f_2,....f_n) \Leftrightarrow \{ i \in {}^pI \,/\, A(f_1(i), f_2(i),.....f_n(i))\} \in {}^pU$.

__*Démonstration :*__

La première équivalence, qui est clairement vraie pour les formules élémentaires, de la forme $x_1 \in x_2$, par définition de de la relation $\in_{p+1}$, se démontre sans la moindre difficulté par induction sur la complexité de A. Démontrons la seconde équivalence.

Dans le cas ou p = 1, le lemme est une propriété bien connue, que l'on peut démontrer en reprenant par exemple, la démonstration de L.Haddad dans [11], bien que celle-ci concerne des ulrapuissances non réduites. Ou en adaptant la démonstration du théorème de LOS donnée dans [1]. Sa preuve, par induction sur la complexité de la formule $A(x_1, x_2,...,x_n)$, ne présente pas de difficulté majeure. Pour le cas ou $p > 1$, on utilise le transfert dans l'extension $\mathbf{X} \to {}^p\mathbf{X}$. Soient $f_1, f_2,......f_n$ des éléments de $\mathrm{Red}\,{}^p(\mathbf{X}^I)$; a cause de l'inclusion des T_m, on peut supposer que tous les f_i sont dans un même ${}^p[(T_m)^I]$ or, le lemme étant vrai pour p = 1, on peut écrire : (1)

$\forall f_1 \in (T_m)^I\, \forall f_2 \in (T_m)^I \ldots \forall f_n \in (T_m)^I$

$[\, A_{\rho_1}(f_1, f_2,......f_n) \Leftrightarrow \exists u \in \mathbf{U}\, \forall i \in I\, (A\, (f_1(i), f_2(i),.....f_n(i)) \Leftrightarrow i \in u)\,]$.

Bien que ρ_1 ne soit pas un élément de $\mathbf{X}$, son domaine est $\mathbf{X}$ tout entier, on voit en remplaçant dans $A_{\rho_1}(f_1, f_2,......f_n)$ chaque occurence d'une sous formule de la forme $f\, \rho_1\, g$ par la formule $\exists v \in \mathbf{U}\, \forall i \in I\, (f(i) \in g(i) \Leftrightarrow i \in v)$, en transférant dans ${}^p\mathbf{X}$ l'énoncé obtenu et en remplaçant ensuite les sous formules de la forme $\exists v \in {}^pU\ \forall i \in {}^pI\ (f(i) \in g(i) \Leftrightarrow i \in v)$ par $f\ \rho_p\ g$, que (1) équivaut à :

$\forall f_1 \in {}^p(T_m)^I\ \forall f_2 \in {}^p(T_m)^I \ldots \forall f_n \in {}^p(T_m)^I$

$[\, A_{\rho p}(f_1, f_2, \ldots f_n) \Leftrightarrow \exists u \in {}^pU\ \forall i \in {}^pI\ (A\ (f_1(i), f_2(i), \ldots f_n(i)) \Leftrightarrow i \in u)\,]$.

Ceci achève notre preuve.

Démonstration de la proposition 1 :

Soient $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une formule de $\mathcal{F}$ et $a_1, a_2, \ldots a_n$ des éléments de ${}^p\mathbf{X}$.

On a alors $A_{\in p+1}(i_p(a_1), i_p(a_2), \ldots i_p(a_n)) \Leftrightarrow A_{\rho p}(a_1, a_2, \ldots a_n)$, les a_k désignant chacune, dans le membre de droite, l'application constante $i \to a_k$.

D'après le lemme 1, $A\rho_p(a_1, a_2, \ldots a_n) \Leftrightarrow \{ i \in_p {}^pI\ /\ A(a_1(i), a_2(i), \ldots a_n(i)) \} \in {}^pU$.

Comme les a_k sont constantes, $\{ i \in_p {}^pI\ /\ A(a_1(i), a_2(i), \ldots a_n(i)) \}$ est égal à $\emptyset$ si $A(a_1, \ldots, a_n)$ est faux et ${}^pI$ tout entier si $A(a_1, \ldots, a_n)$ est vrai. Comme, des deux ensembles $\emptyset$ et ${}^pI$, seul le second est élément de ${}^pU$, $A\rho_p(a_1, a_2, \ldots a_n)$ est vrai si et seulement si $A(a_1, \ldots, a_n)$ est vrai. Donc $A_{\in p+1}(i_p(a_1), i_p(a_2), \ldots, i_p(a_n))$ est vrai si et seulement si $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est vrai. La proposition 1 est donc établie.

Propriétés de ${}^{p+1}\mathbf{X}'$:

1- Pour tout $x \in {}^{p+1}\mathbf{X}'$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in_{p+1} i_p(T_n)$.

2- Si $x \in_{p+1} i_p(T_n)$, avec $n > 0$, si $x \notin_{p+1} i_p(T_0)$ et si $t \in_{p+1} x$, alors $t \in_{p+1} i_p(T_{n-1})$.

Démonstration :

1-Soit x un élément de ${}^{p+1}\mathbf{X}'$, par définition, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in {}^p(T_n{}^I)$ tels que $x = cl_p(\varphi)$. $\{i \in {}^pI / \varphi(i) \in {}^pT_n\} = {}^pI \in {}^pU$ donc, $cl_p(\varphi) \in_{p+1} cl_p({}^pT_n)$ par définition de $\in_{p+1}$. On a donc $x \in_{p+1} i_p(T_n)$, ce qu'il fallait démontrer.

2- Si $t \in_{p+1} x$, il découle de la propriété 1 que $t \in_{p+1} i_p(T_m)$ pour un certain entier m. La propriété 2 s'obtient par transfert dans $({}^{p+1}\mathbf{X}', \in_{p+1})$, au moyen de i_p, pour $n > 0$ de l'énoncé :

$$\forall t \in T_m\ \forall x \in T_n - T_0\ ((t \in x) \Rightarrow t \in T_{n-1}).$$

On identifie ensuite ${}^{p+1}\mathbf{X}'$ à une partie ${}^{p+1}\mathbf{X}$ de la superstructure complète $\mathbf{X}_{p+1}$ bâtie sur ${}^{p+1}T$, et la relation $\in_{p+1}$ sur ${}^{p+1}\mathbf{X}'$ à la relation d'appartenance sur ${}^{p+1}\mathbf{X}$.

On procède de la manière suivante, en construisant une injection ,

$$j_p : {}^{p+1}\mathbf{X}' \to \mathbf{X}_{p+1} \text{ en posant :}$$
$$j_p(x) = x \text{ si } x \in_{p+1} i_p(T)$$
$$j_p(x) = \{ j_p(t) : t \in_{p+1} x \}, \text{ si } x \notin_{p+1} i_p(T) .$$

Il découle des propriétés 1 et 2 précédentes que j_p est bien définie. Il est clair , d'autre part, que pour tous x et y dans ${}^{p+1}\mathbf{X}'$: $j_p(x) \in j_p(y) \Leftrightarrow x \in_{p+1} y$.

Posons ${}^{p+1}\mathbf{X} = j_p({}^{p+1}\mathbf{X}')$. Si on définit ensuite une application injective :

$$h_p : {}^{p}\mathbf{X} \to {}^{p+1}\mathbf{X},$$
$$x \to {}^{p+1}x = j_p \circ i_p(x).$$

On a alors : a) ${}^{p+1}\mathbf{X} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} {}^{p+1}T_n$,

b) ${}^{p}\mathbf{X} \to_{h_p} {}^{p+1}\mathbf{X}$.

__Démonstration de a) :__ Si $t \in {}^{p+1}\mathbf{X}$ alors, par définition, il existe $x \in {}^{p+1}\mathbf{X}'$ tel que $t = j_p(x)$. D'après la propriété 1 de ${}^{p+1}\mathbf{X}$, $x = i_p(s)$, avec s dans un T_n. Donc $t = j_p \circ i_p(s) = {}^{p+1}s$. Comme $s \in T_n$ implique ${}^{p+1}s \in {}^{p+1}T_n$, on a $t \in {}^{p+1}T_n$.

__Démonstration de b) :__ Pour toute formule $A(x_1, x_2,\dots,x_n)$ de $\mathfrak{F}$ ayant ses variables libres parmi $x_1, x_2,\dots,x_n$, et tous $a_1. a_2,\dots\dots,a_n$ éléments de ${}^{p}\mathbf{X}$ on sait, d'après la proposition 1, que l'énoncé $A(a_1, a_2,\dots, a_n)$ est équivalent à $A_{\in_{p+1}}(i_p(a_1), i_p(a_2),\dots,i_p(a_n))$. Il reste donc à établir l'équivalence : $A_{\in_{p+1}}(i_p(a_1), i_p(a_2),\dots,i_p(a_n)) \Leftrightarrow A({}^{p+1}a_1, {}^{p+1}a_2,\dots, {}^{p+1}a_n)$.

Pour établir cette dernière équivalence, pour tous $a_1, a_2,\dots\dots,a_n$ dans ${}^{p}\mathbf{X}$ il suffira d'établir que, pour tous $b_1, b_2,.....,b_n$ dans ${}^{p+1}\mathbf{X}^*$, on a :

$A_{\in_{p+1}}(b_1, b_2,.....,b_n) \Leftrightarrow A(j_p(b_1), j_p(b_2),....,j_p(b_n))$ et de voir que , pour $b_k = i_p(a_k)$, on a par définition $j_p(b_k) = {}^{p+1}a_k$. C'est cette dernière propriété que nous allons établir maintenant.

Cette propriété est vraie pour les formules élémentaire de la forme $A(x_1, x_2) \equiv (x_1 \in x_2)$. En effet, si b_1, b_2 sont deux éléments de ${}^{p+1}\mathbf{X}^*$, alors on a : $A_{\in_{p+1}}(b_1, b_2) \equiv (b_1 \in_{p+1} b_2)$, or $(b_1 \in_{p+1} b_2) \Leftrightarrow (j_p(b_1) \in j_p (b_2)) \equiv A(j_p(b_1), j_p (b_2))$ (Par définition).
Si $A(x_1, x_2,...,x_n)$ et $B(x_1, x_2,...,x_n)$ sont deux formule de $\mathfrak{F}$ ayant leur variables libres parmi $x_1, x_2,...,x_n$, si pour tous $b_1, b_2,.....,b_n$ dans ${}^{p+1}\mathbf{X}^*$, l'équivalence est vraie pour chacune d'elle, alors il est immédiat qu'elle sera vraie également pour $\neg A$ et pour $A \wedge B$. Supposons maintenant $A(x_1, x_2,...,x_n) \equiv \exists\ x \in x_1\ B(x, x_2,...,x_n)$ et que la propriété est vraie pour la formule B. Donnons nous $b_1, b_2,.....,b_n$ dans ${}^{p+1}\mathbf{X}^*$, alors on a :
$A_{\in_{p+1}}(b_1, b_2,.....,b_n) \equiv \exists\ x \in_{p+1} b_1\ B_{\in_{p+1}} (x, b_2,.....,b_n)$.
$\exists\ x \in_{p+1} b_1\ B_{\in_{p+1}} (x, b_2,.....,b_n) \Leftrightarrow \exists\ x \in {}^{p+1}\mathbf{X}^* ((x \in_{p+1} b_1) \wedge B_{\in_{p+1}} (x, b_2,.....,b_n))$.
En utilisant, la surjectivité de j_p , et les équivalences , $(x \in_{p+1} b_1) \Leftrightarrow (j_p(x) \in j_p(b_1))$ et $B_{\in_{p+1}}(x, b_2,.....,b_n) \Leftrightarrow B(j_p(x), j_p(b_2),....,j_p(b_n))$, on voit que
$\exists\ x \in {}^{p+1}\mathbf{X}^* ((x \in_{p+1} b_1) \wedge B_{\in_{p+1}} (x, b_2,.....,b_n)) \Leftrightarrow \exists\ x \in j_p(b_1)\ B(x, j_p(b_2),....,j_p(b_n))$.
Le membre de droite étant identique à $A(j_p(b_1), j_p(b_2),....,j_p(b_n))$, ceci termine notre preuve.

Avant de passer à l'étape suivante, il nous faut établir une propriété des ensembles ^{P}finis, dont nous nous servirons par la suite.

Propriété :

Si $F \in {}^{P}\mathbf{X}$ est ^{P}fini alors : pour tout $m > s(P)$, $x \mid\in {}^{m}F$ si et seulement si il existe un $t \mid\in F$ tel que $x = {}^{m}t$.

Démonstration :

Nous allons d'abord établir la propriété pour $k = 1$. Soit $P = (p)$, et soit, pour F ^{p}fini l'énoncé, $\forall\ x \in {}^{m}F\ \exists\ t \in F\ ({}^{m}t = x)$. Montrons que sa négation conduit à la une contradiction , cette contradiction s'écrivant :

$\forall^{p\mathrm{fin}} F\,((\exists x \in {}^{m}F\ \forall t \in F\,({}^{m}t \neq x)) \Rightarrow \exists x \in F\ \forall t \in F\,(t \neq x))$. $(E(p,m))$

Il est tout a fait clair que ceci est une contradiction car, $x \in F$ et $\forall t \,|\!\in F\,(t \neq x)$ impliquent $x \neq x$!!

Montrons par récurrence que l'on a E(p,m) pour tous p et m tels que $1 \leq p < m$.

α) E(1,2) est vrai : Soit F un ensemble ^{1}fini de ${}^{1}S$, autrement dit, une partie finie de S. L'énoncé $\exists x \in {}^{2}F\ \forall t \in F\,({}^{2}t \neq x)$ équivaut à :

$\exists \xi \in F^{I}\ \forall t \in F\ \exists u(t) \in U\ \ \forall i \in I\ ((t \neq \xi(i)) \Leftrightarrow i \in u(t))$.

Soit $v = \bigcap_{t \in F} u(t)$; F étant fini, on a $v \in U$ donc, $v \neq \emptyset$. Prenons un i dans v et posons $\xi(i) = x$. On a alors $t \neq x$ pour tout $t \in F$. E(1,2) est donc démontré.

β) Pour tout p, E(p+1,p) est vrai :

E(1,2) équivaut à :

$\forall^{\mathrm{fin}} F\,((\exists \xi \in F^{I}\ \forall t \in F\ \exists u(t) \in U\ \ \forall i \in I\ ((t \neq \xi(i)) \Leftrightarrow i \in u(t))) \Rightarrow \exists x \in F\ \forall t \in F\,(t \neq x))$.

Transférons dans ${}^{p}X$ ce dernier énoncé, on obtient :

$\forall^{p\mathrm{fin}} F\,((\exists \xi \in P(F^{I})\ \forall t \in F\ \exists u(t) \in {}^{P}U\ \forall i \in {}^{P}I\,((t \neq \xi(i)) \Leftrightarrow i \in u(t))) \Rightarrow \exists x \in F\ \forall t \in F\,(t \neq x))$.

Cet énoncé équivaut à :

$\forall^{p\mathrm{fin}} F\,((\exists x \in {}^{p+1}F\ \forall t \in F\,({}^{p+1}t \neq x)) \Rightarrow \exists x \in F\ \forall t \in F\,(t \neq x))$.On a donc E(p+1,p).

γ) Si E(m,p) est vrai, alors E(m+1,p) est vrai.

E(m+1,p) s'écrit :

$\forall^{p\mathrm{fin}} F\,((\exists x \in {}^{m+1}F\ \forall t \in F\,({}^{m+1}t \neq x)) \Rightarrow \exists x \in F\ \forall t \in F\,(t \neq x))$, ou

$\forall^{p\mathrm{fin}} F\,((\exists x \in {}^{m+1}F\ \forall t \in F\,({}^{m+1}({}^{m}t) \neq x)) \Rightarrow \exists x \in F\ \forall t \in F\,(t \neq x))$. Mais l'hypothèse de récurrence implique que ${}^{m}t$ parcourt tout ${}^{m}F$ quant t parcourt F donc, E(m+1,m) équivaut à :

$\forall^{p\mathrm{fin}} F\,((\exists x \in {}^{m+1}F\ \forall t \in {}^{m}F\,({}^{m+1}t \neq x)) \Rightarrow \exists x \in F\ \forall t \in F\,(t \neq x))$. cet énoncé est vrai, il découle de E(m+1,m) appliqué à l'ensemble ^{m}fini , ${}^{m}F$. Ceci achève notre récurrence.

Si $k > 1$, soient $P = (p_1,..,p_k)$, $F = (F_1, F_2,.. F_k)$ une partie ^{P}finie de ${}^{P}X$, $m > s(P)$, donnons nous $x = (x_1, x_2,..., x_k) \,|\!\in {}^{m}F = ({}^{m}F_1, {}^{m}F_2,..,{}^{m}F_k)$. Chaque F_i étant ^{p_i}fini, d'aprés ce qui précède il existe, pour chaque indice i, un $t_i \in F_i$ tel que $x_i = {}^{m}t_i$. On voit que, si on pose $t = (t_1, t_2,..., t_k)$, on a bien $x = {}^{m}t$.

b/ vérification des trois conditions du théorème principal:

α) vérification de la condition i) .

Si on définit les ${}^{i}\mathbf{S}$, comme plus haut alors, si on note pour tout p, h'_p la restriction à ${}^{p}\mathbf{S}$ de h_p, alors, $h'_p({}^{p}\mathbf{S}) \subset {}^{p+1}\mathbf{S}$ car, pour tout $t \in {}^{p}\mathbf{X}$, comme ${}^{p}\mathbf{S} \in {}^{p}\mathbf{X}$, si $t \in {}^{p}\mathbf{S}$ on a ${}^{p+1}t \in {}^{p+1}\mathbf{S}$ donc : si $x = h'_p(t)$ avec $t \in {}^{p}\mathbf{S}$ on a , $x = h_p(t) = {}^{p+1}t \in {}^{p+1}\mathbf{S}$.

On voit immédiatement que $h'_p : {}^{p}\mathbf{S} \to {}^{p+1}\mathbf{S}$ est une extension.

β) vérification de la condition ii) .

On sait que que, si **U** est un $\mathcal{K}$-bon ultrafiltre sur I, avec $\mathcal{K} > \text{card}(\mathbf{S})$, alors si on pose, pour $p \le \omega$, ${}^{p}\mathbf{S} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} {}^{p}E_n$, on a une extension $\mathbf{S} \to {}^{2}\mathbf{S}$, avec idéalisation et saturation. Cela implique que, " pour toute relation binaire $b \in {}^{2}\mathbf{S}$ et tout $B \in \mathbf{S}$, b est concourante sur B dans ${}^{2}\mathbf{S}$ si et seulement si elle est B-idéalisable dans ${}^{2}\mathbf{S}$". L'idée de départ est la suivante : si on remplace l'énoncé entre guillemets par un énoncé équivalent dans **X**, puis on transfère ce dernier dans ${}^{p}\mathbf{X}$. L'énoncé ainsi transféré équivaut à " pour toute relation binaire $b \in {}^{p+1}\mathbf{S}$ et tout $B \in {}^{p}\mathbf{S}$, b est concourante sur B dans ${}^{p+1}\mathbf{S}$ si et seulement si elle est B-idéalisable dans ${}^{p+1}\mathbf{S}$". On a donc immédiatement ii) dans le cas P = (p) et q = p+1. C'est un peu plus compliqué pour le cas général mais les principe de base restent les mêmes .

La suite de notre démonstration nécessite deux lemmes.

Le lemme 3 est un corollaire d'un résultat plus général que l'on peut trouver énoncé et démontré dans [22], théorème 1.6.3 . Sa démonstration n'étant pas évidente, et afin d'avoir un texte auto-contenu, nous en donnerons quand même une preuve .

LEMME 2 :

*Soit **U** un ultrafiltre sur un ensemble I et $\mathcal{K}$ un cardinal infini; si **U** est un $\mathcal{K}$-bon ultrafiltre alors, pour tous ensembles Y et Z et toute application*

$\beta \in (\mathcal{P}(YXZ))^I$ et toute partie A de Y^I telle que card(A) < $\mathcal{K}$ on a:

$$(\forall^{fin} F \subset A \ \exists g \in Z^I \ \forall f \in F \ \{ i \in I \ / \ (f(i), g(i)) \in \beta(i) \} \in \mathbf{U}) \quad \Leftrightarrow$$

$$\exists f_o \in Z^I \ \forall f \in A \ \{ i \in I \ / \ (f(i), f_o(i)) \in \beta(i) \} \in \mathbf{U}$$

Démonstration:

Soit $\mathcal{K}$ un cardinal infini, **U** un $\mathcal{K}$-bon ultrafiltre sur un ensemble I et A une partie de Y^I telle que card(A) < $\mathcal{K}$. Introduisons quelques notations.

Si $f \in A$, $g \in Z^I$ et si F est une partie finie de A nous définirons les parties de I suivantes:

$$u(f) = \{ i \in I \ / \ \exists y \in Z \ (f(i), y) \in \beta (i) \},$$

$$u(F) = \bigcap_{f \in F} u(f),$$

$$u(f,g) = \{ i \in I \ / \ (f(i), g(i)) \in \beta (i) \},$$

$$u(F,g) = \bigcap_{f \in F} u(f,g).$$

Il nous faut donc démontrer que,

$$(\forall^{fin} F \subset A \ \exists g \in Z^I \ (u(F,g) \in \mathbf{U})) \Leftrightarrow \exists f_o \in Z^I \ \forall f \in A \ (u(f,g) \in \mathbf{U}).$$

Supposons donc vérifié le premier membre de l'équivalence. **U** $\mathcal{K}$-bon implique que **U** est δ-incomplet donc, il existe une suite (I(n)) d'éléments de **U** telle que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I(n) = \emptyset$. Si F est une partie finie de A nous poserons v(F) = A - F. Avec ces notations, nous pouvons défiir une application,

$$p: \mathcal{F}r(A) \to \mathbf{U} \qquad \text{en posant,} \quad \text{pour tout } v(F) \in \mathcal{F}r(A),$$

$$p(v(F)) = u(F) \cap I(card(F)).$$

Comme $u(F,g) \subset u(F)$ et $u(F,g) \in \mathbf{U}$ on a bien $u(F) \in \mathbf{U}$ et donc $h(v(F)) \in \mathbf{U}$.

Il est immédiat que p est croissante aussi, d'aprés la définition des $\mathcal{K}^+$-bons ultrafiltres, il existe une application multiplicative, h: $\mathcal{F}r(A) \to \mathbf{U}$ dominée par p.

Pour chaque i fixé dans I posons $B_i = \{ f \in A \ / \ i \in h(v(\{f\})) \}$. Montrons que si on pose n(i) = Max { $k \in \mathbb{N}$ / $i \in I(k)$ } alors, card $B_i \leq n(i)$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi il y aurait alors une partie finie F de A telle que card(F) = n(i) + 1 et $F \subset B_i$. Pour toute fonction $f \in F$, $i \in h(v\{f\})$ donc en tenant compte de la multiplicativité de h;

$$i \in \bigcap_{f \in F} h(v(\{f\})) = h (\bigcap_{f \in F} v(\{f\})) = h(v(F)).$$

Comme $h(v(F)) \subset p(v(F)) \subset I(card(F))$, cela contredit la définition de n(i).

B_i est donc fini et si l'on pose $Y_i = \{ y \in Z \ / \ \forall f \in B_i \ (f(i), y) \in \beta (i) \}$ alors, $Y_i \neq \emptyset$. En effet il découle de la définition des B_i et de la multiplicativité de h que

$i \in h(v(B_j)) \subset p(v(B_j)) = I(card(B_j)) \cap u(B_j)$;

donc, $i \in u(B_j)$ et donc, $\exists y \in Z \,/\, \forall f \in B_i\ (f(i), y) \in \beta(i)$ ce qui montre bien que Y_i est non vide.

Pour terminer on se donne une fonction $f_0 \in Z^I$ telle que pour tout $i \in I$ $f_0(i) \in Y_i$ (une telle fonction existe grâce à la non vacuité des Y_i et à l'axiome du choix), et on montre que f_0 possède la propriété souhaitée. Dans ce but prenons $f \in A$ et $i \in h(v(\{f\}))$ on a alors $f \in B_i$ donc $(f(i), f_0(i)) \in \beta(i)$. L'ensemble $u(f,f_0)$ contient $h(v(\{f\}))$ qui appartient à **U** donc: $u(f,f_0) \in$ **U** ce qui achève notre démonstration .

LEMME 3 :

Si $P = (p_1, p_2,.. p_k) \in \underline{P}$, q et r sont tels que $1 \le s(P) < q \le r$, alors pour tout $B \in {}^P\mathcal{S}$ et toute ^{r}relation (k+1)-aire) $b \in {}^r\mathcal{X}$ on a:

b est ^{P}concourante sur B dans ${}^q\mathcal{X}$ $\Leftrightarrow$ b est B-idéalisable dans ${}^q\mathcal{X}$.

Démonstration:

Notons I(P,q,r) la proposition que nous voulons démontrer. Nous ferons une démonstration par récurrence. Les étapes de la récurrence seront les suivantes :

a) On démontre I((1),2,2).

b) On démontre I((p),p+1,p+1) pour tout entier p.

c) On établit que, pour tous P et q tels que s(P) < q, I(P,q,q) implique I(P, q+1, q+1) .

d) On établit que, pour tout P et tout m tell que $(P,m) \in \underline{P}$, I(P,s(P)+1, s(P)+1) implique I((P,m), m+1, m+1) ce qui, avec b) implique que l'on a I(P,s(P)+1, s(P)+1) pour tout P .

e) On établit que, pour tous P, q et r tels que $s(P) < q \le r < \omega$, I(P,q,r) implique I (P, q, r+1) ce qui, compte tenu de b), c) et d) , implique que l'on a I(P,q,r) pour tous P, q, et r t els que $s(P) < q \le r$.

---

a) Montrons I((1),2,2) :

Comme $B \in \mathcal{S}$ et card($\mathcal{S}$) < $\mathcal{K}$, on a card(B)) < $\mathcal{K}$ donc, si A est l'ensemble des applications constantes de I dans B, card(A) < $\mathcal{K}$. Puisque b $\in {}^2\mathbf{X}$, il existe un entier n tel que $b \subset {}^2T_n \times {}^2T_n$ et une application $\beta \in (\mathcal{P}(T_n \times T_n))^I$ telle que b soit la classe de β modulo **U**. Il suffit donc d'appliquer le lemme 2 avec $Y = Z = T_n$ et A, β ci-dessus puis de remplacer les expressions :

$\exists g \in Z^I \ \forall x \in F \{ i \in I \ / \ (x, g(i)) \in \beta(i) \} \in \mathbf{U}$ et,

$\exists f_0 \in Z^I \ \forall x \in B \ \{ i \in I \ / \ (x, f_0(i)) \in \beta(i) \} \in \mathbf{U}$ respectivement par :

$\exists y \in {}^2T_n \ \forall x \in F ({}^2x, y) \in b$

$\exists y \in {}^2T_n \ \forall x \in B ({}^2x, y) \in b$ pour terminer la démonstration .

b) Soit p est un entier quelconque, on exprime d'abord dans $\mathbf{X}$ l'équivalence pour P = (1) pour tous B et b vérifiant les conditions de l'énoncé . On obtient, n et m étant des entiers:

$\forall B \in E_m \ \forall \beta \subset (T_n \times T_n)^I$

$[(\forall^{fin} F \subset B \ \exists f \in (T_n)^I \ \forall x \in F \ \exists u \in \mathbf{U} \ \forall i \in I \ [(x, f(i)) \in \beta(i) \Leftrightarrow i \in u]) \Leftrightarrow$

$(\exists f \in (T_n)^I \ \forall x \in B \ \exists u \in \mathbf{U} \ \forall i \in I \ [(x, f(i)) \in \beta(i) \Leftrightarrow i \in u])]$.

On transfère ensuite dans ${}^p\mathbf{X}$ ce dernier énoncé ce qui donne :

$\forall B \in {}^pE_m \ \forall \beta \subset {}^p((T_n \times T_n)^I)$

$[(\forall^{pfin} F \subset B \ \exists f \in {}^p((T_n)^I) \ \forall x \in F \ \exists u \in {}^p\mathbf{U} \ \forall i \in {}^pI \ [(x,f(i)) \in \beta(i) \Leftrightarrow i \in u])$

$\Leftrightarrow (\exists f \in {}^p((T_n)^I) \ \forall x \in B \ \exists u \in {}^p\mathbf{U} \ \forall i \in {}^pI \ [(x,f(i)) \in \beta(i) \Leftrightarrow i \in u])]$.

Ce dernier énoncé équivaut à:

$\forall B \in {}^pE_m \ \forall b \subset {}^{p+1}T_n \times {}^{p+1}T_n$

$[(\forall^{p\text{-}fin} F \subset B \ \exists y \in {}^{p+1}T_n \ \forall x \in F ({}^{p+1}x,y) \in b) \Leftrightarrow (\exists y \in {}^{p+1}T_n \ \forall x \in B ({}^{p+1}x,y) \in b)]$.

Ceci achève la preuve du b).

c) Supposons I(P,q,q) vérifiée pour $P = (p_1, p_2,.. p_k) \in \underline{\mathbf{P}}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que que $s(P) < q$.

Soient $B \in {}^P\mathbf{S}$ et $b \in {}^{q+1}\mathbf{X}$. Il existe un entier n tel que $b \subset ({}^rT_n)^{k+1}$ .On en déduit que b est la classe modulo ${}^r\mathbf{U}$ d'une ^{r}application β telle que $\beta \subset {}^r((T_n)^{k+1})^I)$.

L'énoncé (b ^{P}concourante sur B dans ${}^{q+1}X$) est équivalent à l'énoncé ,

(1) $\forall^{P\text{-}fin} F \mid\subset B \ \exists f \in {}^q((T_n)^I) \ \forall x \mid\in F \ \exists u \in {}^q\mathbf{U} \ \forall i \in {}^qI \ [({}^qx,f(i)) \in \beta(i) \Leftrightarrow i \in u]$.

Soit la ^{q}relation binaire $\mathfrak{b} \in {}^qX$ définie par :

$(x,f) \in \mathfrak{b} \Leftrightarrow (x \in {}^qT_n \wedge f \in {}^q((T_n)^I) \wedge \exists u \in {}^q\mathbf{U} \ \forall i \in {}^qI \ [(x,f(i)) \in \beta(i) \Leftrightarrow i \in u])$, la relation (1) exprime que la ^{r}relation binaire $\mathfrak{b}$ est ^{P}concourante sur B dans ${}^{q}\mathbf{X}$; d'aprés l'hypothèse de récurrence cela équivaut à l'énoncé ($\mathfrak{b}$ est B-idéalisable dans ${}^{q}\mathbf{X}$) qui s'écrit,

$\exists f \in {}^{q}((T_n)^I)\ \forall x \in B\ \exists u \in {}^{q}\mathbf{U}\ \forall i \in {}^{q}I\ [({}^{q}x, {}^{q}f(i)) \in \beta(i) \Leftrightarrow i \in u]$ et est équivalent à,

$\exists y \in {}^{q+1}T_n\ \forall x \in B\ ({}^{q+1}x, {}^{q+1}y) \in b$) qui exprime que b est B-idéalisable dans ${}^{q}\mathbf{X}$. On a donc $I(P,q+1,q+1)$.

Corollaire 1 :

Si $I(P,s(P)+1,s(P)+1)$ est vraie, alors $I(P,q,q)$ est vrai pour tout q tels que $s(P) < q$.

Corollaire 2 :

Si $1 \le p < m$, alors on a $I((p),m,m)$.

d) Supposons $I(P,s(P)+1, s(P)+1)$ vérifiée pour $P \in \underline{\mathbf{P}}$ et montrons que si $(P,m) \in \underline{\mathbf{P}}$, alors on a $I((P,m),m+1, m+1)$.

Soit k le nombre de coordonnées de P. Soient $B \in {}^{P}\mathbf{S}$, $B' \in {}^{m}\mathbf{S}$ et une relation (k+2)-aire $b \in {}^{m+1}\mathbf{X}$. Il existe un entier n tel que $b \subset ({}^{m+1}T_n)^{k+2}$, b est donc la classe modulo ${}^{m}\mathbf{U}$ d'une application ^{m}interne β, telle que $\beta \subset {}^{m}((T_n)^{k+2})^I)$.

Montrons que si b est ${}^{(P,m)}$concourante sur (B,B') dans ${}^{m+1}\mathbf{X}$ alors b est (B,B')-idéalisable dans ${}^{m+1}\mathbf{X}$.

L'énoncé (b ${}^{(P,m)}$concourante sur (B,B') dans ${}^{m+1}\mathbf{X}$) est équivalent à :

(1) $\forall^{P\mathrm{fin}}F \mid\subset B \left[\forall^{m\mathrm{fin}}F' \subset B' \exists y \in {}^{m-1}T_n\ \forall x' \in F'\ (\forall x \mid\in F\ ({}^{m+1}x, {}^{m+1}x', y) \in b) \right]$.

Compte tenu d'une propriété des ensembles ^{P}fini démontrée plus haut (1) équivaut à

(2) $\forall^{P\mathrm{fin}}F \mid\subset B \left[\forall^{m\mathrm{fin}}F' \subset B' \exists y \in {}^{m+1}T_n\ \forall x' \in F'\ (\forall x \in {}^{m+1}F\ (x, {}^{m+1}x', y) \in b) \right]$.

Il découle de (2) que la relation binaire ${}^{(m+1)}$interne $\mathfrak{b}(F)$ définie par :

$(t,y) \in \mathfrak{b}(F) \Leftrightarrow t \in {}^{m+1}T_n \wedge y \in {}^{m+1}T_n \wedge (\forall x \in {}^{m+1}F\ (x, {}^{m+1}x', y) \in b)$ est ^{m}concourante sur B' dans ${}^{m+1}\mathbf{X}$. Après avoir vérifie , en utilisant le transfert, que cette dernière formule définit bien une relation binaire de ${}^{m+1}\underline{\mathbf{X}}$, on peut déduire, en utilisant le corollaire 2 du c) que cela équivaut à l'affirmation que $\mathfrak{b}(F)$ est B'-idéalisable dans ${}^{m+1}\mathbf{X}$. On a donc l'énoncé équivalent à (2) :

(3) $\forall^{P\mathrm{fin}}F \mid\subset B \left[\exists y \in {}^{m+1}T_n\ \forall x' \in B'\ (\forall x \in {}^{m+1}F\ (x, {}^{m+1}x', y) \in b) \right]$, ce qui équivaut à :

(4) $\forall^{P\mathrm{fin}}F \mid\subset B \left[\exists y \in {}^{m+1}T_n\ \forall x \mid\in F\ (\forall x' \in B' ({}^{m+1}x, {}^{m+1}x', y) \in b) \right]$.

Nous allons maintenant, pour pouvoir appliquer l'hypothèse de récurrence, exprimer modulo ${}^{m}\mathbf{U}$, l'énoncé entre crochets, on obtient :

(5) $\forall^{P\mathrm{fin}} F \,|{\subset}\, B \Big[\exists f \in {}^{m}((T_n)^I)\ \forall x \,|{\in}\, F\ (\forall x' \in B'\ \exists u \in {}^{m}\mathbf{U}\ \forall i \in {}^{m}I\ [({}^{m}x, x', f(i)) \in \beta(i) \Leftrightarrow i \in u]) \Big]$.

Soit, la relation (k+1)-aire ^{m}interne $\mathfrak{b}' \in {}^{m}\mathbf{X}$ définie par :

$(t,f) \in \mathfrak{b}(F') \Leftrightarrow$

$t \in ({}^{m}T_n)^k \wedge f \in {}^{m}((T_n)^I) \wedge (\forall x' \in B'\ \exists u \in {}^{m}\mathbf{U}\ \forall i \in {}^{m}I\ [(x, x', f(i)) \in \beta(i) \Leftrightarrow i \in u])$.

<u>On vérifie sans peine, en utilisant le transfert, que cette dernière formule définit bien une relation (k+1)-aire de ${}^{m}\mathbf{X}$</u>!

On voit que l'énoncé (4) exprime que la relation $\mathfrak{b}'$ est ^{P}concourante sur B dans ${}^{m}\mathbf{X}$ et, grâce à l'hypothèse de récurrence et au corollaire 1 du c), cela implique qu'elle est B-idéalisable dans ${}^{m}\mathbf{X}$.

On a donc :

(6) $\exists f \in {}^{m}((T_n)^I) \Big[\forall x \,|{\in}\, B\ (\forall x' \in B'\ \exists u \in {}^{m}\mathbf{U}\ \forall i \in {}^{m}I\ [({}^{m}x, x', f(i)) \in \beta(i) \Leftrightarrow i \in u]) \Big]$,

qui devient, par "passage au quotient" :

(7) $\exists y \in {}^{m+1}T_n\ \forall x \,|{\in}\, B\ \forall x' \in B'\ (({}^{m+1}x, {}^{m+1}x', y) \in b)$

Ce dernier énoncé signifiant que b est (B,B')-idéalisable dans ${}^{m+1}\mathbf{X}$, ceci achève la partie d) de la démonstration.

e) Supposons que l'on ait $I(P,q,r)$ pour $P = (p_1, p_2,.. p_k) \in \underline{\mathbf{P}}$, et pour des entiers q et r tels que $s(P) < q \leq r$. Montrons que l'on a alors $I(P,q,r+1)$:

Soient $B \in {}^{P}\mathbf{S}$ et $b \in {}^{r+1}\mathbf{X}$. Il existe un entier n tel que $b \subset ({}^{r}T_n)^{k+1}$. On en déduit que b est la classe modulo ${}^{r}\mathbf{U}$ d'une ^{r}application β telle que $\beta \subset {}^{r}((T_n)^{k+1})^I)$.

L'énoncé (b ^{P}concourante sur B dans ${}^{q}\mathbf{X}$) est équivalent à l'énoncé ,

$(*)\ \forall^{P\text{-fin}} F \,|{\subset}\, B\ \exists y \in {}^{q}T_n\ \forall x \,|{\in}\, F\ \exists u \in {}^{r}\mathbf{U}\ \forall i \in {}^{r}I\ [({}^{r}x, {}^{r}y) \in \beta(i) \Leftrightarrow i \in u]$.

Soit la ^{r}relation binaire $\mathfrak{b} \in {}^{r}\mathbf{X}$ définie par :

$(x,y) \in \mathfrak{b} \Leftrightarrow (x \in {}^{r}T_n \wedge y \in {}^{r}T_n \wedge \exists u \in {}^{r}\mathbf{U}\ \forall i \in {}^{r}I\ [(x, y) \in \beta(i) \Leftrightarrow i \in u]$,

la relation $(*)$ exprime que la ^{r}relation binaire $\mathfrak{b}$ est ^{P}concourante sur B dans ${}^{q}\mathbf{X}$; d'aprés l'hypothèse de récurrence cela équivaut à l'énoncé ($\mathfrak{b}$ est B-idéalisable dans ${}^{q}\mathbf{X}$) qui s'écrit,

$\exists y \in {}^{q}T_n\ \forall x \,|{\in}\, B\ \exists u \in {}^{r}\mathbf{U}\ \forall i \in {}^{r}I\ [({}^{r}x, {}^{r}y) \in \beta(i) \Leftrightarrow i \in u]$ et est équivalent à,

$\exists y \in {}^{q}T_n\ \forall x \,|{\in}\, B\ ({}^{r+1}x, {}^{r+1}y) \in b)$ qui exprime que b est B-idéalisable dans ${}^{q}\mathbf{X}$. On a donc $I(P,q,r+1)$. On en déduit que, $I(P,q,q)$ étant vraie pour tous P et q tels que $s(P) < q$, $I(P,q,r)$ est vraie pour tous P, q et r tels que $s(P) < q \leq r$.

Ceci achève la preuve du lemme 3.

Fin de la démonstration de la condition ii)

Il suffit d'appliquer le lemme 3, avec $b \in {}^r\mathbf{S}$. En effet,

si $b \in {}^r\mathbf{S} \subset {}^r\mathbf{X}$, si $B \in {}^P\mathbf{S}$, si $s(P) < q < r$, si b est ^{P}concourante sur B dans ${}^q\mathbf{X}$,

alors b est ^{P}concourante sur B dans ${}^q\mathbf{S}$, si b est B-idéalisable dans ${}^q\mathbf{X}$, alors elle est B-idéalisable dans ${}^q\mathbf{S}$. En effet, si $P = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$ et si $b \subset {}^rE_m \times \cdots \times {}^rE_m$ est une relation (k+1)-aire de ${}^r\mathbf{S} \subset {}^r\mathbf{X}$ alors pour tout x de ${}^P\mathbf{S}$, si $({}^rx, {}^ry) \in b$, on a ${}^ry \in {}^rE_m$.

Si d'autre part $y \in {}^q\mathbf{X}$, on a $y \in {}^qE_m$. Il suffit d'appliquer le transfert de droite à gauche dans l'extension : ${}^q\mathbf{X} \to {}^r\mathbf{X}$, à l'énoncé " ${}^ry \in {}^rE_m$ ".

γ) vérification de la condition iii).

Soit $F(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ un p-énoncé sur ${}^w\mathbf{X}$, nous désignons sous ce terme une p-formule sur ${}^w\mathbf{X}$ sans variable libre, portant sur les éléments $x_1, x_2, \ldots, x_k$ de ${}^w\mathbf{X}$. Cet énoncé est équivalent à un énoncé sous-forme prénexe, autrement dit, de la forme :

(1) $Q_1\, t_1 \in X_1\, Q_2\, t_2 \in X_2 \cdots Q_m\, t_m \in X_m\, A({}^wt_1, {}^wt_2, \ldots, {}^wt_m, x_1, x_2, \ldots, x_k)$

où chaque Q_i est un quantificateur, chaque X_i un élément de ${}^{p_i}\mathbf{X}$ avec $p \leq p_i \leq w$, et $A({}^wt_1, {}^wt_2, \ldots, {}^wt_m, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ un énoncé sans quantificateurs.

Pour chaque x_i nous noterons $d_i = \min\{d \in \{p, p+1, \ldots, w\} / (\exists x \in {}^dX / x_i = {}^wx)\}$.

Si F est un énoncé de la forme (1) nous appellerons hauteur de F l'entier,

$$\text{hauteur}(F) = \text{Max}\{p_1, p_2, \ldots, p_m, d_1, d_2, \ldots, d_k\}.$$

La hauteur d'un p-énoncé sur ${}^w\mathbf{X}$ est donc supérieure ou égale à p.

LEMME 4 :

Si $p \leq w$ et si $E(x)$ est une p-formule sur ${}^w\mathbf{X}$ avec une seule variable libre, x, alors il existe une p-formule $F(y)$ sur ${}^p\mathbf{X}$ ayant y comme seule variable libre et telle que :

pour tout $s \in {}^p\mathbf{S}$, $F(s)$ est un p-énoncé de hauteur p sur ${}^p\mathbf{X}$ équivalent à $E({}^ws)$.

Démonstration :

Soit E(x) une p-formule sur ${}^{w}\mathbf{X}$ avec une seule variable libre , $p \leq w$. Pour tout $s \in {}^{p}\mathbf{S}$, la hauteur de $E({}^{w}s)$ est un entier h indépendant de s. Démontrons qu'il existe une p-formule E'(y) telle que, pour tout $s \in {}^{p}\mathbf{S}$, $E'({}^{h-1}s)$ soit un énoncé de hauteur h-1 sur ${}^{h-1}\mathbf{X}$ équivalent à $E({}^{w}s)$. Nous aurons ainsi, en un nombre fini d'étapes, le résultat souhaité.

Soit $F(x, x_1,\ldots,x_k) \equiv Q_1 t_1 \in X_1\, Q_2 t_2 \in X_2 \cdots Q_m t_m \in X_m\, A({}^{w}t_1,{}^{w}t_2,\ldots,{}^{w}t_m, x, x_1,\ldots,x_k)$, une p-formule sur ${}^{w}\mathbf{X}$ sous forme prénexe, équivalente à E(x). Soit $s \in {}^{p}\mathbf{S}$, posons $h = \text{hauteur}(F({}^{w}s,x_1,\ldots,x_k))$.

Supposons que $h = pi_1 = pi_2 = \ldots pi_p = dj_1 = \ldots\ldots dj_q > p$. La formule $F({}^{w}s, x_1,\ldots,x_k)$, que nous pouvons écrire,

$$\ldots Qi_1\, ti_1 \in Xi_1 \ldots Qi_2\, ti_2 \in Xi_2 \cdots Qi_p\, ti_p \in Xi_p \cdots A(\ldots {}^{w}ti_1,\ldots {}^{w}ti_2,\ldots {}^{w}ti_p \ldots,\ldots xj_1,\ldots xj_2,\ldots xj_q \ldots)$$

équivaut à :

$$\ldots Qi_1\, ti_1 \in Xi_1 \ldots Qi_2\, ti_2 \in Xi_2 \cdots Qi_p\, ti_p \in Xi_p \cdots A({}^{h}t_1,\ldots ti_1,\ldots ti_2,\ldots ti_p,\ldots {}^{h}t_m, {}^{h}a_1 \ldots aj_1,\ldots aj_2,\ldots axj_q \ldots {}^{h}a_1),$$

avec, pour chaque indice j, ${}^{dj}aj = xj$.

En revenant à la définition de ${}^{h}\mathbf{X}$, on voit que l'énoncé précédent équivaut à l'énoncé de hauteur h-1 sur ${}^{h-1}\mathbf{X}$:

$$\ldots Qi_1\, \tau i_1 \in Yi_1{}^{I} \ldots Qi_2\, \tau i_2 \in Yi_2{}^{I} \cdots Qi_p\, Yi_p{}^{I} \cdots \exists u \in {}^{h-1}\mathbf{U}\ \forall s \in {}^{h-1}I\, (s \in u \Leftrightarrow$$
$$A({}^{h-1}t_1,\ldots \tau i_1(s),\ldots \tau i_2(s),\ldots \tau i_p(s),\ldots {}^{h-1}t_m, {}^{h-1}a_1 \ldots \alpha j_1(s),\ldots \alpha j_2(s),\ldots \alpha j_q(s) \ldots {}^{h-1}a_1)\ ..$$

Ceci achève la preuve du lemme

Fin de la démonstration de la condition iii)

Si E(x) avec est une p-formule sur ${}^{w}\mathbf{S}$, alors on peut la considérer comme une p-formule sur ${}^{w}\mathbf{X}$ il existe donc, d'après le lemme 4, une p-formule F(y) sur ${}^{p}\mathbf{X}$ ayant y comme seule variable libre et telle que pour tout $s \in {}^{p}\mathbf{S}$, F(s) est un p-énoncé de hauteur p sur ${}^{p}\mathbf{X}$ équivalent à$E({}^{w}s)$. Il découle de ce qui précède que F(y) peut être choisie de la forme :

$F(y) \equiv Q_1 t_1 \in C_1\ Q_2 t_2 \in C_2 \cdots Q_k t_k \in C_k\ B(t_1,t_2,\ldots,t_k, y, a_1,a_2,\ldots,a_q)$ avec B sans quantificateurs et $C_1, C_2,\ldots C_k, a_1, a_2,\ldots, a_q \in {}^{p}\mathbf{X}$. Soit ${}^{p}T_n$ contenant tous les C_j et tous les a_i.

On voit que :

$\forall X_1 \in T_n \ldots \forall X_k \in T_n \forall x_1 \in T_n \ldots \forall x_q \in T_n$

$[\forall Z \in \mathbf{S}\ \exists Y \in \mathbf{S}\ \forall s \in \mathbf{S}\ (x \in Y \Leftrightarrow x \in Z \wedge (Q_1 t_1 \in X_1 \cdots Q_k t_k \in X_k\ B(t_1,\ldots,t_k,s,x_1,\ldots,x_q))]$,

cela provient du fait que la superstructure $\mathbf{S}$ est complète.

Transféré dans ${}^p\mathbf{X}$, cet énoncé devient :

$\forall X_1 \in {}^pT_n \ldots \forall X_k \in {}^pT_n \forall x_1 \in {}^pT_n \ldots \forall x_q \in {}^pT_n$

$[\forall Z \in {}^p\mathbf{S}\ \exists Y \in {}^p\mathbf{S}\ \forall s \in {}^p\mathbf{S}\ (x \in Y \Leftrightarrow x \in Z \wedge (Q_1 t_1 \in X_1 \cdots Q_k t_k \in X_k\ B(t_1,\ldots,t_k,s,x_1,\ldots,x_q)))]$.

On a donc :

$\forall Z \in {}^p\mathbf{S}\ \exists Y \in {}^p\mathbf{S}\ \forall s \in {}^p\mathbf{S}\ (s \in Y \Leftrightarrow s \in Z \wedge (Q_1 t_1 \in C_1 \cdots Q_k t_k \in C_k\ B(t_1,\ldots,t_k,s,a_1,\ldots,a_q)))$,

$\forall Z \in {}^p\mathbf{S}\ \exists Y \in {}^p\mathbf{S}\ \forall s \in {}^p\mathbf{S}\ (s \in Y \Leftrightarrow s \in Z \wedge F(s))$,

$\forall Z \in {}^p\mathbf{S}\ \exists Y \in {}^p\mathbf{S}\ \forall s \in {}^p\mathbf{S}\ (s \in Y \Leftrightarrow x \in Z \wedge E({}^w s))$, ce qu'il fallait démontrer.

B- Preuve de la consistance relative de RIST.

Nous pouvons maintenant donner la preuve de la conservativité de RIST. La conservativité de RIST s'énonce :

METATHEOREME :III

Tout théorème interne de RIST est un théorème de ZFC.

Dans notre démonstration, nous utiliserons comme modèle des extensions successives ajustées de la superstructure complète , $\mathbf{S}(\alpha)$, bâtie sur ensemble transitif de la forme $R(\alpha)$ où α est un ordinal , les ensembles $R(\alpha)$ étant définis par induction sur les ordinaux par $R(\emptyset) = \emptyset$ et pour tout ordinal α, $R(\alpha) = \bigcup_{\mu\in\alpha} \mathcal{P}(R(\mu))$. Nous considèrerons l'axiome de fondation comme un axiome de ZFC. Cet axiome équivaut à l'affirmation que tout ensemble est dans un $R(\alpha)$.

Voici, avec ou sans démonstrations, les propriétés des $R(\alpha)$ qui nous utiliserons au cours de notre preuve.

◇ Si α est un ordinal limite, alors , $R(\alpha) = \bigcup_{\mu\in\alpha} R(\mu)$.

◇ Si α est un ordinal limite, et si $t_1 \in R(\alpha),..,t_k \in R(\alpha)$, alors $(t_1,..,t_k) \in R(\alpha)$.

Montrons le pour $k = 2$. Nous montrons d'abors que si t est s sont deux éléments de $R(\alpha)$, alors, il en est de même de $\{t\}$ et de $\{t,s\}$. Soient donc s et t deux éléments de $R(\alpha)$. On a $R(\alpha) = \bigcup_{\mu\in\alpha} R(\mu)$ donc, $t \in R(\mu')$, et $s \in R(\mu'')$ avec $\mu' \in \alpha$ et $\mu'' \in \alpha$. Si on prend $\mu = \max\{\mu',\mu''\}$, on a : $t \in R(\mu)$ et $s \in R(\mu)$ donc, $\{t\} \in \mathcal{P}(R(\mu))$ et $\{t,s\} \in \mathcal{P}(R(\mu))$, d'où l'on tire, $\{t\} \in R(\alpha)$ et $\{t,s\} \in R(\alpha)$. On en déduit que la propriété est vraie pour $k = 2$ car $t_1 \in R(\alpha)$ et $t_2 \in R(\alpha)$ impliquent $\{t_1\} \in R(\alpha)$ et $\{t_1,t_2\} \in R(\alpha)$, d'où on tire : $(t_1,t_2) = \{\{t_1\},\{t_1,t_2\}\} \in R(\alpha)$. Pour $k > 2$, on a $(t_1,..,t_k) = (t_1, (t_2,..,t_k)) = \{\{t_1\},\{t_1,(t_2,..,t_{k-1})\}\}$, la démonstration se temine donc aisémant par récurrence. Cette propriété admet une réciproque immédiate.

◇ Si $A_1, A_2,..., A_n$ sont des énoncés de ZFC alors, pour tout ordinal α, il existe un ordinal limite β contenant α tel que : $(A_1 \Leftrightarrow A_1^{R(\beta)}) \wedge (A_2 \Leftrightarrow A_2^{R(\beta)}) \wedge .... (A_n \Leftrightarrow A_n^{R(\beta)})$, où $A_i^{R(\beta)}$ désigne le relativisé à $R(\beta)$ de l'énoncé A_i (voir [19] p.67).

◇ Si α est un ordinal limite et ${}^*S(\alpha)$ une extension de $S(\alpha)$ alors, $(z \in {}^*(\mathcal{P}(R(\alpha)) \wedge z\ {}^*\text{fini}) \Rightarrow z \in {}^*R(\alpha)$.

◇ Si α est un ordinal limite, alors pour tous $x \in {}^*R(\alpha)$ $y \in {}^*R(\alpha)$ et $f \in {}^*S(\alpha)$, si f est une application de x dans y et si x et y sont *finis, on a $f \in {}^*R(\beta)$.

Pour les deux dernières propriétés, on démontre la propriété obtenue en supprimant les étoiles puis on applique le transfert.

Démonstration du métathéorème:

Soit A_0 un énoncé interne de RIST. Sa démonstration dans RIST utilise des axiome de ZFC en nombre intuitivement fini, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et éventuellement les axiomes, $\mathcal{SR}_1$, $\mathcal{SR}_2$, $\mathcal{SR}_3$, et les schémas d'axiome (T), (I) et (S).

Remarquons que chaque fois que nous utilisons, dans une démonstration, le shéma d'axiomes (I), nous n' utilisons en fait qu'un axiome $I(\alpha_1,..,\alpha_k;\beta,F)$ ou $I(\alpha_1,.., \alpha_k ;)$, où $\alpha_1,..,\alpha_k$, β sont des niveaux fixés de standardicité et F est une formule interne; de même, à chaque utilisation de (T) on fait usage d'un seul axiome $T(\alpha,F)$ relatif a un niveau α de standardicité et à une formule interne F. De la même façon, quand on fait appel à (S), on utilise un axiome $S(\alpha, F)$ ou F est une formule α-externe faisant intervenir un nombre fini de de quantificateurs externes $Q_1^{\beta 1}, \ldots, Q_m^{\beta m}$, les constantes $\beta_1,.., \beta_m$ étant toutes α-standard. Nous noterons $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{w-1}$, les niveaux <u>distincts</u> de standardicité utilisés dans la preuve de A_0 écrits par ordre décroissant de standardicité, ce qui signifie que l'on aura $\neg(\mu_2 \mathcal{SR} \mu_1)$, $\neg(\mu_3 \mathcal{SR} \mu_2) \ldots$, $\neg(\mu_{w-1} \mathcal{SR} \mu_{w-2})$.

Soit α un ordinal tel que $\mathbb{N} \in R(\alpha)$ et soit β un ordinal limite contenant α tel que :

$$(A_0 \Leftrightarrow A_0^{R(\beta)}) \wedge (A_1 \Leftrightarrow A_1^{R(\beta)}) \wedge \ldots (A_n \Leftrightarrow A_n^{R(\beta)}).$$

Posons $E = R(\beta)$, et soit $S(\beta) = {}^1S(\beta) \to {}^2S(\beta) \to {}^3S(\beta) \cdots \to {}^wS(\beta)$. w extensions ajustées successives de $S(\beta)$

Pour tout entier p nous noterons: ${}^p\underline{E} = \{ {}^wx / x \in {}^pE \}$.

Il découle de la définition des ${}^pE$ pour $1 \leq p \leq w$ que l'on a: ${}^1\underline{E} \subset {}^2\underline{E} \subset \ldots \subset {}^w\underline{E}$. Si $x \in {}^wE$, nous noterons : $p(x) = \min \{ p \in \mathbb{N} / x \in {}^p\underline{E} \}$.

Nous définirons <u>sur</u> ${}^w\underline{E}$ deux relations binaires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$ en posant pour tous x et y dans ${}^wE$:

$$(x,y) \in \mathscr{A} \Leftrightarrow x \in y \ ,$$
$$(x,y) \in \mathscr{S} \Leftrightarrow p(x) \leq p(y).$$

Aux constantes $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_{w-1}$, on peut associer des éléments $a_1, a_2, \dots a_{w-1}$, de ${}^wE$ tels que, pour tout couple (i,j), $\mu_i \,\mathscr{S}\mathscr{R}\, \mu_j$ si et seulement si $p(a_i) \leq p(a_j)$; il suffit de prendre $a_1 \in {}^1\underline{E}$ et, pour $i > 1$, $a_i \in {}^i\underline{E} \setminus {}^{i-1}\underline{E}$. On aura donc pour tout i, $p(a_i) = i$. A la constante $\mathbb{N}$ qui apparait dans la formulation du principe d'idéalisation (implicitement, dans les sous-formules de la forme " x fini"),

nous ferons correspondre l'élément ${}^w\mathbb{N}$ de ${}^wE$.

Soit la réalisation $\mathcal{M} = ({}^wE, \mathscr{A}, \mathscr{S}, a_1, a_2, \dots a_{w-1}, {}^w\mathbb{N})$ de domaine ${}^wE$ dans laquelle le prédicat "$\in$" d'appartenance est interprété par la relation $\mathscr{A}$, le prédicat de Wallet est interprété par la relation $\mathscr{S}$, les constantes $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_{w-1}$ et $\mathbb{N}$ respectivement par les éléments $a_1, a_2, \dots a_{w-1}$ et ${}^w\mathbb{N}$ de ${}^wE$.

Nous allons montrer que $\mathcal{M}$ est un modèle du système d'axiomes Σ constitué par, $A_1, A_2, \dots, A_n$, $\mathscr{S}\mathscr{R}_1$, $\mathscr{S}\mathscr{R}_2$, $\mathscr{S}\mathscr{R}_3$, ainsi que tous les axiomes de la forme $I(\alpha_1,..,\alpha_k;\beta,F)$, $I(\alpha_1,.., \alpha_k\,;\,, F)$, $S(\alpha,F)$ ou $T(\alpha,F)$ utilisés dans la preuve de A_o.

a) A_1, A_2, ..., A_n sont vrais dans $\mathcal{M}$:

En effet pour chaque A_i, si nous notons $(A_i)_w$ l'interprétation de A_i dans $\mathcal{M}$ on a :

$(A_i)_w \equiv (A_i)^{{}^wR(\beta)} \Leftrightarrow A_i^{R(\beta)} \Leftrightarrow A_i$. La première équivalence s'obtient par transfert, la seconde découle du choix de β.

b) Les axiomes $\mathscr{S}\mathscr{R}_1$, $\mathscr{S}\mathscr{R}_2$ et $\mathscr{S}\mathscr{R}_3$ sont vrais dans $\mathcal{M}$:

En effet, ces axiomes ont les interprétations suivantes dans $\mathcal{M}$:

Pour $\mathscr{S}\mathscr{R}_1$: $\forall x \in {}^wE \quad p(x) \leq p(y)$,

pour $\mathscr{S}\mathscr{R}_2$: $\forall x \in {}^wE\ \forall y \in {}^wE \quad (\,p(x) \leq p(y)\,) \vee (\,p(y) \leq p(x)\,)$, pour $\mathcal{SR}_3$: $\forall x \in {}^wE\ \forall y \in {}^wE\ \forall z \in {}^wE\ (\,(\,p(x) \leq p(y)\,) \wedge (\,p(y) \leq p(z)\,)\,) \Rightarrow p(x) \leq p(z)\,)$,

qui sont des énoncés démontrables à partir des propriétés des ${}^p\underline{E}$ citées plus haut.

b) Montrons que pour toute formule $F(x, t_1, t_2,..., t)$ interne avec $x, t_1,..., t_k$ comme seules variables libres l'axiome $T(\alpha, F) = \forall^\alpha t_1 ...\forall^\alpha t_k\ (\forall^\alpha x\ F(x,t_1,...t_k) \Rightarrow \forall x\ F(x,t_1,...t_k)\,)$, est vrai dans $\mathcal{M}$. Puisque α est un des μ_i, il lui correspond un élément $a_i \in {}^i\underline{E}$, si on interprète la constante α par a_i, l'interprétation correspondante de $T(\alpha,F)$ dans $\mathcal{M}$ équivaut à:

$$\forall t_1 \in {}^iE ... \forall t_k \in {}^iE\ (\forall x \in_i {}^iE\ F\ (x,t_1,...t_k) \Rightarrow \forall x \in {}^wE\ F(x,{}^wt_1,..{}^wt_k)\,).$$

L'implication entre crochets est vérifiée pour tous $t_1,...t_k \in_p {}^pE$ grâce à la partie i) du théorème principal du chapitre 2-A ; $T(\alpha,F)$ est donc vrai dans $\mathcal{M}$.

c) Montrons que, si $\alpha_1,..,\alpha_k$ et β sont dans la liste des μ_i, alors pour toute formule interne F ayant x et y comme variables libres et éventuellement des paramètres, l'axiome $I(\alpha_1,..,\alpha_k;\beta,F) \equiv$
$(\forall^{\alpha_1}\ {}^{\text{fin}}z_1 ... \forall^{\alpha_k}\ {}^{\text{fin}}z_k \exists^\beta y\ \forall x_1 \in z_1 ... \forall x_k \in z_k\ F(x_1,..,x_k,y)) \Leftrightarrow \exists^\beta y\ \forall^{\alpha_1} x_1 ... \forall^{\alpha_k} x_k\ F(x_1,..,x_k,y)$.
est vrai dans $\mathcal{M}$, pour toute interprétation dans $\mathcal{M}$ des paramètres :

Soient $ap_1, ap_2,...ap_k$ et aq, les interprétations respectives de $\alpha_1,..,\alpha_k$ et β. Comme β n'est α_i-standard pour aucun $i \in \{1,2,\dots,k\}$, q est strictement supérieur à tous les p_i. Après quelques transformations, pour toute interprétation dans ${}^wE$ des paramètres, l'interprétation correspondante de $I(\alpha_1,..,\alpha_k;\beta,F)$ dans $\mathcal{M}$ devient :

$$[\forall^{w}\ {}^{\text{fini}}z_1 \in {}^{p_1}\underline{E} ... \forall^{w}\ {}^{\text{fini}}z_k \in {}^{p_k}\underline{E}\ \exists y \in {}^q\underline{E}\ \forall (x_1,...,x_k) \in {}^wE\ (\,(x_1 \in z_1 \wedge ... x_k \in z_k) \Rightarrow \bar{F}(x_1,...,x_k,y)\,)]$$
$$\Leftrightarrow [\,\exists y \in {}^q\underline{E}\ \forall x_1 \in {}^{p_1}\underline{E} ... \forall x_k \in {}^{p_k}\underline{E}\ \ \bar{F}(\,x_1,...,x_k, y)\,],$$

où $\bar{F}$ est la formule obtenue en remplaçant les paramètres de F par leurs interprétations respectives.

En regroupant les variables, si on pose $(p_1,...,p_k) = P$ et $B = ({}^{p_1}E, \dots, {}^{p_k}E) \in {}^P\mathcal{S}$ cet énoncé peut encore s'écrire :

$$[[\forall z \mid\in B\ ((z\ {}^{p}\text{fini}) \rightarrow \exists y \in {}^{q}E\ \ \forall x \mid\in z\ \ \bar{F}({}^{w}x,{}^{w}y))] \rightarrow [\exists y \in {}^{q}E\ \ \forall x \mid\in B\ \ \bar{F}({}^{w}x,{}^{w}y)]].$$

Comme, pour z_i ^{p_i}fini, $z_i \in {}^{p_i}E$ équivaut à $z_i \subset {}^{p_i}E$ on a, pour z ^{p}fini, $z \mid\in B$ ssi $z \mid\subset B$. L'énoncé précédent équivaut à :

$$[[\forall z \mid\subset B\ ((z\ {}^{p}\text{fini}) \rightarrow \exists y \in {}^{q}E\ \ \forall x \mid\in z\ \ \bar{F}({}^{w}x,{}^{w}y))] \rightarrow [\exists y \in {}^{q}E\ \ \forall x \mid\in B\ \ \bar{F}({}^{w}x,{}^{w}y)]].$$

Soit b la ^{w}relation (k+1)-aire définie par $(x,y) \in b \Leftrightarrow \bar{F}(x,y) \wedge (x \in {}^{w}E) \wedge (y \in {}^{w}E)$.

Le premier membre de l'énoncé précédent exprime que b est ^{p}concourante sur B dans ${}^{q}S$ et le deuxième qu'elle est B-idéalisable dans ${}^{q}S$. Il suffit donc d'appliquer la condition iii du théorème d'existence des extensions itérées ajustées pour montrer l'équivalence.

On démontre de même que, a toute interprétation des paramètres de F, l'interprétation correspondante dans $\mathcal{M}$ de l'axiome $I(\alpha_1,..,\alpha_k; .,F)$ équivaut à :

$$[[\forall z \mid\subset B\ ((z\ {}^{p}\text{fini}) \rightarrow \exists y \in {}^{w}E\ \ \forall x \mid\in z\ \ \bar{F}({}^{w}x,{}^{w}y))] \rightarrow [\exists y \in {}^{w}E\ \ \forall x \mid\in B\ \ \bar{F}({}^{w}x,{}^{w}y)]].$$

Nous concluerons donc, comme pour l'axiome $I(\alpha_1,..,\alpha_k; \beta,F)$, en utilisant le ii) du théorème principal du chapitre 2-A , mais en remplaçant q par w.

d) Montrons que pour tout α appartenant à la liste des μ_i, et toute formule α-externe F, $S(\alpha,F)$ est vrai dans $\mathcal{M}$. Supposons que $\alpha = \mu_p$, pour toute intepretation dans $\mathcal{M}$ des paramètres de F, si $\bar{F}$ est l'interprétation correspondante de F alors, $S(\alpha,F)$ doit être interprété par :

$\forall y \in {}^{p}\underline{E}\ \exists z \in {}^{p}\underline{E}\ \forall t \in {}^{p}\underline{E}\ (t \in z \Leftrightarrow (t \in y \wedge \bar{F}(t,..))$, qui équivaut à

$\forall y \in {}^{p}E\ \exists z \in {}^{p}E\ \forall t \in {}^{p}E\ (t \in z \Leftrightarrow (t \in y \wedge \bar{F}({}^{w}t,..))$. Il découle du fait que F est α-externe que $\bar{F}(t)$ est, pour tout $t \in {}^{w}E$, un p-énoncé sur ${}^{w}E$. D'autre part, $y \in {}^{p}E$ implique $y \subset {}^{p}E$, on peut donc appliquer le iii) du théorème d'existence d'extensions ajustées successives. On obtient qu'il existe un ensemble z (contenu dans y) tel que $\forall t \in {}^{p}E\ (t \in z \Leftrightarrow (t \in y \wedge \bar{F}({}^{w}t,..))$, comme d'autre part ($z \subset y$ et $y \in {}^{p}E$) implique $z \in {}^{p}E$, la preuve est terminée.

La preuve de la consistance relative de RIST se termine ainsi: (d'une manière analogue à celle de la consistance de IST dans [25])

On sait que A_0 admet une démonstration dans RIST à partir des axiomes de Σ. Cette preuve, interprétée dans $\mathcal{M}$, donne une preuve dans ZFC de l'interprétation $(A_0)_\omega$ de A_0 or, on a $(A_0)_w \equiv (A_0)^{{}^wR(\beta)}$. La propriété de transfert implique que $(A_0)^{{}^wR(\beta)} \Leftrightarrow A_0^{R(\beta)}$; comme β est choisi tel que $A_0^{R(\beta)} \Leftrightarrow R(\beta)$, on obtient une démonstration de A_0 dans ZFC. Ceci achève la preuve du métathéorème. ∎

REMARQUES FINALES.

a) On aura remarqué au cours de la preuve du théorème d'existence de suites d'extensions ajustées, que la technique qui consistait à remplacer un énoncés P sur ${}^{p+1}\mathbf{X}$ par un énoncés P' sur ${}^{p}\mathbf{X}$, était utilisée de manière récurrente. P' était l'énoncé obtenu en revenant à la définition de ${}^{p+1}\mathbf{X}$, " en s'exprimant modulo ${}^{p}\mathbf{U}$ ". On voit bien que, de proche en proche, tout énoncés sur ${}^{p}\mathbf{X}$ peut s'exprimer modulo **U**. On peut déduire également cela d'un résultat général de L.Haddad publié dans [10].

Dans ce travail, l'auteur établi ceci : Soient I, J, E des ensembles, **U** un ultrafiltre sur I, **V** un ultrafiltre sur J et $\mathbf{W} = \mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$ l'ultrafiltre sur I $\times$ J égal au produit ordinal de **U** par **V**. Si on pose ${}^*(X^I) = [(X^I)]^I/_{\mathbf{U}}$, ${}^{**}X = {}^*(X^I)/_{{}^*\mathbf{V}}$ alors, on peut identifier ${}^{**}X$ à $(X^{I\times J})/_{\mathbf{W}}$.

b) Dans un travail antérieur au nôtre, et publié dans [8], E.I.Gordon à montré qu'il était possible d'ordonner partiellement les ensembles au moyen d'un prédicat binaire, noté **st**, défini dans I.S.T. (à la place de notre prédicat non défini $\mathcal{SR}$) de telle manière que, si y **st** x et si y est fini alors, pour tout t $\in$ y, on a t **st** x. Sa définition est la suivante ; Deux ensembles x et y étant donnés, x est dit standard relativement à y et on écrit x st y si il existe une fonction φ telle que:

i) φ est standard et, pour tout t, $\varphi(t)$ est un ensemble fini,

ii) y est dans le domaine de φ,

iii) $x \in \varphi(y)$.

La définition dans IST ci-dessus peut être considérée comme une définition dans RIST ; il suffit de donner au mot "standard" dans le i) la définition que nous lui avons donné au début de cet article (x-standard pour tout x). On voit alors que, pour tous ensembles x et y, x **st** y implique $x\mathcal{SR}y$. En effet, soient x, y et φ vérifiant i) ii) et iii); φ standard implique que φ est y-standard donc, d'aprés (T) $\varphi(y)$ est y-standard; comme $\varphi(y)$ est fini, cela implique que tout élément de $\varphi(y)$ est y-standard donc : $x \mathcal{SR} y$.

Pour ne pas avoir des contre-exemples trop particuliers, exigeons que x et y soient tous deux éléments de [0,1]. Ecrivons IMFIN(φ) pour dire que φ est une fonction telle que, pour tout y $\varphi(y)$ est un ensemble fini. Pour tout y non standard fixé dans [0,1] on a :

$$\forall^{st,\, fin}\Phi\, \exists x \in [0,1]\ \forall \varphi \in \Phi\, (\, \mathrm{IMFIN}(\varphi) \Rightarrow x \notin \varphi(y)\,),$$

(pour chaque Φ fini et standard, on prend $x \in [0,1] \setminus \bigcup_{\varphi \in \Phi \text{ t.q.IMFIN}(\varphi)} \varphi(y)$).

Par (T) ce dernier énoncé équivaut à :

$$\forall^{st,\, fin}\Phi\, \exists^{y} x \in [0,1] \forall \varphi \in \Phi\, (\, \mathrm{IMFIN}(\varphi) \Rightarrow x \notin \varphi(y)\,).$$

Il suffit d'appliquer (I) pour obtenir :

$$\exists^{y} x \in [0,1]\ \forall^{st} \varphi\ (\, \mathrm{IMFIN}(\varphi) \Rightarrow x \notin \varphi(y)\,).$$

On a donc prouvé l'existence de deux éléments x et y de [0,1] tels que $x\mathcal{SR}\, y$ et $\neg$(x **st** y).

Le prédicat binaire **st** de Gordon permet, comme notre prédicat $\mathcal{SR}$, d'introduire des infinitésimaux de différents ordres et d'obtenir, parmi d'autre choses, une caractérisation externe de la limite double identique à la nôtre. L'inconvénient d'une telle définition , dans IST, du prédicat de standardicité relative, est qu'elle interdit, comme l'a signalé l'auteur, d'énoncer un principe relatif de standardisation satisfaisant. Pour le démontrer, E.I.Gordon établit dans [8] 4. Théorème 5, l'existence d'un entier N et d'un $x \in [01]$ tels que x n'est infiniment voisin d'ordre N d'aucun élément N-standard de [01] .

BIBLIOGRAPHIE.

[1] **S.Albeverio, J.E.Fenstad, R.Hoegh-Krohn and T. Lindstrom.** Academic Press (1986). Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathemetical Physics.

[2] **S.Bochner.** A new approach of almost periodicity. Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A vol 48 (1962).

[3] **N.Bourbaki.** Eléments de Mathématiques II Chapitres 1- Structures topologiques. Chapitre 2- Structures uniformes. Ed. Hermann.

[4] **C.C.Chang, H.J. Keisler.** Model theory. 1973 North-Holland.

[5] **D.Dacunha-Castell et J.L.Krivine.** Application des ultraproduits à l'étude des espaces et des algèbres de Banach. Studia Mathematica T.XLI (1972) 315-334

[6] **A.M.Fink.** Almost Periodic Differential Equations. Lecture notes Springer n° 377.

[7] **P.Goodyear.** Double enlargements of Topological Spaces, Zeitschr. f. mat. Logik und grundlagen d.Math. Bd 30,S.389-392 1984 .

[8] **E.I.Gordon.** Relatively standard elements in the theory of internal sets of E.Nelson. Siberian Mathematical Journal, vol. XXX n°1 (1989).

[9] **A.Halanay.** Differential equations. Academic Press (1966).

[10] **L.Haddad.** La double ultrapuissance. Séminaire d'analyse, Université de Clermont II, n°24 (1988).

[11] **L.Haddad.** Introduction à l'analyse nonstandard Beyrouth Eté 1973.

[12] **S.Heinrich.** Ultrapowers of Locally Convex Spaces and Applications: I Math. Nachr. 118 (1984)285-315 et II Math. Nachr. 121 (1985) 211-229

[13] **C.W.Henson.** When do two Banach spaces have isometrically isomorphic nonstandard hulls ? Israel Journal of Math. Vol. 22, No 1, 1975.

[14] **C.W.Henson.** Nonstandard Hulls of Banach Spaces. Israel Journal of Math. vol.25, 1976.

[15] **C.W.Henson and L. Moore.** Nonstandard analysis and the theory of Banach spaces. Lecture Notes n°983. (Springer ed.) 27-112

[16] **R.Johnson.** A Linear, Almost Periodic Equation with an Almost Automorphic Solution.Proceedings of the A.M.S. Vol 82, N° 2, June 1981.

[17] **H.J.Keisler.** Ultraproducts and saturated models, Proc. Acad. Sci. Amsterdam A67 (1964), 178-186.

[18] **H.J.Keisler.** Good Ideals in fields of sets, Ann. Math. 79 (1964), 338-359.

[19] **J.L.Krivine.**Théorie axiomatique des ensembles.Presses universitaires de France (1972).

[20] **J.L.Krivine.** Langages à valeurs réelles et applications. Fundamenta Mathematica LXXXI (1974) 213-253.

[21] **O.Loos.** A non standard approach to the Lebesgue integral. Analyse non standard et mathématiques finitaires . Publications de l'Université e Paris 7 (1989).

[22] **R.Lutz and M.Goze.** Nonstandard analysis, a practical guide with applications. Lecture Notes in Math., N° 881 (1981).

[23] **W.A.J.Luxemburg.**A general theory of monads.Intern.Sympos.Pasadena,Calif. 1987 Holt, Rinehart and Winston, New-York, 1969 pp 18-86.

[24] **A.Macintyre.** Non-standard number theory. Proceedings of the International Congress of mathematicians, Helsinki 1978.

[25] **M. Morley and R. Vaught.** Homogeneous universal models, Math. Scand., II (1962), 37-57.

[26] **E.Nelson.** Internal Set Theory, B.A.M.S. 83, n° 6 nov. 1977.

[27] **E.Nelson.** The syntax of nonstandard analysis, Annals of Pure and Applied Logic, 38, (1988) 123-134.

[28] **Y.Péraire et G.Wallet.**Une théorie relative des ensembles internes. C.R.Acad.Sci. Paris,t.308, Série I, p.301-304,1989.

[29] **V.Pestov.** Fermeture non standard des groupes et algèbres de Lie banachiques. C.R.Acad.Sci. Paris,t.306, Série I, p.643-645,1988.

[30] **V.Pestov.** On a'Super' Version of Lie's Third Fundamental Theorem. Letters in Mathematical Physics 18: 27-33, 1989.

[31] **A.Robinson**. Introduction to model theory and the metamathematics of algebra. Amsterdam, North-Holland, 1985.

[32] **A.Robinson**. Non-standard theory of Dedeking rings, Proc. Acad. Sci. Amsterdam A70, 1987, 444-452.

[33] **A.Robinson, E.Zakon.** A Set-Theorical Characterization of enlargements. Intern. Sympos. Pasadena 1967.

[34] **A.Robinson.** Non-Standard Analysis,2nd ed., American Elsevier,New York, 1974.

[35] **T.Sari.**Fonctions presque-périodiques. Actes de l'école d'été d'Oran les Andalouses 8-12 Septembre 1984. Editions C.N.R.S. (Paris) et O.P.U. (Alger).

[36] **K.Yosida.** Functional Analysis. Springer-Verlag Berlin Heildelberg, New York 1974.

[37] **W.A.Veech.** Almost automorphic functions on groups. American Journal of Mathematics, vol. 87 (1965) p.p. 1-33.

Yves PERAIRE,
Université Blaise Pascal (Clermont II),
Département de mathématiques,
B.P. 45, **63170 Aubière .**

Manuscrit reçu le 23 mars 1992