

ANNALES SCIENTIFIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2  
*Série Mathématiques*

PAUL-JEAN CAHEN

**Anneaux presque intégralement clos**

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 91, série *Mathématiques*, n° 24 (1987), p. 61-64

[http://www.numdam.org/item?id=ASCFM\\_1987\\_\\_91\\_24\\_61\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1987__91_24_61_0)

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## ANNEAUX PRESQUE INTEGRALEMENT CLOS

Paul Jean CAHEN

### Résumé :

On donne des exemples d'anneaux  $A$  intègres mais non intégralement clos, de corps des fractions  $K$ , tels que  $x \in K$  et  $x^n \in A$  implique  $x \in A$ , en considérant, ou bien des extensions quadratiques du corps des rationnels, ou bien des anneaux de polynômes.

### Abstract :

We give examples of domains  $A$ , non integrally closed, of field of fractions  $K$ , such that  $x \in K$  and  $x^n \in A$  implies  $x \in A$ , by considering either quadratic extensions of the field of rational numbers or rings of polynomials.

### Introduction :

Tous les anneaux considérés sont commutatifs et unitaires. Si  $B$  et  $A$  sont deux anneaux tels que  $B \subset A$ , on dira qu'un élément  $x$  de  $A$  est *radical sur  $B$*  si

$$\exists n \in \mathbb{N}, x^n \in B$$

Bien sûr un élément radical est entier sur  $B$ , on dira donc qu'un anneau intègre  $B$  est *presque intégralement clos* si les seuls éléments de son corps des fractions qui sont radicaux sur  $B$  sont les éléments de  $B$ .

Bourbaki donne un exemple d'anneau presque intégralement clos qui n'est pas intégralement clos [ [1], chapitre V, § 1 Exercice 15 ] mais celui-ci semble inutilement compliqué. On donne ici, dans une première partie, des exemples parmi les ordres d'extensions quadratiques de  $\mathbb{Q}$ . Dans une seconde partie on indique un certain lien avec le groupe

des unités des anneaux considérés. On revient enfin pour finir à l'exemple de Bourbaki en le simplifiant et le généralisant : Si  $L/K$  est une extension de corps, on considère le sous-anneau  $B$  de  $L[X]$  formé des polynômes  $P$  tels que  $P(0) \in K$ , on donne alors des conditions nécessaires et suffisantes pour que  $B$  soit Noëthérien, intégralement clos ou presque intégralement clos.

### 1. Ordres des corps quadratiques.

Notons tout d'abord que si  $B$  est intègre, alors les éléments de son corps des fractions qui sont radicaux sur  $B$  sont nécessairement dans la clôture intégrale  $A$  de  $B$ .

**Théorème :** Soit  $d$  un entier sans facteur carré tel que  $d \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $B$  l'anneau

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}], \quad x = \frac{1 + \sqrt{d}}{2} \quad \text{et} \quad A = \mathbb{Z}[x] \text{ la clôture intégrale de } B.$$

- i) Si  $d \equiv 5 \pmod{8}$ , tout élément de  $A$  est radical sur  $B$ , de façon précise si  $\alpha \in A$  alors  $\alpha^3 \in B$ .
- ii) Si  $d \equiv 1 \pmod{8}$  alors  $B$  est presque intégralement clos.

Pour le démontrer, on considère  $\alpha = a + bx$ , tel que  $\alpha \in A$ , mais  $\alpha \notin B$ , d'où  $a, b \in \mathbb{Z}$  mais  $b$  est impair. On a alors

$$\alpha^2 = t\alpha - n \quad \text{où } t = \text{Tr}(\alpha), \quad n = N(\alpha) \text{ (trace et norme)}$$

on observe que  $t = 2a + b$  est impair et  $n = a^2 + ab + b^2 \left(\frac{1-d}{4}\right)$  est de même

parité que  $\frac{1-d}{4}$ . Si  $d \equiv 5 \pmod{8}$ , on tire  $\alpha^3 \in B$ , si  $d \equiv 1 \pmod{8}$ , on tire

par récurrence  $\alpha^n = t_n \alpha - n_n$  où  $t_n$  impair, donc  $\alpha^n \notin B$ , pour tout  $n$ .

#### Remarque :

Si on considère l'anneau  $C = \mathbb{Z}[\sqrt{2d}]$ , où  $d \equiv 1 \pmod{8}$ , alors certains éléments de la clôture intégrale  $A$  de  $C$  sont radicaux sur  $C$  (à savoir ceux de  $B = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ) et d'autres ne le sont pas.

## 2. Lien avec les unités.

Si  $B$  est intègre et  $A$  désigne sa clôture intégrale, on note  $B^*$  et  $A^*$  les groupes des unités respectivement de  $B$  et de  $A$ . Pour que  $B$  soit presque intégralement clos, il faut que  $B^*/A^*$  soit sans torsion, or dans le cas où  $B$  est un ordre, et donc  $A$  l'anneau des entiers d'un corps de nombres,  $B^*/A^*$  est un groupe fini [(2) II. § 4, Exercice 4]; dans ce cas il faut donc avoir  $B^* = A^*$ .

On retrouve donc ici le fait que si  $d > 0$ , et  $d \equiv 1 \pmod{8}$ , l'unité fondamentale du corps  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  appartient à  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ .

On voit par contre que si  $d < 0$ ,  $d \equiv 5 \pmod{8}$  mais  $d \neq -3$ , on a alors  $B^* = A^* = \{-1, +1\}$ , tandis que  $B$  n'est pas presque intégralement clos.

Les exemples du § suivant montrent qu'en général on peut avoir  $B^* \neq A^*$  et  $B$  presque intégralement clos.

## 3. Anneau de polynômes.

On note  $L/K$  une extension et  $\bar{K}$  la fermeture algébrique de  $K$  dans  $L$ . On considère le sous-anneau  $B$  de  $L[X]$  formé des polynômes  $P$  tels que  $P(0) \in K$ .

On note que  $B$  est intègre de corps de fractions  $L(X)$ .

La clôture intégrale de  $B$  est le sous-anneau  $A$  de  $L[X]$  formé des polynômes  $P$  tels que  $P(0) \in \bar{K}$ , on a

$$K[X] \subset B \subset A \subset L[X]$$

Ainsi  $B$  est intégralement clos si et seulement si  $\bar{K} = K$ , c'est-à-dire  $L/K$  est une extension transcendante pure.

On voit aussi que

$B$  est Noëthérien si et seulement si l'extension  $L/K$  est finie.

Si l'extension  $L/K$  est de degré  $n$ , alors  $A = L[X]$  est un  $K[X]$ -module libre de rang  $n$  et  $B$  de même, dans le cas contraire, on montre aisément que l'idéal  $I$  de  $B$  formé des polynômes  $P$  tels que  $P(0) = 0$ , n'est pas de type fini.

On a enfin, avec les notations ci-dessus :

**Proposition :**  $B$  est presque intégralement clos si et seulement si tout élément de  $L$  radical sur  $K$  est un élément de  $K$ .

Ainsi, si  $L/K$  est algébrique, mais  $L$  ne possède pas d'autres éléments radicaux sur  $K$  que les éléments de  $K$ , alors  $B$  est presque intégralement clos, mais n'est pas intégralement clos. Or, on a tout simplement :

**Proposition :** *Si  $L/Q$  est une extension galoisienne de degré impair, alors tout élément de  $L$  radical sur  $Q$  est un élément de  $Q$ .*

En effet, les seules racines de l'unité contenues dans  $L$  sont alors 1 et -1 et si  $x$  est radical sur  $Q$ , soit  $x^n = a$  où  $a \in Q$ , on sait que les conjugués de  $x$  sont de la forme  $\xi a$  où  $\xi$  est une racine de  $n^{\text{ème}}$  de l'unité donc, ici, nécessairement  $\pm x$ , d'où  $x$  est de degré 1 ou 2 et comme l'extension est de degré impair,  $x$  est nécessairement de degré 1.

L'exemple le plus simple est celui d'une extension de degré 3 (par exemple  $Q(x)$  où  $x$  est racine de  $X^3 - 3X + 1$ ) et, contrairement à la construction donnée par Bourbaki [ (1), Chap. V § 1, Exercice 15 ], on voit qu'il n'est pas nécessaire d'imposer au groupe de Galois de l'extension d'être non résoluble.

On note enfin que  $B^* = K$ , alors que  $A^* = \overline{K}$ , et donc qu'on peut avoir  $B^* \neq A^*$  et  $B$  presque intégralement clos.

## BIBLIOGRAPHIE

- [ 1 ] N. BOURBAKI : Algèbre commutative, Hermann, Paris.
- [ 2 ] Z.I. BOREVITCH et I.R. CHAFAREVITCH : Théorie des nombres, Gauthier-Villars, Paris.

Faculté des Sciences de TUNIS, Département de Mathématiques, Campus Universitaire El Menzah  
Tunis, Tunisie.