

ANNALES SCIENTIFIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2  
*Série Mathématiques*

GABRIEL PICAUVET

**Factorisations de morphismes d'anneaux commutatifs**

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 91, série *Mathématiques*, n° 24 (1987), p. 33-59

[http://www.numdam.org/item?id=ASCFM\\_1987\\_\\_91\\_24\\_33\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1987__91_24_33_0)

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## FACTORISATIONS DE MORPHISMES D'ANNEAUX COMMUTATIFS

Gabriel PICALET

Dans bon nombre de catégories concrètes, comme celle des groupes, des modules sur un anneau, etc., les morphismes de ces catégories admettent une factorisation, dite canonique, composée d'une surjection et d'une injection. On sait que, dans une catégorie quelconque, ces deux dernières notions doivent être remplacées par celles de monomorphisme et d'épimorphisme. Dans cet article, nous étudions plus particulièrement la catégorie  $\underline{A}$  des anneaux commutatifs unitaires, où bien sûr l'on dispose de la factorisation canonique. Mais la factorisation canonique se révèle être insuffisante pour l'étude de certains problèmes. Il est bien connu que les monomorphismes de  $\underline{A}$  sont les injections. Par contre, les épimorphismes de  $\underline{A}$  sont rarement des surjections (voir le Séminaire Samuel [18]). Ce dernier fait est un des nombreux exemples des dissymétries de la catégorie  $\underline{A}$ . On trouve dans la littérature un nombre élevé d'articles sur le problème de la factorisation d'un morphisme d'une catégorie en épimorphismes et monomorphismes. Citons par exemple le livre de Barr, Grillet et Van Osdol [1], dans lequel on trouve une bibliographie importante. Citons aussi l'article de Kelly [6] et celui de Pupier [16]. Pour la commodité du lecteur, on rappelle les définitions de certains types de morphismes, comme les

monomorphismes forts, extrémaux, stricts et leurs principales propriétés dans la catégorie  $\underline{A}$ . Mais, dans la catégorie  $\underline{A}$ , on dispose de notions particulières, comme celles de morphisme pur et de morphisme de Nakayama, dont les définitions seront données un peu plus loin. Ces deux types de morphismes sont des morphismes de descente de propriétés algébriques. Nous établissons le lien entre ces notions et celles évoquées plus haut. Nous établissons aussi des propriétés particulières aux monomorphismes forts, extrémaux et stricts dans la catégorie  $\underline{A}$ .

Notre propos est d'établir l'existence de factorisations en monomorphismes et épimorphismes, autres que la canonique dans la catégorie  $\underline{A}$ . Un premier résultat de démonstration simple est que tout morphisme de  $\underline{A}$  se factorise en un morphisme pur, suivi d'une immersion ouverte, id est un épimorphisme plat de présentation finie. Par contre, une factorisation en un épimorphisme, suivi d'un morphisme pur n'existe pas toujours. Ce problème est étudié dans un article à paraître, en liaison avec d'autres comme celui de la pureté des morphismes entiers. La descente des propriétés topologiques des morphismes de  $\underline{A}$  se fait à l'aide des morphismes submersifs : un morphisme surjectif de schémas affines  $\text{Spec}(A') \rightarrow \text{Spec}(A)$  est dit submersif si la topologie de  $\text{Spec}(A)$  est quotient de celle de  $\text{Spec}(A')$ . Nous avons fait dans [14] l'étude des submersions et dégagé une classe particulière de submersions recouvrant toutes celles utilisées en pratique : la classe des morphismes subtrusifs. La propriété la plus caractéristique en est la suivante : un morphisme d'anneaux  $A \rightarrow A'$  est une subtrusion si tout couple  $P \subset Q$  d'idéaux premiers de  $A$  se remonte en un couple  $P' \subset Q'$  d'idéaux premiers de  $A'$ . Nous montrons que, dans le cas d'un morphisme submersif (subtrusif)  $A \rightarrow A'$ , il existe dans certains cas une factorisation  $A \rightarrow D(A') \rightarrow A'$ , où  $D(A')$  est le dominion du morphisme  $A \rightarrow A'$  le morphisme  $D(A') \rightarrow A'$  étant strict et submersif. Dans ce cas,  $\text{Spec}(D(A'))$  est le quotient dans la catégorie des schémas de  $\text{Spec}(A')$  par la relation d'équivalence définie par le morphisme.

## 0 - Conventions et notations

Tous les anneaux considérés sont commutatifs et unitaires ainsi que leurs morphismes et les modules sont des modules sur des anneaux commutatifs unitaires. On adopte les conventions, notations, définitions de l'oeuvre de N. Bourbaki, ainsi que celles des éléments de Géométrie Algébrique de J. Dieudonné et A. Grothendieck. On utilise sans vergogne les résultats du Séminaire Samuel, sur les épimorphismes d'anneaux [18] .

Voici par ordre alphabétique les notions et résultats utilisés par la suite :

- Une partie  $X$  d'un spectre d'anneaux  $\text{Spec}(A)$  est dite *admissible* s'il existe un épimorphisme plat d'anneaux  $A \rightarrow A'$ , dont l'image spectrale soit  $X$ , cf. [18], exposé 5.

- Soit  $A$  un anneau, on rappelle que l'*assassin* d'un  $A$ -module  $M$  est l'ensemble des idéaux premiers  $P$  de  $A$ , satisfaisant : il existe un élément  $x$  de  $M$  tel que  $P$  soit un idéal premier minimal de  $V(0 : x)$ . L'ensemble des assassins de  $M$  est désigné dans cet article par  $\text{Ass}_A(M)$ . Pour les propriétés des assassins, on peut consulter [8], [10] .

- Un morphisme d'anneaux  $A \rightarrow A'$  est dit *a-surjectif* si son morphisme spectral  $\text{Spec}(A') \rightarrow \text{Spec}(A)$  est surjectif. De façon générale, une propriété de morphisme d'anneaux, concernant le morphisme spectral, sera précédée du préfixe *a*.

- Un  $A$ -module  $M$  est dit à *contenu* si pour toute famille  $\{I_i\}$  d'idéaux de  $A$ , la propriété  $(\bigcap_i I_i)M = \bigcap_i I_iM$  est satisfaite, cf. [13], pour les propriétés de cette notion.

Le  $A$ -module  $M$  est dit *universellement à contenu*, si pour tout morphisme d'anneaux  $A \rightarrow A'$ , le  $A'$ -module  $M \otimes_A A'$  est à contenu.

Un morphisme d'anneaux  $A \rightarrow A'$  est dit à contenu si le  $A$ -module  $A'$  est à contenu. Tout morphisme projectif est à contenu.

- Une propriété  $\mathbb{P}$  de morphismes d'anneaux est dite *stable par division à gauche* si, étant donnés des morphismes d'anneaux  $f$  et  $g$  tels que  $f \circ g$  vérifie  $\mathbb{P}$ , alors  $g$  vérifie  $\mathbb{P}$ .

- Un morphisme d'anneaux  $A \rightarrow A'$ , injectif, est dit *essentiel* si pour tout idéal  $I'$  de  $A'$  la relation  $I' \cap A = 0$  entraîne  $I' = 0$ .

- Un morphisme d'anneaux  $A \rightarrow A'$  est dit *descendre la propriété  $\mathbb{P}$*  de morphismes d'anneaux, si dans tout diagramme cocartésien d'anneaux

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' \end{array}$$

où le morphisme  $A' \rightarrow B'$  vérifie  $\mathcal{P}$ , alors le morphisme  $A \rightarrow B$  vérifie  $\mathcal{P}$ .

- Un morphisme d'anneaux  $A \rightarrow A'$  est dit de *Nakayama*, s'il descend la nullité des modules, c'est-à-dire si pour tout  $A$ -module  $M$ , la relation  $M \otimes_A A' = 0$  entraîne  $M = 0$ . Ces morphismes sont étudiés par J.P. Olivier dans [12], sous le nom de morphismes fortement de Nakayama, et par L. Gruson et M. Raynaud dans [4] sous le nom de morphismes vérifiant la condition (0).

- Un sous- $A$ -module  $N$  d'un  $A$ -module  $M$  est dit *pur* si pour tout  $A$ -module  $P$ , le morphisme  $P \otimes_A N \rightarrow P \otimes_A M$  est injectif.

Un morphisme d'anneaux  $A \rightarrow A'$  est dit pur si le  $A$ -module  $A$  est sous- $A$ -module pur de  $A'$ . Il revient au même de dire que le morphisme  $A \rightarrow A'$  est universellement injectif. Les morphismes purs sont étudiés par J.P. Olivier dans [12].

- Pour les morphismes *submersifs* ou *subtrusifs*, outre leur définition donnée dans l'introduction, on pourra consulter [14], où une étude extensive est faite.

Rappelons ici que les classes de ces morphismes sont stables par division à gauche.

**1 - Factorisation d'un morphisme d'anneaux en un morphisme pur suivi d'une immersion ouverte.**

On va montrer d'abord que tout homomorphisme d'anneaux se factorise en un homomorphisme pur, suivi d'un épimorphisme plat.

**Proposition 1 :**

*Soit  $f : A \rightarrow A'$  un homomorphisme d'anneaux et soit  $I'$  un idéal de  $A'$ . Il existe un anneau  $C(A, I')$  et une factorisation  $A \rightarrow C(A, I') \rightarrow A'$  où  $A \rightarrow C(A, I')$  est un homomorphisme pur.*

**Preuve :**

Soit l'ensemble  $A \times I'$  muni de la structure canonique de groupe Abélien additif produit. On munit encore  $A \times I'$  de la loi suivante :

$$(a, i')(b, j') = (ab, f(a)j' + f(b)i' + i'j')$$

avec des notations claires. On désigne par  $C(A, I')$  l'ensemble  $A \times I'$  muni des lois précédentes. On contrôle sans peine que c'est un anneau commutatif unitaire. Les applications suivantes sont des homomorphismes d'anneaux unitaires  $\alpha : A \rightarrow C(A, I')$  définie par  $\alpha(a) = (a, 0)$  et  $\beta : C(A, I') \rightarrow A'$  définie par  $\beta(a, i') = f(a) + i'$ , avec des notations claires. L'homomorphisme  $\alpha$  est pur car il a une rétraction.

Le noyau de  $\beta$  est l'ensemble des couples  $(a, f(a))$  où  $a \in f^{-1}(I')$ .

**Corollaire 2 :**

*Soit  $f : A \rightarrow A'$  un homomorphisme d'anneaux, il existe une factorisation  $A \rightarrow B \rightarrow A'$  où  $A \rightarrow B$  est un homomorphisme pur et  $B \rightarrow A'$  un homomorphisme surjectif plat de présentation finie. On a ainsi une factorisation en un homomorphisme universellement subtrusif suivi d'une immersion ouverte.*

**Preuve :**

On prend, dans la proposition précédente  $I' = A'$ . Dans ce cas le noyau de  $\beta$  est l'idéal principal  $(e)$  où  $e$  est l'idempotent  $(1, -1)$  de  $C(A, A')$ .

**Remarques :**

1) Le spectre de  $C(A, A')$  n'est autre que la réunion de  $\text{Spec}(A)$  et  $\text{Spec}(A')$ . En effet  $\text{Spec}(A')$  est homéomorphe à  $V(e)$  et  $\text{Spec}(A)$  à  $D(e)$ . D'ailleurs, l'anneau  $C(A, A')$  est isomorphe à  $A \times A'$ .

2) Si  $f : A \rightarrow A'$  est un homomorphisme injectif et si  $I'$  est un idéal de  $A'$ , maximal pour la propriété  $I' \cap A = 0$ , alors l'homomorphisme  $C(A, I') \rightarrow A'$  est essentiel.

3) L'anneau  $C(A, A')$  reflète de nombreuses propriétés de l'homomorphisme  $A \rightarrow A'$ .

Rappelons la définition suivante, donnée par J.P. Olivier et D. Ferrand [3].

**Définition 3 :**

*Un homomorphisme d'anneaux  $f : A \rightarrow B$  est dit minimal s'il est injectif, non surjectif et si, pour toute décomposition  $f = g \circ h$ , où  $g$  et  $h$  sont des homomorphismes injectifs,  $g$  ou  $h$  est un isomorphisme.*

**Corollaire 4 ,**

*Un homomorphisme minimal est soit essentiel, soit un homomorphisme pur fini.*

**Preuve :**

Soit  $f : A \rightarrow A'$  un homomorphisme minimal, non essentiel. Dans ce cas, il existe un idéal  $I'$  de  $A'$ , non nul, tel que  $I' \cap A = 0$ . Considérons la factorisation  $A \rightarrow C(A, I') \rightarrow A'$ , puisque  $I' \cap A = 0$ , l'homomorphisme  $C(A, I') \rightarrow A'$  est injectif. D'autre part l'homomorphisme  $A \rightarrow C(A, I')$  n'est pas surjectif, sinon l'idéal  $I'$  serait nul. Il en résulte que  $C(A, I') \rightarrow A'$  est un isomorphisme, et donc  $A \rightarrow A'$  est un homomorphisme pur. On montre, d'autre part, dans [3] qu'un homomorphisme minimal est soit un épimorphisme plat, soit un homomorphisme fini. Or un épimorphisme pur est surjectif.

En effet, si  $f : A \rightarrow A'$  est un épimorphisme de  $\underline{A}$ , on a  $A' \otimes_A A'/f(A) = 0$

d'après [18], exposé 3.

**2 - Propriétés, définitions des morphismes stricts, forts, extrémaux.**

Soit  $A \rightarrow B$  un homomorphisme d'anneaux, on désigne par  $D_A(B)$ , ou plus rapidement  $D(B)$ , l'ensemble des éléments  $b$  de  $B$  tels que  $b \otimes 1 = 1 \otimes b$  dans  $B \otimes_A B$ . On a ainsi une factorisation en homomorphismes d'anneaux  $A \rightarrow D(B) \rightarrow B$ .

Il est facile de voir que  $D(B) = B \times_{B \otimes_A B} B$ . Il en résulte alors que le diagramme suivant est cartésien et cocartésien :

$$\begin{array}{ccc} D(B) & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & B \otimes_A B \end{array}$$

**Définition 5 :**

Un monomorphisme d'anneaux  $A \rightarrow A'$  est dit strict si  $D_A(A') = A$ . Il revient au même de dire que la suite  $A \rightarrow A' \rightrightarrows A' \otimes_A A'$  est exacte ou qu'il existe une suite exacte de  $\underline{A}$  de la forme  $A \rightarrow A' \rightrightarrows A''$ .

**Corollaire 6 :**

Soit  $f : A \rightarrow A'$  un homomorphisme d'anneaux, le monomorphisme  $D(A') \rightarrow A'$  est strict.

La définition ci-dessus est bien équivalente à la définition générale d'un monomorphisme strict d'une catégorie quelconque  $\underline{C}$  : soit  $m : C \rightarrow D$  un monomorphisme de la catégorie  $\underline{C}$ , le morphisme  $m$  est dit strict si, pour tout morphisme  $f : A \rightarrow D$ , la condition suivante est satisfaite : pour que  $f$  se factorise en  $f = m \circ g$  il faut et il suffit que pour tout couple  $(u,v)$  de morphismes de source  $D$ , la condition  $u \circ m = v \circ m$  entraîne  $u \circ f = v \circ f$ .

La preuve se fait en utilisant le diagramme cartésien et cocartésien vu plus haut.

**Définition 7 :**

Soit  $f : A \rightarrow A'$  un monomorphisme d'anneaux.

a) Le monomorphisme  $f$  est dit fort si, étant donnés des homomorphismes d'anneaux  $g$  et  $h$  et un épimorphisme  $e$ , la relation  $f \circ h = g \circ e$  entraîne qu'il existe un homomorphisme  $t$  tel que  $g = f \circ t$  (ou, ce qui revient au même,  $h = t \circ e$ ).

b) Le monomorphisme  $f$  est dit extrémal si dans toute factorisation  $f = m \circ e$ , où  $m$  est un monomorphisme et  $e$  un épimorphisme, l'homomorphisme  $e$  est un isomorphisme.

**Corollaire 8 :**

Soit  $f$  un homomorphisme d'anneaux tel que  $f = m \circ e = m' \circ e'$  où  $m$  et  $m'$  sont des monomorphismes forts et  $e$  et  $e'$  des épimorphismes, il existe un isomorphisme  $t$  tel que  $m' = m \circ t$  et  $e' = t^{-1} \circ e$ .

**Corollaire 9 :**

Soit  $f : A \rightarrow A'$  un monomorphisme d'anneaux, le monomorphisme  $f$  est extrémal si et seulement si dans toute décomposition  $f = m \circ e$ , où  $e$  est un épimorphisme, l'homomorphisme  $e$  est un isomorphisme.

**Preuve :**

Une partie est claire. Supposons  $f$  extrémal et  $f = m \circ e$  où  $e$  est un épimorphisme, le morphisme  $m$  admet la décomposition canonique  $m = i \circ p$  où  $i$  est une injection et  $p$  une surjection. Alors le morphisme  $p \circ e$  est un épimorphisme. La conclusion s'obtient par le lemme élémentaire suivant :

**Lemme 10 :**

Si un composé d'épimorphismes est un isomorphisme, chacun d'entre eux est un isomorphisme.

Dans la catégorie des anneaux, on a le diagramme suivant d'implications entre propriétés de monomorphismes :

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Pur} & \Rightarrow & \text{Nakayama et injectif} & & \\
 \Downarrow & & \Downarrow & & \\
 \text{Strict} & \Rightarrow & \text{Fort} & \Leftrightarrow & \text{Extrémal}
 \end{array}$$

La notion de morphisme pur (ou de Nakayama) est universelle.

Qu'un morphisme pur soit un morphisme de Nakayama et injectif résulte de [12].

Un morphisme pur  $A \rightarrow A'$  est strict, en effet le noyau du morphisme  $A'/A \rightarrow A'/A \otimes_A A'$  est  $D(A')/A$  (cf [7]) et ce morphisme est injectif parce que le morphisme  $A \rightarrow A'$  est pur. Un monomorphisme strict est fort : soit  $f$  un monomorphisme strict et supposons que  $u \circ f = v \circ f$  et que  $f \circ h = g \circ e$ , où  $e$  est un épimorphisme, alors on obtient  $u \circ g \circ e = v \circ g \circ e$  et, puisque  $e$  est un épimorphisme,  $u \circ g = v \circ g$ . Le morphisme  $f$  étant strict, on voit que  $g = f \circ t$ , c'est-à-dire que  $f$  est un monomorphisme fort.

Un monomorphisme fort est extrémal dans toute catégorie. Réciproquement, soit  $f$  un morphisme extrémal et supposons que  $f \circ h = g \circ e$ , où  $e$  est un épimorphisme. Soit la somme amalgamée dans  $\underline{A}$  des morphismes  $h$  et  $e$ . Soient  $h'$  et  $e'$  les morphismes projections, donc tels que  $e' \circ h = h' \circ e$ . Puisque l'on a  $f \circ h = g \circ e$ , on en déduit l'existence d'un morphisme  $d$  unique tel que  $d \circ h' = g$  et  $d \circ e' = f$ . De plus  $e'$  est un épimorphisme et  $f$  est extrémal ; de  $d \circ e' = f$ , on tire  $e'$  est un isomorphisme. Il est alors clair que  $g = d \circ h' = d \circ e' \circ e'^{-1} \circ h' = f \circ t$  : le morphisme  $f$  est fort. Le fait qu'un monomorphisme de Nakayama soit fort résulte de la proposition suivante.

On construit par récurrence transfinie une suite  $\{D_\alpha(B)\}$  d'anneaux, pour un homomorphisme d'anneaux  $A \rightarrow B$ , de la manière suivante : soit  $W$  un ordinal tel que  $\text{Card}(\mathcal{P}(B)) < \text{Card}(W)$  où  $\mathcal{P}(B)$  est l'ensemble des parties de l'anneau  $B$  ; pour  $\alpha \in W$ , on pose  $D_{\alpha+1}(B) = D(D_\alpha(B))$ , si  $\alpha$  est limite, on pose  $D_\alpha(B) = \bigcap_{\beta < \alpha} D_\beta(B)$ . Il existe un élément  $\omega$  de  $W$  pour lequel la suite s'arrête. On désigne  $D_\omega(B)$  par  $E_A(B)$  (ou par  $E(B)$ ). On obtient ainsi un épimorphisme d'anneaux  $A \rightarrow E(B)$  ; en effet, un morphisme d'anneaux  $A \rightarrow A'$  est un épimorphisme si et seulement si  $D(A') = A'$ , cf. [18], exposé 2.

**Proposition 11 :**

*Soit  $f : A \rightarrow B$  un homomorphisme d'anneaux, il existe une factorisation  $A \rightarrow E(B) \rightarrow B$  où l'homomorphisme  $A \rightarrow E(B)$  est un épimorphisme et l'homomorphisme  $E(B) \rightarrow B$  est un monomorphisme fort. Si l'homomorphisme  $A \rightarrow B$  est plat, il en est de même pour l'homomorphisme  $E(B) \rightarrow B$ .*

**Preuve :**

Si on a une factorisation  $A \rightarrow A' \rightarrow B$  où l'homomorphisme  $A \rightarrow A'$  est un épimorphisme et l'homomorphisme  $A' \rightarrow B$  est un monomorphisme, on voit par récurrence transfinie que l'anneau  $A'$  est contenu dans  $E(B)$ . Il en résulte que l'homomorphisme  $E(B) \rightarrow B$  est extrémal. Pour la dernière assertion, on utilise la proposition 3.1 de [18], exposé 4.

**Remarque :**

Le corollaire 8 montre que la décomposition  $A \rightarrow E(B) \rightarrow B$  est unique à un isomorphisme près.

**Corollaire 12 :**

*Un monomorphisme d'anneaux  $A \rightarrow B$  est fort (extrémal) si et seulement si  $A = E(B)$ . En particulier, un monomorphisme de Nakayama est fort.*

**Preuve :**

La première assertion résulte immédiatement de la proposition 11.

Pour la deuxième, on remarque qu'un épimorphisme de Nakayama est surjectif (un épimorphisme d'anneaux  $A \rightarrow A'$  vérifie  $A' \otimes_A A'/f(A) = 0$ , cf [18]) et que la propriété de Nakayama est stable par division à gauche.

**Corollaire 13 :**

*Soit un composé de monomorphismes  $A \rightarrow B \rightarrow C$  tel que l'homomorphisme  $A \rightarrow C$  soit fini, alors l'homomorphisme  $A \rightarrow B$  est un monomorphisme fort.*

**Preuve :**

On sait, d'après [17], que lorsque  $C$  est engendré comme  $A$ -module par  $n$  éléments on a  $D_n(B) = A = E(B)$ .

**Proposition 14 :**

*1) La classe des monomorphismes forts (extrémaux) est stable par composition et division à gauche, de même que la classe des morphismes purs et la classe des*

monomorphismes de Nakayama.

2) Si  $g$  et  $f$  sont des morphismes de  $\underline{A}$  tels que  $g \circ f$  soit un monomorphisme strict et  $g$  soit un monomorphisme, alors  $f$  est un monomorphisme strict.

3) Si  $g$  et  $f$  sont des morphismes de  $\underline{A}$  tels que  $f$  soit un monomorphisme strict et  $g$  soit un morphisme pur, alors  $g \circ f$  est un monomorphisme strict.

4) Soient  $f, f', a, b$  des morphismes de  $\underline{A}$ , tels que  $f' \circ a = b \circ f$ , constituant un diagramme cartésien, alors si  $f'$  est un monomorphisme strict (resp. fort) il en est de même pour le morphisme  $f$ .

**Preuve :**

Les assertions 1), 2), 4) sont bien connues, ou se démontrent par des preuves simples. Montrons 3), soit  $f : A \rightarrow B$  et soit  $g : B \rightarrow C$  les homomorphismes et soit  $c$  un élément de  $C$  tel que  $c \otimes 1 = 1 \otimes c$ , puisque l'homomorphisme  $g$  est strict, il existe un élément  $b$  de  $B$  tel que  $c = g(b)$ . Mais l'homomorphisme  $g$  est pur, il en résulte que l'homomorphisme  $B \otimes_A B \rightarrow C \otimes_A C$  est injectif. On en déduit que  $b \otimes 1 = 1 \otimes b$ , il existe donc un élément  $a$  de  $A$  tel que  $c = g(f(a))$ .

**Corollaire 15 :**

*Les monomorphismes forts se descendent entre eux. Réciproquement, un homomorphisme qui descend les monomorphismes forts est un monomorphisme fort.*

**Preuve :**

La première partie s'obtient en remarquant que la classe des monomorphismes forts est stable par division à gauche.

Pour la réciproque, on remarque que si  $A \rightarrow B$  est un homomorphisme, l'homomorphisme  $B \rightarrow B \otimes_A B$  est pur, donc fort.

Rappelons qu'un anneau Bezoutien est un anneau intègre dans lequel tout idéal de type fini est principal.

**Proposition 16 :**

*Soit  $A$  un anneau localement Bezoutien et soit  $A \rightarrow B$  un monomorphisme plat et fort, alors le morphisme  $A \rightarrow B$  est pur, donc fidèlement plat.*

**Preuve :**

Le module  $B \otimes_A B$  est plat sur  $A$ , donc sans torsion. Soit  $a$  un élément non nul de  $A$  et supposons que pour un élément  $\bar{b}$  de  $B/D(B)$  on ait  $a\bar{b} = 0$ . Alors  $ab$  appartient à  $D(B)$  entraîne  $a(b \otimes 1 - 1 \otimes b) = 0$ , il en résulte que  $\bar{b} = 0$ . Comme le dominion d'un morphisme localisé est le localisé du dominion, on peut supposer que l'anneau  $A$  est Bezoutien ; le  $A$ -module  $B/D(B)$  étant sans torsion est plat. Il en résulte que le morphisme  $D(B) \rightarrow B$  est pur. Mais alors le morphisme  $A \rightarrow D(B)$  est un épimorphisme : l'injection  $D(B) \otimes_A D(B) \rightarrow B \otimes_A B$  montre que  $D_2(B) = D(B)$ . Puisque le morphisme  $A \rightarrow B$  est fort, le morphisme  $A \rightarrow D(B)$  est alors un isomorphisme.

**Remarques :**

Cette proposition s'applique dans le cas où  $A$  est un anneau de Prüfer. Elle est à mettre en parallèle avec un résultat du à D. Ferrand, cité par J.P. Olivier dans [12] : un monomorphisme strict de source un anneau de Dedekind est pur.

Nous étudions dans [15], la classe  $\mathcal{E}$  des morphismes de  $\underline{A}$ , se factorisant en un épimorphisme suivi d'un morphisme pur. Tout morphisme du type  $\mathbb{Z} \rightarrow A$  est dans la classe. Une adaptation de la proposition ci-dessus montre que si  $A$  est un anneau Bezoutien et si  $A \rightarrow B$  est un morphisme d'anneaux, plat, alors le morphisme  $A \rightarrow B$  est dans la classe  $\mathcal{E}$ .

Soit  $\{A_i\}_{i \in I}$  un système inductif filtrant de  $A$ -algèbres. On voit sans peine que  $\{E(A_i)\}_{i \in I}$  est un système inductif filtrant de  $A$ -algèbres et que l'on a un épimorphisme canonique  $\varinjlim E(A_i) \rightarrow E(\varinjlim A_i)$ . Mais ce n'est pas forcément un isomorphisme.

Si c'était le cas, un système inductif filtrant de  $A$ -algèbres, dont les morphismes structuraux sont des monomorphismes forts, aurait pour limite une  $A$ -algèbre dont le morphisme structural est un monomorphisme fort. Alors, toute extension entière serait un monomorphisme fort, en vertu du corollaire 13. Or il existe des épimorphismes entiers, non surjectifs (voir [8]). Par contre,  $\varinjlim D(A_i) = D(\varinjlim A_i)$  : en effet, pour un homomorphisme  $A \rightarrow B$ , l'anneau  $D(B)$  est le noyau de l'homomorphisme de  $A$ -module  $i_1 \cdot i_2 : B \rightarrow B \otimes_A B$ .

Soit un diagramme commutatif d'homomorphismes d'anneaux :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' \end{array}$$

la restriction de l'homomorphisme  $B \rightarrow B'$  à  $D(B)$  fournit un homomorphisme  $D_A(B) \rightarrow D_{A'}(B')$ , puisqu'il existe un homomorphisme  $B \otimes_A B \rightarrow B' \otimes_{A'} B'$ .

Par récurrence transfinie, on obtient un homomorphisme  $E_A(B) \rightarrow E_{A'}(B')$ . On obtient ainsi, lorsque le diagramme ci-dessus est cocartésien, des diagrammes commutatifs :

$$(1) \quad \begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & D(B) & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & D(B) \otimes_A A' & \longrightarrow & D(B') \longrightarrow B' \end{array}$$
  

$$(2) \quad \begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & E(B) & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & E(B) \otimes_A A' & \longrightarrow & E(B') \longrightarrow B' \end{array}$$

Le carré de droite de (2) est cocartésien, en vertu du lemme 11 du chapitre I, de [14], puisque l'homomorphisme  $A' \rightarrow E(B')$  est un épimorphisme. Notons que, lorsque l'homomorphisme  $A \rightarrow A'$  est plat, on a  $D(B) \otimes_A A' = D(B')$ .

**Proposition 17 :**

Soit un homomorphisme d'anneaux  $A \rightarrow B$ .

a) Si pour tout idéal premier  $P$  de  $A$ , l'homomorphisme  $A_P \rightarrow B_P$  est un monomorphisme fort, l'homomorphisme  $A \rightarrow B$  est un monomorphisme fort.

b) L'homomorphisme  $A \rightarrow B$  est un monomorphisme strict si et seulement si l'homomorphisme  $A_P \rightarrow B_P$  est un monomorphisme strict, pour tout idéal premier  $P$  de  $A$ .

**Preuve :**

Elle résulte des considérations ci-dessus et du résultat élémentaire : si un composé d'épimorphismes est un isomorphisme, chacun des épimorphismes est un isomorphisme.

**Proposition 18 :**

*Soit  $A$  un anneau Noethérien et soit un homomorphisme  $A \rightarrow B$  injectif,  $a$ -surjectif, universellement module à contenu, alors l'homomorphisme  $A \rightarrow B$  est un monomorphisme fort.*

**Preuve :**

On peut supposer l'anneau  $A$  local Noethérien complet séparé, en vertu des propositions 15 et 17 et du fait qu'un homomorphisme fidèlement plat est un monomorphisme fort. Soit  $M$  l'idéal maximal de  $A$ , l'idéal  $M.B$  de  $B$  est au-dessus de  $M$ . Puisque l'homomorphisme  $A \rightarrow B$  est module à contenu, on a

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} (M.B)^k \subset \left( \bigcap_{k \in \mathbb{N}} M^k \right).B = 0. \text{ Soit l'idéal } N = E(B) \cap M.B \text{ de } E(B)$$

au-dessus de  $M$ , alors l'anneau  $E(B)$  est séparé pour la topologie  $N$ -adique et  $N \cap A = M$ . D'autre part, l'homomorphisme  $A/M \rightarrow E(B)/N$  est surjectif car c'est un épimorphisme de source un corps. D'après le lemme 4 de [18], exposé n° 6, l'homomorphisme  $A \rightarrow E(B)$  est surjectif.

**Exemple :**

Soit  $A$  un anneau Noethérien, le morphisme  $A \rightarrow A[X_1, \dots, X_n]$  vérifie les hypothèses ci-dessus, donc est un monomorphisme fort. Il en est de même de tout morphisme libre, ou projectif et injectif,  $a$ -surjectif.

**Proposition 19 :**

*Soit un monomorphisme fort  $A \rightarrow B$ .*

*a) Si l'anneau  $B$  est absolument plat, l'anneau  $A$  est absolument plat.*

*b) Si l'anneau  $B$  est local, l'anneau  $A$  est local.*

**Preuve :**

Dans le cas a), on a une factorisation  $A \rightarrow P(A) \rightarrow B$ , où  $A \rightarrow P(A)$  est l'épimorphisme canonique de  $A$  dans son anneau plat universel, cf [18] exposé n° 6.

Dans le cas b), soit  $a$  un élément de  $A$ , inversible dans  $B$ , on a une factorisation  $A \rightarrow A_a \rightarrow B$ , donc  $a$  est inversible dans  $A$ .

Voici quelques résultats sur les monomorphismes stricts. Soit un anneau  $A$  et soit  $F$  un site sur  $A$ , c'est-à-dire un ensemble topologisant et idempotent d'idéaux de  $A$  cf. [5] ou les exercices de [2] page 158 ch. I. Soit  $f : A \rightarrow B$  un homomorphisme d'anneaux, l'ensemble  $F(A,B)$  des éléments  $b$  de  $B$  tels que  $(f(A) : b)_A \in F$  est un anneau et il existe une factorisation  $A \rightarrow F(A,B) \rightarrow B$ , cf. [11]. Si le  $A$ -module  $B \otimes_A B$  est sans  $F$ -torsion, alors l'anneau  $F(A,B)$  est un sous-anneau de  $D(B)$ . En effet, étant donné un élément  $b$  de  $F(A,B)$ , il existe un élément  $I$  du site  $F$  tel que  $bI \subset f(A)$ . On en déduit que  $I$  est contenu dans  $0 : (b \otimes 1 - 1 \otimes b)$ , d'où le résultat.

Soit le site  $F_0$  des idéaux  $I$  de  $A$  tels que  $I.B = B$ , alors le module  $B \otimes_A B$  est sans  $F_0$ -torsion. Soit maintenant le site  $F_a$  des idéaux  $I$  de  $A$  tels que  $\text{Ass}_A(B \otimes_A B) \subset D(I)$  et supposons que pour un élément  $z$  de  $B \otimes_A B$  on ait  $0 : z \in F_a$ . Pour tout élément  $a$  de  $0 : z$ , on obtient  $az = 0$ , puis, l'image de  $z$  dans  $(B \otimes_A B)_P$  est nulle, pour tout assassin  $P$  de  $B \otimes_A B$  : en effet  $0 : z$  n'est contenu dans aucun assassin. On sait d'autre part que pour un  $A$ -module  $M$ , l'homomorphisme  $M \rightarrow \prod_{P \in \text{Ass}(M)} M_P$  est injectif. Par suite  $z$  est nul, ainsi  $F_a \subset B \otimes_A B$  est nul.

Il est clair que si  $F$  est un site contenu dans  $F_a$ , le module  $B \otimes_A B$  est sans  $F$ -torsion. Réciproquement, si l'anneau  $A$  est Noethérien ou si le site est de type fini, (tout idéal  $I \in F$  contient un idéal  $J$  de type fini appartenant à  $F$ ), l'hypothèse  $B \otimes_A B$  est sans  $F$ -torsion entraîne  $F \subset F_a$ . Il suffit de traiter le cas du site de type fini. Soit  $I$  un élément d'un site  $F$  de type fini tel que  $F \otimes_A B = 0$ . Supposons que  $\text{Ass}_A(B \otimes_A B)$  ne soit pas contenu dans  $D(I)$ , il existe alors un assassin  $P$  de  $B \otimes_A B$  tel que  $I \subset P$ . Il en résulte que  $P$  est dans  $F$ . Soit un élément  $J = (a_1, \dots, a_n)$  de  $F$  contenu dans  $P$ , puisque  $P$  est un idéal premier, minimal parmi ceux contenant un annulateur, soit  $0 : z$ , il existe des éléments  $s_1, \dots, s_n$  de  $A - P$  tels que  $s_i a_i^{n_i}$  soit dans  $0 : z$  pour  $i = 1, \dots, n$ . On en déduit que  $J^{n(k-1)+1}$  est contenu dans  $0 : s_1 \dots s_n z$ , où  $k = \text{Sup}(n_i)$ . Puisque toute puissance de  $J$  est dans  $F$  et le module  $B \otimes_A B$  est sans  $F$ -torsion, on obtient  $s_1 \dots s_n z = 0$ , une contradiction.

**Proposition 20 :**

Soit  $f : A \rightarrow B$  un homomorphisme d'anneaux, pour tout site  $F$  sur  $A$  tel que  $F(B \otimes_A B) = 0$ , l'anneau  $F(A, B)$  est un sous-anneau de  $D(B)$ . Le site  $F_\alpha$  des idéaux  $I$  de  $A$  tels que  $\text{Ass}_A(B \otimes_A B) \subset D(I)$  est tel que  $B \otimes_A B$  soit sans  $F_\alpha$ -torsion. Tout site  $F$  contenu dans  $F_\alpha$  est tel que  $F(B \otimes_A B) = 0$ . Réciproquement, tout site de type fini  $F$  tel que  $F(B \otimes_A B) = 0$  est contenu dans  $F_\alpha$ . En particulier,  $F_0$  est contenu dans  $F_\alpha$ .

**Remarque :**

On peut montrer que lorsque l'homomorphisme  $A \rightarrow B$  est injectif, l'anneau  $F(A, B)$  n'est autre que le produit fibré relatif aux homomorphismes  $A_F \rightarrow B_F$  et  $B \rightarrow B_F$ .

**Corollaire 21 :**

Soit  $f : A \rightarrow B$  un monomorphisme strict, tout élément  $b$  de  $B$ , pour lequel il existe un idéal  $I$  de  $A$  tel que  $I \cdot B = B$  (ou qui n'est contenu dans aucun assassin de  $B \otimes_A B$ ) et tel que  $Ib \subset f(A)$ , appartient à  $A$ .

**Corollaire 22 :**

Soit  $f : A \rightarrow B$  un monomorphisme strict plat, de source, un anneau réduit. Tout élément  $b$  de  $B$ , pour lequel il existe un élément régulier  $a$  de  $A$  tel que  $ab \in f(A)$ , appartient à  $A$ .

**Preuve :**

Dans ce cas  $\text{Ass}_A(B \otimes_A B)$  est contenu dans  $\text{Ass}_A(A)$  en vertu de [9] et un assassin de  $A$  est constitué de diviseurs de zéro.

### 3 - Factorisation d'un morphisme submersif par un morphisme submersif strict.

On se propose maintenant d'étudier le problème suivant :

soit  $A \rightarrow B$  un morphisme submersif, se factorisant en  $A \rightarrow D(B) \rightarrow B$ ,  
le morphisme  $D(B) \rightarrow B$  est-il submersif ?

S'il en est ainsi, le résultat suivant de J.P. Olivier :

**Lemme 23** : [12]

Soit  $f : A \rightarrow B$  un homomorphisme d'anneaux, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) La suite  $\text{Spec}(B \otimes_A B) \rightrightarrows \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$  est exacte dans la catégorie des schémas.

ii) Le morphisme  $f$  est submersif et strict.

montre qu'alors  $\text{Spec}(D(B))$  est le quotient dans la catégorie des schémas de  $\text{Spec}(B)$  par la relation d'équivalence définie par  $f$ .

Soit  $f : A \rightarrow B$  un morphisme d'anneaux,  $a$ -surjectif. Pour tout idéal premier  $P$  de  $A$ , soit  $k(P)$  le corps résiduel en  $P$ . Désignons par  $C(P)$  l'ensemble des éléments  $b$  de  $B$  vérifiant : il existe un élément  $k$  de  $k(P)$  pour lequel  $b \otimes 1 = 1 \otimes k$  dans  $B \otimes_A k(P)$ . Il est clair que  $C(P)$  est un sous-anneau de  $B$ . Soit l'anneau  $C$ , intersection des anneaux  $C(P)$ , on obtient une factorisation  $D(B) \rightarrow C \rightarrow B$ . En effet, puisque  $k(P)$  est un corps, le morphisme  $k(P) \rightarrow B \otimes_A k(P)$  est strict, donc le morphisme  $k(P) \rightarrow D(B) \otimes_A k(P) \rightarrow D(B \otimes_A k(P))$  est un isomorphisme. Par conséquent, si  $b$  est un élément de  $D(B)$ , il existe un élément  $k$  de  $k(P)$  tel que  $b \otimes 1 = 1 \otimes k$ . L'anneau  $C$  admet la définition élémentaire suivante : c'est l'ensemble des éléments  $b$  de  $B$ , tels que pour tout idéal premier  $P$  de  $A$  il existe un élément  $t$  de  $A-P$  et un élément  $a$  de  $A$  vérifiant  $f(t)b - f(a) \in P.B$ .

On peut remarquer déjà, que le morphisme  $D(B) \rightarrow C$  est strict, en vertu du résultat suivant : si  $g \circ f$  est un monomorphisme strict et si  $g$  est injectif, alors le morphisme  $f$  est strict.

**Proposition 24 :**

Soit un morphisme  $f : A \rightarrow B$ ,  $a$ -surjectif et soit une factorisation  $A \rightarrow A' \rightarrow C \rightarrow B$ , où  $A'$  est un sous-anneau de  $C$ . Si le morphisme  $A' \rightarrow B$  est  $a$ -surjectif, alors le morphisme  $A \rightarrow A'$  est  $a$ -injectif et les extensions résiduelles de ce morphisme sont des isomorphismes.

**Preuve :**

Le morphisme  $A \rightarrow A'$  est  $a$ -injectif : soient  $Q'_1$  et  $Q'_2$  des idéaux premiers de  $A'$  tels que les contractés dans  $A$  soient un même idéal premier  $P$ . Soit  $b$  un élément de  $Q'_1$ , il existe alors un élément  $s$  de  $A-P$  et un élément  $a$  de  $A$  tels que  $f(s)b - f(a) \in P.B \cap A'$ . Mais les inclusions  $P.B \cap A' = (P.A').B \cap A' \subset Q'_1.B \cap A'$  et la  $a$ -surjectivité de  $A' \rightarrow B$  entraînent que  $P.B \cap A' \subset Q'_1$ . Par conséquent,  $f(a)$  appartient à  $Q'_1$  donc à  $Q'_2$ . On en déduit que  $f(s)b$  est dans  $P.B \cap A' + Q'_2$ , mais, comme ci-dessus,  $P.B \cap A'$  est contenu dans  $Q'_2$ . Ainsi,  $f(s)b$  appartient à  $Q'_2$  et comme  $f(s)$  n'appartient pas à  $Q'_2$ , on voit que  $b$  appartient à  $Q'_2$ . Les extensions résiduelles de  $A \rightarrow A'$  sont des isomorphismes : soit  $P'$  un idéal premier de  $\text{Spec}(A')$  et soit  $P$  son contracté dans  $A$ , un élément de  $k(P')$  s'écrit  $\bar{a}' \bar{s}'^{-1}$ , où  $s'$  est un élément de  $A' - P'$ . Puisque  $a'$  est dans  $C$ , il existe un élément  $t$  de  $A-P$  et un élément  $a$  de  $A$  tels que  $f(t)a' = f(a) + z$  où  $z \in P.B$ . En utilisant le même raisonnement que ci-dessus, on voit que  $z$  appartient à  $P'$ . On en déduit  $\bar{a}' = \overline{f(a)} \overline{f(t)}^{-1}$ .

D'autre part, il existe un élément  $s$  de  $A-P$  et un élément  $b$  de  $A$  tels que  $f(s)s' = f(b) + v$  où  $v \in P.B$ , puisque  $s'$  appartient à  $C$ . Soit  $Q$  un idéal premier de  $B$  au-dessus de  $P$ , puisque le morphisme  $A \rightarrow A'$  est  $a$ -injectif, l'idéal  $Q$  se contracte en  $P'$  dans  $A'$ . Si  $f(b)$  était dans  $P.B$ , il en serait de même pour  $f(s)s'$ . Mais alors  $f(s)s'$  appartient à  $Q$  donne une contradiction, puisque  $s'$  n'appartient pas à  $P' = Q \cap A'$  et  $f(s)$  n'appartient pas à  $Q$ . Par conséquent,  $f(b)$  n'appartient pas à  $P.B$ , d'où  $b$  n'est pas dans  $P$ . Puisque  $v$  est dans  $P'$  on en déduit que  $\bar{s}' = \overline{f(b)} \overline{f(s)}^{-1}$ . En conclusion,  $\bar{a}' \bar{s}'^{-1} = \overline{f(as)} \overline{f(bt)}^{-1}$  et le morphisme  $k(P) \rightarrow k(P')$  est un isomorphisme.

Désignons, comme d'habitude, le noyau de  $B \rightarrow B \otimes_A k(P)$ , par  $I(P)$ , où  $P$  est un idéal premier de  $A$ .

**Lemme 25 :**

Soit  $f : A \rightarrow B$  un morphisme  $a$ -surjectif et soit une factorisation  $A \rightarrow A' \rightarrow C \rightarrow B$ , où  $A'$  est un sous-anneau de  $C$ . Si le morphisme  $A' \rightarrow B$  est  $a$ -surjectif, pour un idéal premier  $P'$  de  $A'$  se contractant en  $P$  dans  $A$ , on a la suite d'inclusions  $P.B \subset P'.B \subset I(P)$ .

**Preuve :**

On voit déjà que  $P.B = (P.A').B$  est contenu dans  $P'.B$ . Soit  $b$  un élément de  $P'.B$ , donc de la forme  $b = p'_1 b_1 + \dots + p'_n b_n$ , où  $p'_1, \dots, p'_n$  sont des éléments de  $P'$ . Pour tout indice  $i = 1, \dots, n$ , il existe un élément  $s_i$  de  $A-P$  et un élément  $a_i$  de  $A$  tels que  $f(s_i)p'_i = f(a_i) \in P.B$ . Mais  $P.B \subset P'.B$  entraîne  $f(a_i)$  appartient à  $P'.B$ , d'où  $a_i$  est dans  $P$ , par  $a$ -surjectivité de  $A' \rightarrow B$ . On en déduit que  $f(s_1 \dots s_n) b$  est dans  $P.B$ ; puisque  $s_1 \dots s_n \in A-P$ , on voit que  $b$  est dans  $I(P)$ .

**Proposition 26 :**

Soit  $f : A \rightarrow B$  un homomorphisme d'anneaux. Si les morphismes  $A \rightarrow B$  et  $C \rightarrow B$  sont  $a$ -surjectifs, le morphisme  $C \rightarrow B$  est strict.

**Preuve :**

Soit  $b$  un élément de  $D_C(B)$ . Considérons un idéal premier  $P$  de  $A$ , puisque le morphisme  $A \rightarrow C$  est  $a$ -surjectif, il existe un idéal premier  $P'$  de  $C$  au-dessus de  $P$ . Alors il existe un élément  $\omega'$  de  $C-P'$  et il existe un élément  $c$  de  $C$ , tels que  $\omega' b - c \in P'.B$ . Puisque le morphisme  $C \rightarrow B$  est  $a$ -surjectif, le lemme précédent montre qu'il existe un élément  $s$  de  $A-P$  tel que  $f(s)(\omega' b - c)$  soit dans  $P.B$ . Alors :

- a) L'élément  $\omega'$  étant dans  $C$ , il existe un élément  $\omega$  de  $A-P$  et un élément  $a$  de  $A$ , tels que  $f(\omega) \omega' - f(a) \in P.B$ . Mais  $f(a)$  n'appartient pas à  $P.B$ , sinon on aurait  $f(\omega) \omega' \in P.B$ ; considérant alors un idéal premier  $Q$  de  $B$ , au-dessus de  $P$ , nécessairement au-dessus de  $P'$ , par  $a$ -injectivité de  $A \rightarrow C$ , la relation  $f(\omega) \omega' \in Q$  conduit à la contradiction  $f(\omega) \in Q$  ou  $\omega'$  appartient à  $Q \cap C = P'$ . On en déduit que  $f(as) b - f(\omega s)c \in P.B$  et  $as \in A-P$ .
- b) L'élément  $c$  est dans  $C$ , il existe donc un élément  $t$  de  $A-P$  et un élément  $\alpha$  de  $A$ , tels que  $f(t)c - f(\alpha) \in P.B$ . On en déduit que  $f(ast)b - f(s \omega \alpha) \in P.B$ . Par suite  $b$  est dans  $C$ . Il résulte que  $C \rightarrow B$  est un morphisme strict.

**Proposition 27 :**

Soit  $f : A \rightarrow B$  un morphisme d'anneaux, submersif (resp. subtrusif). Le morphisme  $D(B) \rightarrow B$  est submersif (resp. subtrusif) si et seulement si l'une des assertions suivantes (équivalentes) est vérifiée.

- a) Le morphisme  $D(B) \rightarrow B$  est a-surjectif.
- b) Le morphisme  $A \rightarrow D(B)$  est a-injectif.
- c) Le morphisme  $D_2(B) \rightarrow D(B)$  est a-injectif.

Si l'une des conditions précédentes est réalisée, le morphisme  $A \rightarrow D(B)$  est un a-homéomorphisme dont les extensions résiduelles sont isomorphes. En particulier, il est radiciel.

**Preuve :**

Il est clair que si le morphisme  $D(B) \rightarrow B$  est submersif il est a-surjectif.

La proposition 24 montre que si le morphisme  $D(B) \rightarrow B$  est a-surjectif, le morphisme  $A \rightarrow D(B)$  est a-injectif. Si le morphisme  $A \rightarrow D(B)$  est a-injectif, puisqu'il est submersif, c'est un a-homéomorphisme, donc  $D(B) \rightarrow B$  est un morphisme submersif.

Soit  $P'$  un idéal premier de  $D(B)$ , se contractant en  $P$  dans  $A$ . Le morphisme  $B \otimes_A k(P) \rightarrow B \otimes_A k(P')$  est injectif car le morphisme  $k(P) \rightarrow k(P')$  est A-pur. D'autre part, le morphisme  $B \otimes_A k(P') \rightarrow B \otimes_{D_2(B)} k(P')$  est un isomorphisme.

Il suffit de montrer que le diagramme ci-dessous est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} D_2(B) & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ k(P') & \longrightarrow & B \otimes_A k(P') = B' \end{array}$$

En effet, soit  $b$  un élément de  $D_2(B)$ , alors  $b = \sum a_{i,j} b_i b'_j$  où les éléments  $b_i, b'_j$  sont dans  $D(B)$  et vérifient les relations, pour tout  $i$  et tout  $j$  :

$$\sum_i a_{i,j} b_i \in f(A) \quad \text{et} \quad \sum_j a_{i,j} b'_j \in f(A).$$

On en déduit alors facilement que  $b \otimes 1 = 1 \otimes \bar{b}$ . On obtient ainsi que le diagramme ci-dessus est cocartésien, et l'anneau  $B'$  est différent de 0, puisqu'il en est ainsi de  $B \otimes_A k(P)$ . Supposons maintenant que le morphisme  $D_2(B) \rightarrow D(B)$  soit a-injectif.

Soit  $P'$  un idéal premier de  $D(B)$ , il se remonte dans l'anneau  $B'$ . Soit  $Q$  le contracté dans  $B$  de cet idéal premier. Alors les idéaux  $P'$  et  $Q$  se contractent dans  $D_2(B)$  sur le même idéal premier ; par suite, il existe dans  $B$  un idéal premier  $Q$  au-dessus de  $P'$  : le morphisme  $D(B) \rightarrow B$  est a-surjectif. Réciproquement, si le morphisme  $A \rightarrow D(B)$  est a-injectif, il est clair que le morphisme  $D_2(B) \rightarrow D(B)$  est a-injectif.

**Théorème 28 :**

*Soit  $A \rightarrow B$  un morphisme universellement subtrusif, tel que le morphisme  $D(B) \rightarrow B$  soit a-surjectif, alors le morphisme  $D(B) \rightarrow B$  est universellement subtrusif et le morphisme  $A \rightarrow D(B)$  est entier radiciel.*

**Preuve :**

Le morphisme  $A \rightarrow D(B)$  étant radiciel et universellement subtrusif, est un a-homéomorphisme universel, donc un morphisme entier. Soit un changement de base  $D(B) \rightarrow A'$ . L'anneau  $D(B)$  sera noté  $D$ , pour la suite. Si  $A'$  est une algèbre de polynômes, à un nombre fini d'indéterminées, sur  $D$ , soit  $A' = D[X_1, \dots, X_n]$ , le morphisme  $A' \rightarrow B \otimes_D A'$  s'écrit  $D[X_1] \rightarrow B[X_1]$  et par platitude  $D_A(B \otimes_D A') = D[X_1]$ . En vertu de la proposition précédente, le morphisme  $A' \rightarrow B \otimes_D A'$  est subtrusif.

La proposition 15 du chapitre II de [14], montre alors que le morphisme  $D \rightarrow B$  est universellement subtrusif.

**Remarques :**

- 1) On pourrait obtenir pour le morphisme  $C \rightarrow B$  des résultats semblables.
- 2) La condition « $D(B) \rightarrow B$  est un morphisme a-surjectif» est vérifiée pour les morphismes entiers injectifs, pour les morphismes dans la classe  $\mathcal{C}$ . Si les structures de  $D$ -module sur  $D \otimes_A B$  sont les mêmes, i.e.  $d \otimes 1 = 1 \otimes d$  pour  $d \in D$ , alors le morphisme  $D(B) \rightarrow B$  est a-surjectif quand le morphisme  $A \rightarrow B$  l'est. Soit, en effet, la suite de morphismes  $B \otimes_A k(P') \rightarrow B \otimes_D k(P') \rightarrow (B \otimes_A D) \otimes_D k(P')$  où  $P'$  est un idéal premier de  $D$ . Le dernier anneau est non nul, car le morphisme  $D \rightarrow B \otimes_A D$  est a-surjectif, et isomorphe à  $B \otimes_A k(P')$ . On en déduit que l'anneau

$B \otimes_D k(P')$  est non nul. Ce qui précède est vrai en particulier lorsque  $B = D \otimes_A B$ .

3) On peut d'ailleurs remarquer qu'un morphisme strict n'est pas en général a-surjectif. Soit  $U = D(a_1, \dots, a_n)$  un ouvert quasi-compact, non admissible (la définition est donnée dans l'introduction) d'un spectre d'anneau  $A$ . Soit le morphisme  $A \rightarrow A[X_1, \dots, X_n] / (a_1 X_1 + \dots + a_n X_{n-1}) = B$  : ce morphisme est plat de présentation finie, d'image spectrale  $U$ . L'anneau des sections  $\mathcal{A}(U)$  n'est autre que  $D(B)$ . Si le morphisme  $D(B) \rightarrow B$  était a-surjectif, puisque le morphisme  $A \rightarrow B$  est plat, il serait fidèlement plat. Par suite, le morphisme  $A \rightarrow \mathcal{A}(U)$  serait plat, et d'après la proposition 3.1 de [18], exposé n° 4, en fait un épimorphisme plat. Donc  $U$  serait un ouvert admissible.

**Proposition 29 :**

*Soit  $A \rightarrow B$  un morphisme submersif à fibres réduites, tel que le morphisme  $C \rightarrow B$  soit a-surjectif. Alors l'anneau  $C$  est le plus grand des sous-anneaux  $A'$  de  $B$  satisfaisant :*

*Il existe une factorisation  $A \rightarrow A' \rightarrow B$  et le morphisme  $A \rightarrow A'$  est a-injectif, à extensions résiduelles isomorphes.*

**Preuve :**

Soit une factorisation  $A \rightarrow A' \rightarrow B$ , où  $A'$  est un sous-anneau de  $B$ , telle que le morphisme  $f : A \rightarrow A'$  soit a-injectif. Ce morphisme est alors un homéomorphisme. Soit  $P'$  un idéal premier de  $A'$ , au-dessus d'un idéal premier  $P$  de  $A$ . De  $\mathfrak{a}_f(V(P')) = V(P)$ , on déduit que  $V(P') = V(P.A')$ , d'où  $P' = r(P.A')$ . D'autre part,  $r(P.B) = r(r(P.A').B)$ , montre que  $r(P.B) = r(P'.B)$ . On en déduit que  $P'.B$  est contenu dans  $r(I(P))$ . Supposons de plus que les extensions résiduelles de  $A \rightarrow A'$  soient des isomorphismes, alors pour tout élément  $c$  de  $A'$ , il existe un élément  $t$  de  $A-P$  et un élément  $a$  de  $A$  tels que  $f(t) - c = f(a)$  soit dans  $P'$ . Mais ce dernier est contenu dans  $r(I(P)) = I(P)$ . On en déduit que  $c$  est dans  $C$ .

**Remarque :**

Supposons le morphisme  $A \rightarrow B$  universellement submersif et le morphisme  $C \rightarrow B$  a-surjectif. Le morphisme  $A \rightarrow C$  est alors entier. Si de plus  $A \rightarrow B$  est

injectif, l'anneau  $C$  est contenu dans le semi-normalisé de Traverso  $+ \mathbb{B}A$ . Voir, par exemple, la construction du semi-normalisé, revue par R.G. Swan [19].

## APPENDICE

La proposition suivante montre qu'un morphisme entier injectif admet une factorisation en un morphisme pur, universellement  $a$ -ouvert suivi d'une surjection, donc un épimorphisme.

**Proposition 30 :**

*Soit  $A \rightarrow A'$  un homomorphisme entier et injectif, il existe une factorisation  $A \rightarrow B \rightarrow A'$ , où  $A \rightarrow B$  est un homomorphisme entier fidèlement plat et universellement  $a$ -ouvert et  $B \rightarrow A'$  un homomorphisme surjectif de noyau  $I$  tel que  $I \cap A = 0$ . Si de plus l'homomorphisme  $A \rightarrow A'$  est de type fini, on peut supposer que l'homomorphisme  $A \rightarrow B$  est de présentation finie.*

**Preuve :**

Soit  $\{a'_\delta\}_{\delta \in D}$  un système de générateurs de la  $A$ -algèbre  $A'$ . Considérons l'application surjective canonique  $A[X_\delta]_{\delta \in D} \rightarrow A'$ , de noyau  $J$ . Il est clair que  $J \cap A = 0$ . De plus, pour tout élément  $\delta$  de  $D$ , il existe un polynôme unitaire à une variable  $f_\delta(X_\delta)$  dans  $J$ . Soit  $K$  l'idéal de  $A[X_\delta]_{\delta \in D}$  engendré par les polynômes  $f_\delta(X_\delta)$  pour  $\delta \in D$ . On pose alors  $B = A[X_\delta]_{\delta \in D}/K$ ; si  $I = J/K$ , alors  $I \cap A = 0$  et l'anneau  $B/I$  est égal à  $A'$ . Il reste à montrer que l'homomorphisme  $A \rightarrow B$  est plat et universellement  $a$ -ouvert puisqu'il est entier injectif. Considérons pour  $\delta \in D$ , les anneaux  $B_\delta = A[X_\delta]/(f_\delta(X_\delta))$ , l'anneau  $B$  est limite inductive des  $A$ -algèbres plates, de présentation finie  $B_{\delta_1} \otimes_A \dots \otimes_A B_{\delta_n}$ . En vertu de la proposition 8 du chapitre II de [14] la proposition est démontrée, puisque les morphismes structuraux sont  $a$ -surjectifs et universellement  $a$ -ouverts.

Ainsi, les morphismes entiers injectifs sont presque universellement  $a$ -ouverts. Or, S. Mac Adam a posé la question suivante : un homomorphisme d'anneaux, entier générant (ou universellement générant) est-il  $a$ -ouvert ? Rappelons qu'un morphisme d'anneaux est dit générant s'il vérifie le théorème de Going down, pour les idéaux premiers. Il est bien connu de plus qu'un morphisme  $a$ -ouvert est générant. La réponse

au problème ci-dessus est négative. Pour le voir, nous avons besoin de quelques notions. Un anneau est dit de Baer si l'annulateur de tout idéal est un idéal principal engendré par un idempotent. Un anneau de Baer est réduit et tout anneau réduit  $A$  admet une enveloppe de Baer  $A \rightarrow B(A)$ , c'est-à-dire un morphisme entier essentiel de  $A$  dans un anneau de Baer  $B(A)$ . Pour toutes ces propriétés, on peut consulter, par exemple, l'article suivant : G. Picavet : Ultrafiltres sur un espace spectral, anneaux de Baer, anneaux à spectre minimal compact, *Math. Scand.*, 46 (1980) pages 23-53.

Soit maintenant un anneau absolument plat, qui ne soit pas de Baer. Soit le morphisme  $A \rightarrow B(A)$ , ce morphisme est plat, donc universellement générant, entier essentiel, mais il n'est pas  $a$ -ouvert : si c'était le cas, l'anneau  $A$  serait de Baer, en vertu de la proposition 12 de l'article cité ci-dessus.

**BIBLIOGRAPHIE**

- [ 1 ] M. Barr, P.A. Grillet, D.H. Van Osdol, *Exact categories and categories of sheaves*, Springer Verlag, *Lecture Notes in Mathematics*, n° 236, (1971).
- [ 2 ] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*.
- [ 3 ] D. Ferrand, J.P. Olivier : *Homomorphismes minimaux d'anneaux*. *J. Algebra* 16, 461-471 (1970).
- [ 4 ] L. Gruson, M. Raynaud : *Critères de platitude et projectivité*. *Invent. Math.* 13, 1-89 (1971).
- [ 5 ] P. Gabriel : *Des catégories Abéliennes*. *Bull. Soc. Math. France* 90 (1962).
- [ 6 ] G.M. Kelly : *Monomorphisms, epimorphisms and pull-backs*. *J. Austral. Math. Soc.* 9, 124-142 (1969).
- [ 7 ] D. Lazard, P. Huet : *Dominion des anneaux commutatifs*. *Bull. Sc. Math. Ser. 2-94*, 193-199 (1970).
- [ 8 ] D. Lazard : *Autour de la platitude*. *Bull. Soc. Math. France* 97, 81-128 (1969).
- [ 9 ] D. Lazard : *Ass de modules plats*. *C.R. Acad. Sc. Paris Ser. A* 269, 65-67 (1969).
- [ 10 ] J. Merker : *Idéaux faiblement associés*. *Bull. Sc. Math. Ser. 2-93*, 15-21 (1969).
- [ 11 ] K. Morita : *Flat modules, injective modules and quotient rings*. *Math. Z.* 120, 25-40 (1971).
- [ 12 ] J.P. Olivier : *Descente de quelques propriétés élémentaires par morphismes purs*. *Un. Sc. Tech. Languedoc*, 112, 47-85, Montpellier (1970-1971).

- [13] J. Ohm, D.E. Rush : Content modules and Algebras. *Math. Scand.* 31, 49-68 (1972).
- [14] G. Picavet : Submersion et descente. *J. Algebra* 103, 527-591 (1986).
- [15] G. Picavet : Factorisation des morphismes d'anneaux par des morphismes purs et morphismes entiers purs. A paraître.
- [16] R. Pupier : Sur les catégories complètes. *Publ. Dep. Math. Lyon*, 2-2, 1-65 (1965).
- [17] D. Sanders : The dominion and separable subalgebras of finitely generated algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.* 48, 167 (1975).
- [18] Séminaire Samuel : Les épimorphismes d'anneaux. Secrétariat Mathématique Paris (1967-1968).
- [19] R.G. Swan : On semi-normality. *J. Algebra* 67, 210-229 (1980).

Reçu en novembre 1986.

Université de Clermont II, U.F.R. Sciences, Mathématiques Pures, 63170 - Aubière, France.

Adresse personnelle : 8, rue du Forez, 63670 Le Cendre, France.