

ANNALES SCIENTIFIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2  
*Série Mathématiques*

JEAN MITTAS

MARIA KONSTANTINIDOU

**Sur une nouvelle génération de la notion de treillis. Les supertreillis  
et certaines de leurs propriétés générales**

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 94, série *Mathématiques*, n° 25 (1989), p. 61-83

[http://www.numdam.org/item?id=ASCFM\\_1989\\_\\_94\\_25\\_61\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1989__94_25_61_0)

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SUR UNE NOUVELLE GÉNÉRATION DE LA NOTION DE TREILLIS <sup>(1)</sup>

## LES SUPERTREILLIS ET CERTAINES DE LEURS PROPRIÉTÉS

### GÉNÉRALES

JEAN MITTAS ET MARIA KONSTANTINIDOU

Université de Thessaloniki,  
GRECE

#### 0. Introduction

Dans [17] on a considéré des exemples d'ensembles ordonnés  $S$  munis de deux hyperopérations <sup>(2)</sup>  $a \vee b$  et  $a \wedge b$  satisfaisant aux propriétés

$$S_1. \quad a \in (a \vee a) \cap (a \wedge a)$$

$$S_2. \quad a \vee b = b \vee a \quad a \wedge b = b \wedge a$$

$$S_3. \quad (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) \quad (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

$$S_4. \quad a \in [(a \vee b) \wedge a] \cap [(a \wedge b) \vee a]$$

---

(1) Pour deux autres généralisations voir [1][2][3][5][18].

(2) C'est-à-dire des opérations multivoques, autrement dit, si  $E$  est un ensemble et  $P(E)$  est l'ensemble de ses parties, il s'agit des applications de  $E \times E$  dans  $P(E)$ . Un ensemble muni d'une hyperopération (binaire interne) est un hypergroupeïde et, plus généralement, si on considère des structures algébriques munies d'une hyperopération au moins, on parle de structures hypercompositionnelles ou hyperstructures. On identifie, quand rien ne s'y oppose, les éléments  $e \in E$  et les singletons correspondants  $\{e\}$ . Comme d'habitude on écrit l'hyperopération des  $a, b \in E$  [c'est-à-dire le résultat de l'hyperopération de  $E$  sur  $(a, b)$ ] soit comme produit  $ab$  (et on a  $ab \subseteq E$  au lieu de  $ab \in E$  pour le composé), soit, si l'hyperopération est désignée par un signe spécial  $+$ ,  $\ast$ ,  $\circ$  etc... comme  $a+b$ ,  $a \ast b$ ,  $a \circ b$  etc... On étend l'hyperopération en une application "additive" de  $P(E) \times P(E)$  dans  $P(E)$  en posant  $AB$  ( $AB \subseteq E$ ) égal à  $\cup ab$ , où  $(a, b)$  parcourt  $A \times B$ . Evidemment, si pour tout  $a, b \in E$  l'hypercomposé  $ab$  est un singleton, l'hyperopération de  $E$  devient une opération interne de  $E$  (on distingue, donc, d'hyperstructures propres et non propres) [8][9][11][12][14][15][16].

qui, correspondant, comme il est clair, aux axiomes de la définition algébrique de treillis, constituent un système *inchangé par dualité ou ipsodual* [4]. On obtient ainsi par ces exemples un point de départ pour l'introduction, en vue d'applications ultérieures (en Logique et en Géométrie) de la notion du *supertreillis*, qui généralise la notion de treillis [4] [19] d'une manière plus vaste que celle de l'hypertreillis [5] [18], où l'union  $a \vee b$  est une hyperopération, tandis que l'intersection  $a \wedge b$  est une opération et, de même, de manière plus générale que celle des multitreillis [1][2][3], où, l'associativité est, partiellement valable. Mais on voit facilement que pour cette nouvelle généralisation de la notion de treillis les axiomes  $S_1 - S_4$  appliqués à un ensemble  $S$  ne sont pas suffisants, parce que, en général, il n'est pas possible d'en déduire une relation d'ordre sur le support  $S$ , comme on le voit dans l'ensemble trivial d'un ensemble quelconque  $S$ , possédant plus d'un élément, organisé en structure par les hyperopérations

$$a \vee b = a \wedge b = S$$

pour tout  $a, b \in S$ . Il est donc nécessaire pour l'obtenir de préciser encore d'autres axiomes convenables, où d'accepter par définition que  $S$  est lui-même ordonné.

L'introduction de cette structure hypercompositionnelle et l'étude de ses propriétés générales est le but du présent travail <sup>(3)</sup>.

## § 1. Définitions, généralités et quelques propriétés

Après une investigation détaillée du sujet on a aboutit à poser la définition :

### Définition (1.1)

On appelle *supertreillis* un ensemble ordonné  $S$  muni de deux hyperopérations  $a \vee b$  (union) et  $a \wedge b$  (intersection) satisfaisant aux axiomes  $S_1 - S_4$  et de plus à l'axiome

$S_5$ . Quels que soient  $a, b \in S$

$$a \leq b \Rightarrow b \in a \vee b \quad \text{et} \quad a \in a \wedge b$$

tandis que, inversement,

$$b \in a \vee b \quad \text{ou} \quad a \in a \wedge b \Rightarrow a \leq b.$$

---

(3) L'extension du sujet en raison de plusieurs détails nécessaires ne permet pas d'ajouter ici l'étude de parties spéciales de cette théorie, comme des morphismes et de divers types de supertreillis, qui, évidemment, est indispensable pour les applications ultérieures prévues et qui, nécessairement, fera l'objet d'autres travaux.

Remarques (1.1)

- a) Pour tout  $a, b \in S$  on a  
 $a \vee b \neq \emptyset$  et  $a \wedge b \neq \emptyset$

car  $a \vee b = \emptyset \Rightarrow (a \vee b) \wedge a = \emptyset \wedge a = \emptyset$  ce qui est inexact, d'après S4. De même pour  $a \wedge b$ .

b) Tout supertreillis est pour chacune des hyperopérations  $\vee$  et  $\wedge$  un demi-hypergroupe<sup>(4)</sup> commutatif.

- c) On déduit facilement que quels que soient  $a, b, c \in S$  on a
- |                     |    |   |
|---------------------|----|---|
| $a, b \in a \vee b$ | ou | $a, b \in a \wedge b \Rightarrow a = b$         |
| $b \in a \vee b$    | et | $c \in b \vee c \Rightarrow c \in a \vee c$     |
| $b \in a \wedge b$  | et | $c \in b \wedge c \Rightarrow c \in a \wedge c$ |

et évidemment,

$$b \in a \vee b \Leftrightarrow a \in a \wedge b.$$

- d) Il en résulte que la relation d'ordre,  $\leq$ , est la relation R sur S définie par  
 $aRb$  si, et seulement si,  $b \in a \vee b$

et encore, que la relation inverse,  $\geq$ , est la relation R' sur S telle que

$$aR'b \text{ si, et seulement si, } b \in a \wedge b.$$

- e) Il s'ensuit que l'on peut considérer le supertreillis sans l'intervention (dans sa définition) de la relation d'ordre, mais exclusivement et purement comme système algébrique. En d'autres termes on peut poser la définition :

Définition (1.2)

On appelle supertreillis un ensemble S muni de deux hyperopérations  $a \vee b$  et  $a \wedge b$  satisfaisant aux axiomes précédents

$$S'_1 \equiv S_1, \quad S'_2 \equiv S_2, \quad S'_3 \equiv S_3, \quad S'_4 \equiv S_4$$

et en plus aux axiomes

$$S'_6 \quad b \in a \vee b \Leftrightarrow a \in a \wedge b$$

$$S'_7 \quad a, b \in a \vee b \Rightarrow a = b$$

$$S'_8 \quad b \in a \vee b \text{ et } c \in b \vee c \Rightarrow c \in a \vee b.$$

ou, évidemment, moyennant S'\_6, au lieu de S'\_7 et S'\_8 aux axiomes équivalents

$$S''_7 \quad a, b \in a \wedge b \Rightarrow a = b$$

$$S''_8 \quad b \in a \wedge b \text{ et } c \in b \wedge c \Rightarrow c \in a \vee c$$

---

(4) C'est-à-dire un hypermonoïde associatif (si en plus, un tel hypergroupe (H, .) est reproductif, autrement dit, si pour tout  $a \in H$ , on a encore  $aH = Ha = H$ , H est, comme on le sait [9][11][13][17], un hypergroupe).

Evidemment chacune de ces définitions algébriques entraîne que  $S$  est ordonné par rapport à la relation d'ordre  $R$  ou  $R'$  comme ci-dessus (notée  $\leq$ , resp.  $\geq$ ) et que la validité de l'axiome

$$S'_5 \equiv S_5$$

est évidente. Il s'ensuit, donc, l'équivalence des définitions (1.1) et (1.2) et que les systèmes d'axiomes  $S'_1 - S'_8$ ;  $S''_7$ ,  $S''_8$  sont ipsoduaux.

Des définitions précédentes, il résulte la proposition fondamentale de la théorie des supertreillis :

**Proposition (1.1).**

*Le principe de dualité de la théorie des treillis [4][19] reste aussi valable aux supertreillis.*

Pour le passage à la théorie des supertreillis on voit que, après l'introduction de la notion d'hypercentreillis [5] moyennant l'hyperanneau de Boole [5][7][14][15], la généralisation naturelle de cette notion de treillis s'obtient par la considération d'une hyperstructure organisée par deux hyperopérations (propres), la proposition suivante, bien qu'il s'agisse essentiellement d'exemples de supertreillis, montre toutefois que la structure elle-même de treillis fournit une ouverture pour la considération des supertreillis :

**Proposition (1.2).**

*Tout treillis  $T$  fournit quatre types de supertreillis  $(T, \vee, \wedge)$ , si  $T$  est muni des hyperopérations  $a \vee b$ ,  $a \wedge b$  comme suit <sup>(5)</sup>*

- i)  $a \vee b = [ \sup(a,b), \rightarrow [ , \quad a \wedge b = ] \leftarrow, \inf(a,b) ]$
- ii) Si  $a \neq b$ , comme précédemment et  $a \vee a = a \wedge a = a$
- iii)  $a \vee b$  comme au cas i) et  $a \wedge b$  comme au cas ii)
- iv)  $a \vee b$  comme au cas ii) et  $a \wedge b$  comme au cas i).

**Démonstration.** Par la vérification simple des axiomes de supertreillis. En effet, la validité de  $S_1, S_2$ , et  $S_4, S_5$  est évidente (pour les quatre cas), tandis que pour  $S_3$  (l'associativité) on la montre après une distinction des cas et on trouve que

(5) On va utiliser les notations habituelles concernant certains sous-ensembles spéciaux d'un ensemble ordonné  $(E, \leq)$  :

$$\begin{aligned} |a, \rightarrow| &= \{z \in E : a \leq z\}, & |a, \rightarrow| &= \{z \in E : a < z\} \\ | \leftarrow, a| &= \{z \in E : z \leq a\}, & | \leftarrow, a| &= \{z \in E : z < a\} \\ |a, b| &= \{z \in E : a \leq z \leq b\}, & |a, b| &= \{z \in E : a < z < b\} \\ |a, b| &= \{z \in E : a \leq z < b\}, & |a, b| &= \{z \in E : a < z \leq b\} \end{aligned}$$

$$a \vee b \vee c = [\sup(a,b,c) , \rightarrow [ , a \wedge b \wedge c = ] \leftarrow , \inf(a,b,c) ]$$

pour tout  $a,b,c \in S$  (pour les quatre cas en général, exception faite pour les trois derniers cas, des égalités  $a = b = c$ ).

Mais il faut signaler que tout supertreillis ne provient pas nécessairement d'un certain treillis (c'est-à-dire que son support n'est pas, par rapport à la même relation d'ordre, un treillis) et, même pas, par les procédés de la proposition, comme on va le voir sur des exemples.

On voit encore que, relativement à la génération de supertreillis à partir de structures classiques on a, même, plus généralement, le cas suivant :

Proposition (1.3).

*Tout ensemble filtrant [4] [19]  $F$  fournit un supertreillis, si  $F$  est muni des hyperopérations<sup>(6)</sup>*

$$a \vee b = \{z \in F : \{a,b\} \leq z\} , \quad a \wedge b = \{z \in F : z \leq \{a,b\}\}.$$

Démonstration. Comme auparavant, par la vérification des axiomes  $S_1 - S_5$  de la définition de supertreillis, avec une petite investigation pour l'associativité pour laquelle on trouve

$$a \vee b \vee c = \{z \in F : \{a,b,c\} \leq z\} , \quad a \wedge b \wedge c = \{z \in F : z \leq \{a,b,c\}\}.$$

Corollaire (1.1).

*Tout ensemble ordonné possédant des éléments extrêmes peut être organisé en supertreillis par le procédé précédent (en tant qu'ensemble filtrant).*

Remarques (1.2).

a) La définition des supertreillis n'implique ni l'existence de  $\sup(a,b)$  et  $\inf(a,b)$  de deux éléments quelconques  $a$  et  $b$  du supertreillis, ni, dans le cas de leur existence, leur appartenance à  $a \vee b$  et  $a \wedge b$  respectivement. Elle n'implique pas non plus l'existence en général des  $\sup(a \vee b)$ ,  $\inf(a \vee b)$  et  $\sup(a \wedge b)$ ,  $\inf(a \wedge b)$ , ni non plus, dans le cas de leur existence, leur appartenance à  $a \vee b$  et  $a \wedge b$  respectivement. En général on a une variété de cas comme on va le voir.

Relativement :

b) Pour les supertreillis  $(T, \vee, \wedge)$  obtenus par un des procédés de la proposition (1.2) les  $\sup(a,b)$  et  $\inf(a,b)$  existent évidemment pour tout  $a,b \in T$  et on a (pour les quatre cas)

$$\sup(a,b) = \min(a \vee b) ; \quad \inf(a,b) = \max(a \vee b).$$

---

(6) Si  $A$  et  $B$  sont deux sous-ensembles d'un ensemble ordonné,  $A \leq B$  (resp.  $A < B$ ) signifie que pour tout  $a \in A, b \in B$  on a  $a \leq b$  (resp  $a < b$ ).

Par contre, pour les supertreillis de la proposition (1.3) rien n'est sûr pour l'existence de  $\sup$  et de  $\inf$ , tant pour un couple  $(a,b)$ , que pour les sous-ensembles  $a \vee b$ ,  $a \wedge b$ , ni non plus, pour les appartenances respectives à ces derniers, au cas où ceux-ci existent.

Un cas très particulier d'existence de  $\sup$  et, respectivement, de  $\inf$  de deux éléments  $a$  et  $b$  d'un supertreillis  $(S, \vee, \wedge)$  est celui où l'union  $a \vee b$ , respectivement l'intersection  $a \wedge b$ , sont des singletons. En effet, soit par exemple :  $a \vee b = c$ , alors

$$a \in a \wedge (a \vee b) \Rightarrow a \in a \vee c \Rightarrow a \leq c$$

et on trouve de même  $b \leq c$ .

D'autre part pour tout  $c' \in S$  tel que  $a \leq c'$  et  $b \leq c'$ , s'il en existe, on aura

$$c' \in c' \vee a \subseteq (c' \vee b) \vee a = c' \vee (a \vee b) = c' \vee c$$

donc  $c' \leq c$ , et par conséquent  $c = \sup(a, b)$ . De même, si  $a \wedge b = d$ , on trouve  $d = \inf(a, b)$  et on peut énoncer<sup>(7)</sup>.

Proposition (1.4).

Si  $a \vee b = c$ , alors  $c = \sup(a, b)$  [5] et de même, si  $a \wedge b = d$ , alors  $d = \inf(a, b)$ .

**La proposition suivante donne un résultat beaucoup plus général.**

Proposition (1.5).

Pour qu'un supertreillis  $(S, \vee, \wedge)$  soit un treillis il faut et il suffit que l'axiome  $S_4$  de la définition soit exprimé de manière stricte comme suit

$$(a \vee b) \wedge a = (a \wedge b) \vee a = a,$$

quels que soient  $a, b \in S$ .

Démonstration. La nécessité des deux conditions de l'énoncé est évidente. Pour prouver leur suffisance il suffit, évidemment, de montrer que les hyperopérations du supertreillis sont, pour tout  $a, b \in S$ , non propres. En effet, soit un  $x$  quelconque de  $a \vee b$ . D'après la première condition on a  $a \wedge x = a$ , qui, par la seconde condition  $(a \wedge x) \vee x = x$ , implique  $a \vee x = x$ . Il s'ensuit donc de l'associativité

$$(a \vee b) \vee x = a \vee (b \vee x)$$

que l'on obtient  $a \vee (b \vee x) = a \vee x = x$ , donc  $(a \vee b) \vee x = x$ . Ainsi pour tout  $y \in a \vee b$  on a  $x \vee y = x$ , d'où l'on conclut, par l'inversion des rôles de  $x$  et  $y$ ,  $y \vee x = y$ . Par conséquent  $x = y$  et l'hypercomposé  $a \vee b$  est bien un composé et, évidemment, on a la même chose pour l'intersection  $a \wedge b$ .

---

(7) Certaines propositions exprimant des propriétés concernant seulement l'union et qui sont démontrées sans l'intervention de l'intersection sont déjà contenues dans [5], en particulier, pour les propriétés des hypertreillis. Elles seront, en tout cas, mentionnées (et citées sans démonstration) dans le texte.

Remarque (1.3).

Une autre remarque relative à la définition des supertreillis, considérablement plus générale que celle (1.2), est qu'il ne découle pas des axiomes ni l'existence des bornes ( supérieures ou inférieures ) du couple d'éléments (a, b) ou de leur hypercomposés  $a \vee b$ ,  $a \wedge b$  ni, non plus, dans le cas de leur existence, leur appartenance à  $a \vee b$  et, respectivement à  $a \wedge b$ , comme on va le voir sur des exemples. Par contre, on voit que de  $a \in a \wedge (a \vee b)$  il résulte qu'il existe dans  $a \vee b$  un élément au moins

$x \begin{smallmatrix} a \vee b \\ a \end{smallmatrix}$  tel que  $a \leq x \begin{smallmatrix} a \vee b \\ a \end{smallmatrix}$  et, de même qu'il existe au moins un  $x \begin{smallmatrix} a \vee b \\ b \end{smallmatrix} \in a \vee b$  tel que  $b \leq x \begin{smallmatrix} a \vee b \\ b \end{smallmatrix}$  et que l'on a des résultats analogues pour  $a \wedge b$  [ par dualité, moyennant  $a \in a \vee (a \wedge b)$  ].

Donc on a

Proposition (1.6).

*Pour tout a, b ∈ S il existe des éléments*

$$x \begin{smallmatrix} a \vee b \\ a \end{smallmatrix}, x \begin{smallmatrix} a \vee b \\ b \end{smallmatrix} \text{ de } a \vee b \text{ tels que } a \leq x \begin{smallmatrix} a \vee b \\ b \end{smallmatrix}, b \leq x \begin{smallmatrix} a \vee b \\ a \end{smallmatrix} \quad [5].$$

*De même, par dualité, il existe*

$$x \begin{smallmatrix} a \wedge b \\ a \end{smallmatrix}, x \begin{smallmatrix} a \wedge b \\ b \end{smallmatrix} \text{ de } a \wedge b \text{ tels que } x \begin{smallmatrix} a \vee b \\ a \end{smallmatrix} \leq a, x \begin{smallmatrix} a \wedge b \\ b \end{smallmatrix} \leq b.$$

Corollaire (1.2).

*Pour tout a ∈ S il existe x, x' ∈ S tels que a ∈ [ x, x' ]. En particulier il n'existe pas dans S d'éléments d tels que d || x ( non comparables) pour tout x ∈ S, x ≠ d.*

Les éléments  $x \begin{smallmatrix} a \vee b \\ a \end{smallmatrix}, x \begin{smallmatrix} a \vee b \\ b \end{smallmatrix}$ , resp.  $x \begin{smallmatrix} a \wedge b \\ a \end{smallmatrix}, x \begin{smallmatrix} a \wedge b \\ b \end{smallmatrix}$ , sont appelés *éléments distingués du couple (a, b) pour l'union [5], resp. pour l'intersection et, comme il est facile de le voir, ils ne sont ni nécessairement différents entre eux (pour chaque cas), ni uniques.*

Les ensembles  $X \begin{smallmatrix} a \vee b \\ a \end{smallmatrix}, X \begin{smallmatrix} a \vee b \\ b \end{smallmatrix}$  resp.  $X \begin{smallmatrix} a \wedge b \\ a \end{smallmatrix}, X \begin{smallmatrix} a \wedge b \\ b \end{smallmatrix}$  de ces éléments respectifs, c'est-à-dire les ensembles,

$$X \begin{smallmatrix} a \vee b \\ a \end{smallmatrix} = \left\{ x \begin{smallmatrix} a \vee b \\ a \end{smallmatrix} \in a \vee b : a \leq x \begin{smallmatrix} a \vee b \\ a \end{smallmatrix} \right\}, X \begin{smallmatrix} a \vee b \\ b \end{smallmatrix} = \left\{ x \begin{smallmatrix} a \vee b \\ b \end{smallmatrix} \in a \vee b : b \leq x \begin{smallmatrix} a \vee b \\ b \end{smallmatrix} \right\}$$

$$X \begin{smallmatrix} a \wedge b \\ a \end{smallmatrix} = \left\{ x \begin{smallmatrix} a \wedge b \\ a \end{smallmatrix} \in a \wedge b : x \begin{smallmatrix} a \wedge b \\ a \end{smallmatrix} \leq a \right\}, X \begin{smallmatrix} a \wedge b \\ b \end{smallmatrix} = \left\{ x \begin{smallmatrix} a \wedge b \\ b \end{smallmatrix} \in a \wedge b : x \begin{smallmatrix} a \wedge b \\ b \end{smallmatrix} \leq b \right\}$$



sont les ensembles distingués pour l'union [5], resp. pour l'intersection. L'existence et la considération des éléments distingués jouent, en général, un rôle utile dans la théorie des supertreillis. On voit par exemple que l'existence des éléments distingués entraîne immédiatement pour les bornes des hypercomposés  $a \vee b$  et  $a \wedge b$  la propriété :

Proposition (1.7).

Quels que soient  $a, b, d \in S$ , on a

$$a \vee b \leq d \Rightarrow \{a, b\} \leq d [5]; \quad d \leq a \wedge b \Rightarrow d \leq \{a, b\}$$

On voit encore, moyennant cette notion, qu'il résulte facilement que dans un supertreillis  $(S, \vee, \wedge)$  on a, comme pour les treillis la propriété :

Proposition (1.8).

Tout supertreillis  $S$  peut posséder un élément maximal au plus, qui, s'il existe, est son élément maximum [5]. Respectivement,  $S$  peut posséder un élément minimal au plus et, s'il en existe il est son élément minimum.

[Car, si par exemple,  $a, b \in S$  sont des éléments maximaux de  $S$ , alors  $a$  et  $b$  seront nécessairement des éléments distingués du couple  $(a, b)$  pour l'union. Donc, on aura  $a, b \in a \vee b$  et par conséquent, d'après  $S_6$ ,  $a = b$ . D'autre part, pour tout  $x \in S$  on aura de même  $a \in a \vee x$ , donc  $x \leq a$  et  $a = \max S$ ].

Il résulte encore qu'au moyen des éléments distingués, on peut construire dans  $S$  des chaînes ascendantes, ayant comme point de départ n'importe quel élément de  $S$  [5]. Par dualité il résulte que l'on peut aussi construire des chaînes descendantes. Relativement aux chaînes on a la proposition :

Proposition (1.9).

Si une chaîne ascendante de  $S$  est stationnaire, le supertreillis possède un élément maximum (qui évidemment est le maximum de la chaîne) [5]. Par dualité, si une chaîne descendante de  $S$  est stationnaire, le supertreillis possède un élément minimum (le minimum de la chaîne).

Relativement aux bornes des hypercomposés  $a \vee b$  et  $a \wedge b$ , et inversement à la proposition (1.7.), on a

Proposition (1.10).

Si pour  $d \in S$  on a  $\{a, b\} \leq d$ , alors il existe au moins un  $x \in a \vee b$  tel que  $x \leq d$  [5] et, par dualité, si  $d' \leq \{a, b\}$ , il existe au moins un  $x \in a \wedge b$  tel que  $d' \leq x$ .

Démonstration.

En effet,

$$a \leq d \Rightarrow d \in a \vee d \Rightarrow d \vee b \subseteq (a \vee d) \vee b \Rightarrow d \in d \vee (a \vee b)$$

car

$$b \leq d, \text{ donc } d \in d \vee b, \text{ d'où il résulte qu'il existe } x \in a \vee b \text{ tel que } d \in d \vee x, \text{ donc } x \leq d.$$

Des propositions (1.7) et (1.10) on déduit les corollaires :

Corollaire (1.3.)

*Si pour  $a, b \in S$ ,  $\sup(a, b)$  et  $\sup(a \vee b)$ , resp.  $\inf(a, b)$  et  $\inf(a \wedge b)$ , existent, alors on a*

$$\sup(a, b) \leq \sup(a \vee b) \quad ; \quad \inf(a, b) \geq \inf(a \wedge b)$$

et  $\sup(a, b) \not\subseteq a \vee b \quad ; \quad \inf(a, b) \not\supseteq a \wedge b.$

Corollaire (1.4.)

*Si pour tout  $a, b \in S$ , les hypercomposés  $a \vee b$  et  $a \wedge b$  sont respectivement majorés et minorés, alors  $S$  est un ensemble filtrant.*

D'autre part comme on a vu auparavant [Proposition (1.3.) ], tout ensemble filtrant  $F$  fournit des supertreillis, dont les hypercomposés  $a \vee b$ , et  $a \wedge b$ , pour  $a, b \in F$ , ne sont pas, en général, bornés.

Si, en particulier, un ensemble  $S$  fini, non vide, est ordonné, alors, vu la proposition (1.8.) et le corollaire ci-dessus (1.4.) , on déduit facilement :

Proposition (1.11.)

*Tout ensemble ordonné fini peut être organisé en supertreillis si, et seulement si, il possède des éléments nul et universel .*

Etant donné un supertreillis  $(S, \vee, \wedge)$ , si, pour tout  $a, b \in S$ , les  $\sup(a, b)$  et  $\inf(a, b)$  existent on dit que le supertreillis provient (selon certain procédé) d'un treillis appelé treillis de base du supertreillis et dans ce cas le supertreillis est appelé fort et on note, lorsqu'ils existent :

$$\sup(a, b) = a \cup b \quad , \quad \inf(a, b) = a \cap b$$

Si en plus on a

$$\sup(a, b) \in a \vee b \quad \text{et} \quad \inf(a, b) \in a \wedge b$$

le supertreillis sera dit, en particulier, strictement fort ou, simplement strict. Ainsi les supertreillis obtenus par les procédés de la Proposition (1.2) sont stricts. Ces derniers, bien plus particulièrement, seront appelés réguliers (deux types).

Respectivement, si dans un supertreillis  $(S, \vee, \wedge)$   $S$  est un ensemble filtrant, le supertreillis sera appelé *supertreillis filtrant*. Evidemment, si pour tout  $a, b \in S$   $\sup(a \vee b)$  et  $\inf(a \wedge b)$  existent, le supertreillis est, d'après le corollaire (1.4), filtrant et dans ce cas, si

$$\sup(a \vee b) \in a \vee b \quad \text{et} \quad \inf(a \wedge b) \in a \wedge b$$

le supertreillis sera appelé, en particulier, *supertreillis filtrant clos*.

Remarque (1.4).

Comme on va le voir il existe des supertreillis strictement fort, filtrant et filtrant clos. Mais on n'a pas pu trouver d'exemples des supertreillis simplement forts. Ainsi la question de l'existence de tels supertreillis et, les conditions d'existence de  $\sup$  et de  $\inf$  de couples d'éléments d'un supertreillis reste ouverte.

Relativement aux supertreillis stricts on voit que si  $(S, \vee, \wedge)$  en est un, pour tout  $a_1 \dots a_n \in S$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , les  $\sup(a_1 \dots a_n)$  et  $\inf(a_1 \dots a_n)$  existent puisque  $S$  est un treillis et on conclut facilement, par récurrence sur  $n$ , à la proposition suivante :

Proposition (1.12).

On a

$$\sup(a_1 \dots a_n) \in a_1 \vee \dots \vee a_n \quad ; \quad \inf(a_1 \dots a_n) \in a_1 \wedge \dots \wedge a_n .$$

De plus, au delà de la considération ci-dessus de différents types de supertreillis, on peut définir, en utilisant convenablement les axiomes des supertreillis, les structures hypercompositionnelles duales des *demi-supertreillis relatives à l'union ou  $\vee$ -demi-supertreillis* et respectivement, *relatives à l'intersection ou  $\wedge$ -demi-supertreillis*, c'est-à-dire les structures analogues de  $\vee$ -demi-treillis et des  $\wedge$ -demi-treillis. Evidemment de toute propriété de l'une de ces deux hyperstructures (qui dépend de son hyperopération et de la relation  $\leq$ ) on déduit, moyennant le principe de dualité, la propriété duale de l'autre. On peut encore généraliser pour la théorie présente la notion de treillis duale d'un treillis [19] en définissant comme *supertreillis dual* d'un supertreillis  $(S, \vee, \wedge)$  le supertreillis  $(S, \vee, \wedge)$ , où pour tout  $a, b \in S$  on a

$$a \vee b = a \wedge b \quad \text{et} \quad a \overset{\cdot}{\wedge} b = a \vee b.$$

Il faut encore remarquer que, si pour deux éléments  $a, b \in S$  l'union  $a \vee b$  est un singleton, l'intersection  $a \wedge b$  ne l'est pas nécessairement, et inversement. De même, il est possible que l'une des deux hyperopérations d'un supertreillis soit une opération, comme par exemple dans le cas des hypertreillis [5], que l'on appellera dans la suite  $\vee$ -hypertreillis, pour les distinguer de la structure duale des  $\wedge$ -hypertreillis, où l'union est une opération et l'intersection est une hyperopération.

**§ 2. Exemples, diverses autres notions et propriétés générales.**

A. Nous donnons tout d'abord quelques exemples des supertreillis.

Exemples (2.1).

1°) Tout treillis  $(T, \vee, \wedge)$  est un supertreillis, évidemment non propre et régulier, où

$$a \vee b = \sup(a,b) \quad \text{et} \quad a \wedge b = \inf(a,b)$$

pour tout  $a,b \in T$ . De même tout hypertreillis  $(H, \vee, \wedge)$  est aussi un supertreillis, où

$$a \wedge b = \inf(a,b)$$

pour tout  $a,b \in H$ , tandis que rien n'est sûr, en général, pour l'existence du  $\sup(a,b)$  [5].

2°) Tout ensemble totalement ordonné  $S$  en tant que treillis, fournit des supertreillis par les procédés de la proposition (1.2) (donc régulier). Mais, si  $S$  est en plus dense pour la relation d'ordre [10], alors  $S$  est encore un supertreillis en posant

$$a \vee a = [ a, \rightarrow [ \quad , \quad a \wedge a = ] \leftarrow , a ]$$

et si  $a \neq b$ ,

$$a \vee b = ] \min(a,b) , \rightarrow [ \quad , \quad a \wedge b = ] \leftarrow , \max(a,b) [ .$$

En effet, les axiomes  $S_1, S_2$  et  $S_4, S_5$  sont évidemment vérifiés, même sans supposer la densité de  $S$ , qui, néanmoins, est indispensable pour  $S_3$ , c'est-à-dire pour l'associativité, pour laquelle on trouve après quelques calculs

$$a \vee b \vee c = ] \min(a,b,c) , \rightarrow [ \quad , \quad a \wedge b \wedge c = ] \leftarrow , \max(a,b,c) [$$

si évidemment  $a,b,c$  ne sont pas égaux, autrement

$$a \vee a \vee a = [ a , \rightarrow a \wedge a \wedge a = ] \leftarrow , a ] .$$

[Sans la densité on a, pour  $a < b$  et s'il y a un élément  $a'$  consécutif de  $a$  ( $a < a'$ ) et  $a' \neq b$ ,

$$(a \vee b) \vee b = ] a , \rightarrow [ \vee b = [ a' , \rightarrow ] \vee b = ] a' , \rightarrow [$$

tandis que

$$a \vee (b \vee b) = a \vee [ b , \rightarrow [ = ] a , \rightarrow [ = [ a' , \rightarrow [$$

donc

$$(a \vee b) \vee b \neq a \vee (b \vee b) \quad ] .$$

Relativement à cet exemple, on remarque que :

a) Dans le supertreillis ainsi dérivé de  $S$  les  $\sup$  et  $\inf$  de  $(a,b)$  existent évidemment toujours et :

$$\sup(a,b) \in a \vee b \quad \text{et} \quad \inf(a,b) \in a \wedge b$$

(donc le supertreillis considéré est strict).

De même, les  $\inf(a \vee b)$  et  $\sup(a \wedge b)$  existent toujours aussi et on a :

$$\inf(a \vee b) = \min(a,b) \quad , \quad \sup(a \wedge b) = \max(a,b)$$

et, encore, si  $S$  possède des éléments extrêmes  $0$  (nul) et  $u$  (universel) ,

$$\sup(a \vee b) = \max S = u \quad , \quad \inf(a \wedge b) = \min S = 0.$$

D'autre part, si  $0, a, b, u$  sont distincts, on a :

$$\begin{aligned} \inf(a \vee b) &< \sup(a,b) < \sup(a \vee b) \\ \inf(a \wedge b) &< \inf(a,b) < \sup(a \wedge b) \end{aligned}$$

c'est-à-dire dans le cas de l'existence de  $\sup$  et de  $\inf$  tant d'un couple  $(a,b)$  que des hypercomposés respectifs  $a \vee b$  et  $a \wedge b$ , il n'est pas du tout nécessaire d'avoir des égalités.

[par exemple  $\sup(a,b) = \inf(a \vee b)$  ou  $\sup(a \vee b)$ , Comp. Rem. (1.2b) ].

- b) Dans un supertreillis (comme au supertreillis considéré ci-dessus) on peut avoir  $(a \vee b) \cap (a \wedge b) \neq \emptyset$  avec  $a \neq b$  et, en général,  $a \vee a \neq a \wedge a$  [ mais toujours  $(a \vee a) \cap (a \wedge a) \neq \emptyset$  ], tandis que dans un treillis on a  $a \vee b = a \wedge b \Leftrightarrow a = b$ .

3°) Plus généralement que dans l'exemple précédent, si  $S = \bigcup_{i \in A} C_i$  est un réunion de chaînes

disjointes deux à deux, non bornées et chacune dense pour la relation d'ordre, alors  $S$ , qui n'est pas un ensemble filtrant et a fortiori un treillis, est un supertreillis pour les hyperopérations  $a \vee b$  et  $a \wedge b$  suivantes : si  $a$  et  $b$  sont dans  $C_i$  (donc comparables,  $a \not\parallel b$ ),  $a \vee b$  et  $a \wedge b$  sont définis comme dans l'exemple précédent, donc on aura  $a \vee b \subseteq C_i$  et  $a \wedge b \subseteq C_i$

si  $a \in C_i, b \in C_j$  avec  $i \neq j$  (donc  $a \parallel b$ )

$$a \vee b = ]a, \rightarrow [ \cup ]b, \rightarrow [ \quad , \quad a \wedge b = ] \rightarrow , a [ \cup ] \rightarrow , b [$$

donc

$$a \vee b \subseteq C_i \cup C_j \quad \text{et} \quad a \wedge b \subseteq C_i \cup C_j .$$

Comme précédemment les axiomes  $S_1, S_2$  et  $S_4, S_5$  sont évidemment vérifiés, même sans la condition de densité, qui est nécessaire pour  $S_3$ , pour laquelle on a finalement

$$a \vee b \vee c = ]a, \rightarrow [ \cup ]b, \rightarrow [ \cup ]c, \rightarrow [$$

et

$$a \wedge b \wedge c = ] \rightarrow , a [ \cup ] \rightarrow , b [ \cup ] \rightarrow , c [$$

si, bien entendu,  $a, b, c$  ne coïncident pas.

On doit remarquer que

- a) En ce qui concerne  $\sup$  et  $\inf$  de  $(a,b)$ ,  $a \vee b$  ou  $a \wedge b$  on a les mêmes choses que dans l'exemple 2°), si  $a \not\parallel b$ , tandis qu'ils n'existent pas si  $a \parallel b$ . Mais, dans le cas où il en existe, si le  $\max S$ , resp. le  $\min S$ , existe, alors on a :

$$\sup(a,b) = \sup(a \vee b) = \max S \quad , \quad \inf(a,b) = \inf(a \wedge b) = \min S.$$

b) L'exemple montre encore que les éléments distingués du couple  $(a,b)$  sont tous distincts si  $a \parallel b$  (excepté les éléments extrêmes de  $S$ , s'il en existe).

4°) Une autre généralisation de l'exemple 2°) est de considérer pour  $S$  un treillis dense pour la relation d'ordre, autrement dit tel qu'aucun  $a \in S$  n'ait de consécutifs  $a', a'' \in S - a' \prec a \prec a''$  (c'est-à-dire tel que pour tout  $a,b \in S'$  avec  $a < b$  il existe  $c \in S$  tel que  $a < c < b$ ).

Si dans un tel treillis on définit les hyperopérations  $a \vee b$  et  $a \wedge b$  par les formules de l'exemple 2°, si  $a \parallel b$  et celles de 3°, si  $a \not\parallel b$ , on obtient un supertreillis, évidemment strict, dans lequel les  $\sup$  et  $\inf$  de  $a \vee b$  et  $a \wedge b$  existent seulement sous des conditions, comme précédemment. Quant à la vérification des axiomes du supertreillis on a aussi des remarques semblables à celles de l'exemple précédent.

5°) L'exemple des cercles du plan euclidien de rayon positif ou nul (ou, de même, l'ensemble des carrés du plan ayant des côtés de longueur positive ou nulle et parallèles à deux axes perpendiculaires) ordonnés par l'inclusion et comprenant aussi l'ensemble vide est évidemment filtrant, donc, d'après la proposition (1.3), fournit un supertreillis filtrant [comp. avec un exemple de {1}].

Il faut remarquer que dans tous les exemples précédents les hypercomposés  $a \vee b$  et  $a \wedge b$  de  $a,b \in S$  sont des parties convexes de  $S$ . Mais ce n'est pas une propriété générale des supertreillis, comme le montre le contre-exemple suivant :

6°) Soit  $S = \mathbf{Z}$  l'ensemble des entiers rationnels et soient  $\mathbf{Z}_1$  et  $\mathbf{Z}_2$  les parties impaires et paires de  $\mathbf{Z}$  respectivement. Alors, si on définit les hyperopérations  $a \vee b$  et  $a \wedge b$  sur  $\mathbf{Z}$  comme suit :

$$a \vee b = \begin{cases} \{z \in \mathbf{Z}_1 : \max(a,b) \leq z\} & , \quad \text{si } a,b \in \mathbf{Z}_1 \\ \{z \in \mathbf{Z}_2 : \max(a,b) \leq z\} & , \quad \text{si } a,b \in \mathbf{Z}_2 \\ \{z \in \mathbf{Z} : \max(a,b) \leq z\} & , \quad \text{si } a \in \mathbf{Z}_1, b \in \mathbf{Z}_2 \\ & \text{ou } a \in \mathbf{Z}_2, b \in \mathbf{Z}_1 \end{cases}$$

$$a \wedge b = \begin{cases} \{z \in \mathbf{Z}_1 = z \leq \min(a,b)\} & , \quad \text{si } a,b \in \mathbf{Z}_1 \\ \{z \in \mathbf{Z}_2 = z \leq \min(a,b)\} & , \quad \text{si } a,b \in \mathbf{Z}_2 \\ \{z \in \mathbf{Z} = z \leq \min(a,b)\} & , \quad \text{si } a \in \mathbf{Z}_1, b \in \mathbf{Z}_2 \\ & \text{ou } a \in \mathbf{Z}_2, b \in \mathbf{Z}_1. \end{cases}$$

$\mathbf{Z}$  devient alors un supertreillis strict, où les  $a \vee b$ ,  $a \wedge b$  ne sont pas en général convexes.

7°) Soit maintenant  $S$  un ensemble ordonné fini non vide. Comme on le sait [Prop. (1.11) ], pour que  $S$  puisse être organisé en supertreillis il faut et il suffit que  $S$  contienne les éléments nul ( $0$ ) et universel ( $u$ ). Ainsi :

Si  $S = \{0, u\}$  ,  $S$  est évidemment un treillis qui d'après la proposition (1.2) fournit deux supertreillis dont seulement un est propre.

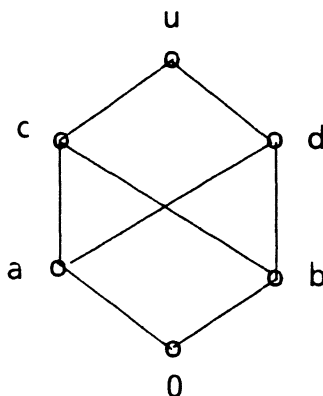
Si  $S = \{0, a, u\}$  ,  $S$  est aussi un treillis, qui par la même proposition, offre quatre supertreillis propres.

Si  $S = \{0, a, b, u\}$  ,  $S$  est organisé dans l'un ou l'autre des deux cas de treillis et il fournit donc, par l'application de la même proposition huit hypertreillis propres.

Pour  $S = \{0, a, b, c, u\}$  ,  $S$  est organisé en cinq types différents de treillis et par conséquent en appliquant la même proposition, on a vingt supertreillis propres.

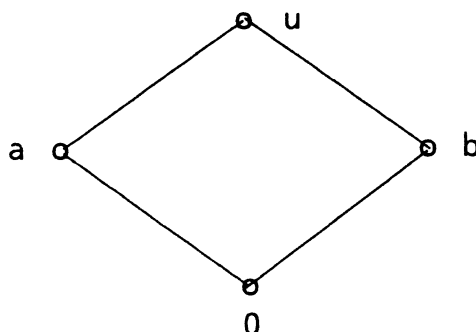
On doit remarquer de plus que

a) Tous les supertreillis comme ci-dessus à 1 (cas banal) , 2 , 3, 4 et 5 éléments



sont évidemment strictement forts, tandis que les supertreillis finis possédant plus de cinq éléments ne le sont pas toujours, comme on peut le voir par exemple avec l'ensemble de six éléments, ordonnés comme indiqué au diagramme ci-dessus, qui évidemment est un supertreillis filtrant clos.

b) Tous les supertreillis finis et strictement forts considérés ci-dessus proviennent de treillis par le procédé de la proposition (1.2). Mais il n'en est pas toujours de même (sauf pour le cas des supertreillis d'un, deux et trois éléments et sans supposer leurs formes duales), comme le montre l'exemple à quatre éléments, ordonnés comme au diagramme ci-contre et organisé par les hyperopérations  $\vee$  et  $\wedge$ , données par les tableaux ci-dessous :



$\vee$	0	a	b	u
0	0	a	b	u
a	a	{0,a}	u	u
b	b	u	{0,b}	u
u	u	u	u	S

$\wedge$	0	a	b	u
0	S	0	0	0
a	0	{a,u}	0	a
b	0	0	{b,u}	b
u	0	a	b	u

(Voir un exemple organisé par la même union pour les  $\vee$ -hypertreillis en [6]). Le supertreillis ainsi obtenu est évidemment strict et ne provient pas de son treillis de base par les procédés de la proposition (1.2), il n'est donc pas régulier.

**Remarque (1.2)**

L'exemple ci-dessus montre encore qu'il est possible que dans un supertreillis une union  $x \vee y$ , resp. une intersection  $x \wedge y$ , contienne des éléments  $w \in S$  tels que  $w < x$  et  $w < y$ , resp.  $x < w$  et  $y < w$ .



**B.** Nous donnons maintenant quelques formules utiles et certaines propriétés, en se référant à la note de pied n° 7 en ce qui concerne leurs démonstrations.

Soit  $(S, \vee, \wedge)$  un supertreillis quelconque. Alors :

Proposition (2.1).

Pour tout  $a, b \in S$  on a

$$a \vee b \subseteq a \vee (a \vee b) \quad [5]$$

et de même,

$$a \wedge b \subseteq a \wedge (a \wedge b)$$

Proposition (2.2).

Pour tout  $a, b, x \in S$  on a

$$a \leq b \Rightarrow b \vee x \subseteq (a \vee x) \vee (b \vee x) \quad [5]$$

donc, par analogie (moyennant la dualité),

$$a \leq b \Rightarrow a \wedge x \subseteq (a \wedge x) \wedge (b \wedge x) .$$

Proposition (2.3).

Si  $a \leq c$  et  $b \leq d$ , alors

$$c \vee d \subseteq (a \vee b) \vee (c \vee d) \quad [5]$$

et respectivement,

$$a \wedge b \subseteq (a \wedge b) \wedge (c \wedge d) .$$

Proposition (2.4).

Pour tout  $a, b, c, d \in S$  on a

$$a \vee b \subseteq (a \vee b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge d) \quad [5]$$

et par analogie,

$$a \wedge b \subseteq (a \wedge b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee d) .$$

[La démonstration citée en [5] (du premier cas) étant réalisée avec l'intervention de l'intersection se modifie dans le cas présent par la considération des éléments distingués  $x_a^a \wedge b$  et  $x_b^b \wedge d$  – pour l'intersection – des couples  $(a, c)$  et  $(b, d)$  .

En effet, on a  $x_a^a \wedge b \leq a$  et  $x_b^b \wedge d \leq b$ , donc, d'après la proposition (2.3)

$$a \vee b \subseteq (x_a^a \wedge c \vee x_b^b \wedge d) \vee (a \vee b) \subseteq (a \wedge c) \vee (b \wedge d) \vee (a \vee b) ]$$

Proposition (2.5).

Pour tout  $a, b \in S$  on a

$$a \vee b \subseteq (a \wedge b) \vee (a \vee b)$$

et respectivement,

$$a \wedge b \subseteq (a \vee b) \wedge (a \wedge b).$$

[En effet, par  $S_4$ ,  $a \in (a \wedge b) \vee a \Rightarrow a \vee b \subseteq [(a \wedge b) \vee a] \vee b = (a \wedge b) \vee (a \vee b)$ ].

Remarque (2.2).

Dans le cas des treillis les propriétés précédentes expriment respectivement les propriétés élémentaires suivantes

$$\begin{aligned} a \wedge b \leq a \leq a \vee b \\ a \leq b \Rightarrow a \vee x \leq b \vee x \quad \text{et} \quad a \wedge x \leq b \wedge x \\ a \leq c \quad \text{et} \quad b \leq d \Rightarrow a \vee b \leq c \vee d \quad \text{et} \quad a \wedge b \leq c \wedge d \\ (a \wedge c) \vee (b \vee d) \leq (a \vee b) \wedge (c \vee d) \end{aligned}$$

[de (2.4) après quelques calculs]

$$a \wedge b \leq a \vee b.$$

La proposition suivante généralise la proposition (1.6) :

Proposition (2.6) .

Soient  $a_1, \dots, a_n \in S$  quelconques et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Alors il existe  $x_1, \dots, x_n \in a_1 \vee \dots \vee a_n = \bigvee_{i=1}^n a_i$ , appelés éléments distingués du  $n$ -uple

$(a_1, \dots, a_n)$  pour l'union (notés par analogie  $x_{a_i}^{\bigvee_{i=1}^n}$ , ou plus simplement  $x_i^{\vee}$ ) tel que

$$a_i \leq x_i^{\vee}, \text{ pour tout } i \in [1, n] \text{ [5] .}$$

Respectivement il existe  $x_1, \dots, x_n \in a_1 \wedge \dots \wedge a_n = \bigwedge_{i=1}^n a_i$ , appelés éléments distin

gués du  $n$ -uple  $(a_1, \dots, a_n)$  pour l'intersection notés  $x_{a_i}^{\bigwedge_{i=1}^n}$ , ou  $x_i^{\wedge}$ )

tels que  $x_i \leq a_i$ , pour tout  $i \in [1, n]$ .

Divers exemples montrent qu'il est possible qu'il existe dans un supertreillis des éléments scalaires <sup>(b)</sup> pour l'union (resp. pour l'intersection (par exemple dans un  $\vee$ -hypertreillis tous ses éléments sont des scalaires pour l'intersection).

On a la proposition :

Proposition (2.7).

*L'ensemble  $S_{\vee}$  des scalaires de  $S$  par rapport à l'union est un  $\vee$ -demi-treillis [5].  
Respectivement l'ensemble  $S_{\wedge}$  des scalaires de  $S$  par rapport à l'intersection est un  $\wedge$ -demi-treillis.*

d'où, comme il est clair, il découle la

Proposition (2.8).

*L'ensemble  $S$  des scalaires de  $S$  par rapport à l'union et à l'intersection (appelé simplement scalaires de  $S$ ) est un treillis.*

Ayant en vue les notions de sous-demi-treillis par rapport à l'union, resp. à l'intersection, d'un  $\vee$ -demi-treillis, resp. d'un  $\wedge$ -demi-treillis, comme de même la notion du sous-treillis d'un treillis [4] [16], on peut introduire les notions analogues de sous- $\vee$ -demi-supertreillis, sous- $\wedge$ -demi-supertreillis d'un  $\vee$ -demi-supertreillis,  $\wedge$ -demi-supertreillis et supertreillis respectivement.

Il est évident que :

- i) *Un sous-ensemble non vide  $s_{\vee}$  d'un  $\vee$ -demi-supertreillis  $S_{\vee}$  est un sous- $\vee$ -demi-supertreillis, si et seulement si, pour tout  $a, b \in S_{\vee}$  on a  $a \vee b \subseteq s_{\vee}$ ,*

de même

- ii) *Un sous-ensemble non vide  $s_{\wedge}$  d'un  $\wedge$ -demi-supertreillis  $S_{\wedge}$  est un sous- $\wedge$ -demi-supertreillis, si et seulement si, pour tout  $a, b \in S_{\wedge}$  on a  $a \wedge b \subseteq s_{\wedge}$ ,*

et, en combinant les deux cas ,

- iii) *Un sous-ensemble non vide  $s_{\vee\wedge}$  d'un supertreillis  $S$  est un sous-supertreillis de  $S$  si, et seulement si, pour tout  $a, b \in s_{\vee\wedge}$  on a  $a \vee b \subseteq s_{\vee\wedge}$  et  $a \wedge b \subseteq s_{\vee\wedge}$ .*

Exemples (2.2).

1°) Les demi-treillis et les treillis des scalaires (s'il en existe) dans les structures des propositions précédentes, considérés comme demi-supertreillis et supertreillis sont des sous-demi-supertreillis ( $-\vee-$  ou  $-\wedge-$ , selon le cas) ou des sous-supertreillis des structures correspondantes.

- 
- (8) Comme on le sait [9] [12] un élément  $s$  d'un hypergroupe  $(H, \cdot)$  est dit scalaire de  $H$ , si pour tout  $x \in H$  les produits  $xs$  et  $sx$  sont des singletons (Evidemment on distingue le scalaire à droite. resp. à gauche). Dans le cas considéré on distingue scalaire par rapport à l'union, resp. par rapport à l'intersection.

2°) Les parties  $Z_1$  et  $Z_2$  (impaire et paire) de l'ensemble  $Z$  des entiers rationnels sont des sous-supertreillis du supertreillis  $S = Z$ , défini comme dans l'exemple (1.1, 6°).

### Remarques (2.3)

- a) Un sous-ensemble d'un demi-supertreillis ou d'un supertreillis peut être lui-même un demi-supertreillis ou un supertreillis, sans être un sous-demi-supertreillis de la structure considérée [Dans ce cas, évidemment, pour éviter la confusion il faut changer convenablement les signes  $\vee$  et  $\wedge$  (ou un des deux) par d'autres]. Par exemple les ensembles  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{Q}$  des nombres réels et rationnels respectivement, étant des ensembles totalement ordonnés, peuvent être organisés en supertreillis par les différents procédés indiqués dans l'exemple (2.1 2°), sans que le supertreillis de  $\mathbb{Q}$  soit sous-supertreillis celui de  $\mathbb{R}$ , même dans le cas où les deux supertreillis ont été organisés par le même procédé [parce que l'on a toujours  $a \underline{\vee} b \neq a \vee b$ ,  $a \underline{\wedge} b \neq a \wedge b$  pour tout  $a, b \in \mathbb{Q}$ , si les supertreillis sont  $(\mathbb{R}, \vee, \wedge)$  et  $(\mathbb{Q}, \underline{\vee}, \underline{\wedge})$ ].
- b) On voit que, en particulier, dans ce dernier cas on a  $a \underline{\vee} b \subset a \vee b$ ,  $a \underline{\wedge} b \subset a \wedge b$ , pour tout  $a, b \in \mathbb{Q}$ . La remarque conduit à la considération de la notion de *presque-sous-supertreillis* (resp. de *presque-sous-demi-supertreillis*) pour des cas pareils, c'est-à-dire pour un supertreillis  $(S', \vee', \wedge')$  dont le support  $S'$  est un sous-ensemble propre du support  $S$  ( $S' \subset S$ ) d'un autre supertreillis  $(S, \vee, \wedge)$  et pour lesquels on a  $a \vee' b \subseteq a \vee b$ ,  $a \wedge' b \subseteq a \wedge b$ , pour tout  $a, b \in S'$ ; mais avec  $a \vee' b \subset a \vee b$  ou  $a \wedge' b \subset a \wedge b$ . La distinction est imposée pour les cas de l'immersion d'un supertreillis quelconque dans un supertreillis complet (comme ci-dessous).

De la définition précédente du sous-supertreillis et moyennant les axiomes du supertreillis on déduit facilement (comme dans les treillis [4]) la propriété :

### Proposition (2.9).

*Si une inclusion faisant intervenir les signes  $\vee$  et  $\wedge$  et un nombre fini d'éléments d'un supertreillis  $S$ , est valable quels que soient ses éléments, éventuellement liés par des relations  $\leq$ , la même relation d'inclusion est valable dans les mêmes conditions dans tous sous-supertreillis de  $S$ .*

Pour la génération d'un sous-supertreillis à partir d'un sous-ensemble d'un supertreillis on a la proposition évidente suivante :

Proposition (2.10).

*Etant donné un sous-ensemble non vide  $X$  d'un supertreillis  $S$ , l'ensemble  $T$  des éléments de  $S$  qui sont tels que pour chacun d'eux il existe des éléments de  $X$ , sur lesquels en appliquant un nombre fini de fois les hyperopérations  $\vee$  et  $\wedge$  on obtient un sous-ensemble de  $T$  contenant cet élément, est un sous-supertreillis de  $S$ , appelé sous-supertreillis de  $S$  engendré par  $X$ .*

Evidemment on peut considérer des sous-demi-supertreillis ( $-\vee-$  ou  $-\wedge-$ ) engendrés par des sous-ensembles non vides d'un demi-supertreillis ( $-\vee-$  ou  $-\wedge-$  respectivement).

Soit maintenant  $(S, \vee, \wedge)$  un supertreillis strictement fort. Si le treillis de base de  $S$  est complet, le supertreillis sera appelé complet, et, dans ce cas évidemment, le corollaire (1.3) est généralement applicable. Pour cette notion on peut encore appliquer le théorème de Mac Neille de la théorie classique [4] [19]. Ainsi tout ensemble ordonné quelconque  $E$  peut être immergé dans un supertreillis complet, les sup et les inf de différents sous-ensembles de  $E$  existant éventuellement dans  $E$ , étant conservés. Mais on ne peut rien dire en général de l'immersion de  $E$  dans un supertreillis complet  $(S, \vee, \wedge)$  de manière que, si  $E$  est muni de deux hyperopérations, union  $\underline{\vee}$  et intersection  $\underline{\wedge}$ , les hypercomposés  $a \underline{\vee} b$  et  $a \underline{\wedge} b$  de  $E$  soient identifiés ou, plus précisément, soient inclus dans les unions et intersections correspondantes  $a \vee b$  et  $a \wedge b$  de  $S$ . Un tel problème étant évidemment toujours dépendant de la définition des hyperopérations dans  $E$ . On a par exemple la proposition évidente suivante :

Proposition (2.11).

*Tout supertreillis filtrant  $(E, \underline{\vee}, \underline{\wedge})$  organisé comme à la proposition (1.4) ou, a fortiori, régulier, peut être immergé dans un supertreillis complet  $(S, \vee, \wedge)$  tel que*

- i) *Les sup et les inf de différentes parties de  $E$  existant éventuellement dans  $E$  soient conservés dans  $S$  et*
- ii) *les unions  $a \underline{\vee} b$  et les intersections  $a \underline{\wedge} b$  dans  $E$  soient incluses dans les unions et intersections respectives  $a \vee b$  et  $a \wedge b$  dans  $S$ .*

C'est-à-dire, en d'autres termes, le supertreillis  $(E, \underline{\vee}, \underline{\wedge})$  devient par cette immersion un presque-sous-supertreillis de  $S$ .

Remarque (2.4).

Il est visible que le treillis de base d'un supertreillis complet étant lui-même complet entraîne que toutes les propriétés de la théorie classique, qui ne sont pas reliées avec les unions et les intersections de supertreillis - comme hyperopérations - sont immédiatement valables dans la théorie présente.

## REFERENCES

- [1] BENADO M. ,  
*Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier, II*  
(*Théorie des multistructures*).  
Czechoslovak Mathematical Journal 5 (80) p. 308-344 (1955).
- [2] BENADO M.,  
*Remarques sur la théorie des multitreillis VI (contributions à la théorie des structures algébriques ordonnées)*.  
Matematicko Fyzikalny casopis. Rocnik 14, cislo 3, p. 164-207 (1964).
- [3] BENADO M. ,  
*La théorie des multitreillis et son rôle en Algèbre et en Géométrie.*  
(Rapport destiné au Colloque International de théorie des ensembles ordonnés d'Oberwolfach, 26-30 Octobre 1959). Publications scientifiques de l'Université d'Alger 7 , p. 41-58 (1960).
- [4] DUBREUIL-JACOTIN M.L. , LESIEUR L. , CROISOT R. ,  
*Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques.*  
Cahiers scientifiques, Gauthier-Villars, Paris 1953.
- [5] KONSTANTINIDOU M. , MITTAS J. ,  
*An introduction to the theory of hyperlattices.*  
Math. Balkanica, t. 7, p. 187-193, Beograd , 1977.
- [6] KONSTANTINIDOU - SERAFIMIDOU M. ,  
*Modular hyperlattices.*  
πρακτικά της Ακαδημίας Αθηνών τ. 53, σελ. 202-218, Αθήναι 1978.
- [7] KONSTANTINIDOU - SERAFIMIDOU M. ,  
*Distributive and complemented hyperlattices.*  
πρακτικά της Ακαδημίας Αθηνών , τ. 56, σελ. 339-360, Αθήναι 1981.

- [8] KRASNER M.,  
*Approximation des corps valués complets de caractéristique  $p \neq 0$  par ceux de caractéristique 0.*  
Acte du Colloque d'Algèbre supérieure, C.B.R.M., Bruxelles, 19-22 décembre 1956.
- [9] KRASNER M.,  
*Une nouvelle présentation de la théorie des groupes de permutations et ses applications à la théorie de Galois et de produit d'entrelacement ("Wreath Product") de groupes.*  
Math. Balkanica, t. 3, p. 229-280, Beograd 1973.
- [10] KURATOWSKI K.  
*Introduction à la Théorie des ensembles et à la Topologie.*  
Monographie n° 15 de l'Enseignement Mathématiques, Genève, 1966.
- [11] MARTY FR.,  
*Sur une généralisation de la notion du groupe.*  
Actes du 8ème Congrès des Mathématiciens Scandinaves, p. 45-49, Stochholme 1934.
- [12] MITTAS J.,  
*Sur une classe d'hypergroupes commutatifs.*  
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 269, p. 485-488, 29 septembre 1969, Série A'.
- [13] MITTAS J.,  
*Hypergroupes canoniques.*  
Math. Balkanica, t. 2, p. 165-179, Beograd, 1972.
- [14] MITTAS J.,  
*Hyperanneaux et certaines de leurs propriétés.*  
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 269, p. 623-626, 13 Octobre 1969, Série A'.
- [15] MITTAS J.,  
*Sur les hyperanneaux et les hypercorps.*  
Math. Balkanica, t.3, p. 368-382, Beograd 1973.
- [16] MITTAS J.,  
*Sur certaines classes de structures hypercompositionnelles.*  
πρακακά της Ακαδημίας Αθηνών, τ. 48, σελ. 302-318, Αθήναι 1973.

- [17] MITTAS J. ,  
*Hypergroupes polysymétriques canoniques.*  
Convegno su Ipergruppi, altre strutture multivoche e loro applicazioni, p. 1-25,  
Editor P. Corsini, Udine, 15-18, Ottobre 1985.
- [18] MITTAS J. , KONSTANTINIDOU M. ,  
*Introduction à l'hyperalgèbre de Boole.*  
Math. Balkanica, t. 7, p. 314-320, Beograd, 1977.
- [19] SZASZ G. ,  
*Théorie des treillis.*  
Monographies Universitaires de Mathématique, Dunod, Paris 1971.

Jean MITTAS  
Professeur émérite  
de l'Université de Thessaloniki  
37, rue Pavlou Mela  
54622 THESSALONIKI  
GRECE

Maria KONSTANTINIDOU  
Professeur Assistant  
de l'Université de Thessaloniki  
62, rue Halkidikis  
54643 THESSALONIKI  
GRECE