ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

JEAN-CLAUDE LABLANQUIE

Théories pré-inductives et pré-modèle-complètes. Une approche naturelle du forcing infini

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 98, série *Mathématiques*, n° 28 (1992), p. 17-39

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1992__98_28_17_0>

Ann. Sci. Blaise Pascal (Clermont II), Sér. Math., Fasc. 28, pp. 17-39

THÉORIES PRÉ-INDUCTIVES ET PRÉ-MODÈLE-COMPLÈTES
UNE APPROCHE NATURELLE DU FORCING INFINI

Jean-Claude LABLANQUIE

Le forcing a été introduit en théorie des modèles par A. Robinson ([1], [3]). Ce forcing est une adaptation à la théorie des modèles du forcing de Cohen.

L'utilisation par Robinson du forcing en théorie des modèles s'inscrit dans l'étude de la modèle complètude et dans ses tentatives pour généraliser la notion de corps algébriquement clos. Dans cet esprit, la technique de forcing connue sous le nom de forcing infini est particulièrement intéressante car elle permet d'associer à une théorie T d'un langage du premier ordre L, une classe G(T) de L-structures qui possède les propriétés remarquables suivantes :

(i) Toute sous-structure d'un modèle de T se plonge dans une structure de G(T).

(ii) Si M et M' sont deux structures de G(T) telles que $M \subset M'$, alors M est une sous-structure élémentaire de M'.

(iii) Si M est une structure de G(T) et si M' est une sous-structure élémentaire de M, alors M' appartient à G(T).

De nombreux auteurs (Cherlin, Hirschfeld, Saracino, Simmons) se sont efforcés de construire la classe G(T) et d'étudier ses propriétés sans faire appel aux techniques du forcing.

L'idée de base de ce travail est l'étude des notions de théorie **pré-inductive** et de théorie **pré-modèle-complète** qui généralisent respectivement les notions de théorie inductive et de théorie modèle-complète. Une théorie T sera dite pré-inductive (respectivement pré-modèle-complète) s'il existe une classe Σ de modèles de T qui est cofinale dans la classe de tous les modèles de T et qui est inductive (respectivement modèle-complète). Nous nous proposons de montrer qu'une théorie est pré-inductive si et seulement si elle est pré-modèle-complète.

Nous pourrions démontrer simplement ce résultat en utilisant les résultats classiques du forcing infini. Nous préférerons aborder ce problème de manière naïve, ce qui nous permettra de développer une approche naturelle de la théorie du forcing infini en théorie des modèles.

Pour montrer que toute théorie pré-inductive est pré-modèle-complète, il suffit en fait de répondre au problème plus général suivant :

Soit Σ une classe de L-structures, est-il possible d'extraire de Σ une classe Σ' cofinale dans Σ et modèle-complète ?

Une analyse élémentaire de ce problème conduit à introduire la notion de **relation de pseudo-forcing** sur la classe Σ. On montre alors que le problème admet une solution si et seulement si il existe une relation de pseudo-forcing sur Σ.

Etant donnée une classe Σ de L-structures, il peut exister plusieurs relations de pseudo-forcing sur Σ. De plus, on peut associer à toute relation de pseudo-forcing R sur Σ une autre relation de pseudo-forcing notée R^*. Alors, si R et S sont deux relations de pseudo-forcing sur une classe inductive Σ, on a : $R^* = S^*$. La relation R^* est encore notée F_Σ. De l'examen des propriétés de la relation F_Σ résulte alors immédiatement la définition du forcing infini de Robinson. De plus, il convient de remarquer alors que la relation F_Σ n'est autre que la relation de forcing faible de Robinson.

Nous aborderons aussi un vieux problème de la théorie du forcing infini : celui de la caractérisation des théories T qui sont contenues dans leur compagnon de forcing T^F où T^F désigne la théorie de la classe G(T). Nous établirons alors que, pour toute théorie T, il y a équivalence entre : (a) T est pré-inductive ; (b) T est pré-modèle-complète et (c) T est contenue dans son compagnon de forcing.

I) Préliminaires.

Dans tout ce qui suivra, nous considérerons un langage L du calcul des prédicats du premier ordre avec égalité. Les connecteurs primitifs du langage sont : la négation $\neg$, la conjonction $\wedge$ et la disjonction $\vee$. L'implication $\rightarrow$ et l'équivalence $\leftrightarrow$ sont définies de la manière habituelle à partir des connecteurs primitifs. Le seul quantificateur primitif sera le quantificateur existentiel $\exists$. Le quantificateur universel $\forall$ est considéré comme l'abréviation de $\neg\exists\neg$. En d'autres termes, la formule $\forall x\varphi(x)$ est une abréviation de la formule $\neg\exists x\neg\varphi(x)$.

Si M est une L-structure, nous noterons L(M) le langage obtenu à partir de L par adjonction de constantes servant de nom aux éléments de la structure M (bien entendu les constantes associées à deux éléments distincts de M sont distinctes). Nous nous abstiendrons délibérément de distinguer l'élément de M et la constante qui le désigne. Le **diagramme** de M sera noté D(M) : il se compose de tous les énoncés atomiques et de toutes les négations d'énoncés atomiques du langage L(M) qui sont vrais dans M.

Un **énoncé** est une formule sans variables libres. Une **théorie** est un ensemble consistant d'énoncés. Si T est une théorie de L, on note Mod(T) la classe de tous les modèles de T. Si Σ est une classe de L-structures, on note Th(Σ) la **théorie de** Σ, c'est à dire l'ensemble de tous les énoncés de L qui sont vrais dans toutes les L-structures de Σ.

Rappelons qu'une **chaîne de L-structures** est une suite $(M_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ de L-structures qui vérifie : $M_\alpha \subset M_\beta$ pour tous ordinaux α et β tels que $\alpha < \beta < \lambda$. Une chaîne $(M_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ sera dite **chaîne élémentaire** si de plus : $M_\alpha \prec M_\beta$ pour tous α et β tels que $\alpha < \beta < \lambda$.

Nous allons maintenant définir quelques propriétés relatives aux classes de L-structures.

Définitions 1.1. Soit Σ une classe de L-structures.

1°) On dit que Σ est **close pour l'isomorphisme** si, pour toute $M \in \Sigma$ et toute L-structure M' isomorphe à M , la structure M' appartient à Σ.

2°) On dit que Σ est **close pour les sous-structures élémentaires** si, pour toute $M \in \Sigma$ et toute L-structure M' telle que $M' \prec M$, la structure M' appartient à Σ.

3°) Soit Σ' une autre classe de L-structures. On dit que Σ' est **cofinale dans** Σ si $\Sigma' \subset \Sigma$ et si pour tout $M \in \Sigma$ il existe $M' \in \Sigma'$ telle que $M \subset M'$.

4°) On dit que Σ est **inductive** si pour toute chaîne $(M_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ constituée d'éléments de Σ, la réunion des éléments de la chaîne appartient encore à Σ.

5°) On dit que Σ est **pré-inductive** s'il existe une classe inductive Σ' qui soit cofinale dans Σ.

6°) On dit que Σ est **modèle-complète** si pour tous éléments M et M' de Σ tels que $M \subset M'$ on a : $M \prec M'$.

7°) On dit que Σ est **pré-modèle-complète** s'il existe une classe modèle-complète Σ' qui soit cofinale dans Σ.

Rappelons qu'une théorie T de L est dite **inductive**, respectivement **modèle-complète** si la classe Mod(T) est inductive, respectivement modèle-complète.

De même, si T est une théorie de L, on dit que T est **pré-inductive**, respectivement **pré-modèle-complète** si la classe Mod(T) est pré-inductive, respectivement pré-modèle-complète, c'est à dire s'il existe une classe Σ cofinale dans Mod(T) qui soit inductive, respectivement modèle-complète.

> **N.B.** Il est clair que toute théorie inductive est pré-inductive : il suffit de prendre $\Sigma = \mathrm{Mod}(T)$. De même toute théorie modèle-complète est pré-modèle-complète. Mais les exemple suivants montrent qu'il existe des théories pré-inductives qui ne sont pas inductives et des théories pré-modèle-complètes qui ne sont pas modèle-complètes.

Exemples. Soit L un langage ayant pour seul symbole non logique un prédicat binaire noté $\leq$. On utilise la notation habituelle pour la relation $\leq$, c'est à dire que l'on écrit $x \leq y$ au lieu de $\leq(xy)$. De plus, la formule $x < y$ est une abréviation de la formule : $x \leq y \wedge x \neq y$. Dans ce langage, nous désignerons par T_0 la théorie des ordres totaux denses ayant au moins deux éléments (et donc une infinité). Considérons également les deux énoncés suivants :

$$\sigma = \forall x \exists y\, (y < x) \wedge \forall x \exists y\, (x < y) \ ; \ \tau = \exists x \forall y\, (y \leq x) \wedge \exists x \forall y\, (x \leq y)$$

La théorie $T_1 = T_0 \cup \{\sigma\}$ est la théorie des ordres totaux denses sans premier ni dernier élément.

1) Soit $T = T_0$. On sait que la théorie T_1 est modèle-complète. Posons $\Sigma = \mathrm{Mod}(T_1)$. Il est clair que la classe Σ est cofinale dans Mod(T), de plus elle est modèle-complète donc T est pré-modèle-complète. Or T n'est pas modèle-complète.

2) Soit $T = T_0 \cup \{\sigma \vee \tau\}$. La théorie T n'est pas inductive. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit M_n la L-structure qui a pour domaine l'intervalle réel $[\,0,\ n+1\,]$ et où le prédicat $\leq$ est interprété par l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$. Il est clair que M_n est un modèle de T. Par contre, la réunion des M_n n'est pas un modèle de T car elle a un plus petit élément mais ne possède pas de plus grand élément. Posons $\Sigma = \mathrm{Mod}(T_1)$. Il est clair que Σ est cofinale dans Mod(T) et qu'elle est inductive. Donc T est pré-inductive.

Il est bien connu que toute théorie modèle-complète est inductive, mais que la réciproque est fausse. On pourrait donc penser que toute théorie pré-modèle-complète est pré-inductive, mais que là encore, la réciproque est fausse. Toutefois la situation est différente car nous montrerons qu'une théorie est pré-modèle-complète si et seulement si elle est pré-inductive. Nous pourrions établir ce résultat très facilement en utilisant directement le forcing infini de A. Robinson [3].

Nous nous proposons en fait d'aborder ce problème de manière naïve et nous verrons alors se dégager une approche intuitive et naturelle du forcing infini.

Nous terminerons ce paragraphe en démontrant un petit résultat technique qui nous permettra d'abréger les démonstrations de plusieurs théorèmes.

Lemme 1.1. *Soient* Σ *une classe de L-structures et* Σ', Σ'' *deux classes modèle-complètes qui sont cofinales dans* Σ. *Alors, pour tout* $M \in \Sigma'$ *il existe un modèle* N *de* $\mathrm{Th}(\Sigma'')$ *tel que :* $M \prec N$. *Si* Σ'' *est inductive, on peut prendre* N *dans* Σ''.

Preuve. Soit $M \in \Sigma'$. En utilisant le fait que les classes Σ' et Σ'' sont cofinales dans Σ, on peut construire une chaîne $(M_n)_{n\in\omega}$ de structures de Σ qui possède les propriétés suivantes : $M_0 = M$, $M_{2p} \in \Sigma'$ pour tout $p < \omega$ et $M_{2p+1} \in \Sigma''$ pour tout $p < \omega$. Soit N la réunion de toutes les structures de la chaîne. On a donc :

$$N = \bigcup_{n\in\omega} M_n = \bigcup_{p\in\omega} M_{2p} = \bigcup_{p\in\omega} M_{2p+1}$$

Les chaînes $(M_{2p})_{p<\omega}$ et $(M_{2p+1})_{p<\omega}$ sont des chaînes d'éléments de Σ' et Σ'' respectivement. Ce sont donc des chaînes élémentaires car Σ' et Σ'' sont modèle-complètes. Mais alors : $M = M_0 \prec N$ et N est modèle de $Th(\Sigma'')$. Si Σ'' est inductive, il est clair que $N \in \Sigma''$. D'où le résultat ■

<u>II) Relations de pseudo-forcing</u>.

Nous aimerions montrer que toute théorie pré-inductive est pré-modèle-complète. Considérons donc une théorie pré-inductive T : par définition, il existe une classe inductive Σ cofinale dans Mod(T). Le problème serait résolu s'il nous était possible de déterminer une classe modèle-complète Σ' cofinale dans Σ car alors Σ' serait cofinale dans Mod(T) et modèle-complète, c'est à dire T serait pré-modèle-complète.

En fait nous aurions le résultat annoncé si nous pouvions résoudre le problème un peu plus général suivant :

Soit Σ une classe inductive quelconque, est-il possible d'extraire de Σ une classe Σ' cofinale dans Σ et modèle-complète ? En d'autres termes, toute classe inductive est-elle pré-modèle-complète ?

On sait résoudre ce problème en utilisant le forcing infini [2] : de manière plus précise, on considère la relation de forcing infini sur la classe Σ et on prend pour Σ' la classe des structures génériques associées.

Le forcing introduit par A. Robinson en théorie des modèles s'inspirait de la définition du forcing en théorie des ensembles et pouvait paraître quelque peu artificiel.

Nous allons maintenant procéder à une analyse élémentaire du problème précédent et nous montrerons que notre démarche nous conduit tout naturellement à définir une relation qui n'est autre que le forcing infini de A. Robinson.

Considérons pour le moment une classe quelconque Σ de L-structures. Nous allons essayer de voir dans quelles conditions on peut extraire de Σ une classe modèle-complète Σ' cofinale dans Σ. En d'autres termes, nous allons essayer de caractériser les classes pré-modèle-complètes.

Si la classe Σ n'est pas modèle-complète, cela est dû à un "mauvais comportement", relativement à l'inclusion de la relation de satisfaction $\models$ définie entre une L-structure M et les énoncés du langage L(M). De manière plus précise, si M et M' sont deux structures de Σ telles que $M \subset M'$ et si φ est un énoncé de L(M) vrai dans M, alors en général, cet énoncé n'est pas vrai dans M'. Ainsi, la relation de satisfaction n'est pas préservée par l'inclusion.

A ce niveau, la première idée naturelle serait de substituer à la relation de satisfaction $\models$ une "bonne" relation R qui, elle, serait préservée par l'inclusion. On est donc conduit en un premier temps à généraliser la notion de relation de satisfaction.

Définition 2.1. Soit Σ une classe de L-structures et, pour tout élément M de Σ, soit Δ_M un ensemble d'énoncés du langage L(M). L'ensemble $\{ (M, \Delta_M) : M \in \Sigma \}$ est appelé **relation de satisfaction généralisée** sur Σ.

Notations. Soit $R = \{ (M, \Delta_M) : M \in \Sigma \}$ une relation de satisfaction généralisée sur Σ, alors :

- Pour tout élément M dè Σ, l'ensemble Δ_M est encore noté R(M).
- Soient $M \in \Sigma$ et soit φ un énoncé de L(M). Si $\varphi \in R(M)$, on notera : $M \, R \, \varphi$ et si $\varphi \notin R(M)$, on notera : non($M \, R \, \varphi$).

N.B. Si Σ est une classe de L-structures, alors la relation de satisfaction $\models$ sur les éléments de Σ est une relation de satisfaction généralisée.

Soit Σ une classe quelconque. Nous aimerions maintenant considérer une relation de satisfaction généralisée R sur Σ qui soit préservée par l'inclusion, c'est à dire qui vérifie la condition suivante :

(C_1) Pour toutes structures M, M' de Σ telles que $M \subset M'$ et tout énoncé φ de L(M) tel que $M\ R\ \varphi$, on a : $M'\ R\ \varphi$.

Mais, à l'évidence, cette condition est insuffisante. Il serait vain de se contenter de considérer une relation de satisfaction généralisée R qui vérifie (C_1) : ce qui nous intéresse au premier chef, c'est la relation de satisfaction usuelle $\models$ et la relation auxiliaire R doit pouvoir coïncider, pour certaines structures, avec la relation classique $\models$. De manière plus précise, il faudrait qu'il existe des structures M de Σ telles que, pour tout énoncé φ de L(M), on ait : $M \models \varphi$ si et seulement si $M\ R\ \varphi$. L'idée serait alors de prendre pour la classe Σ' cherchée la classe des structures de Σ pour lesquelles les relations R et $\models$ coïncident.

Or, on voudrait que la classe Σ' soit cofinale dans Σ. Pour assurer la cofinalité de la classe Σ' dans la classe Σ, il suffirait que la relation R considérée vérifie la deuxième condition suivante :

(C_2) Pour tout $M \in \Sigma$, il existe $M' \in \Sigma$ telle que $M \subset M'$ et telle que, pour tout énoncé φ de L(M), on ait : $M' \models \varphi$ si et seulement si $M'\ R\ \varphi$.

Définition 2.2. On appelle relation de **pseudo-forcing** sur une classe Σ de L-structures toute relation de satisfaction généralisée sur Σ qui vérifie les conditions (C_1) et (C_2).

Si R est une relation de satisfaction généralisée sur Σ, nous noterons $\Sigma^*(R)$ la classe des L-structures M de Σ pour lesquelles, nous avons :

Pour tout énoncé φ de L(M), $M\ R\ \varphi$ si et seulement si $M \models \varphi$.

Des définitions précédentes et de la condition (C_2), on déduit immédiatement :

Lemme 2.3. *Si* R *est une relation de pseudo-forcing sur* Σ, *alors la classe* $\Sigma^*(R)$ *est cofinale dans* Σ.

Le lemme suivant regroupe quelques propriétés élémentaires d'une relation de pseudo-forcing.

Lemme 2.4. *Soit* R *une relation de pseudo-forcing sur* Σ. *Alors, pour tout* $M \in \Sigma$ *et tout énoncé* φ *de* L(M) :

i) On ne peut pas avoir simultanément $M\,R\,\varphi$ *et* $M\,R\,\neg\varphi$.

ii) Si $M\,R\,\neg\varphi$, *alors pour toute structure* M' *de* Σ *telle que* $M \subset M'$ *on a* non(M' R φ).

iii) Si φ *est atomique et si* $M\,R\,\varphi$, *alors :* $M \models \varphi$.

Preuve.

i) Supposons qu'il existe $M \in \Sigma$ et φ énoncé de L(M) tels que : $M\,R\,\varphi$ et $M\,R\,\neg\varphi$. Il existe alors $M' \in \Sigma^*(R)$ telle que $M \subset M'$ (lemme 2.3). Or R satisfait (C_1) donc $M'\,R\,\varphi$ et $M'\,R\,\neg\varphi$. Mais $M' \in \Sigma^*(R)$, donc $M' \models \varphi$ et $M' \models \neg\varphi$. Ce qui est absurde.

ii) Supposons que $M\,R\,\neg\varphi$ et soit $M' \in \Sigma$ telle que $M \subset M'$, alors $M'\,R\,\neg\varphi$ (propriété C_1). En utilisant (i), on en déduit que non(M' R φ).

iii) Soit φ un énoncé atomique de L(M) tel que $M\,R\,\varphi$. Soit $M' \in \Sigma^*(R)$ telle que $M \subset M'$ (lemme 2.3), alors $M'\,R\,\varphi$ et donc $M' \models \varphi$. Mais alors $M \models \varphi$ ■

Le résultat suivant énonce quelques propriétés intéressantes de la classe $\Sigma^*(R)$.

Théorème 2.5. *Soit* R *une relation de pseudo-forcing sur* Σ. *Alors :*

i) $\Sigma^*(R)$ *est cofinale dans* Σ.

ii) $\Sigma^*(R)$ *est modèle-complète.*

Si de plus la classe Σ *est inductive :*

iii) $\Sigma^*(R)$ *est inductive.*

Preuve.

i) n'est autre que le lemme 2.3.

ii) Soient M et M' deux structures de $\Sigma^*(R)$ telles que $M \subset M'$ et soit φ un énoncé de L(M) tel que $M \models \varphi$, alors $M\ R\ \varphi$ donc $M'\ R\ \varphi$ (propriété C_1) et par suite $M' \models \varphi$. Cela montre que $M \prec M'$. Mais alors $\Sigma^*(R)$ est modèle-complète.

iii) Supposons Σ inductive. Soit $(M_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ une chaîne de structures de $\Sigma^*(R)$ et soit M la réunion des éléments de la chaîne. La classe Σ est inductive, donc $M \in \Sigma$. Soit φ un énoncé de L(M), il existe alors $\beta < \lambda$ tel que $\varphi \in L(M_\beta)$. Il faut montrer que $M\ R\ \varphi$ si et seulement si $M \models \varphi$. Supposons tout d'abord que $M \models \varphi$. La classe $\Sigma^*(R)$ est modèle-complète donc la chaîne $(M_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ est élémentaire et par suite $M_\beta \prec M$. Mais alors $M_\beta \models \varphi$ et, étant donné que M_β appartient à $\Sigma^*(R)$: $M_\beta\ R\ \varphi$. Par (C_1), on en déduit : $M\ R\ \varphi$. Réciproquement, supposons que $M\ R\ \varphi$. Si $M \models \neg\varphi$, alors d'après ce qui précède, $M\ R\ \neg\varphi$, ce qui est absurde d'après le lemme 2.4. On a donc bien $M \models \varphi$. Nous venons de montrer que $M \in \Sigma^*(R)$. La classe $\Sigma^*(R)$ est donc inductive ■

Corollaire 2.6. *Soit* Σ *une classe de L-structures sur laquelle il existe une relation de pseudo-forcing. Alors* Σ *est pré-modèle-complète.*

Preuve. Si R est une relation de pseudo-forcing sur Σ, alors la classe $\Sigma^*(R)$ est cofinale dans Σ et modèle-complète ■

Nous allons maintenant établir la réciproque du corollaire 2.6.

Définition 2.7. Soient Σ une classe de L-structures et Σ' une classe modèle-complète cofinale dans Σ. On appelle **relation de satisfaction généralisée sur Σ associée à Σ'**, la relation de satisfaction généralisée $R_{\Sigma'}$ sur Σ qui est définie de la manière suivante :

Pour tout $M \in \Sigma$ et tout énoncé φ de $L(M)$, $M\, R_{\Sigma'}\, \varphi$ si et seulement si $M' \models \varphi$ pour tout $M' \in \Sigma'$ tel que $M \subset M'$.

Lemme 2.8. *Soient Σ une classe de L-structures et Σ' une classe modèle-complète cofinale dans Σ. Alors, la relation de satisfaction généralisée $R_{\Sigma'}$ associée à Σ est une relation de pseudo-forcing sur Σ. De plus : $\Sigma' \subset \Sigma^*(R_{\Sigma'})$.*

Preuve. Pour simplifier, nous noterons R la relation $R_{\Sigma'}$. Il est clair, par définition, que R vérifie (C_1). Etant donné que Σ' est cofinale dans Σ, pour montrer que R vérifie (C_2) et que $\Sigma' \subset \Sigma^*(R)$, il suffit de montrer que pour tout $M \in \Sigma'$ et tout énoncé φ de $L(M)$ on a : $M\, R\, \varphi$ si et seulement si $M \models \varphi$. Soient $M \in \Sigma'$ et φ un énoncé de $L(M)$. Si $M\, R\, \varphi$ alors $M \models \varphi$ par définition de R. Réciproquement supposons que $M \models \varphi$. Soit $M' \in \Sigma'$ tel que $M \subset M'$. Alors $M \prec M'$ car Σ' est modèle-complète et donc $M' \models \varphi$. On en déduit : $M\, R\, \varphi$. D'où le résultat ■

En regroupant les résultats du corollaire 2.6 et du lemme 2.8, on obtient :

Théorème 2.9. *Soit Σ une classe de L-structures. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) Σ est pré-modèle-complète.

ii) Il existe une relation de pseudo-forcing sur Σ.

Le problème initial se ramène donc au problème suivant :

Etant donné une classe inductive Σ, existe-t-il une relation de pseudo-forcing sur Σ ?

Avant de montrer que la réponse à ce problème est positive, nous allons voir que s'il existe une relation de pseudo-forcing sur une classe **inductive** Σ, elle est unique, en un certain sens. De manière plus précise, à toute relation de pseudo-forcing R sur une classe inductive Σ, nous allons associer une autre relation de pseudo-forcing R^* qui prolonge R, de telle sorte que si R et S sont deux relations de pseudo-forcing sur Σ, nous ayons : $R^* = S^*$.

Définition 2.10. Soient Σ une classe de L-structures et R une relation de pseudo-forcing sur Σ. On notera R^* la relation de satisfaction généralisée sur Σ associée à la classe $\Sigma^*(R)$.

N.B. La définition de R^* a un sens car la classe $\Sigma^*(R)$ est modèle-complète et cofinale dans Σ (théorème 2.5).

Le lemme suivant est une conséquence immédiate des définitions précédentes :

Lemme 2.11. *Soient* Σ *une classe de L-structures et* R *une relation de pseudo-forcing sur* Σ. *Alors, pour tout* $M \in \Sigma$ *et tout énoncé* φ *de* L(M), *on a :*

$M\ R^*\ \varphi$ *si et seulement si* $M'\ R\ \varphi$ *pour toute structure* M' *de* $\Sigma^*(R)$ *telle que* $M \subset M'$.

Le résultat ci-dessous regroupe les propriétés fondamentales de la relation R^*.

Lemme 2.12. *Soit* R *une relation de pseudo-forcing sur une classe de L-structures* Σ. *Alors :*

i) R^* *est une relation de pseudo-forcing sur* Σ.

ii) $\Sigma^*(R) \subset \Sigma^*(R^*)$.

iii) Pour tout $M \in \Sigma$ *et tout énoncé* φ *de* L(M), *si* $M\ R\ \varphi$ *alors* $M\ R^*\ \varphi$.

Preuve. Les propriétés (i) et (ii) sont une conséquence immédiate de la définition de R^* et du lemme 2.8. Soient $M \in \Sigma$ et φ un énoncé de L(M) tel que $M\ R\ \varphi$. Soit $M' \in \Sigma^*(R)$ telle que $M \subset M'$, alors $M'\ R\ \varphi$ et donc $M' \models \varphi$. Cela signifie que $M\ R^*\ \varphi$

(définitions 2.7 et 2.10). On en déduit (iii) ■

Nous pouvons alors établir le théorème fondamental suivant :

Théorème 2.13. *Soient* Σ *une classe* <u>*inductive*</u> *de L-structures et* R *et* S *deux relations de pseudo-forcing sur* Σ. *Alors :*

i) $R^* = S^*$ *c'est à dire : pour tout* $M \in \Sigma$ *et tout énoncé* φ *de* L(M), $M\ R^*\ \varphi$ *si et seulement si* $M\ S^*\ \varphi$.

ii) $\Sigma^*(R^*) = \Sigma^*(S^*)$

Preuve. Il est clair que (ii) est une conséquence immédiate de (i). Vérifions (i). Les relations R et S jouent des rôles identiques, il suffit donc de montrer que, pour tout $M \in \Sigma$ et tout énoncé φ de L(M) tel que $M\ R^*\ \varphi$, on a : $M\ S^*\ \varphi$. Soient donc $M \in \Sigma$ et φ un énoncé de L(M) tel que $M\ R^*\ \varphi$. Supposons que non($M\ S^*\ \varphi$), alors il existe $M' \in \Sigma^*(S)$ tel que $M \subset M'$ et $M' \models \neg\varphi$. Les classes $\Sigma^*(R)$ et $\Sigma^*(S)$ sont cofinales dans Σ, modèle-complètes et inductives (théorème 2.5). En appliquant le lemme 1.1, on voit qu'il existe $N \in \Sigma^*(R)$ telle que $M' \prec N$. Donc : $N \models \neg\varphi$. De plus $N \in \Sigma^*(R^*)$ (lemme 2.12). Or $M\ R^*\ \varphi$ donc $N\ R^*\ \varphi$ et par suite $N \models \varphi$ car $N \in \Sigma^*(R^*)$. Ceci est absurde car on a déjà $N \models \neg\varphi$. On a donc bien : $M\ S^*\ \varphi$, ce qu'il fallait démontrer ■

Si R est une relation de pseudo-forcing sur une classe Σ, la relation R^* est aussi une relation de pseudo-forcing sur Σ (lemme 2.12). On déduit alors du théorème précédent :

Corollaire 2.14. *Soit* R *une relation de pseudo-forcing sur une classe inductive* Σ, *alors :*

$$R^* = R^{**} \text{ et } \Sigma^*(R^*) = \Sigma^*(R^{**})$$

N.B. Soit Σ une classe inductive sur laquelle on peut définir une relation de pseudo-forcing. Le théorème 2.13 nous dit alors qu'il existe une relation F de pseudo-forcing sur Σ telle que, pour toute relation R de pseudo-forcing sur Σ

on ait : $R^* = F$ et $\Sigma^*(R^*) = \Sigma^*(F)$. En d'autres termes R^* et $\Sigma^*(R^*)$ sont indépendantes du choix de R. D'où la définition suivante :

Définition 2.15. Soient Σ une classe inductive de L-structures et R une relation de pseudo-forcing sur Σ. La relation R^* est notée F_Σ et la classe $\Sigma^*(R^*)$ est appelée **classe des génériques de** Σ. Elle est notée $G(\Sigma)$ et ses éléments sont appelés **structures génériques de** Σ.

La classe $G(\Sigma)$ possède un certain nombres de propriétés très intéressantes qui sont énoncées dans le théorème suivant.

Théorème 2.16. *Soit Σ une classe inductive de L-structures sur laquelle il existe une relation de pseudo-forcing. Alors :*

i) $G(\Sigma)$ *est cofinale dans* Σ.

ii) $G(\Sigma)$ *est modèle-complète.*

iii) $G(\Sigma)$ *est inductive.*

iv) Si Σ' est une classe modèle-complète cofinale dans Σ, alors : $\Sigma' \subset G(\Sigma)$.

Preuve. En appliquant le théorème 2.5 à la relation F_Σ on obtient immédiatement (i), (ii), (iii). Pour établir (iv), considérons une classe Σ' modèle-complète et cofinale dans Σ et soit $R = R_{\Sigma'}$ la relation de satisfaction généralisée associée à Σ'. On sait que R est une relation de pseudo-forcing et que $\Sigma' \subset \Sigma^*(R)$ (lemme 2.8). De plus $\Sigma^*(R) \subset \Sigma^*(R^*)$ (lemme 2.12) et, par définition, $G(\Sigma) = \Sigma^*(R^*)$. Donc : $\Sigma' \subset G(\Sigma)$ ■

Nous allons voir maintenant quelques propriétés de la relation F_Σ.

Théorème 2.17. *Soit* Σ *une classe inductive de L-structures sur laquelle il existe une relation de pseudo-forcing. Alors, pour tout* $M \in \Sigma$ *et tous énoncés* φ, θ, ψ *de* $L(M)$, *on a :*

i) *Si* φ *est atomique, alors :* $M\ F_\Sigma\ \varphi$ *si et seulement si :* $M \models \varphi$.

ii) $M\ F_\Sigma\ (\psi \wedge \theta)$ *si et seulement si* $M\ F_\Sigma\ \psi$ *et* $M\ F_\Sigma\ \theta$.

iii) *Si* $M\ F_\Sigma\ \psi$ *ou* $M\ F_\Sigma\ \theta$ *alors* $M\ F_\Sigma\ (\psi \vee \theta)$.

iv) *S'il existe* $a \in M$ *tel que* $M\ F_\Sigma\ \psi(a)$ *alors* $M\ F_\Sigma\ \exists x \psi(x)$.

v) $M\ F_\Sigma\ \neg\psi$ *si et seulement si* non$(M'\ F_\Sigma\ \psi)$ *pour tout* $M' \in \Sigma$ *tel que* $M \subset M'$.

Preuve. Pour simplifier les notations, la relation F_Σ sera simplement notée F. Soit $M \in \Sigma$. Si R une relation de pseudo-forcing sur Σ, alors $F = R^*$.

De la définition de R^* on déduit immédiatement que, si φ et ψ sont des énoncés de L(M) tels que $\models \varphi \rightarrow \psi$ et $M\ R^*\ \varphi$, alors $M\ R^*\ \psi$. Les propriétés (iii) et (iv) résultent de cette remarque.

(i) Si φ est atomique et si $M\ F\ \varphi$, alors $M \models \varphi$ (lemme 2.4). Réciproquement, si $M \models \varphi$, alors pour tout $M' \in \Sigma^*(R)$ tel que $M \subset M'$, on aura $M' \models \varphi$, ce qui signifie que $M\ R^*\ \varphi$ et donc $M\ F\ \varphi$.

(ii) Si $M\ F\ (\psi \wedge \theta)$, alors $M\ F\ \psi$ et $M\ F\ \theta$ d'après la remarque ci-dessus. Réciproquement, supposons que $M\ F\ \psi$ et $M\ F\ \theta$. Alors, étant donné que $F = R^*$, cela signifie que, pour tout $M' \in \Sigma^*(R)$ tel que $M \subset M'$ on a $M' \models \psi$ et $M' \models \theta$ (définition de R^*) et donc $M' \models \psi \wedge \theta$. Par suite $M\ F\ (\psi \wedge \theta)$.

(v) Supposons tout d'abord que non$(M'\ F\ \psi)$ pour tout $M' \in \Sigma$ tel que $M \subset M'$. Soit $M' \in \Sigma^*(R)$ tel que $M \subset M'$, on a alors non$(M'\ F\ \psi)$. D'après le lemme 2.12 : $M' \in \Sigma^*(R^*) = \Sigma^*(F)$, donc $M' \models \neg\psi$. Ainsi $M' \models \neg\psi$ pour tout $M' \in \Sigma^*(R)$ tel que $M \subset M'$, donc $M\ R^*\ \neg\psi$ i.e. $M\ F\ \neg\psi$. La réciproque résulte du lemme 2.4 ∎

Nous voudrions montrer que si Σ est une classe inductive de L-structures, alors il existe une relation de pseudo-forcing sur Σ. Mais, si une telle relation existe, alors il existe une relation F_Σ de pseudo-forcing sur Σ qui vérifie les propriétés (i - v) du théorème précédent. Or, ces propriétés nous donnent presque une définition par récurrence sur la complexité des énoncés de la relation F_Σ. Les seuls énoncés qui posent problème sont les énoncés de la forme $\psi \vee \theta$ ou $\exists x\psi(x)$. Pour régler le cas des énoncés de ce type, on est conduit naturellement à transformer les implications des propriétés (iii) et (iv) en équivalences. En d'autres termes, on est tenté de définir une relation de satisfaction généralisée sur Σ, de la manière suivante :

Définition 2.18. Soit Σ une classe inductive de L-structures. Pour tout $M \in \Sigma$ et tout énoncé φ de L(M), on définit la relation $\Vdash$ de la manière suivante :

(1) Si φ est atomique, alors $M \Vdash \varphi$ si et seulement si $M \models \varphi$.

(2) Si φ est de la forme $\psi \wedge \theta$, alors $M \Vdash \varphi$ si et seulement si $M \Vdash \psi$ et $M \Vdash \theta$.

(3) Si φ est de la forme $\psi \vee \theta$, alors $M \Vdash \varphi$ si et seulement si $M \Vdash \psi$ ou $M \Vdash \theta$.

(4) Si φ est de la forme $\exists x\psi(x)$, alors $M \Vdash \varphi$ si et seulement si il existe $a \in M$ tel que $M \Vdash \psi(a)$.

(5) Si φ est de la forme $\neg\psi$, alors $M \Vdash \varphi$ si et seulement si non($M' \Vdash \psi$) pour tout $M' \in \Sigma$ tel que $M \subset M'$.

La relation $\Vdash$ que nous venons de définir sur la classe Σ est en fait la relation de **forcing infini** de A. Robinson [3].

Le résultat suivant est bien connu en théorie du forcing (cf. A. Robinson [3] et Hirschfeld-Wheeler [2]) et il se vérifie sans difficultés.

Théorème 2.19. *Soit Σ une classe inductive, alors la relation de satisfaction généralisée $\Vdash$ sur Σ est une relation de pseudo-forcing sur Σ.*

Du résultat précédent et du corollaire 2.6, on déduit immédiatement :

Théorème 2.20. *Toute classe inductive de L-structures est pré-modèle-complète.*

Corollaire 2.21. *Toute classe pré-inductive de L-structures est pré-modèle-complète.*

Preuve. Soit Σ une classe pré-inductive de L-structures, alors il existe une classe inductive Σ' qui est cofinale dans Σ. Par 2.20, il existe une classe modèle-complète Σ'' cofinale dans Σ'. Mais alors Σ'' est cofinale dans Σ et Σ est pré-modèle-complète ■

Soit T une théorie de L, en appliquant le corollaire 2.21 à la classe Mod(T), on obtient :

Théorème 2.22. *Toute théorie pré-inductive est pré-modèle-complète.*

Avant de démontrer la réciproque du théorème 2.22, nous allons établir deux résultats. Le premier concerne la relation F_Σ qui est égale à $\Vdash^*$ pour une classe inductive Σ.

Robinson a défini la relation de **forcing infini faible** de la manière suivante : si M est un élément d'une classe inductive Σ de L-structures et si φ est un énoncé de L(M), alors M **force faiblement** φ relativement à Σ, si $M \Vdash \neg\neg\varphi$ ([2], [3]). Le théorème suivant nous dit que la relation F_Σ n'est autre que la relation de forcing infini faible.

Théorème 2.23. *Soit* Σ *une classe inductive.*

(i) Pour tout $M \in \Sigma$ *et tout énoncé* φ *de* L(M), *on a :* $M\ F_\Sigma\ \varphi$ *si et seulement si* $M \Vdash \neg\neg\varphi$.

(ii) $\Sigma^*(\Vdash) = \Sigma^*(\Vdash^*) = \Sigma^*(F_\Sigma) = G(\Sigma)$.

Preuve. Etant donné que F_Σ est égale à $\Vdash^*$, nous utiliserons la notation $\Vdash^*$ dans la démonstration qui suit.

(i) Soient $M \in \Sigma$ et φ un énoncé de L(M). Supposons que $M \Vdash^* \varphi$. Alors, si non($M \Vdash \neg\neg\varphi$) il existe $M' \in \Sigma$ tel que $M \subset M'$ et $M' \Vdash \neg\varphi$. Considérons une structure $M'' \in \Sigma^*(\Vdash)$ telle que $M' \subset M''$, alors $M'' \Vdash \neg\varphi$ et donc $M'' \models \neg\varphi$. Par définition de la relation R^* associée à une relation de pseudo-forcing R et, étant donné que $M \Vdash^* \varphi$, on doit avoir $M'' \models \varphi$ car $M \subset M''$ et $M'' \in \Sigma^*(\Vdash)$. On arrive donc à une contradiction. Par suite $M \Vdash \neg\neg\varphi$.

Réciproquement, supposons que $M \Vdash \neg\neg\varphi$. Soit une structure $M' \in \Sigma^*(\Vdash)$ telle que $M \subset M'$, alors $M' \Vdash \neg\neg\varphi$ et donc $M' \models \neg\neg\varphi$ soit encore $M' \models \varphi$. Mais alors $M \Vdash^* \varphi$ par définition de $\Vdash^*$.

(ii) On sait que $\Sigma^*(\Vdash) \subset \Sigma^*(\Vdash^*)$ (lemme 2.12). En raisonnant par récurrence sur la complexité des énoncés, nous allons montrer que pour tout $M \in \Sigma^*(\Vdash^*)$ et pour tout énoncé φ de L(M), on a : $M \Vdash \varphi$ si et seulement si $M \models \varphi$. La démonstration est évidente dans les cas où φ est atomique, ou de la forme $\psi \wedge \theta$, $\psi \vee \theta$, $\exists x\psi(x)$. Soit donc φ de la forme $\neg\psi$. Si $M \Vdash \varphi$, alors $M \Vdash^* \varphi$ (lemme 2.12) et donc $M \models \varphi$ car $M \in \Sigma^*(\Vdash^*)$. Réciproquement, si $M \models \varphi$, alors $M \Vdash^* \varphi$ c'est à dire $M \Vdash \neg\neg\neg\psi$ par (i). Supposons que non($M \Vdash \varphi$), alors il existe $M' \in \Sigma$ tel que $M \subset M'$ et $M' \Vdash \psi$. Mais alors $M' \Vdash^* \psi$ et donc $M' \Vdash \neg\neg\psi$ par (i). De plus $M' \Vdash \neg\neg\neg\psi$ car $M \Vdash \neg\neg\neg\psi$ et $M \subset M'$. Or ceci est impossible d'après le lemme 2.4-(i). On doit donc avoir $M \Vdash \varphi$. Nous venons de montrer que $\Sigma^*(\Vdash^*) \subset \Sigma^*(\Vdash)$. Donc $\Sigma^*(\Vdash^*) = \Sigma^*(\Vdash)$. Or $G(\Sigma) = \Sigma^*(\Vdash^*)$ (définition 2.15) ■

Théorème 2.24. [2] *Soit Σ une classe inductive de L-structures, alors la classe* $G(\Sigma)$ *est l'unique sous-classe Σ' de Σ qui vérifie les conditions suivantes :*

(1) Σ' est cofinale dans Σ.

(2) Σ' est modèle-complète.

(3) Si Σ'' est une classe modèle-complète et cofinale dans Σ, alors $\Sigma'' \subset \Sigma'$.

Preuve. Le théorème 2.16 nous dit que $G(\Sigma)$ vérifie les propriétés (1-3). Il est clair que c'est la seule. En effet par (3), deux sous-classes de Σ qui possèdent (1-3) sont égales ■

III) Théories pré-inductives et pré-modèle-complètes.

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de montrer la réciproque du théorème 2.22. Nous voulons donc démontrer que toute théorie pré-modèle-complète est pré-inductive.

A noter qu'il serait vain de vouloir établir que toute classe pré-modèle-complète de L-structures est pré-inductive. En effet, considérons un ordinal limite λ et une chaîne élémentaire $(M_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ composée de L-structures deux à deux distinctes. Soit $\Sigma = \{ M_\alpha \ : \ \alpha < \lambda \}$, alors Σ est une classe modèle-complète et donc pré-modèle-complète qui n'est pas pré-inductive.

Nous allons commencer par établir deux résultats préliminaires sur les classes inductives.

Lemme 3.1. *Soit Σ une classe inductive de L-structures et soit Σ' une classe de L-structures telle que :*

(i) Σ' est cofinale dans Σ.

(ii) Σ' est modèle-complète.

(iii) Σ' est close pour les sous-structures élémentaires.

Alors Σ' est inductive.

Preuve. Soit $(M_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ une chaîne de L-structures de Σ'. Soit M la réunion de toutes les structures de la chaîne. Etant donné que Σ' est modèle-complète, la chaîne est élémentaire et donc $M_\alpha \prec M$ pour tout $\alpha < \lambda$. De plus $M \in \Sigma$ car Σ est inductive. Par cofinalité de Σ' dans Σ, il existe donc $M' \in \Sigma'$ tel que $M \subset M'$. Montrons que $M \prec M'$. Soient φ un énoncé de L(M) tel que $M \models \varphi$, alors il existe $\alpha < \lambda$ tel que φ soit un énoncé de $L(M_\alpha)$. Or $M_\alpha \prec M$, donc $M_\alpha \models \varphi$. De plus $M_\alpha \prec M'$ car Σ' est modèle-complète et donc $M' \models \varphi$. On a donc $M \prec M'$, mais alors $M \in \Sigma'$ car Σ' est close pour les sous-structures élémentaires ■

Lemme 3.2. *Soit Σ une classe inductive de L-structures et soient Σ' et Σ'' deux classes de*

L-structures qui vérifient les conditions (i), (ii) et (iii) du lemme précédent. Alors : $\Sigma' = \Sigma''$.

Preuve. Considérons donc deux classes Σ' et Σ'' qui vérifient les propriétés (i), (ii) et (iii) du lemme 3.1. Soit $M \in \Sigma'$. En utilisant les hypothèses et les lemmes 1.1 et 3.1, on voit qu'il existe $N \in \Sigma''$ telle que $M \prec N$. Mais alors $M \in \Sigma''$ car Σ'' est close pour les sous-structures élémentaires. Nous venons de montrer que $\Sigma' \subset \Sigma''$. On montrerait de même que $\Sigma'' \subset \Sigma'$. Donc : $\Sigma' = \Sigma''$ ■

Considérons maintenant une théorie T de L et soit $T_\forall$ l'ensemble des énoncés universels de L qui sont déductibles de T. La théorie $T_\forall$ est inductive et il en est de même de la classe de ses modèles $\Sigma = \mathrm{Mod}(T_\forall)$. On a donc le droit de parler de la classe $G(\Sigma)$ qui est donc la plus grande classe modèle-complète qui soit cofinale dans Σ (théorème 2.16). Cette classe $G(\Sigma)$ se note alors G(T) et on note T^F la théorie de la classe G(T) c'est à dire l'ensemble des énoncés de L qui sont vrais dans toutes les structures de G(T) : $T^F = \mathrm{Th}(G(T))$ (cf. [2], [3]). La théorie T^F est appelée le **compagnon de forcing** de la théorie T.

Ainsi la classe G(T) est cofinale dans $\mathrm{Mod}(T_\forall)$ et modèle-complète. De plus, on peut montrer qu'elle est close pour les sous-structures élémentaires. Ce résultat est classique en théorie du forcing ([2], [3], [4]). Nous allons malgré tout en donner une démonstration élémentaire.

Lemme 3.3. ([2], [3], [4]). *Soit* T *une théorie de* L. *Alors la classe* G(T) *est close pour les sous-structures élémentaires.*

Preuve. Soit $\Sigma = \mathrm{Mod}(T_\forall)$. Par définition $G(T) = G(\Sigma) = \Sigma^*(\Vdash) = \Sigma^*(\Vdash^*)$ où $\Vdash$ est la relation de forcing infini sur la classe Σ (théorème 2.22). De plus, par définition de la relation $\Vdash$, il est clair que $\Sigma^*(\Vdash)$ et donc G(T) est close pour l'isomorphisme. Soient $M \in G(T)$ et M' une L-structure telle que $M' \prec M$. Il faut montrer que $M' \in G(T)$. Or $G(T) = \Sigma^*(\Vdash^*)$. Il faut donc vérifier que, pour tout énoncé φ de L(M'), on a : $M' \models \varphi$ si et seulement si $M' \Vdash^* \varphi$.

- Si $M' \Vdash^* \varphi$, alors $M \Vdash^* \varphi$. Or $M \in G(T)$ donc $M \models \varphi$ et par suite $M' \models \varphi$.

- Si $M' \models \varphi$, alors $M \models \varphi$. Supposons que non($M' \Vdash^* \varphi$). Par définition de $\Vdash^*$, il existe $M'' \in G(T) = \Sigma^*(\Vdash)$ tel que $M' \subset M''$ et $M'' \models \neg\varphi$. La classe $G(T)$ étant close par isomorphisme, on peut supposer que les seuls éléments communs à M et M'' sont ceux de M'. Montrons qu'il existe $N \in Mod(T_\forall)$ tel que $M \subset N$ et $M'' \subset N$. Il suffit pour cela de montrer que l'ensemble d'énoncés $E = T_\forall \cup D(M) \cup D(M'')$ est consistant. Si cet ensemble était contradictoire, il existerait des parties finies P et Q de $D(M)$ et $D(M'')$ respectivement telles que $T_\forall \cup P \cup Q$ soit contradictoire. Soit $\bar{a}$ la suite $(a_1, \dots, a_n)$ de toutes les constantes de $L(M') - L$ qui occurrent dans P ou dans Q, $\bar{b}$ la suite $(b_1, \dots, b_p)$ des constantes de $L(M) - L(M')$ qui occurrent dans P et $\bar{c}$ la suite $(c_1, \dots, c_q)$ des constantes de $L(M'') - L(M')$ qui occurrent dans Q. On aura donc : $T_\forall \models \bigwedge P(\bar{a}, \bar{b}) \rightarrow \neg \bigwedge Q(\bar{a}, \bar{c})$, d'où l'on déduit :

(A) $T_\forall \models \exists\bar{x} \bigwedge P(\bar{a}, \bar{x}) \rightarrow \forall\bar{y} \neg \bigwedge Q(\bar{a}, \bar{y})$ où $\bar{x} = (x_1, \dots, x_p)$ et $\bar{y} = (y_1, \dots, y_q)$ sont des suites de variables deux à deux distinctes et n'occurrant ni dans P, ni dans Q. Or $P \subset D(M)$ donc $M \models \exists\bar{x} \bigwedge P(\bar{a}, \bar{x})$ et $M' \models \exists\bar{x} \bigwedge P(\bar{a}, \bar{x})$ car $M' \prec M$. Mais alors $M'' \models \exists\bar{x} \bigwedge P(\bar{a}, \bar{x})$ car l'énoncé $\exists\bar{x} \bigwedge P(\bar{a}, \bar{x})$ est existentiel et $M' \subset M''$. En utilisant (A), on voit alors que :

$M'' \models \forall\bar{y} \neg \bigwedge Q(\bar{a}, \bar{y})$; or $Q \subset D(M'')$ et donc $M'' \models \exists\bar{y} \bigwedge Q(\bar{a}, \bar{y})$. Contradiction. L'ensemble E est donc consistant et il existe $N \in \Sigma$ tel que $M \subset N$ et $M'' \subset N$. Or $G(T)$ est cofinale dans Σ, donc on peut prendre N dans $G(T)$. Etant donné que $M \in G(T)$, on a $M \prec N$ et donc $N \models \varphi$. De plus $M'' \in G(T)$ donc $M'' \prec N$ et donc $N \models \neg\varphi$, ce qui est absurde. On doit donc avoir $M' \Vdash^* \varphi$. D'où le résultat ■

On peut maintenant établir le théorème fondamental qui caractérise la classe $G(T)$ ([2], [3], [4]) :

Théorème 3.4. ([2], [3], [4]). *Soit* T *une théorie de* L. *Alors la classe* G(T) *est l'unique* *classe Σ qui vérifie les conditions suivantes :*

(1) *Σ est cofinale dans* $\mathrm{Mod}(T_\forall)$.

(2) *Σ est modèle-complète.*

(3) *Σ est close pour les sous-structures élémentaires.*

Preuve. Il est clair que la classe G(T) vérifie les propriétés (1), (2) et (3) (théorème 2.16 et lemme 3.3). De plus c'est la seule qui possède ces propriétés (lemme 3.2) ■

Nous allons enfin démontrer la réciproque du théorème 2.22 et caractériser les théories pré-inductives et pré-modèle-complètes à l'aide de leur compagnon de forcing.

Théorème 3.5. *Soit* T *une théorie de* L, *alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) La théorie T *est pré-inductive.*

(ii) La théorie T *est pré-modèle-complète.*

(iii) La théorie T *est contenue dans son compagnon de forcing, i.e.* $T \subset T^F$.

Preuve. On a déjà montré l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) (théorème 2.22).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Soit T une théorie pré-modèle-complète. Par définition, il existe donc une classe modèle-complète Σ qui est cofinale dans Mod(T) et donc dans $\mathrm{Mod}(T_\forall)$. Pour établir l'inclusion $T \subset T^F$ il suffit de montrer que toute structure de G(T) est modèle de T. Soit donc $M \in G(T)$. Les classes G(T) et Σ sont cofinales dans $\mathrm{Mod}(T_\forall)$ et modèle-complètes. En utilisant le lemme 1.1, on voit qu'il existe un modèle N de $\mathrm{Th}(\Sigma)$ tel que $M \prec N$. Or $T \subset \mathrm{Th}(\Sigma)$ car $\Sigma \subset \mathrm{Mod}(T)$. Donc N est modèle de T et M est aussi modèle de T car $M \prec N$. On vient de montrer que $T \subset T^F$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Supposons que $T \subset T^F$. Alors $G(T) \subset \mathrm{Mod}(T)$ et donc G(T) est cofinale dans Mod(T). Or la classe G(T) est inductive (théorème 2.16), donc T est pré-inductive ■

Bibliographie

[1] BARWISE J., ROBINSON A. Completing theories by forcing. Annals of Mathematical Logic. Vol. 2 (1970), pp. 119-142.

[2] HIRSCHFELD J., WHEELER W. Forcing, Arithmetic, Division Rings. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 454 (1975). Springer-Verlag. Berlin.

[3] ROBINSON A. Infinite forcing in model theory. Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium. Oslo. 1970. North-Holland Publishing Company. Amsterdam. (1971).

[4] SIMMONS H. Companion theories (forcing in model theory). Séminaires de Mathématique pure. Rapport n° 54. Institut de mathématique pure et appliquée. Université Catholique de Louvain. (1975).

Manuscrit reçu le 25.10.1991