

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

MARTINE PICAUVET-L'HERMITTE

Multiplicité et norme d'un idéal fractionnaire et régulier

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 94, série *Mathématiques*, n° 25 (1989), p. 1-46

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1989__94_25_1_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MULTIPLICITE ET NORME D'UN IDEAL
FRACTIONNAIRE ET REGULIER

Martine PICAUVET-L'HERMITTE

Abstract

Multiplicity and reduction of a fractional ideal of a one dimensional Cohen-Macaulay ring are defined by using the blowing up of this ideal . The most striking result among those we obtained is the additivity of the multiplicity . The notion of the module index allows us to define a norm in an order over a Dedekind domain . This norm possesses all the classical properties of the usual one .

0- INTRODUCTION

La fonction multiplicité est additive pour les idéaux fractionnaires d'un anneau de Dedekind . Cette propriété est encore vérifiée pour des idéaux comaximaux ou inversibles d'ordres généralisés , comme l'a montré D.G. Northcott dans [14] . Nous généralisons ces résultats dans deux voies . Nous définissons d'abord la multiplicité des idéaux fractionnaires réguliers d'un anneau de Cohen-Macaulay de dimension un ; nous montrons ensuite l'additivité de cette fonction. Pour aboutir à ces généralisations et propriétés il fut nécessaire d'introduire une extension de la notion de longueur . Celle-ci permet de définir la multiplicité et la réduction d'un idéal fractionnaire

I d'un anneau de Cohen-Macaulay A , à l'aide d'un outil essentiel de cette étude : l'éclatement A^I de cet idéal ; dans le contexte où nous nous plaçons, c'est à dire en dimension un, l'éclatement de I est l'anneau $\bigcup_n I^n : I^n$; sa propriété fondamentale est que l'idéal fractionnaire I est inversible dans A^I . On notera que la multiplicité peut prendre des valeurs négatives. Nous retrouvons comme cas particulier la définition de la multiplicité et de la réduction donnée par J. Lipman dans [10], dans le cas des idéaux d'un anneau semi-local de Cohen-Macaulay de dimension un.

Un grand nombre des résultats obtenus sont la conséquence d'un lemme décisif : étant donné un idéal fractionnaire I d'un anneau A de Cohen-Macaulay, l'idéal fractionnaire I^n est inversible dans $I^n : I^n$ si et seulement si I^n possède un idéal fractionnaire transversal (réduction et inversible). De plus, il existe un plus petit entier $p(I)$ tel que cette propriété soit vérifiée ; on obtient alors que $A^I = I^{p(I)} : I^{p(I)}$.

Étant donné un idéal fractionnaire I , nous montrons que pour tout entier $k \geq p(I)$, l'idéal I^k possède un système minimal de générateurs, dont le cardinal est indépendant de k et qui s'exprime en fonction de la multiplicité de I .

A. Fröhlich a introduit dans [7] la notion d'indice d'un idéal fractionnaire I par rapport à un idéal fractionnaire J et désigné par $[I | J]$. Dans le cas particulier des ordres d'entiers, nous définissons la norme d'un idéal fractionnaire I par l'indice de A^I par rapport à IA^I , c'est à dire par $[A^I | IA^I]$.

Cette norme est liée à la multiplicité. On retrouve un grand nombre des propriétés classiques de la norme usuelle, en particulier la multiplicativité, la décomposition en idéaux premiers. Enfin, cette norme redonne la norme usuelle dans le cas d'un ordre d'entiers de Dedekind.

Nous appliquons les résultats précédents au conducteur d'un morphisme d'éclatement ; plus précisément nous montrons le résultat suivant : soit A un sous-anneau d'un anneau intègre B , de même

corps des fractions , tel que le morphisme $A \rightarrow B$ soit fini ; soit C le conducteur du morphisme , désignant par $e(C)$ et $r(C)$ la multiplicité et réduction de C , si A est un ordre de Gorenstein , alors B est un ordre de Gorenstein si et seulement si $B = A^C$, ou $p(C) = 1$ ou $r(C) = \text{Long}_A(B/A)$, ou $e(C) = 2r(C)$, ou $N(C) = [B | A]^2$

I - RAPPELS ET GENERALITES

D.G. Northcott fait dans [14] une étude des ordres généralisés de Dedekind .

Définition 1.1 - Un anneau de Cohen-Macaulay , de dimension un , est dit un g-ordre . C'est donc un anneau commutatif unitaire , Noethérien , de dimension un , tel que tout idéal maximal contienne un élément régulier .

On notera qu'un g-ordre intègre est un ordre généralisé de Dedekind .

Définition 1.2 - Soit A un g-ordre ; un sous- A -module I de l'anneau total des fractions $\text{Tot}(A)$ de A est dit un idéal fractionnaire s'il existe un élément régulier a de A tel que aI soit un idéal de A ; on appelle idéal fractionnaire régulier un idéal fractionnaire contenant un élément régulier de $\text{Tot}(A)$.

Lorsque I est un idéal régulier de l'anneau A , l'ensemble $V(I)$ des idéaux premiers de A , contenant I , est constitué d'idéaux maximaux .

Nous désignons par $I(A)$ l'ensemble des idéaux fractionnaires réguliers d'un g-ordre A .

Pour deux éléments I et J de $I(A)$, on définit $I : J$ comme étant l'ensemble des éléments x de $\text{Tot}(A)$ tels que $xJ \subset I$; c'est un élément de $I(A)$. En particulier , il existe un élément régulier a de A tel que $aI \subset J$.

Lorsque I est un élément de $I(A)$, on dit que I est inversible s'il existe un élément J de $I(A)$ tel que $IJ = A$.

Dans le cas où A est un anneau intègre , l'ensemble $I(A)$ n'est autre que l'ensemble des idéaux fractionnaires (non nuls) .

Définition 1.3 - Soient A et A' des g-ordres , de même anneau total

des fractions, tels que A soit un sous-anneau de A' . On dit que le morphisme $A \rightarrow A'$ est un morphisme de g-ordres s'il est fini et injectif. Le conducteur du morphisme, noté $C(A, A')$, est l'annulateur dans A du A -module A'/A .

On remarquera que si $A \rightarrow A'$ est un morphisme de g-ordres, alors A' est un idéal A -fractionnaire; par conséquent, le conducteur $C(A, A')$ est non nul. Il est égal à $A : A'$ et est le plus grand des idéaux communs à A et A' .

On désigne par \overline{A} la fermeture intégrale de A dans son anneau total des fractions.

Définition 1.4 - Soit Z un anneau de Dedekind, de corps des fractions Q , et soit K une extension algébrique séparable de degré fini de Q . Un ordre d'entiers A , relatif à l'extension K de Q , est un sous-anneau de K tel que :

1) L'anneau A est un sur-anneau de Z et le morphisme $Z \rightarrow A$ est fini.

2) L'anneau A contient une base de K sur Q .

Soient A et A' des ordres d'entiers, de même corps des fractions, tels que A soit un sous-anneau de A' ; on dit que le morphisme $A \rightarrow A'$ est un morphisme d'ordres s'il est fini et injectif.

Tout idéal fractionnaire non nul d'un ordre est un Z -module de type fini, contenant une base de K sur Q . Il en résulte qu'étant donnés deux idéaux fractionnaires non nuls I et J d'un ordre, il existe un élément non nul a de Z tel que $aI \subset J$.

Rappelons maintenant la généralisation de la notion d'indice, due à A. Fröhlich [7] :

Soit Z un anneau principal, de corps des fractions Q et soit K un corps, extension finie séparable de Q , de degré d . Soit A un ordre relatif à l'extension K de Q , c'est à dire un sous-anneau de la fermeture intégrale de Z dans K , tel que l'on ait un morphisme $Z \rightarrow A$ libre de rang d . Tout idéal A -fractionnaire est libre de rang d sur Z . Soient I et J des idéaux A -fractionnaires, une base de I ou J sur Z est aussi une base de K sur Q . Puisque I et J sont isomorphes en tant que Z -modules, il existe un Q -automorphisme

d'espaces vectoriels f de K tel que $f(I) = J$. Le déterminant de f est non nul et, à un élément inversible près de Z , dépend seulement de I et J . On pose $[I | J] = Z \det(f)$, indice de I par rapport à J .

Lorsque Z est un anneau de Dedekind, les idéaux fractionnaires I et J ne sont plus nécessairement libres sur Z . Cependant, pour tout idéal maximal P de Z , les idéaux fractionnaires I_P et J_P sont libres sur Z_P , un anneau principal. On peut alors définir, pour tout idéal maximal P de Z , l'indice $[I_P | J_P]$, qui est un idéal fractionnaire de Z_P . Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux P de Z , tels que $I_P \neq J_P$, il existe alors un unique idéal fractionnaire $[I | J]$ de Z , tel que pour tout idéal maximal P de Z on ait $[I | J]_P = [I_P | J_P]$.

Rappelons les principales propriétés de l'indice, démontrées par A. Fröhlich dans [7] : soit Z un anneau de Dedekind et soit K une extension finie séparable du corps des fractions Q de Z ; soit A un ordre relatif à cette extension.

i) Si M, N, L sont des idéaux A -fractionnaires on a :

$$[M | N][N | L] = [M | L].$$

ii) Si $N \subset M$, alors $[M | N]$ est un idéal entier de Z .

De plus $M = N$ équivaut à $[M | N] = Z$.

iii) Si f est un Q -automorphisme de K , alors $[f(M) | f(N)] = [M | N]$.

iv) Pour tout idéal maximal P de Z on a $[M | N]_P = [M_P | N_P]$.

v) Soit x un élément de K , on a l'égalité $[A | Ax] = N_{K|Q}(x)Z$.

Donnons une preuve de v) : $N_{K|Q}(x)$ est le déterminant de l'endomorphisme f de K défini par $f(t) = tx$. Pour tout idéal maximal P de Z , on a $f(A_P) = xA_P$. Il en résulte que $[A_P | xA_P] = N_{K|Q}(x)Z_P$, on en déduit l'égalité dans Z .

La proposition suivante généralise un résultat de A. Fröhlich dans [8].

Proposition 1.5 - Soit A un ordre d'entiers et soient I et J des idéaux A -fractionnaires et soit L un idéal A -fractionnaire inversible, alors $[JL \mid IL] = [J \mid I]$.

Preuve :

Soit P un idéal maximal de Z , en utilisant la propriété ii) on peut supposer que l'anneau A est semi-local et que l'idéal fractionnaire L est principal, donc de la forme $L = Aa$. On en déduit les égalités successives : $[JL \mid IL] = [aJ \mid aI] = [J \mid I]$, la dernière étant obtenue en considérant le \mathbb{Q} -automorphisme de K , défini par la multiplication par a .

Remarque 1.6 - Soit d le degré de l'extension K de \mathbb{Q} , associée à l'ordre A ; si M et N sont des idéaux A -fractionnaires, il existe un élément non nul a de Z tel que $aN \subset M$. On en déduit que $[M \mid aN] = [M \mid N][N \mid aN]$. Or l'homothétie de rapport a a pour déterminant a^d , il en résulte que $[M \mid N] = a^{-d} [M \mid aN]$.

Etant donnés deux idéaux fractionnaires I et J d'un g -ordre A , on peut définir $\text{Long}_A(I/J)$, lorsque J est contenu dans I . On va généraliser cette notion de longueur, relative à deux idéaux fractionnaires comparables, à des idéaux fractionnaires quelconques. Nous avons besoin, pour cela, des propriétés suivantes :

Proposition 1.7 - Soit A un g -ordre, soit K un idéal de A inversible et soient I et J des idéaux fractionnaires, alors les modules I/KI et J/KJ sont de longueurs finies et égales.

Preuve :

Par multiplication convenable par des éléments de A , on peut supposer que I et J sont des idéaux de A . On peut aussi supposer que K est différent de A . Soit L le produit des idéaux maximaux de $V(K)$, il existe une puissance de L contenue dans K , soit L^k . Alors l'inclusion $L^k I \subset KI$, montre que I/KI est de longueur finie. On a des suites exactes :

$$0 \rightarrow I/KI \rightarrow A/KI \rightarrow A/I \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow K/IK \rightarrow A/KI \rightarrow A/K \rightarrow 0.$$

On en déduit que $\text{Long}(A/KI) = \text{Long}(I/KI) + \text{Long}(A/I) = \text{Long}(K/IK) + \text{Long}(A/K)$. Il en résulte que $\text{Long}(I/KI) = \text{Long}(A/K) = \text{Long}(J/KJ)$.

Proposition 1.8 - Soit A un g -ordre, pour tout triplet (I, J, K) d'éléments de $I(A)$, où K est un idéal inversible de A et satisfaisant $J \subset I$, on a la relation :

$$\text{Long}_A(I/JK) = \text{Long}_A(I/J) + \text{Long}_A(A/K)$$

Preuve :

D'après 1.7, on a l'égalité $\text{Long}(A/K) = \text{Long}(J/JK) = \text{Long}(I/JK) - \text{Long}(I/J)$, ce qui donne le résultat.

Corollaire 1.9 - Soit A un g -ordre ; si I et J sont des éléments de $I(A)$ et a et a' des éléments réguliers de A , tels que aJ et $a'J$ soient contenus dans I , alors :

$$\text{Long}_A(I/aJ) - \text{Long}_A(A/aA) = \text{Long}_A(I/a'J) - \text{Long}_A(A/a'A)$$

Preuve :

Il est clair que $aa'J \subset I$. En vertu de 1.8, cette relation donne : $\text{Long}(I/aa'J) = \text{Long}(I/a'J) + \text{Long}(A/aA) = \text{Long}(I/aJ) + \text{Long}(A/a'A)$, d'où l'égalité cherchée.

Corollaire 1.10 - Avec les hypothèses du corollaire précédent, si A est entier sur un anneau B , on a la relation :

$$\text{Long}_B(I/aJ) - \text{Long}_B(A/aA) = \text{Long}_B(I/a'J) - \text{Long}_B(A/a'A)$$

Preuve :

Rappelons la formule des extensions de D.G. Northcott, p. 168, [13] ; si l'anneau R' est extension entière de l'anneau R , pour un R' -module E' , on a la relation :

$$\text{Long}_R(E') = \sum_{M'} \text{Long}_{R_M'}(E'_{M'}) [R'/M' : R/M' \cap R]$$

étendue aux idéaux maximaux de R' . Il suffit alors d'appliquer le corollaire précédent aux longueurs sur A_M , pour tout idéal maximal M de A , puis de multiplier par les degrés résiduels $[A/M : B/M \cap B]$ et de sommer pour tous les idéaux maximaux de A . On obtient alors le résultat cherché.

Remarque 1.11 -

1) Etant donné un élément I de $I(A)$, il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux M de A tels que $I_M \neq A_M$. En effet, soit a un élément régulier de A , tel que $aI \subset A$. Alors aI est un idéal de A , contenu dans un nombre fini d'idéaux maximaux de A ; il en est de même de l'idéal aA . Il n'y a donc qu'un nombre fini d'idéaux maximaux M de A , tels que $aI_M \neq A_M$ ou $aA_M \neq A_M$. Pour tous les autres idéaux maximaux M de A , on voit donc que $aA_M = A_M = aI_M$, il en résulte que $I_M = A_M$.

2) Soient I et J des éléments de $I(A)$, où A est un g -ordre (resp. ordre d'entiers), pour un élément régulier a de A tel que $aJ \subset I$, la quantité $\text{Long}_A(I/aJ) - \text{Long}_A(A/aA)$, (resp. $\text{Long}_Z(I/aJ) - \text{Long}_Z(A/aA)$) est un élément de \mathbb{Z} : en effet les éléments de $V(aJ : I)$ et $V(aA : A)$ sont formés d'idéaux maximaux et les deux longueurs sont finies.

Nous constatons alors qu'étant donnés deux éléments I et J de $I(A)$, pour tout élément régulier a de A , tel que $aJ \subset I$ (il en existe), l'entier relatif $\text{Long}_A(I/aJ) - \text{Long}_A(A/aA)$ est indépendant de a . On est alors conduit à la définition suivante :
Définition 1.12 - Soit A un g -ordre, entier sur un anneau B , et soient I et J deux éléments de $I(A)$, on définit la longueur relative de I par rapport à J sur B par :

$$L_B(I, J) = \text{Long}_B(I/aJ) - \text{Long}_B(A/aA)$$

où a est un élément régulier de A tel que $aJ \subset I$.

On retrouve la notion usuelle de longueur lorsque $J \subset I$, il suffit de prendre $a = 1$.

La longueur que nous venons de définir possède les propriétés habituelles d'une longueur. Nous en montrons les propriétés nécessaires à la poursuite de notre étude.

Proposition 1.13 - Soit A un g -ordre, si I, J, K sont des éléments de $I(A)$ on a la relation :

$$L_A(I, J) = L_A(I, K) - L_A(J, K).$$

Preuve :

Il existe un élément régulier a de A tel que $aK \subset I \cap J$ et $aJ \subset I$. Nous obtenons les trois égalités :

$$L_A(I, J) = \text{Long}(I/aJ) - \text{Long}(A/aA), \quad L_A(I, K) = \text{Long}(I/aK) - \text{Long}(A/aA),$$

$$L_A(J, K) = \text{Long}(J/aK) - \text{Long}(A/aA).$$

On en déduit que l'entier relatif $L = L_A(I, K) - L_A(J, K) = \text{Long}(I/aK) - \text{Long}(J/aK)$ est encore égal à $\text{Long}(I/aK) - \text{Long}(aJ/a^2K)$, en vertu de 1.7. On obtient alors $L = \text{Long}(I/a^2K) - \text{Long}(aK/a^2K) - \text{Long}(aJ/a^2K) = \text{Long}(I/aJ) - \text{Long}(aK/a^2K)$, qui est encore égal à $\text{Long}(I/aJ) - \text{Long}(A/aA)$; ce qui donne le résultat.

Les formules d'extensions et de localisations des longueurs de D.G. Northcott se généralisent ainsi :

Proposition 1.14 - Soit A un g -ordre :

1) Soit $A \rightarrow B$ un morphisme de g -ordres et soient I et J des éléments de $I(B)$ alors :

$$L_A(I, J) = \sum_{M \in \text{Max}(B)} L_{B_M}(I_M, J_M) [B/M : A/A \cap M].$$

2) Si I et J sont des éléments de $I(A)$, on a la relation :

$$L_A(I, J) = \sum_{M \in \text{Max}(A)} L_{A_M}(I_M, J_M).$$

3) Si A est un ordre d'entiers relatif à un anneau de Dedekind Z et si I et J sont des éléments de $I(A)$, alors :

$$L_Z(I, J) = \sum_{M \in \text{Max}(A)} L_{A_M}(I_M, J_M) [A/M : Z/Z \cap M].$$

Preuve :

Chacune de ces longueurs relatives est une différence de longueurs usuelles. Il suffit alors de leur appliquer la formule des extensions de D.G. Northcott, rappelée plus haut. Le cas 2) s'obtient en prenant $A = B$, et dans le cas 3) , on peut choisir $a \in Z$.

Remarque 1.15 - Les formules de la proposition précédente sont constituées de sommes finies, étendues à $\text{Supp}(I/aJ) \cup \text{Supp}(A/aA)$,

le support étant pris dans B pour 1) et dans A pour 2) et 3) .

Proposition 1.16 - Soit A un g-ordre , soient I , J , K des éléments de $I(A)$, où K est inversible , alors $L_A(I,KI) = L_A(J,KJ)$.

Preuve :

C'est une généralisation de la proposition 1.7 : il existe un élément a régulier de A , tel que aK soit un idéal inversible de A . On utilise alors la relation $\text{Long}_A(I/aKI) = \text{Long}_A(J/aKJ)$.

Proposition 1.17 - Soit A un g-ordre et soient I , J , K des éléments de $I(A)$, où K est inversible , alors :

$$L_A(I,JK) = L_A(I,J) + L_A(A,K) .$$

Preuve :

C'est une généralisation de 1.8 . Il existe un élément a régulier de A , tel que $aJ \subset I$ et $aK \subset A$, ce qui donne $a^2JK \subset I$. Il suffit alors d'utiliser la relation $\text{Long}_A(I/a^2JK) = \text{Long}_A(I/aJ) + \text{Long}_A(A/aK)$.

II - DEFINITION ET PROPRIETES DE L'ECLATEMENT D'UN IDEAL FRACTIONNAIRE REGULIER D'UN g-ORDRE

Définition 2.1 - Soit A un g-ordre et soit I un élément de $I(A)$. L'anneau I : I est un g-ordre , contenant A comme sous-anneau , appelé g-ordre associé à I . Il est contenu dans la fermeture intégrale \bar{A} de A dans son anneau total de fractions .

En effet , I : I est un idéal A-fractionnaire sur un anneau Noethérien , il est donc un A-module de type fini .

Remarque 2.2 - Dans la définition précédente , si A est un ordre alors I : I est un ordre (cf. [3] p. 97)

Définition 2.3 - Soit A un g-ordre et soient I et J deux idéaux A-fractionnaires , alors I et J sont dits arithmétiquement équivalents s'il existe un élément régulier a de $\text{Tot}(A)$, tel que $I = aJ$.

Nous avons vu , remarque 1. 11.1 , que , pour un élément I

de $I(A)$, l'ensemble des idéaux maximaux M de A tels que $I_M \neq A_M$ est fini. Cette remarque permet de généraliser la proposition 2.1.4 de [5] aux idéaux fractionnaires réguliers de g -ordres, comme suit :

Proposition 2.4 - Soit A un g -ordre, l'application

$$\Phi : I(A) \rightarrow \prod_{P \in \text{Max}(A)} I(A_P), \text{ définie par } \Phi(I) = (I_P)$$

est une injection. Son image est l'ensemble des familles $(J(P))$ telles que $J(P) = A_P$, sauf pour un nombre fini d'éléments P de $\text{Max}(A)$.

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 2.5 - Soit A un g -ordre et soient I et J des éléments de $I(A)$, alors il existe un élément K de $I(A)$ inversible, tel que $I = KJ$ si et seulement si pour tout idéal maximal P de A , les idéaux I_P et J_P sont arithmétiquement équivalents.

Définition 2.6 - Soit A un g -ordre et soit I un élément de $I(A)$, on appelle éclatement de I , l'anneau $A^I = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I^i : I^i$.

Il est clair que $A^I = A^{I^n}$, pour tout entier $n > 0$.

Définition 2.7 - Soit A un g -ordre, on dit qu'un élément I de $I(A)$ est p -inversible si $I \cdot (I^P : I^P)$ est inversible dans l'anneau $I^P : I^P$.

Il est clair que l'idéal fractionnaire I est inversible si et seulement si il est 0-inversible.

Remarque 2.8 - Soient I et J des éléments de $I(A)$ arithmétiquement équivalents, alors $A^I = A^J$: pour le voir, il suffit de remarquer que pour tout élément a régulier de $\text{Tot}(A)$ tel que $I = aJ$ et tout entier $n \geq 0$, on a les égalités $I^n : I^n = a^n J^n : a^n J^n = J^n : J^n$.

La proposition qui suit a été démontrée par J. Lipman dans [10], pour un idéal régulier d'un g -ordre semi-local. Nous la généralisons de la manière suivante :

Proposition 2.9 - Soit A un g -ordre et soit I un élément de $I(A)$. La suite $\{I^P : I^P\}_{P \in \mathbb{N}}$ est croissante et stationnaire. On dési-

gne par $p(I)$ le plus petit entier à partir duquel la suite est stationnaire, alors $A^I = I^{p(I)} : I^{p(I)}$.

Preuve :

La remarque 2.8 montre que l'on peut remplacer un idéal fractionnaire régulier par un idéal régulier, arithmétiquement équivalent. Supposons donc que I soit un idéal régulier de A . Si M est un idéal maximal de A , on a, pour tout entier p , l'égalité $(I^p : I^p)_M = I_M^p : I_M^p$; or il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux M de A tels que $I_M \neq A_M$, il n'y a donc qu'un nombre fini d'idéaux maximaux M de A tels que $I_M^p : I_M^p \neq A_M$. Pour de tels idéaux maximaux M , d'après J. Lipman, la suite $\{I_M^p : I_M^p\}$ devient stationnaire pour $p \geq p(I_M)$, puisque le g -ordre A_M est local. Il en résulte que la suite $\{I^p : I^p\}$ devient stationnaire pour tout entier $p \geq \text{Max}\{p(I_M); M \in \text{Max}(A)\}$. Il est d'ailleurs clair que $p(I) = \text{Max}\{p(I_M); M \in \text{Max}(A)\}$.

Remarque 2.10 - Pour toute partie multiplicative S de A les g -ordres

A_S^I et $(A^I)_S$ sont égaux : en effet localisation et quotient résiduel commutent, puisque les idéaux fractionnaires sont dans le cas qui nous occupe des A -modules de présentation finie.

Des éléments I et J de $I(A)$, arithmétiquement équivalents, sont tels que $p(I) = p(J)$.

Corollaire 2.11 - Soit A un g -ordre et soit I un élément de $I(A)$ alors l'inclusion $A \rightarrow A^I$ est un morphisme de g -ordres.

Preuve :

L'anneau A^I est de la forme $I^p : I^p$, donc est un A -module de type fini et un anneau, d'anneau total des fractions $\text{Tot}(A)$.

J. Lipman a montré le résultat suivant, pour un g -ordre semi-local.

Théorème 2.12 - Soit A un g -ordre et soit I un élément de $I(A)$. Alors $p(I)$ est le plus petit entier positif p tel que I soit p -inversible.

Preuve :

La preuve est claire lorsque I est inversible. Sinon, posons

$I' = I_M$ et $A' = A_M$, pour un idéal maximal M de A . On a par suite $A', I' = A_M^{I_M}$. En vertu de la prop. 1.1 de [10], l'idéal fractionnaire I' est p -inversible pour $p \geq p(I')$, puisque $I'^p : I'^p = I'^{p(I')}$; $I'^{p(I')}$. Supposons que I' soit p -inversible pour $p < p(I')$. le morphisme $A' \rightarrow I'^p : I'^p$ est un morphisme de g -ordres; par suite l'anneau $I'^p : I'^p$ est semi-local, d'où il résulte que $I'(I'^p : I'^p)$ est de la forme $x(I'^p : I'^p)$, où x est un élément régulier de $\text{Tot}(A)$. On en déduit que $I'^p(I'^p : I'^p) = x^p(I'^p : I'^p)$. Mais l'égalité $I'^p = I'^p(I'^p : I'^p)$ implique $I'^{p+k} = I'^{p+k}(I'^p : I'^p) = x^{p+k}(I'^p : I'^p)$. On en déduit finalement que $I'^p : I'^p = (x^{p+k}(I'^p : I'^p)) : (x^{p+k}(I'^p : I'^p)) = I'^{p+k} : I'^{p+k}$. La suite $\{I'^n : I'^n\}$ est donc constante pour $n \geq p$, ce qui est une contradiction. On vient donc de montrer que I est p -inversible pour $p \geq \text{Max}\{p(I_M) ; M \in \text{Max}(A)\} = p(I)$. Supposons que I soit p -inversible pour $p < p(I)$; il existe alors un idéal maximal M de A tel que I_M soit p -inversible pour $p < p(I_M)$, ce qui est absurde comme on vient de le voir. D'où le résultat.

Lemme 2.13 - Soit A un g -ordre et soit I un élément de $I(A)$. Alors I^n est inversible dans $I^n : I^n$ si et seulement si il existe un élément J de $I(A)$ inversible tel que $I^{n+1} = JI^n$ et $J^n \subset I^n$.

Preuve :

Supposons que $I^{n+1} = JI^n$ et que $J^n \subset I^n$, où J est inversible. On en déduit successivement que $I^{2n} = J^n I^n$ et $(J^n)^{-1} \subset I^n : I^{2n}$. Puisque $J^n \subset I^n$, on en déduit que 1 appartient à $J^n (J^n)^{-1} \subset I^n (I^n : I^{2n})$. Par suite $I^n : I^n$ est égal à $I^n (I^n : I^{2n})$, c'est à dire que I^n est inversible dans $I^n : I^n$. Réciproquement, supposons que I soit n -inversible et pour tout idéal maximal M de A , désignons par I' l'élément I_M de $I(A')$ où $A' = A_M$. L'anneau $I'^n : I'^n$ est semi-local et I' est inversible dans cet anneau. Il en résulte que $I'(I'^n : I'^n) = x'(I'^n : I'^n)$, pour un élément x' de $(I'^n : I'^n) I'$. On en déduit que $I'^{n+1} = x' I'^n$, puisque pour $p \geq n$, les puissances I'^p sont des idéaux fractionnaires de $I'^n : I'^n$. La prop. 2.5 montre que l'on a un élément inversible J de $I(A)$ tel que $I^{n+1} = JI^n$.

Relocalisant , on obtient $J'I'^n = x'I'^n$. Simplifiant par I'^n , il vient $J' \subset x'(I'^n : I'^n)$. En élevant à la puissance n , on voit que $J'^n \subset I'^n$, c'est à dire que $J^n \subset I^n$.

Dans la suite , nous avons besoin d'une notion utilisée habituellement dans le cas d'un anneau local , afin de se ramener à un anneau local de corps résiduel infini . Celle introduite ici rend les mêmes services , dans un cadre plus général .

Définition 2.14 - Soit A un anneau , l'anneau $A(X)$ est le localisé de l'anneau $A[X]$, en la partie multiplicative des polynômes dont le contenu est égal à A (On désigne par contenu d'un polynôme $f(X)$ l'idéal $c(f)$ de A engendré par les coefficients de $f(X)$.)

Les faits suivants sont bien connus , pour une grande partie :

- 1) Si A est un anneau Noethérien , alors $\text{Dim}(A) = \text{Dim}(A(X))$.
- 2) Les idéaux maximaux de $A(X)$ sont de la forme $MA(X)$, où M est un idéal maximal de A . De plus $A(X)_{MA(X)} = A_M(X)$; le corps résiduel de ce dernier anneau est $(A/M)(X)$ donc est infini (cf. [15] , [10])
- 3) Le morphisme $A \rightarrow A(X)$ est fidèlement plat .
- 4) Deux modules de présentation finie sur $A(X)$, localement isomorphes sur le spectre maximal , sont isomorphes . Par suite , un module projectif de rang 1 sur $A(X)$ est libre de rang 1 (cf. [6]) .
- 5) Soit $A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux , entier , alors d'après [15] , $B(X) = A(X) \otimes_A B$.
- 6) Soit A un g-ordre et soit T son anneau total de fractions . Alors $A(X)$ est un g-ordre et son anneau total de fractions est $T(X)$. Soit I un idéal fractionnaire régulier de A , alors $IA(X)$ est un idéal fractionnaire régulier de $A(X)$ et on a un isomorphisme $I \otimes_A A(X) \rightarrow IA(X)$.

En voici la preuve : il est bien connu qu'un idéal I d'un anneau A Noethérien, constitué de diviseurs de zéro , a un annulateur non nul . Un anneau Noethérien vérifie donc la propriété A de [11]; on a par suite l'égalité $T(X) = \text{Tot}(A[X])$, d'autre part , on a la relation $\text{Tot}(A[X]) = \text{Tot}(A(X))$, d'où le résultat .

- 7) Soit A un g-ordre et soient I et J des éléments de $I(A)$, alors:

$$\underline{IA(X) : JA(X) = (I : J)A(X) ; \quad (I \cap J)A(X) = IA(X) \cap JA(X) ,}$$

$$\underline{IA(X)JA(X) = IJA(X) .}$$

La troisième égalité est claire . Montrons la deuxième : une inclusion est évidente . Soit $k(X)$ un élément de $T(X)$ tel que $k(X) \in IA(X) \cap JA(X)$, nous avons alors $k(X) = i(X)s(X)^{-1} = j(X)t(X)^{-1}$, où s et t sont des éléments de $A[X]$, de contenus égaux à A et où $i(X) \in I[X]$ et $j(X) \in J[X]$. On obtient $ti = sj$; la formule des contenus donne $c(it)c(t)^n = c(t)^{n+1}c(i)$, c'est à dire ici $c(i) = c(it) = c(js) \in J$. Par suite les coefficients de i sont dans J . Il en résulte que $k(X)$ appartient à $(I \cap J)A(X)$.

Pour démontrer la première égalité , il suffit de montrer que $IA(X) : kA(X) = (I : k)A(X)$, où k est un élément de T et d'utiliser la deuxième égalité . Une inclusion est claire . Soit $f(X)$ un élément de $T(X)$ tel que $f(X)kA(X)$ soit contenu dans $IA(X)$, alors $f(X)k = i(X)s(X)^{-1}$ où le contenu de s est A et $i(X) \in I[X]$. Puisque $kf(X) \in TA(X)$, on peut écrire $f(X) = a(X)b(X)^{-1}$, où $a(X) \in T[X]$ et $b(X)$ est un élément de $A[X]$, de contenu égal à A . On obtient $a(X)ks(X) = i(X)b(X)$, la formule des contenus donne $c(aks)c(s)^n = c(s)^{n+1}c(ak)$, ou encore $c(ib) = c(ak) = kc(a) \in I$. Par suite , les coefficients de $a(X)$ sont dans $I : k$; on en déduit que $f(X) = \sum \alpha_1 X^1 b(X)^{-1}$ si $a(X) = \sum \alpha_1 X^1$. On voit donc que $f(X)$ est dans $(I : k)A(X)$.

8) Soit A un g -ordre et soit I un élément de $I(A)$; alors $IA(X) \cap T = I$.

Une inclusion est claire . Soit un élément k de T , appartenant à $IA(X)$, alors $ks(X) = i(X)$, où $s(X)$ est un élément de $A[X]$ de contenu A et $i(X)$ appartient à $I[X]$. On en déduit que $kc(s) = c(i)$, d'où k est un élément de I .

9) Soit A un g -ordre et soient I et J des éléments de $I(A)$, alors : $L_A(I, J) = L_{A(X)}(IA(X), JA(X))$.

Supposons d'abord que J soit contenu dans I . Il suffit alors d'utiliser les faits suivants : soient $M \subset N$ des A -modules , le A -module N/M est simple si et seulement si il existe un élément $x \in N-M$, tel que $N = M + Ax$ et il existe un idéal maximal P de A tel que $Px \subset M$.

De plus , un A -module , compris entre des idéaux fractionnaires est un idéal fractionnaire . Une utilisation des numéros précédents permet alors d'obtenir une suite de Jordan-Hölder entre $IA(X)$ et $JA(X)$, à partir d'une suite de Jordan-Hölder entre I et J . Si on prend maintenant I et J quelconques , il existe un élément régulier a de A tel que $aJ \subset I$. On en déduit que $L_A(I,J)$ est égal à $\text{Long}_A(I/aJ) - \text{Long}_A(A/aA)$, puis à $\text{Long}_{A(X)}(IA(X)/aJA(X)) - \text{Long}_{A(X)}(A(X)/aA(X))$, en vertu des résultats précédents , donc finalement est égal à $L_{A(X)}(IA(X),JA(X))$.

10) Soit A un g -ordre et soit I un élément de $I(A)$, alors $\nu(I) = \nu(IA(X))$;

Cela résulte immédiatement des propriétés 7) et 8) .

III - PROPRIETES , MAJORATIONS ET MINORATIONS DE LA REDUCTION ET DE LA MULTIPLICITE D'UN IDEAL FRACTIONNAIRE REGULIER D'UN G-ORDRE

On introduit maintenant la notion de multiplicité d'un idéal fractionnaire régulier , dans le cadre de la théorie des g -ordres . Un des résultats essentiels obtenus est que pour les g -ordres , la fonction multiplicité vérifie $e(II') = e(I) + e(I')$, pour des éléments I et I' de $I(A)$, en dehors de majorations sur d'autres constantes numériques , associées aux idéaux d'un g -ordre . D'autres applications en sont tirées.

Définition 3.1 - Soit A un g -ordre et soit I un élément de $I(A)$, on définit pour cet élément deux entiers qui sont :

- 1) La multiplicité de I , soit $e(I) = L_A(A^I, IA^I)$.
- 2) La réduction de I , soit $r(I) = \text{Long}_A(A^I/A)$.

Remarque 3.2 -

1) J. Lipman a traité dans [10] le cas d'un g -ordre semi-local et a défini la multiplicité et la réduction d'un idéal régulier . La définition précédente généralise celle de J. Lipman dans deux directions.

2) Soit a un élément régulier de A , Puisque $A^{aA} = A$, on a donc $e(Aa) = \text{Long}_A(A/aA)$.

3) Soit I un élément de $I(A)$ et soit a un élément régulier de A

tel que $J = aI$ soit un idéal de A . On sait que $A^I = A^J$, par 2.8. Il en résulte que $r(I) = r(J)$. D'autre part, de l'égalité $A^J/JA^J = A^I/aIA^I$, on déduit que $e(I) = e(J) - e(aA)$; en effet, la multiplicité $e(I)$ est égale par définition à $L_A(A^I, IA^I) = \text{Long}_A(A^I/aIA^I) - \text{Long}_A(IA^I/aIA^I) = e(J) - \text{Long}_A(A/aA)$, en vertu de 1.7.

Définition 3.3 - Soit A un g -ordre et soit I un élément de $I(A)$, on dit qu'un élément J de $I(A)$ est une réduction de I (resp. est transversal à I) si :

- a) J est contenu dans I (resp. est inversible)
- b) Pour un entier n , assez grand, $I^{n+1} = I^n J$.

Proposition 3.4 - Soit A un g -ordre, à corps résiduels infinis (par exemple du type $A(X)$), alors tout élément I de $I(A)$ possède un idéal transversal J .

Preuve :

Prenons d'abord un idéal I de A , régulier. Soit M un idéal maximal de A et soit comme d'habitude $A' = A_M$ et $I' = I_M$. Alors A' est un anneau local, à corps résiduels infinis. La définition 1.7 de [10] et ses conséquences, généralisées aux idéaux fractionnaires, montre qu'il existe un élément x' transversal à I' ; notons $J(M)$ l'idéal $A'x'$. On a donc $J(M) \subset I_M$, où $J(M)$ est un idéal inversible et pour n assez grand $I_M^{n+1} = J(M)I_M^n$. Puisque l'on a $I_M = A_M$, pour tout idéal maximal M de A , sauf pour un nombre fini d'idéaux maximaux, on peut supposer que $J(M) = A_M$, pour tout idéal maximal, sauf pour un nombre fini et qu'il existe un entier k tel que pour $n \geq k$ et pour tout idéal maximal M on ait $I_M^{n+1} = J(M)I_M^n$. La prop. 2.4 montre qu'il existe un idéal J de A tel que $J_M = J(M)$. Par localisation et globalisation, on voit que J est l'idéal cherché. Soit maintenant, un idéal I fractionnaire régulier. Il existe un élément régulier a de A tel que $I' = aI$ soit un idéal de A et régulier. Cet idéal possède donc un idéal transversal J' , vérifiant $J' \subset I'$, J' est inversible et pour un entier n , assez grand, $I'^{n+1} = I'^n J'$. Posons $J = a^{-1}J'$. On obtient alors $J \subset I$, J est inversible et $I^{n+1} = I^n J$; ce qui achève la preuve.

D.G. Northcott démontre la proposition suivante dans [14] , avec une définition différente de celle ci-dessus , dans le cas d'un g-ordre intègre et pour des idéaux entiers . Il convient donc de faire le lien entre les deux définitions de la réduction et la multiplicité . On pourra aussi faire la comparaison avec le traitement de E. Matlis de la notion d'anneau de premier voisinage de D.G. Northcott dans [12] .

Proposition 3.5 - Soit A un g-ordre et soit I un élément de $I(A)$, alors :

1) La fonction $ne(I) - L_A(A, I^n)$ est une fonction positive et croissante de l'entier n ; de plus $r(I) \geq e(I) - L_A(A, I) \geq 0$.

2) Pour n assez grand , on a $L_A(A, I^n) = e(I)n - r(I)$.

On retrouve donc le polynôme d'Hilbert-Samuel dans le cas d'un idéal de A .

Preuve :

Soit I un élément de $I(A)$ et soit un élément régulier a de A tel que $J = aI$ soit un idéal de A . Il est clair que $J^n = a^n I^n$. D'autre part , une récurrence sur la prop. 1.8 montre que $\text{Long}_A(A/a^n A) = n \text{Long}_A(A/aA)$, ce qui donne $e(a^n A) = ne(aA)$. Mais $ne(I) - L_A(A, I^n)$ est alors égal à $ne(J) - ne(aA) - \text{Long}_A(A/J^n) + \text{Long}_A(A/a^n A) = ne(J) - \text{Long}_A(A/J^n)$. On a de plus l'égalité $r(I) = r(J)$. Le reste de la preuve est alors analogue à celle de D.G. Northcott , en utilisant le passage à $A(X)$.

Montrons l'équivalence des définitions de D.G. Northcott pour la multiplicité et la réduction avec celles données en 3.1 . Pour cela , il suffit de montrer que pour un entier n , assez grand , on a la relation $L_A(A, I^n) = nL_A(A^I, IA^I) - \text{Long}_A(A^I/A)$. Or ce résultat est démontré dans [10] , pour un anneau semi-local et pour des idéaux réguliers . La formule de localisation des longueurs permet alors de globaliser et d'obtenir le résultat cherché , pour des idéaux réguliers . Supposons maintenant que I soit un idéal fractionnaire régulier et soit a un élément régulier de A tel que $J = aI$ soit un idéal régulier de A . On a donc $L_A(A, I^n) = \text{Long}_A(A/J^n) - \text{Long}_A(A/a^n A)$, égal , en vertu de

ce qui précède à $n \text{Long}_A(A^J/JA^J) - \text{Long}_A(A^J/A) - n \text{Long}_A(A/aA)$, pour un entier n assez grand. Finalement de $A^J = A^I$, on déduit que $L_A(A, I^n) = -nL_A(A^I, IA^I) - \text{Long}_A(A^I/A)$.

Nous allons maintenant affiner un résultat de J.Lipman dans [10], théorème 1.5, toujours donné dans le cas semi-local, qui permet de savoir à partir de quel entier n la longueur de A/I^n est égale au polynôme d'Hilbert-Samuel. Pour cela, on utilise des idées de E.Matlis dans [12], mais la preuve donnée est de nature différente de celle donnée par E.Matlis, puisque celui-ci traite l'éclatement d'un idéal premier dans un g-ordre local.

Proposition 3.6 - Soit $A \rightarrow B$ un morphisme de g-ordres, soit J un élément de $I(B)$. Alors, pour tout entier n , assez grand :

$$L_A(B, J^n) = nL_A(B^J, JB^J) - \text{Long}_A(B^J/B).$$

De plus, si J est B -inversible, pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$L_A(B, J^n) = nL_A(B, J)$$

Ceci s'applique en particulier à un élément de $I(B)$, de la forme IB , où I est un élément de $I(A)$.

On en déduit que $L_A(A^I, I^s A^I) = se(I)$, pour tout entier s .

Preuve :

On applique la formule des extensions :

$$L_A(B, J^n) = \sum_{M \in \text{Max}(B)} L_{B_M}(B_M, J_M^n) [B/M : A/M \cap A].$$

Or pour n assez grand, $L_{B_M}(B_M, J_M^n) = nL_{B_M}(B_M^J, J_M B_M^J) - \text{Long}_{B_M}((B^J/B)_M)$. Les supports des modules intervenant étant finis, on peut supposer qu'il existe un entier k , tel que pour $n \geq k$ et pour tout idéal maximal, les formules ci-dessus sont vraies. Sommant alors sur $\text{Max}(B)$ et utilisant la formule de localisation des longueurs, on obtient le résultat cherché.

Soit maintenant le morphisme de g-ordres $A \rightarrow B$ et soit J un élément de $I(B)$. C'est aussi un élément de $I(A)$. Il existe donc un élément a de A , régulier, tel que $I = aJ$ soit un idéal régulier de A . Si J est

B -inversible, il en est de même pour I . De plus on a les égalités $a^n J^n = I^n$ et $B^J = B^I$. Supposons le résultat démontré pour un idéal régulier I de B . On obtient donc $L_A(B, J^n) = \text{Long}_A(B/I^n) - n\text{Long}_A(A/aA)$ aussi égal à $n(\text{Long}_A(B/I) - \text{Long}_A(A/aA))$, c'est à dire à $nL_A(B, J)$. Montrons maintenant le résultat, pour un idéal J de B , régulier et inversible, et considérons $\text{Long}_A(J^n/J^{n+1})$. Soit P un idéal maximal de A et désignons tout objet X localisé en P par X' . L'anneau B' est semi-local, par suite, l'idéal J' est principal, il en résulte un isomorphisme de A' -modules $J'^n/J'^{n+1} = B'/J'$. On en déduit que $\text{Long}_A(J'^n/J'^{n+1}) = \text{Long}_A(B'/J')$ et, par suite, que $\text{Long}_A(B'/J'^n) = n\text{Long}_A(B'/J')$. La formule $\text{Long}_A(B/J^n) = n\text{Long}_A(B/J)$ sera démontrée si les supports des A -modules B/J^n et B/J sont égaux, en vertu de la formule de localisation des longueurs. Soit $f: A \rightarrow B$ le morphisme canonique qui est entier, donc fermé. On a alors ${}^a f(V(J)) = V(A \cap J) = {}^a f(V(J^n)) = V(A \cap J^n)$. Puisque pour un A -module de type fini M , on a $V(\text{Ann}(M)) = \text{Supp}_A(M)$, le résultat est démontré.

Proposition 3.7 - Soit A un g -ordre et soient I un élément de $I(A)$ et K un élément inversible de $I(A)$ et supposons de plus que $K \subset I^s$, pour un entier s .

a) On a $L_A(J, KJ) \geq se(I)$, pour tout élément J de $I(A)$.

b) Si J est un élément de $I(A)$, on a $L_A(J, KJ) = se(I)$ si et seulement si, pour n assez grand, $I^{n+s} = KI^n$.

Preuve :

C'est essentiellement celle de [12], à l'aide des résultats que nous venons de montrer. Par 1.16, on peut supposer que $J = A^I$. Il résulte de l'inclusion $K \subset I^s$, que $KA^I \subset I^s A^I$, d'où l'on tire que $L_A(I^s A^I, KA^I) = \text{Long}_A(I^s A^I/A^I K) \geq 0$. On en déduit que

$L_A(A^I, KA^I) \geq L_A(A^I, I^s A^I) = se(I)$: en effet, I est inversible dans A^I et on peut alors utiliser 3.6. On aura égalité si et seulement si $A^I K = A^I I^s$; cette dernière égalité est équivalente à $I^n K = I^{n+s}$, pour n assez grand, compte tenu de l'inversibilité de I dans A^I .

Théorème 3.8 - Soit A un g -ordre et soit I un élément de $I(A)$. Alors:

a) Pour $n \geq p(I)$, on a $L_A(I^n, I^{n+1}) = e(I)$

b) Pour $n < p(I)$, on a $L_A(I^n, I^{n+1}) < e(I)$.

Preuve :

Par passage à $A(X)$, on peut supposer que I a un idéal fractionnaire J transversal puisque ce passage conserve les longueurs et puisque $p(I) = p(IA(X))$. Démontrons d'abord le théorème dans le cas d'un idéal régulier I de A . La proposition précédente peut s'appliquer avec $s = 1$. On en déduit que $\text{Long}_A(I^k/JI^k) - \text{Long}_A(I^{k+1}/JI^k) = \text{Long}_A(I^k/I^{k+1}) = e(I) - \text{Long}_A(I^{k+1}/JI^k)$. On aura donc l'égalité de a) si et seulement si $I^{k+1} = JI^k$. Si $k < p(I)$ et $I^{k+1} = JI^k$, en vertu de 2.13 , l'idéal I est k -inversible , ce qui est absurde , on obtient donc b) . D'autre part , le théorème 1.5 de [10] montre que pour un g -ordre semi-local , on a $\text{Long}_A(A/I^n) = ne(I) - r(I)$, pour $n \geq p(I)$. On obtient alors a) dans le cas semi-local , en utilisant la relation $A/I^n = A/I^{n+1}/I^n/I^{n+1}$. Pour obtenir a) dans le cas global on utilise la formule de localisation des longueurs et 3.9 ci-dessous. Supposons maintenant que I soit un élément de $I(A)$ et considérons un élément régulier a de A , tel que $I' = aI$ soit un idéal régulier de A . L'inclusion $I'^{n+1} \subset I'^n$ montre que l'on a $aI^{n+1} \subset I^n$. On obtient alors l'isomorphisme $I'^n/I'^{n+1} = a^n I^n / a^{n+1} I^{n+1} = I^n / aI^{n+1}$. Or $L_A(I^n, I^{n+1})$, qui est égal à $\text{Long}_A(I^n/aI^{n+1}) - \text{Long}_A(A/aA)$, est donc aussi égal à $\text{Long}_A(I'^n/I'^{n+1}) - \text{Long}_A(A/aA)$. Mais nous avons montré les égalités $e(aA) = \text{Long}_A(A/aA)$ et $e(I) = e(I') - e(aA)$, ainsi que $p(I) = p(I')$. Le théorème a été démontré pour un idéal régulier de A . Les résultats, appliqués à I' , donnent donc les résultats pour I .

Remarque 3.9- Soit A un g -ordre et soit I un élément de $I(A)$, alors:

$$e(I) = \sum_{M \in \text{Max}(A)} e(I_M) \quad , \quad r(I) = \sum_{M \in \text{Max}(A)} r(I_M) .$$

Pour le voir , il suffit d'utiliser la définition de la multiplicité et de la réduction par les longueurs .

Proposition 3.10 - Soit A un g -ordre et soit I un élément de $I(A)$:

- a) Si $n \geq p(I)$, on a $L_A(A, I^n) = ne(I) - r(I)$.
- b) Si $n < p(I)$, on a $L_A(A, I^n) > ne(I) - r(I)$.
- c) le plus petit entier p tel que $A^I I^p = I^p$ est $p(I)$.

Preuve :

Considérons d'abord un idéal régulier I de A . On vient de voir que pour $n \geq p(I)$, on a l'égalité de $\text{Long}_A(A/I^n)$ avec le polynôme d'Hilbert-Samuel. Si l'on a égalité, par la formule de localisation des longueurs, on obtient : $\text{Long}_A(A/I^n) = \sum_{M \in \text{Max}(A)} \text{Long}_{A_M}((A/I^n)_M) \geq$

$$\sum_{M \in \text{Max}(A)} e(I_M)n - r(I_M) = e(I)n - r(I), \text{ en vertu du théorème 1.5 de}$$

[10]. Puisque l'on a $\text{Long}_{A_M}((A/I^n)_M) \geq e(I_M)n - r(I_M)$, toujours

en raison du théorème cité ci-dessus, on voit que l'on a l'égalité pour tout idéal maximal M de A : $\text{Long}_{A_M}((A/I^n)_M) = e(I_M)n - r(I_M)$.

Alors I_M est n -inversible d'après le théorème cité. Il en résulte que I est n -inversible et donc que $n \geq p(I)$. Supposons maintenant que I soit un idéal fractionnaire régulier. Soit a un élément régulier de A tel que $J = aI$ soit un idéal de A . De $J^n = a^n I^n$ on déduit les égalités : $L_A(A, I^n) = \text{Long}_A(A/J^n) - \text{Long}_A(A/a^n A) = \text{Long}_A(A/J^n) - ne(aA)$. La proposition étant démontrée pour un idéal régulier J , on en déduit que $L_A(A, I^n) \geq ne(J) - r(J) - ne(aA) = ne(I) - r(I)$; on a l'égalité si et seulement si $n \geq p(I)$. Il est clair que $A^I I^{p(I)} = I^{p(I)}$. De plus si $A^I I^p = I^p$, on en déduit que $A^I \subset I^p : I^p$. Si l'on avait $p < p(I)$, la suite $\{I^k : I^k\}$ serait stationnaire à partir de p , ce qui contredit 2.9.

Nous allons maintenant étudier la multiplicité d'un produit d'idéaux. Pour cela, la proposition suivante, due à D.G. Northcott, dans le cas d'idéaux d'un anneau intègre, est décisive.

Proposition 3.11 - Soit A un g -ordre et soient I et J des éléments de $I(A)$, J étant inversible.

a) On a $e(IJ) = e(I) + e(J)$ et $r(IJ) = r(I)$.

b) L'idéal fractionnaire I est inversible si et seulement si $e(I) = L_A(A, I)$, ou encore, si et seulement si $r(I) = 0$.

c) Si I est un idéal régulier de A , on a $e(I) = 0$ si et seulement si $I = A$.

d) Si I est un idéal régulier de A , on a $e(I) = 1$ si et seulement

si I est inversible et maximal .

Preuve :

La démonstration de a) se fait en remplaçant I, J, K par A, I^n, J^n dans 1.17 . La partie b) est démontrée dans [14] , pour des idéaux d'un ordre généralisé de Dedekind . La preuve est la même pour les idéaux fractionnaires d'un g -ordre , après avoir utilisé le passage à l'anneau $A(X)$, en prenant un idéal arithmétiquement équivalent à l'idéal fractionnaire considéré . Montrons c) : si $e(I) = 0$, alors $A^I = IA^I$ donne , pour k assez grand , $I^k = I^{2k}$, d'où $I^k = A$ et $I = A$. Soit alors un idéal régulier propre I de A . On a les inégalités $e(I) \geq \text{Long}_A(A/I) > 0$. Donc l'assertion $e(I) = 1$ est vraie si et seulement si $e(I) = \text{Long}_A(A/I) = 1$. La première égalité équivaut à l'inversibilité de I , la deuxième à la maximalité de I , ainsi d) est démontré .

Remarque 3.12 - Il est clair que si I est un idéal fractionnaire régulier d'un g -ordre , pour tout entier p , on a $e(I^p) = pe(I)$ et $r(I^p) = r(I)$.

Corollaire 3.13 - Soit A un g -ordre et soient I et J des éléments de $I(A)$, vérifiant $I < J$, alors $e(I) \geq e(J)$.

Preuve :

Soit a un élément régulier de A , tel que aI et aJ soient des idéaux de A . Pour tout entier n , l'inclusion $a^n I^n \subset a^n J^n$ entraîne $\text{Long}_A(A/a^n I^n) \geq \text{Long}_A(A/a^n J^n)$. On en déduit les inégalités $L_A(A, I^n) \geq L_A(A, J^n)$, c'est à dire $ne(I) - r(I) \geq ne(J) - r(J)$, d'où l'on déduit que $e(I) \geq e(J)$.

Définition 3.14 - Soit A un g -ordre et soit I un élément de $I(A)$. On pose $e_I = \text{Inf} \{e(aA) ; a \text{ régulier dans } A \text{ tel que } aI \text{ soit idéal de } A\}$. Remarquons que si I est un idéal de A , alors $e_I = 0$.

La quantité e_I est effectivement définie , puisque pour tout élément régulier a de A , on a $e(aA) \geq 0$. En fait il existe un élément a de A , tel que $e_I = e(aA)$.

On a de plus $e_{I^n} \leq ne_I$, pour tout entier n ; en effet de $aI \subset A$, on

tire $a^n I^n \subset A$, donc $e_{I^n} \leq e(a^n A)$.

Proposition 3.15- Soit A un g -ordre et soit I un élément de $I(A)$, ayant une réduction J , alors :

$$e(J) = e(I) \text{ et } r(J) \leq r(I) \leq r(J) + n(e(J) + e_I)$$

où n est le plus petit entier tel que $JI^n = I^{n+1}$.

Preuve :

Supposons que I et J soient des idéaux réguliers de A . L'égalité $e(I) = e(J)$ est bien connue. On a $J \subset I$ et $JI^n = I^{n+1}$, pour n assez grand. On en déduit les relations $I^{n+p} = J^p I^n \subset J^p \subset I^p$. Les morphismes surjectifs $A/I^{n+p} \rightarrow A/J^p \rightarrow A/I^p$ donnent, par passage aux longueurs : $e(I)p - r(I) \leq e(J)p - r(J) \leq (n+p)e(I) - r(I)$, pour p assez grand. On en déduit les relations cherchées dans ce cas. Supposons maintenant que I et J soient des idéaux fractionnaires réguliers, il existe un élément régulier a de A , tel que aJ et aI soient des idéaux réguliers de A . Or l'égalité $e(aI) = e(aJ)$ entraîne $e(I) = e(J)$; d'autre part la double inégalité $r(aJ) \leq r(aI) \leq r(aJ) + n(e(aJ) + e_I)$ donne $r(J) \leq r(I)$, puisque la réduction est la même pour des éléments de $I(A)$ arithmétiquement équivalents. La seconde inégalité donne $r(I) \leq r(J) + n(e(J) + e_I)$. Etant vérifiée pour tout élément régulier a de A tel que aI soit un idéal de A , on en déduit que $r(I) \leq r(J) + n(e(J) + e_I)$.

Théorème 3.16 - Soit A un g -ordre et soit I un élément de $I(A)$, alors $\text{Long}_A(A^I/A) \geq p(I)$.

Preuve :

Soient I et J des éléments de $I(A)$, arithmétiquement équivalents, on sait que $A^I = A^J$ et $p(I) = p(J)$. On peut donc supposer que I est un idéal de A . De même le passage à $A(X)$ conserve les longueurs et on a aussi $p(I) = p(IA(X))$. On peut donc supposer de plus que I a un idéal transversal principal xA , tel que $x \in I$ et $I^{n+1} = xI^n$, pour n assez grand. Supposons $n \leq p(I)$, en multipliant les deux membres de l'égalité précédente par $I^{p(I) - n}$, on obtient $I^{p(I)+1} = xI^{p(I)}$. Si $n > p(I)$, alors I^n est égal à $I^{p(I)} I^{n-p(I)} A^I$; mais $I^{n-p(I)} A^I$ est

inversible dans A^I . On peut donc simplifier par cet idéal fractionnaire dans l'égalité $I^{n+1} = xI^n$, ce qui donne à nouveau $I^{p(I)+1} = xI^{p(I)}$. Soit l'idéal fractionnaire $J = x^{-1}I$; il vérifie : $1 \in J$. Par conséquent, pour tout entier p , J^p est contenu dans J^{p+1} . D'autre part, du fait que $x^{-1}I^{p(I)+1}$ soit égal à $I^{p(I)}$, on déduit les égalités suivantes : $J^{p(I)}I^{p(I)} = x^{-p(I)}I^{2p(I)} = I^{p(I)}$. On en déduit que $J^{p(I)}$ est contenu dans A^I . On a évidemment $A \subset J$. S'il existait un entier $n < p(I)$ tel que l'on ait l'égalité $J^n = J^{n+1}$, on aurait donc $x^{-n}I^n = x^{-n-1}I^{n+1}$, c'est à dire $xI^n = I^{n+1}$, où $x \in I$. Ceci contredit 2.13. Nous obtenons donc une suite de composition : $A \subset J \subset \dots \subset J^{p(I)} \subset A^I$, ce qui donne le résultat.

Théorème 3.17 - Soit A un g -ordre et soit I un élément de $I(A)$, alors:

a) On a $0 \leq p(I) \leq r(I) \leq p(I)(e(I) + e_I)$

b) On a $L_A(A, I) \leq e(I) \leq L_A(A, I) + r(I)$.

Preuve :

On vient de voir que $0 \leq p(I) \leq r(I)$. Soit J un idéal fractionnaire inversible, contenu dans A^I . Dans ces conditions J est une réduction de $I^{p(I)}$. Il résulte de 3.15 que $e(J) = e(I^{p(I)}) = p(I)e(I)$ et que $r(J) \leq r(I^{p(I)}) \leq r(J) + e(I^{p(I)}) + e_I \leq r(J) + p(I)(e(I) + e_I)$. Puisque J est inversible, on a $r(J) = 0$. Ainsi a) est démontré; la partie b) est mise pour mémoire, c'est la prop. 3.5.

Remarques 3.18 -

1) Le théorème C de [5] et le lemme 2.4 de [18] montrent que si A est un ordre d'entiers, relatif à une extension $Q \rightarrow K$ de degré d , les entiers $p(I)$, pour un idéal I fractionnaire, sont majorés par $d-1$.

2) Le corollaire 2.2.14 de [5] montre que pour un idéal I fractionnaire d'un g -ordre on a $p(I) \leq \sup_{P \in \text{Max}(A)} (1, \text{Dim}_{K(P)}(A^I \otimes_A K(P)) - 1)$. En effet $p(I) = \text{Max}(p(I_P))$.

Théorème 3.19 - Soient A un g -ordre et I et I' des éléments de $I(A)$, alors $e(II') = e(I) + e(I')$.

Preuve :

Soient J et J' les idéaux fractionnaires inversibles, réductions respectives des idéaux fractionnaires I^k et I'^k , où k est le maximum de $p(I)$ et $p(I')$. Ils existent, en vertu de 2.13. On en déduit que JJ' est une réduction de $(II')^k$. La prop. 3.15 montre que $e((II')^k) = e(JJ') = e(J) + e(J')$, cette dernière égalité provenant de 3.11. Mais $e(J) = ke(I)$ et $e(J') = ke(I')$; il suffit maintenant de simplifier par k , pour terminer la preuve.

Remarque 3.20 - Il est clair que $e(I + J) \leq \text{Min}(e(I), e(J))$. Mais l'égalité est certainement fautive en général. Il suffit de prendre un g -ordre A , non local, et deux idéaux I et J de A , comaximaux. De $(I \cap J)(I + J) \subset IJ$, on déduit pour des éléments I et J de $I(A)$ la relation $e(I) + e(J) \leq e(I + J) + e(I \cap J)$. Si I et J sont des idéaux réguliers de A , on a de plus $e(I \cap J) \leq e(I) + e(J)$, car $IJ \subset I \cap J$.

Proposition 3.21 - Soit A un ordre d'entiers, relatif à une extension $Q \rightarrow K$ de degré d et soit pZ un idéal premier de Z . Soit $pA = Q_1 \dots Q_t$ une décomposition primaire de pA . Alors $d = \sum_i \text{Long}_A(A/Q_i)[A/P_i : Z/pZ]$, où P_i est la racine de Q_i . De plus $e(Q_i) = \text{Long}_A(A/Q_i)$ et les idéaux Q_i sont inversibles dans A .

Preuve :

Appliquons la formule des extensions de D.G. Northcott :

$$\text{Long}_Z(A/p^n A) = \sum_{P \in \text{Max}(A)} \text{Long}_{A_P}((A/p^n A)_P)[A/P : Z/pZ].$$

Par 1.8, la somme du deuxième membre se réduit à $\sum_i \text{Long}_A(A/Q_i^n)[A/P_i : Z/pZ]$ et le premier membre est égal à nd . Mais, pour n assez grand, $\text{Long}_A(A/Q_i^n) = ne(Q_i) - r(Q_i)$. On en tire d'abord que $r(Q_i) = 0$. La proposition 3.11 montre que Q_i est inversible et que $e(Q_i) = \text{Long}_A(A/Q_i)$. En égalant les coefficients en n , on trouve la formule cherchée.

Théorème 3.22 - Soit A un g -ordre et soit I un élément de $I(A)$, on a : $p(I) \leq \text{Max}(e(I) + e_I - 1, 0)$.

Preuve :

Supposons d'abord que I soit un idéal régulier de A . Nous avons

citée plus haut un résultat de [5]:

$$p(I) \leq \sup_{P \in \text{Max}(A)} (1, \text{Dim}_{A/P}(A^I/PA^I) - 1), \text{ on en déduit que}$$

$p(I) \leq \text{Sup}(e(I)-1, 0)$: posons $A' = A_P$ et $I' = I_P$, $P' = P_P$ pour un idéal maximal P de A , alors A^I/PA^I est égal à $A'^{I'}/P'A'^{I'}$ et sa dimension sur $A/P = A'/P'$ est majorée par $e(I')$ si $I' \neq A'$; si $I' = A'$, cette dimension vaut 1; or $e(I)$ est la somme des entiers $e(I')$, pour $I' \neq A'$; on en déduit aisément que $p(I) \leq \text{Max}(e(I)-1, 1)$.

Si $e(I) \leq 1$, l'inégalité $\text{Long}_A(A/I) \leq e(I)$ entraîne que I est inversible et alors $p(I) = 0$; dans ce cas $p(I) \leq \text{Max}(e(I)-1, 0) = 0$.

Si $e(I) > 1$, on a alors $\text{Max}(e(I)-1, 1) = e(I)-1 = \text{Max}(e(I)-1, 0)$.

Dans tous les cas on a bien $p(I) \leq \text{Max}(e(I)-1, 0)$. Soit alors I un élément de $I(A)$ et considérons un élément régulier a de A tel que $J = aI$ soit un idéal de A . On a les égalités $p(I) = p(J)$ et $e(J) = e(I) + e(Aa)$. Le résultat ci-dessus appliqué à l'idéal J donne alors

$p(I) \leq \text{Max}(e(I) + e(Aa)-1, 0)$. Cette inégalité est vérifiée pour tous les éléments réguliers a tels que aI soit un idéal de A . Puisqu'il existe un élément a de A tel que $e_I = e(Aa)$, le résultat s'en déduit aisément.

Proposition 3.23 - Soit A un g -ordre, alors pour tout élément I de $I(A)$, on a : $p(I) \leq \sup_{M \in \text{Max}(A)} (1, e(M)-1)$.

Preuve :

On sait que $p(I) = \sup_{M \in \text{Max}(A)} (p(I_M))$, il suffit alors d'appliquer le théorème 2.5 de [18] qui donne le résultat dans le cas local pour des idéaux réguliers de A . Dans le cas où I est un idéal fractionnaire, soit a un élément régulier de A , tel que $J = aI$ soit un idéal de A ; on a alors $p(I) = p(J)$ et l'inégalité est donc vérifiée pour les idéaux fractionnaires réguliers.

Nous terminons ces considérations sur les multiplicités par des évaluations sur le nombre minimal de générateurs des idéaux fractionnaires réguliers d'un anneau de Mori.

Définition 3.24 Soit A un g -ordre intègre de clôture intégrale \bar{A} . On

dit que A est un anneau de Mori si le morphisme $A \rightarrow \bar{A}$ est fini . Dans ce cas ce morphisme est un morphisme de g -ordres et \bar{A} est un anneau de Dedekind .

Proposition 3.25 - Soit A un g -ordre de Mori et soit C le conducteur du morphisme $A \rightarrow \bar{A}$. Soit M un idéal maximal de A , les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $C \not\subseteq M$ - b) $e(M) = 1$ - c) $r(M) = 0$ - d) M est inversible .

Preuve :

L'assertion a) équivaut à l'égalité $A_M = \bar{A}_M$ donc à A_M est un anneau de Dedekind local . Cette dernière propriété équivaut à MA_M est un idéal principal , c'est à dire à M est inversible . Par 3.11 , l'inversibilité de M équivaut à $r(M) = 0$ ou a $e(M) = 1$, d'où le résultat .

Le théorème B de [5] affirme que les entiers $p(I)$ sont bornés si A est un g -ordre de Mori ; la proposition 3.23 permet alors d'en trouver un majorant .

Soit A un anneau Noethérien et soit I un élément de $I(A)$, on désigne par $n(I)$ le cardinal d'un système minimal de générateurs de I .

Théorème 3.26 - Soit A un g -ordre de Mori et soit I un élément de $I(A)$, alors pour tout entier $k \geq p(I)$, l'idéal I^k est engendré par $\text{Max}(e(I) + e_I, 2)$ éléments .

Preuve :

On suppose d'abord que I soit un idéal de A et que l'anneau A soit local , d'idéal maximal M ; puisque I est inversible dans A^I donc principal , il est clair que $\text{Long}_A(I^{p(I)}/MI^{p(I)}) = \text{Long}_A(A^I/MA^I)$. Mais , puisque A est un anneau local et puisque $\text{Long}_A(I^{p(I)}/MI^{p(I)}) = \text{Dim}_{A/M}(I^{p(I)}/MI^{p(I)})$, on en déduit , d'après un résultat classique , que $\text{Long}_A(A^I/MA^I) = n(I^{p(I)})$. Le même résultat est valable pour l'idéal I^k , lorsque $k \geq p(I)$. on en déduit que pour $p \geq p(I)$, l'idéal I^p a un nombre minimal de générateurs égal à celui de $I^{p(I)}$. Mais , ou bien $I = A$ et le nombre minimal de générateurs de A est 1 et sa multiplicité est 0 ; ou bien I est contenu dans M ; dans ce cas on a une surjection $A^I/IA^I \rightarrow A^I/MA^I$ qui nous donne $\text{Long}_A(A^I/MA^I) \leq e(I)$.

L'inégalité $\text{Long}_A(A^I/MA^I) = n(I^k) \leq e(I)$ est donc vérifiée pour $k \geq p(I)$, dans le cas où $I \neq A$ et l'anneau A est local.

Pour globaliser, on fait une discussion en fonction de l'inversibilité de I . Si l'idéal I est inversible, il en est de même de I^k et le corollaire 1 de [9], p. 141, montre que I^k est engendré par 2 éléments, donc aussi par $\text{Max}(e(I), 2)$ éléments. Si l'idéal I n'est pas inversible, on distingue deux cas en fonction de la position de $e(I)$ par rapport à 2. Remarquons auparavant que pour tout idéal maximal M de A , on a $e(I_M) \leq e(I)$ et qu'il existe au moins un idéal maximal M de A tel que $I_M \neq A_M$. On rappelle que $p(I)$ est égal à $\text{Max}(p(I_M))$ pour $M \in \text{Max}(A)$. D'après le cas local I_M^k est engendré par $e(I_M)$ éléments, donc par $e(I)$ éléments, si $I_M \neq A_M$; si $I_M = A_M$, l'idéal I_M^k est engendré par 1 élément. Supposons maintenant $e(I) \geq 2$, alors localement I^k est engendré par $e(I) \geq 2$ éléments. Le lemme 7.4 de [2] affirme qu'alors I^k est engendré par $\text{Max}(e(I), 2)$ éléments. Si maintenant $e(I) \leq 1$, on a déjà vu que I est inversible, ce qui est impossible. Dans tous les cas, l'idéal I^k est engendré par $\text{Max}(e(I), 2)$ éléments. Supposons maintenant que I soit un idéal fractionnaire régulier de A . Il existe alors un élément a non nul de A , tel que $J = aI$ soit un idéal de A . Tout système de générateurs de I fournit un système de générateurs de J et réciproquement. Il en est de même pour I^k et J^k , pour tout entier k . Par suite, l'idéal fractionnaire I^k est engendré par $\text{Max}(e(J), 2)$ éléments. Mais on a l'égalité $e(J) = e(I) + e_I$ pour un certain idéal J . La preuve est donc achevée.

Nous donnons maintenant un résultat de nature plus globale sur le nombre minimal de générateurs d'un idéal fractionnaire d'un g -ordre de Mori, en affinant au passage un résultat connu dans le cas local.

Soit A un g -ordre de Mori, le corollaire 3 du §4 de [4] montre que les idéaux de A sont engendrables par un nombre fixe d'éléments; on désigne par $n^*(A)$ le plus petit entier tel que la propriété soit réalisée. Il est clair que $n^*(A) = \text{Sup}(n(I))$.

Proposition 3.27 - Soit A un g -ordre de Mori, alors $n^*(A) \leq \text{Max}(2, e(M))$.
 $M \in \text{Max}(A)$

Si l'anneau A est local , alors $n^*(A) = e(M)$, où M est l'idéal maximal de A .

Preuve :

Supposons d'abord l'anneau A local , d'idéal maximal M . Pour un entier $k \geq 0$, assez grand , $e(M) = \text{Dim}_{A/M}(M^k/M^{k+1})$, d'après 3.8 . Ce nombre est donc égal au nombre minimum de générateurs de M^k et par suite $e(M) \leq n^*(A)$. De plus , le raisonnement suivant , ne faisant intervenir que des longueurs , par passage à l'anneau $A(X)$, on peut supposer que M a un idéal transversal $J \subset M$, en vertu de 3.4 . L'idéal J est donc tel que pour un entier k , assez grand , $JM^k = M^{k+1}$ et J est inversible . La prop. 1.7 donne : $\text{Long}_A(M^k/M^{k+1}) = \text{Long}_A(I/JI)$, pour un idéal I quelconque de A . Mais JI est contenu dans MI , on en déduit que $\text{Long}_A(I/MI) = \text{Long}_A(I/JI) - \text{Long}_A(MI/JI) \leq \text{Long}_A(I/JI)$. Finalement , on obtient : $\text{Long}_A(I/MI) = n(I) \leq e(M)$. Il en résulte que $n^*(A) = e(M)$. Le reste de la proposition s'en déduit , à l'aide de la prop. 1.4 de [1] . En effet , désignant par A' le localisé de A en M et par M' l'idéal maximal de A' , on a $e(M) = e(M')$; d'autre part , tout idéal maximal ne contenant pas $C(A, \bar{A})$ est , en vertu de 3.25 , de multiplicité égale à 1 et , par conséquent , le maximum des $e(M)$ existe .

IV - LA NORME SUR UN ORDRE D'ENTIERS

On se propose de définir la norme d'un idéal fractionnaire d'un ordre d'entiers , en sorte qu'elle soit multiplicative et redonne la norme usuelle dans le cas d'un ordre d'entiers de Dedekind .

Soit A un ordre d'entiers et soit I un idéal A -fractionnaire , Z.I. Borevitch et I.R. Chafarevitch définissent la norme de I comme étant $n(I) = [I : I | I]$, cf. [3] . Cette norme n'est pas multiplicative en général .

On suppose dans la suite du paragraphe , sauf mention du contraire, que les ordres d'entiers dont on s'occupe sont relatifs à une extension séparable de corps $Q \rightarrow K$, de degré d , Q étant le corps des fractions d'un anneau de Dedekind Z . Nous allons modifier la définition de la

norme de [3] , afin d'obtenir les propriétés annoncées .

Définition 4.1 - Soit A un ordre d'entiers , on définit la norme d'un idéal I fractionnaire de A par $N(I) = [A^I \mid IA^I]$.

Proposition 4.2 - Soit A un ordre d'entiers , alors :

1) Si J est un élément inversible de $I(A)$, on a $N(J) = [A \mid J] = n(J)$.

2) Si x est un élément non nul de K , $N(Ax)$ est la norme de x au sens usuel , c'est à dire $N(Ax) = N_K \mid_Q(x)Z$;
On pose alors $N(Ax) = N(x)$.

Preuve :

Soit I un idéal fractionnaire de A , inversible . Les égalités $A^I = A = I : I$ prouvent 1) . Soit x un élément non nul de K , l'idéal fractionnaire Ax est inversible , d'où $N(Ax) = [A \mid Ax] = N(x)Z$.

Proposition 4.3 - Soit A un ordre d'entiers et soit I un idéal fractionnaire . Pour tout entier $p \geq p(I)$, on a $N(I) = [I^p \mid I^{p+1}]$.

Preuve :

Soient M un idéal maximal de Z et $p \geq p(I)$. Posons $A' = A_M$, $I' = I_M$. On a l'égalité $[I^p \mid I^{p+1}]_M = [I'^p A', I' \mid I'^{p+1} A', I']$.

Mais $I' A', I'$ est inversible dans l'anneau A', I' qui est semi-local . Il existe donc un élément non nul x de K tel que $I' A', I' = x A', I'$. Il en résulte la suite d'égalités :

$[I'^p A', I' \mid I'^{p+1} A', I'] = [x^p A', I' \mid x^{p+1} A', I'] = [A', I' \mid x A', I'] = [A', I' \mid I' A', I']$. Il suffit pour le voir de considérer le Q-auto-morphisme de K , défini par la multiplication par x^p . On en déduit , pour tout idéal maximal M de Z , l'égalité $[I^p \mid I^{p+1}]_M = [A^I \mid IA^I]_M$, ce qui donne le résultat .

Les deux expressions obtenues pour $N(I)$ sont à rapprocher des expressions $e(I) = L_A(A^I, IA^I) = L_A(I^p, I^{p+1})$, pour $p \geq p(I)$. Elles laissent à penser qu'il y a des relations entre la norme et la multiplicité . Nous allons effectivement déterminer une relation entre norme et multiplicité d'un idéal fractionnaire d'un ordre d'entiers .

Plus généralement, étant donné un ordre d'entiers A , relatif à un anneau de Dedekind Z et deux éléments I et J de $I(A)$, nous montrons qu'il existe une relation entre $L_Z(J, I)$ et $[J | I]$.

Proposition 4.4 - Soit A un ordre d'entiers, relatif à un anneau de Dedekind Z , soient I et J deux éléments de $I(A)$. Supposons que la décomposition de $[J | I]$ en produit d'idéaux maximaux de Z soit donnée par $\prod_{P \in \text{Max}(Z)} P^{\alpha(P)}$. On a alors $\alpha(P) = L_{Z_P}(J_P, I_P)$ et

$$L_Z(J, I) = \sum_{P \in \text{Max}(Z)} \alpha(P).$$

Preuve :

La formule de localisation des longueurs donne :

$$L_Z(J, I) = \sum_{P \in \text{Max}(Z)} L_{Z_P}(J_P, I_P). \text{ Puisque } Z \text{ est un anneau de Dedekind,}$$

l'anneau Z_P est principal et il existe un élément p de Z_P , tel que $PZ_P = pZ_P$. On a de plus $[J | I]_P = [J_P | I_P] = p^{\alpha(P)} Z_P$. Soit z un élément non nul de Z , tel que $zI \subset J$. On obtient que zI_P est un sous- Z_P -module de J_P et ce sont tous les deux des modules libres de même rang, sur l'anneau principal Z_P . Considérons les facteurs invariants $\{\beta_i\}$ de zI_P dans J_P ; on a alors, pour tout entier i , la relation $\beta_i = p^{a(i)}$, où $a(i) \leq a(i+1)$. Or on sait que $[J_P | zI_P]$ est égal à $\prod_i \beta_i Z_P = p^{\sum a(i)} Z_P$. D'autre part, on a l'égalité :

$$[J_P | I_P] = [J_P | zI_P] [zI_P | I_P], \text{ quantité encore égale à } [J_P | zI_P] z^{-d},$$

où d est le degré de l'extension $Q \rightarrow K$, associée à l'ordre d'entiers A . Par conséquent, on obtient :

$$[J_P | I_P] = p^{\sum a(i)} z^{-d} Z_P. \text{ Soit } \gamma(P) \text{ tel que } zZ_P = p^{\gamma(P)} Z_P, \text{ on a } \alpha(P) \text{ égal à } \sum_i a(i) - d\gamma(P). \text{ Mais, on a d'autre part l'isomorphisme}$$

$$\text{de } Z_P\text{-modules : } J_P/zI_P = \bigoplus_i Z_P/p^{a(i)} Z_P, \text{ ainsi que l'isomorphisme}$$

$$I_P/zI_P = (Z_P/zZ_P)^{(d)} = (Z_P/p^{\gamma(P)} Z_P)^{(d)}, \text{ le symbole } X^{(d)} \text{ désignant la}$$

$$\text{somme directe de } d \text{ copies de } X. \text{ On en déduit que } \text{Long}_{Z_P}(J_P/zI_P) = \sum_i \text{Long}_{Z_P}(Z_P/p^{a(i)} Z_P) = \sum_i a(i) \text{ et } \sum_i \text{Long}_{Z_P}(Z_P/p^{\gamma(P)} Z_P) = d \text{Long}_{Z_P}(I_P/zI_P)$$

= $d\gamma(P)$; bref , on obtient finalement : $L_{Z_P}(J_P, I_P) = \sum a(i) - d\gamma(P) = \alpha(P)$, d'où le résultat .

En appliquant 4.4 aux idéaux fractionnaires A^I et IA^I , on obtient le théorème fondamental suivant ; on retrouve ainsi la définition de la norme lorsque A est un anneau de Dedekind .

Théorème 4.5 - Soit A un ordre d'entier , relatif à un anneau de Dedekind Z et soit I un élément de $I(A)$, on a alors :

$$N(I) = \prod_{M \in \text{Max}(A)} (M \cap Z)^{e(I_M)} [A/M : Z/M \cap Z]$$

On a aussi $N(I) = \prod_{P \in \text{Max}(Z)} P^{\alpha(P)}$, où $\alpha(P) = \sum_{\substack{M \in \text{Max}(A) \\ M \cap Z = P}} e(I_M) [A/M : Z/P]$

Preuve :

On sait que $N(I) = [A^I | IA^I]$ et que $e(I) = L_A(A^I, IA^I)$.

Soit la décomposition $N(I) = \prod_{P \in \text{Max}(Z)} P^{\alpha(P)}$. La proposition précédente

te donne $\alpha(P) = L_{Z_P}(A_P^{I_P}, I_P A_P^{I_P})$ égal , d'après la formule des exten-

sions , à $\sum_{\substack{M \in \text{Max}(A) \\ M \cap Z = P}} L_{A_M}(A_M^{I_M}, I_M A_M^{I_M}) [A/M : Z/P]$, (pour tout idéal

fractionnaire I de A , I_M s'identifie à $(I_P)_M$) . Cette dernière expres-
sion n'est autre que $\sum_{\substack{M \in \text{Max}(A) \\ M \cap Z = P}} e(I_M) [A/M : Z/P]$, qui est donc l'ex-

posant $\alpha(P)$ de P dans la décomposition de $N(I)$.

Remarque 4.6 - Dans la proposition précédente , le produit $\prod P^{\alpha(P)}$ est en fait étendu aux idéaux maximaux P de Z tels qu'il existe un idéal maximal M de A au-dessus de P , pour lequel $e(I_M) \neq 0$. IL en résulte que pour ces idéaux maximaux $I_M \neq A_M$ et on sait qu'il n'y a qu'un nombre fini de tels idéaux maximaux , en vertu de 1.11.1 .

Définissons l'ensemble $V'(I)$ comme étant l'ensemble des idéaux maximaux M de A tels que $e(I_M) \neq 0$. On retrouve $V'(I) = V(I)$ pour un idéal non nul I de A . En effet , on a dans ce cas $e(I_M) \geq 0$, et $e(I_M)$

est nul si et seulement si $I_M = A_M$, c'est à dire si $I \notin M$.

Corollaire 4.7 - Soit A un ordre d'entiers, relatif à un anneau de Dedekind Z , et soit I un élément de $I(A)$, alors :

$$e(N(I)) = \sum_{M \in \text{Max}(A)} e(I_M) [A/M : Z/M \cap Z].$$

Preuve :

Soit $J = \prod_{P \in \text{Max}(Z)} P^{\alpha(P)}$ la décomposition d'un idéal fractionnaire J d'un anneau de Dedekind Z ; la multiplicité $e(J)$ est

égale à $\sum \alpha(P)e(P) = \sum \alpha(P)$, puisque les idéaux maximaux sont de multiplicité égale à 1. Le théorème 4.4 donne alors le résultat.

Corollaire 4.8 - Soit A un ordre d'entiers, relatif à un anneau de Dedekind Z , si I est un idéal de A , alors $N(I)$ est un idéal de Z .

Preuve :

Pour tout idéal maximal M de A on a $e(I_M) \geq 0$. Donc les nombres $\alpha(P)$ du théorème 4.5 sont positifs ou nuls, pour tout idéal maximal P de Z .

Corollaire 4.9 - Soit A un ordre d'entiers, relatif à un anneau de Dedekind Z , et soit $f : Z \rightarrow A$ le morphisme canonique. Pour tout élément I de $I(A)$, on a $V'(N(I)) \subset {}^a f(V'(I))$, avec égalité lorsque I est un idéal de A .

Preuve :

Soit P un élément de $V'(N(I))$, cela signifie que $e(N(I)_P) \neq 0$. D'après 4.5, il existe un idéal maximal M de A , dominant P , pour lequel $e(I_M) \neq 0$. Il s'ensuit que $M \in V'(I)$ et donc que P appartient à ${}^a f(V'(I))$. Supposons de plus que I soit un idéal de A ; un élément P de ${}^a f(V'(I))$ est le contracté d'idéaux maximaux M de A , pour lesquels $e(I_M) > 0$. En effet, les localisés de I par rapport aux idéaux maximaux de A ont tous leur multiplicité positive ou nulle. Par conséquent, on a $e(N(I)_P) > 0$, par 4.7 ; d'où le résultat.

Corollaire 4.10 - Soit A un ordre d'entiers et soit I un élément de $I(A)$. Si toutes les extensions résiduelles, relatives aux éléments de $V'(I)$, sont de même degré r , on a alors $e(N(I)) = e(I)r$.

Preuve :

Soit A un ordre d'entiers, relatif à l'anneau de Dedekind Z. Pour tout élément M de $V'(I)$, on a $[A/M : Z/M \cap Z] = r$, il en résulte que $e(N(I)) = r \sum_{M \in \text{Max}(A)} e(I_M) = re(I)$.

Corollaire 4.11 - Soit A un ordre d'entiers, relatif à un anneau de Dedekind Z. Soit I un élément de $I(A)$ tel que $V'(I)$ soit réduit à un élément M. Alors $N(I) = (M \cap Z)^{e(I)} [A/M : Z/M \cap Z]$.

Preuve :

Le théorème 4.5 donne immédiatement le résultat.

Corollaire 4.12 - Soit A un ordre d'entiers et soit I un élément de $I(A)$ tel que si $f : Z \rightarrow A$ est le morphisme canonique, l'ensemble ${}^a f(V'(I))$ soit réduit à un élément P. Si les extensions résiduelles relatives aux éléments de $V'(I)$ sont de même degré r, alors $N(I) = P^{re(I)}$.

Preuve :

Par 4.10 on obtient $e(N(I)) = re(I)$. Puisque $V'(N(I))$ est contenu dans ${}^a f(V'(I))$, il contient au plus l'élément P. D'où $N(I)$ est égal à $P^{e(N(I))}$, ce qui achève la preuve.

Les propriétés que nous avons obtenues pour les multiplicités d'idéaux fractionnaires permettent d'obtenir des propriétés pour les normes d'idéaux fractionnaires.

Proposition 4.13 - Soit A un ordre d'entiers et soient I et I' des éléments de $I(A)$, alors $N(II') = N(I)N(I')$.

Preuve :

Le théorème 4.5 donne $N(II') = \prod_{P \in \text{Max}(Z)} P^{\alpha(P)}$, où

$\alpha(P) = \sum_{\substack{M \in \text{Max}(A) \\ M \cap Z = P}} e((II')_M) [A/M : Z/P]$. Mais on a $e((II')_M) = e(I_M) +$

$e(I'_M)$. Posons $\beta(P) = \sum_{\substack{M \in \text{Max}(A) \\ M \cap Z = P}} e(I_M) [A/M : Z/P]$, soit $\gamma(P)$ la quantité

analogue où I est remplacé par I'. La relation précédente donne donc, pour tout idéal maximal P de Z, $\alpha(P) = \beta(P) + \gamma(P)$. Puisque $N(I) =$

$\prod_{P \in \text{Max}(Z)} P^{\beta(P)}$ et $N(I') = \prod_{P \in \text{Max}(Z)} P^{\gamma(P)}$, on a donc l'égalité

cherchée .

Note : Nous dirons qu'un élément I de $I(Z)$ divise un élément J de $I(Z)$ si J est contenu dans I . Si $I = \prod_{P \in \text{Max}(Z)} P^{\alpha(P)}$ et $J =$

$\prod_{P \in \text{Max}(Z)} P^{\beta(P)}$ sont les décompositions respectives de I et J en

produits d'idéaux maximaux de Z , la propriété précédente est équivalente à $\alpha(P) \leq \beta(P)$, pour tout idéal maximal P de Z .

Proposition 4.14 - Soit A un ordre d'entiers et soit I un élément de $I(A)$, alors, pour tout entier $k \geq 0$, l'indice $[I^k | I^{k+1}]$ divise $N(I)$ et on a égalité si et seulement si $k \geq p(I)$.

Preuve :

Le théorème 3.8 donne $L_{A_M}(I_M^k, I_M^{k+1}) \leq e(I_M)$, pour tout idéal maximal M de A , avec égalité si et seulement si $k \geq p(I_M)$. Posons $N(I) = \prod_{P \in \text{Max}(Z)} P^{\alpha(P)}$ et $[I^k | I^{k+1}] = \prod_{P \in \text{Max}(Z)} P^{\beta(P)}$.

On en déduit l'inégalité suivante :

$$\beta(P) = L_{Z_P}(I_P^k, I_P^{k+1}) = \sum_{\substack{M \in \text{Max}(A) \\ M \cap Z = P}} L_{A_M}(I_M^k, I_M^{k+1}) [A/M : Z/P] \leq$$

$$\sum_{\substack{M \in \text{Max}(A) \\ M \cap Z = P}} e(I_M) [A/M : Z/P] = \sum \alpha(P), \text{ d'après le théorème 4.5 et}$$

en vertu de l'identification $(I_P)_M = I_M$. D'après 4.3, l'égalité a lieu pour $k \geq p(I)$. Si l'on a $k < p(I)$, il existe un idéal maximal M de A pour lequel $k < p(I_M)$. Par conséquent $L_{A_M}(I_M^k, I_M^{k+1}) < e(I_M)$

et $\beta(P) < \alpha(P)$ donnent une inclusion stricte .

Proposition 4.15 - Soit A un ordre d'entiers et soient $I \subset I'$ des éléments de $I(A)$, alors $N(I')$ divise $N(I)$.

Preuve :

Il est clair que pour tout idéal maximal M de A on a une inclusion $I_M \subset I'_M$. Il en résulte, d'après 3.13, que $e(I_M) \geq e(I'_M)$.

Soient les décompositions $N(I) = \prod_{P \in \text{Max}(Z)} P^{\alpha(P)}$ et $N(I') = \prod_{P \in \text{Max}(Z)} P^{\alpha'(P)}$

en produits d'idéaux maximaux de Z . Le théorème 4.5 montre qu'alors pour tout idéal maximal P de Z on a $\alpha'(P) \leq \alpha(P)$, c'est à dire que $N(I')$ divise $N(I)$.

Corollaire 4.16 - Soit A un ordre d'entiers et soient I et J des éléments de $I(A)$, tels que $I \subset J$, La suite d'idéaux $[J^p \mid I^p]$ est décroissante pour p assez grand.

Preuve :

Pour p assez grand, $N(I) = N(J) [J^{p+1} \mid I^{p+1}] [J^p \mid I^p]^{-1}$, comme on peut le voir en utilisant 4.3. Puisque $N(J)$ divise $N(I)$, nécessairement $[J^{p+1} \mid I^{p+1}] \subset [J^p \mid I^p]$.

Proposition 4.17 - Soit A un ordre d'entiers, relatif à l'extension $Q \rightarrow K$ de degré d ;

1) Pour tout élément I de $I(Z)$ on a $N(IA) = I^d$.

2) Pour tout idéal I de A , on a $N(I)A \subset I$.

Preuve :

La partie 1) résulte du fait que $I_P A_P$ est un idéal principal, engendré par le générateur de I_P , pour tout idéal maximal P de Z , car Z_P est un anneau principal. Il s'ensuit que $N(I_P A_P) = I_P^d$, d'où le résultat. Montrons 2). En vertu de 4.14, on obtient l'inclusion $N(I) \subset [A \mid I]$, pour $k = 0$. Il en résulte que pour tout idéal maximal P de Z on a $N(I_P) \subset [A_P \mid I_P]$. Mais Z_P étant un anneau principal, $[A_P \mid I_P]$ est égal à $\alpha_1 \dots \alpha_d Z_P$, où $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ sont les facteurs invariants de I_P dans A_P . Il existe donc un élément k de A_P tel que $N(I_P) = k \alpha_1 \dots \alpha_d Z_P$, ce qui entraîne $N(I_P) A_P \subset I_P$, pour tout idéal maximal P de Z . On obtient finalement que $N(I)A \subset I$.

On sait que dans le cas d'un ordre de Dedekind la norme d'un idéal est engendrée par la norme de ses éléments, cf. [19].

Noous généralisons cette propriété aux idéaux fractionnaires d'un ordre d'entiers, admettant un idéal transversal. Cette propriété est donc vérifiée pour tous les idéaux fractionnaires inversibles.

Proposition 4.18 : Soit A un ordre d'entiers et soit I un idéal fractionnaire , ayant un idéal transversal , alors $N(I)$ est engendrée par les normes des éléments de I .

Preuve :

Supposons que A soit un ordre d'entiers , relatif à l'anneau de Dedekind Z . Considérons d'abord le cas où I est un idéal de A . Pour tout élément x de I , l'inclusion $Ax \subset I$ entraîne , en vertu de 4.15 , que $N(x)Z \subset N(I)$. Soit J un idéal transversal à I ; il vérifie les propriétés suivantes : J est inversible , $J \subset I$, et $N(I) = N(J)$. Pour tout idéal maximal P de Z , l'idéal $J'_P = J_P$ de l'anneau principal $A'_P = A_P$ a un générateur x'_P , tel que $J'_P = A'_P x'_P$ et $x'_P \in J$. Considérons l'idéal K de Z , engendré par les éléments $N(x'_P)$; puisque J est contenu dans I , on voit que $N(x'_P)Z \subset N(I)$ et que $K \subset N(I)$. Soit maintenant un élément z de $N(I) = N(J)$. Pour tout idéal maximal P de Z , on a $z \in (N(J))_P = N(J_P) = N(A'_P x'_P) = N(x'_P)Z_P$. Donc $z \in K_P$, pour tout idéal maximal P de Z , et par suite $z \in K$. On en déduit l'égalité $K = N(I)$. Si maintenant I est un idéal fractionnaire , soit a un élément non nul de Z , tel que $I' = aI$ soit un idéal de A . Si d est le degré de l'extension de corps $Q \rightarrow K$ associée à l'ordre A , on a la relation $N(I') = a^d N(I)$ et $N(I')$ est engendrée par les éléments $N(x'_P)$, où x'_P est un élément de I' , donc de la forme ax , où $x \in I$. On en déduit que $N(x'_P) = a^d N(x)$. L'idéal $a^d N(I)$, étant engendré par les éléments $a^d N(x)$, il en résulte que $N(I)$ est engendré par les éléments $N(x)$, où $x \in I$.

Remarque 4.19 - L'hypothèse de l'existence d'un idéal transversal est nécessaire , dans les hypothèses de 4.18 . Soit en effet Z un anneau de valuation discrète , de valuation v . Considérons un idéal I d'un ordre d'entiers A , relatif à Z , ne possédant pas d'idéal transversal. L'anneau A^I est semi-local et l'idéal IA^I est inversible dans A^I ; on voit alors que $IA^I = aA^I$, où $a \in IA^I$. Supposons que $N(I)$ soit engendrée par des éléments $N(x_i)$, avec $x_i \in I$. L'anneau Z étant de valuation discrète , il existe parmi les éléments x_i un élément x tel que $v(N(x)) = \inf(v(N(x_i)))$. On a alors $N(I) = N(x)Z$. Mais $N(I)$ est aussi égal à $[A^I \mid aA^I] = N(a)Z$. On en déduit l'égalité $[A^I \mid xA^I] =$

$[A^I | aA^I]$, soit encore $[aA^I | xA^I] = Z$. Or x est un élément de I , on a donc l'inclusion $xA^I \subset IA^I = aA^I$. La relation sur l'indice donne alors l'égalité $xA^I = aA^I = IA^I$, où $x \in I$. Il existe donc un élément x de I tel que $I^{n+1} = xI^n$, d'où la contradiction.

On termine ce paragraphe, par une remarque relative aux ordres de Gorenstein.

Définition 4.20 - Un anneau intègre de dimension 1 est dit un anneau de Gorenstein si $\text{Dim inj}_A(A) = 1$. Un anneau intègre Noethérien de dimension 1 est de Gorenstein si et seulement si tout idéal (resp. fractionnaire) est divisoriel, cf. [2], théorème 6.3.

Remarque 4.21 - Soit A un ordre de Gorenstein, de module complémentaire A^* et de discriminant $\Delta(A)$. On sait de manière générale que $\Delta(A) = [A^* | A]$ (cf. [7], p. 11) et que A^* est inversible (cf. [16], V, prop. 4). Par conséquent si $D(A)$ est la différentielle de A , on obtient que $N(D(A)) = N(A^{*-1}) = N(A^*)^{-1} = [A | A^*]^{-1}$. On retrouve le résultat bien connu pour les ordres d'entiers de Dedekind : $N(D(A)) = \Delta(A)$.

V - APPLICATIONS AU CONDUCTEUR DU MORPHISME D'ECLATEMENT

Proposition 5.1 - Soit $A \rightarrow B$ un morphisme de g -ordres, de conducteur C . On a alors $r(C) = \text{Long}_A(B/A)$ si et seulement si $B = A^C$. Si cette condition est réalisée, on a les égalités $p(C) = 1$, $e(C) = \text{Long}_A(B/C)$. Si de plus A est un ordre d'entiers, on a $N(C) = [B | C]$.

Preuve :

Puisque C est le conducteur du morphisme, on a les inclusions suivantes : $B \subset C \subset A^C$, ce qui entraîne $\text{Long}_A(B/A) \leq \text{Long}_A(A^C/A) = r(C)$, avec égalité si et seulement si $B = A^C$. Si cette situation est réalisée, on en déduit que $A^C = C : C$, donc que $p(C) = 1$ et que C est un idéal de A^C , c'est à dire que $e(C) = \text{Long}_A(A^C/CA^C) = \text{Long}_A(B/C)$. Si A est un ordre d'entiers, la norme de C est $[A^C | CA^C]$, c'est à dire $[B | C]$.

Proposition 5.2 - Soit A un g -ordre et soit I un élément de $I(A)$. Soit C le conducteur du morphisme $A \rightarrow A^I$, pour tout entier $p \geq p(I)$ on a la relation $C = I^p(I^p)^{-1}$.

Preuve :

On sait que $C = A : A^I$. Pour démontrer la relation, il suffit de montrer qu'elle est vraie dans tout localisé $A' = A_P$, par rapport à un idéal maximal P de A ; on note $I' = I_P$; alors $C' = A' : A'^{I'}$ est le localisé de C en P . L'anneau $A'^{I'}$ est semi-local et I' est inversible dans cet anneau, il existe donc un élément x de cet anneau tel que $I'A'^{I'} = xA'^{I'}$; la relation est alors évidente, compte tenu de $x^p A'^{I'} = I'^p$.

On donne ici des généralisations immédiates de résultats de E. Matlis, démontrés dans [12], pour des g -ordres locaux et leur idéal maximal, dans le cas où ce sont des anneaux de Gorenstein.

Soit A un g -ordre de Gorenstein et soit $A \rightarrow B$ un morphisme de g -ordres, nous avons $\text{Long}_A(B/A) = \text{Long}_A(A : A/A : B) = \text{Long}_A(A/C)$, où C est le conducteur du morphisme $A \rightarrow B$, cf. la remarque 2.5 de [12]. Nous pouvons appliquer ce qui précède à un g -ordre A de Gorenstein et au morphisme d'éclatement $A \rightarrow A^I$ d'un idéal I de A . Le conducteur C du morphisme est $C = I^{p(I)}(I^{p(I)})^{-1}$ et l'on a $I^{p(I)} \subset C$; On en déduit que $r(I) \leq \text{Long}_A(A/I^{p(I)}) = e(I)p(I) - r(I)$, d'après 3.10. Il en résulte que $r(I) \leq 2^{-1}e(I)p(I)$, avec égalité si et seulement si $C = I^{p(I)}$. Tout ceci donne une partie de la proposition suivante :

Proposition 5.3 - Soit A un g -ordre de Gorenstein et soit I un idéal de A . On a alors $r(I) \leq 2^{-1}e(I)p(I)$, avec égalité si et seulement si le conducteur du morphisme d'éclatement $A \rightarrow A^I$ est égal à $I^{p(I)} = C$. De plus les conditions simultanées $p(I) = e(I) - \text{Long}_A(A/I)$ et $r(I) = 2^{-1}e(I)p(I)$ sont équivalentes à $C(A, A^I) = I^{e(I) - \text{Long}_A(A/I)}$.

Preuve :

Si $p(I) = e(I) - \text{Long}_A(A/I)$ et $r(I) = 2^{-1}e(I)p(I)$, il est clair que le conducteur du morphisme est $I^{e(I) - \text{Long}_A(A/I)}$, d'après la première partie. Réciproquement si le conducteur est

$I^{e(I) - \text{Long}_A(A/I)}$, puisque $I^{p(I)}$ est contenu dans le conducteur, on a $e(I) - \text{Long}_A(A/I) \leq p(I)$. D'autre part, puisque $A^I C = C$, 3.10, c) montre que $p(I) \leq e(I) - \text{Long}_A(A/I)$. La première partie montre alors que $r(I) = 2^{-1} e(I) p(I)$, compte tenu de $p(I) = e(I) - \text{Long}_A(A/I)$.

Proposition 5.4 - Soit $A \rightarrow B$ un morphisme d'ordres d'entiers, de conducteur C . Si A est un ordre de Gorenstein, alors B est un ordre de Gorenstein si et seulement si le conducteur C est inversible dans B .

Preuve :

C'est la prop. 14, V de [16].

Remarque 5.5 - La proposition 5.3 montre que si l'on a pour un idéal I d'un ordre de Gorenstein A la relation $r(I) = 2^{-1} e(I) p(I)$, le conducteur de $A \rightarrow A^I$ est une puissance de I , donc est inversible dans A^I . On en déduit que dans ce cas l'ordre A^I est de Gorenstein.

On trouve dans le livre de E. Matlis [12] le résultat suivant, page 123 :

Proposition 5.6 - Soit A un g-ordre local dont l'idéal maximal M est engendré par 2 éléments, alors $p(M) = e(M) - 1$ et $r(M) = 2^{-1} (e(M) - 1) e(M)$.

Cette situation s'applique donc aux ordres du type $Z[t]$, où t est un élément primitif de l'extension $Q \rightarrow K$, tel que $t \in \bar{Z}$; en effet, ce sont des ordres de Gorenstein, d'après [16], le lemme de Kummer en fournissant la preuve. Soit M un idéal maximal de $Z[t]$, par localisation en M , on peut appliquer 5.6. On déduit alors de 5.3 que $C(A, A^M) = M^{e(M) - 1}$. De plus nous avons vu que $p(M) \leq d - 1$, on a donc $e(M) \leq d$.

Nous avons montré dans [16] le résultat suivant :

Lemme 5.7 - Soit Z un anneau principal, de corps des fractions Q ; soit $Q \rightarrow Q(t)$ une extension séparable de corps, déterminée par le polynôme $f(X) = X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \dots + a_0$ de $Z[X]$, irréductible dans Q et un zéro $t \in \bar{Z}$ de ce polynôme. Soit p un élément extrémal de Z et soit $u = tp$, alors : on a $C(Z[u], Z[t]) = p^{d-1} Z[t]$. Le seul idéal maximal de $Z[u]$, contenant $C(Z[u], Z[t])$ est $M = (p, u)$.

Plaçons nous dans cette situation : on a $Z[t] \subset M^{d-1} : M^{d-1}$; en effet , $M = (p,u)$ et M^{d-1} est égal à $(p^{d-1}, p^{d-2}u, \dots, pu^{d-2}, u^{d-1})$; or $tp^{d-1-i}u^i = p^{d-1-(i+1)}u^{i+1}$, pour $0 \leq i \leq d-2$ et $tu^{d-1} = p^{-1}u^d = p^{-1}(-pa_{d-1}u^{d-1} - \dots - p^d a_0)$, nous montrent que $tM^{d-1} \subset M^{d-1}$. De plus , le conducteur $p^{d-1}Z[t]$ est égal à M^{d-1} , comme on le voit aisément . On a donc un composé $A = Z[u] \rightarrow Z[t] \rightarrow M^{d-1} : M^{d-1} = A^M$. On en déduit que $M^{e(M)-1} \subset M^{d-1}$, en comparant les conducteurs , et que $M^{d-1} \subset M^{e(M)-1}$, parce que $e(M) \leq d$, finalement $M^{e(M)-1} = M^{d-1}$. On en déduit que $e(M) - 1 = d - 1$: en effet , si M est un idéal d'un anneau intègre Noethérien tel que $M^k = M^{k'}$, pour $k \neq k'$, la suite $\{M^k\}$ devient stationnaire , alors que l'intersection des éléments de la suite est réduite à zéro .

En conclusion , nous voyons que $e(M) = d$ et que $p(M) = d-1$. D'autre part $Z[u]$ étant un ordre de Gorenstein et A^M et $Z[t]$ ayant même conducteur par rapport à $Z[u]$, nous obtenons $Z[t] = Z[u]^M = M^{d-1} : M^{d-1}$, en vertu de 12. V de [16] .

Proposition 5.8 - Soit Z un anneau de Dedekind , de corps des fractions Q . Soit B un ordre d'entiers relatif à une extension finie K de degré d de Q . L'anneau $Z(X)$ est principal . Si M et N sont des idéaux B -fractionnaires , on a la relation : $[M | N] Z(X) = [MB(X) | NB(X)]$.

Preuve :

Le corollaire 1 , §4 de [17] montre que $Z(X)$ est un anneau principal . Il résulte de [15] , que si $f: A \rightarrow A'$ est un morphisme d'anneaux , entier , alors $A'(X)$ est le localisé de $A'[X]$ par rapport à la partie multiplicative des polynômes de $A'[X]$ du type $f_e(P(X))$, où f_e désigne l'extension de f aux anneaux de polynômes et $P(X)$ est un polynôme de $A[X]$, dont le contenu est égal à A . Plus rapidement , cela signifie que $A'(X) = A' \otimes_A A(X)$. On en déduit que $B(X)$ est un $Z(X)$ -module de type fini et sans torsion , donc libre . De même , le corps des fractions $K(X)$ de $B(X)$ est une extension de degré d du corps des fractions $Q(X)$ de $Z(X)$. De plus , $B(X)$ contient une base de $K(X)$ sur $Q(X)$. Donc $B(X)$ est un $Z(X)$ -module libre de rang d . Nous savons que $MB(X)$ et $NB(X)$ sont des idéaux $B(X)$ -fractionnaires .

res . Soit ϕ un Q -automorphisme de K , tel que $\phi(M) = N$. On définit une application $\psi : K(X) \rightarrow K(X)$ de la manière suivante : un élément de $K(X)$ peut s'écrire sous la forme $k(X)q(X)^{-1}$, où $k(X)$ est un élément de $K[X]$ et $q(X)$ est un élément non nul de $Q[X]$; on pose $\psi(k(X)q(X)^{-1}) = k^\phi(X)q(X)^{-1}$, $k^\phi(X)$ étant le polynôme déduit de $k(X)$, en transformant ses coefficients par ϕ . On contrôle facilement que ψ est bien définie et que c'est un $Q(X)$ -automorphisme du $Q(X)$ -espace vectoriel $K(X)$. De plus , un élément de $B(X)$ pouvant s'écrire sous la forme $b(X)z(X)^{-1}$, où $b(X) \in B[X]$ et $z(X)$ est un élément de $Z[X]$ de contenu égal à Z , un simple calcul montre que $\psi(MB(X)) = NB(X)$. Il reste à calculer le déterminant de ψ ; mais si $\{e_i\}$ est une base de K sur Q , c'est aussi une base de $K(X)$ sur $Q(X)$; compte tenu de la définition de ψ , les morphismes ψ et ϕ ont la même matrice , ce qui achève la démonstration .

Proposition 5.9 - Soit $A \rightarrow B$ un morphisme d'ordres d'entiers , de conducteur C , différent de A . Si A est un ordre de Gorenstein , les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) L'ordre B est de Gorenstein .
- b) On a $B = A^C$.
- c) On a $r(C) = \text{Long}_A(B/A)$.
- d) On a $p(C) = 1$.
- e) On a $e(C) = 2r(C)$.
- f) On a $N(C) = [B | A]^2$.

Preuve :

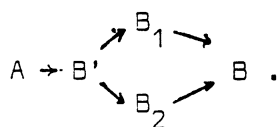
D'après 12.V de [16] , l'anneau B est égal à $C : C$. Il résulte de 5.4 que a) est équivalent à C est inversible dans $C : C$, ce qui équivaut à $p(C) = 1$ (si C est inversible dans A , on a $A = B$) , ou à $C : C = A^C$. Cette dernière propriété est équivalente à c) d'après 5.1 . Supposons ces propriétés équivalentes vérifiées . Le conducteur du morphisme d'éclatement étant égal à C , il résulte de 5.3 que $2r(C) = e(C)$. Réciproquement , si $e(C) = 2r(C)$, on déduit de 3.5 que l'on a l'inégalité $e(C) \leq r(C) + \text{Long}_A(A/C)$, ce qui entraîne $r(C) = \text{Long}_A(A^C/A) \leq \text{Long}_A(A/C) = \text{Long}_A(C : C/A)$; puisque A est un ordre de Gorenstein , l'inclusion $C : C \subset A^C$ donne alors l'égalité et b) est prouvé . Si b) est réalisée , on a $N(C) = [B | C]$, soit $N(C) = [B | A] [A | C] = [B | A]^2$, en vertu de 8.V de [16] . Supposons maintenant que l'on

ait l'égalité $N(C) = [B | A]^2$. D'après la proposition, loc. cit. on en déduit que $N(C) = [B | C]$, puisque $[B | A] = [A | C]$. Par passage à $A(X)$, la norme étant conservée par 5.8, on peut supposer que C possède un idéal transversal I et, dans ce cas, on a $N(I) = N(C)$. Or l'idéal I étant inversible, sa norme est égale à $[A | I]$. On obtient donc l'égalité $[A | I] = [B | C]$. Il résulte des propriétés des indices les égalités suivantes : $[A | I] = [A | B][B | I] = [B | I][I | IB]$, car I est inversible ; finalement, on obtient $N(C) = [B | C] = [B | IB]$, ou encore $[C | IB] = Z$. Mais l'inclusion $I \subset C$ et le fait que C soit un idéal de B entraînent $IB \subset C$. Bref, on voit que $C = IB$, c'est à dire que C est inversible dans B , donc B est un ordre de Gorenstein.

Nous allons illustrer les résultats de 5.9 par deux exemples de morphismes $A \rightarrow B$, où A est un ordre de Gorenstein et nous calculerons les différentes quantités, intervenant dans cette proposition, dans le cas où B est de Gorenstein, ou dans le cas contraire. Ces exemples sont obtenus à partir de 5.7 et de ses conséquences.

Soit $\mathbb{Q}(t)$ une extension de degré 3 de \mathbb{Q} , définie par le polynôme $f(X) = X^3 - X - 1$. L'anneau $A = \mathbb{Z}[5t]$ est un ordre de Gorenstein, puisque $u = 5t$ est un élément primitif de l'extension, ainsi que l'anneau $B = \mathbb{Z}[t]$. D'après le lemme 5.7, le conducteur C du morphisme $A \rightarrow B$ est donc l'idéal $25\mathbb{Z}[t]$, puisque $d = 3$ et l'idéal $M = (5, u)$ de $\mathbb{Z}[u]$ est le seul idéal maximal contenant le conducteur. On contrôle que l'anneau $B' = M : M$ est le \mathbb{Z} -module de base $\{1, 5t, 5t^2\}$. Les résultats suivant 5.7 montrent que $e(M) = 3$, $p(M) = 2$, $C = M^2$ et $B = A^M = A^C = M^2 : M^2$. Il résulte de 5.9, appliquée au morphisme $A \rightarrow B$ que $p(C) = 1$, $N(C) = 25^3\mathbb{Z}$ et $[B | A] = 125\mathbb{Z}$. Les égalités $e(M) = 3$ et $C = M^2$ donnent alors $e(C) = 6$, d'où $r(C) = 3$ et par suite $\text{Long}_A(B/A) = 3$. L'idéal M étant commun à A et B' et étant maximal dans A est donc le conducteur du morphisme $A \rightarrow B'$. Puisque $p(M) = 2$, l'anneau B' n'est donc pas de Gorenstein, d'après la proposition précédente. Evaluons les différentes quantités, intervenant dans cette proposition. On a $e(M) = 3$ et $r(M) = r(C) = 3$. des égalités $C = M^2$ et $N(C) = 25^3\mathbb{Z}$,

on déduit que $N(M) = 125\mathbb{Z}$, alors que $[B' | A]^2 = 25\mathbb{Z}$. D'autre part , l'anneau A étant de Gorenstein , on a l'égalité $\text{Long}_A(B'/A) = \text{Long}_A(A/M) = 1$. En outre , on a une inclusion $B' \subset B$ et on vient de voir que $\text{Long}_A(B/A) = 3$. Il existe donc un A -module compris entre B' et B . On constate que les \mathbb{Z} -modules B_1 et B_2 de bases respectives $\{1, t, 5t^2\}$ et $\{1, 5t, t^2\}$ sont des A -modules vérifiant le diagramme suivant :



REFERENCES

[1] H. Bass , Torsion free and projective modules , Trans. Amer. Math. Soc. , 102 , (1962) , 319-327 .

[2] H. Bass , On the ubiquity of Gorenstein rings , Math. Z. , 82 , (1963) , 8-28 .

[3] Z.I. Borevitch , I.R. Chafarevitch , Théorie des nombres , Gauthier-Villars , Paris , (1967) .

[4] I.S. Cohen , Commutative rings with restricted minimum condition , Duke Math. J. , 17 , (1950) , 27-42 .

[5] E.C.Dade , O. Taussky and H. Zassenhaus , On the theory of orders , in particular on the semi-group of idéal classes and genera of an order in an algebraic number field , Math. Ann. , 148 , (1962) , 31-64 .

[6] D.E. Estes , R.M. Guralnick , Module equivalences : local to global, when primitive polynomials represent units , J. Algebra , 77 , (1982) , 138-157 .

[7] A.Fröhlich , J.W. Cassels , Algebraic Number Theory , Academic Press , London , New-York , (1967)

[8] A. Fröhlich , Invariants for modules over commutative separable orders , Quart. J. Math. Oxford , 16 , (1965) , 193-232 .

[9] R.Gilmer , W. Heinzer , On the number of generators of an inver-

- tible ideal , J. Algebra , 14 , (1970) , 139-151 .
- [10] J. Lipman , Stable ideals and Arf rings , Amer. J. Math. , 93
(1971) , 649-685 .
- [11] T.G. Lucas , Two annihilator conditions : Property (A) and (A.C.) ,
Comm. Algebra , 14 , (1986), 557-580 .
- [12] E. Matlis , 1-dimensional Cohen-Macaulay rings , Lecture Notes
in Mathematics , N° 327 , Springer-Verlag , Berlin , New-York ,
(1973)
- [13] D.G. Northcott, Lessons on rings , module and multiplicities ,
Cambridge University Press , (1968) .
- [14] D.G. Northcott , Prime ideals and Dedekind orders , Proc. London
Math. Soc. , 10 (1960) ,481-496 .
- [15] G.Picavet , Propriétés et applications de la notion de contenu,
Comm. Alg. , 13 ,(1985) , 2231-2265 .
- [16] M. Picavet , Ordres de Gorenstein , Ann. Sci. Univ. Clermont II,
Ser. Math. ,24 , (1987) ,1-32 .
- [17] J.Querre , Idéaux divisoriels d'un anneau de polynômes , J. Algebra ,
64 , (1980) , 270-284 .
- [18] J.D. Sally , W.V. Vasconcelos , Stable rings , J. Pure Appl.
Algebra , 4 , (1974) ,319-336 .
- [19] O. Zariski , P. Samuel , Commutative Algebra , Vol 1 , D. Van
Nostrand Company , Inc. , Princeton , Toronto , New-York ,
London , (1960) .

**Université Blaise Pascal (Clermont II), U.F.R. Sciences, Mathématiques Pures,
63177 Aubière Cédex FRANCE**

Reçu en Septembre 1989