

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

ABDALLAH BADRA

Sous-catégories pleines d'une catégorie dérivée filtrée

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 91, série *Mathématiques*, n° 24 (1987), p. 105-139

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1987__91_24_105_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOUS-CATEGORIES PLEINES D'UNE CATEGORIE DERIVEE FILTREE

Abdallah BADRA

Introduction :

Soient C une catégorie, C_S sa localisée par rapport à un ensemble multiplicatif de C et D une sous-catégorie pleine de C telle que $S \cap D$ soit un ensemble multiplicatif de D . La condition (*) suivante : pour toute flèche $s : X \rightarrow Y$ de S avec $Y \in D$ il existe $Z \in \text{Obj}(D)$ et $t : Z \rightarrow X$ de C tels que $s \circ t \in S$; est suffisante pour que le foncteur $\alpha : D_{S \cap D} \rightarrow C_S$ soit pleinement fidèle.

Le cas classique est celui où C est la catégorie $K^-(\mathcal{A})$ des complexes, à composantes dans une catégorie abélienne \mathcal{A} , bornés à droite et définis à homotopie près. $S = \text{QIS}^-(\mathcal{A})$ est alors l'ensemble des quasi-isomorphismes de $K^-(\mathcal{A})$. Si $D = K^-(\mathcal{P})$ où \mathcal{P} est la sous-catégorie des objets projectifs de \mathcal{A} . La condition (*) est réalisée. Dans le § 2, on montre que le foncteur α reste pleinement fidèle pour $D = K^1(\mathcal{B})$ (complexes de longueur 1) où \mathcal{B} est une catégorie additive de \mathcal{A} vérifiant la condition, plus faible que (*), suivante (***) pour tout quasi-isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \longrightarrow & M_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_1 & \longrightarrow & P_0 \end{array}$$

de $K^1(\mathcal{A})$ où P_0 et M_1 sont dans \mathcal{B} , $M_1 \in \text{Obj}(\mathcal{B})$ ssi $P_0 \in \text{Obj}(\mathcal{B})$.

Dans l'étude de certains problèmes on est amené à remplacer \mathcal{A} par une catégorie plus générale. Si \mathcal{A}' et \mathcal{A} sont des catégories abéliennes, $T : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur additif. Pour définir une catégorie dérivée filtrée, on remplace, dans ce qui précède \mathcal{A} , par la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ des objets $(L', L \xleftarrow{i} L)$ où $L' \in \text{Obj}(\mathcal{A}')$ et i une flèche de \mathcal{A} avec $L = T(L')$. Dans le § 3 on montre qu'une condition analogue à (***) sur une sous-catégorie \mathcal{B} de $\mathcal{F}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ entraîne que $D^{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$ est une sous-catégorie pleine de $D^{\mathcal{F}}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$. Deux exemples sont donnés au § 4.

§ 1 - Catégories localisées

Définition 1 :

Si C est une catégorie et S un ensemble de morphismes de C , une catégorie localisée de C par rapport à S est la donnée d'une catégorie C_S et d'un foncteur $F : C \rightarrow C_S$ tels que :

- 1) Pour tout élément $s \in S$, $F(s)$ soit un isomorphisme de C_S .
- 2) Tout foncteur $F' : C \rightarrow D$, tel que $F'(s)$ soit un isomorphisme de D , pour tout $s \in S$, se factorise de façon unique par F .

Définition 2 :

Soit C une catégorie et S un ensemble de morphismes de C . On dit que S est un ensemble multiplicatif s'il vérifie les propriétés suivantes :

- 1) Pour tout élément $s \in S$ et tout $t \in S$, $st \in S$ et pour tout objet M de C , $\text{id}_M \in S$.
- 2) a) Tout diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & & \downarrow s \\ M & \xrightarrow{\quad} & N \\ & f & \end{array}$$

de C , où $s \in S$, se complète en un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{g} & P \\ t \downarrow & & \downarrow s \\ M & \xrightarrow{\quad} & N \\ & f & \end{array}$$

où $t \in S$.

- b) Tout diagramme

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{g} & P \\ t \downarrow & & \\ & & M \end{array}$$

de C , où $t \in S$, se complète en un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{g} & P \\ t \downarrow & & \downarrow s \\ M & \xrightarrow{\quad} & N \\ & f & \end{array}$$

où $s \in S$.

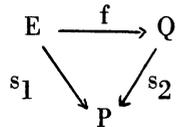
3) Si f et $g : M \longrightarrow N$ sont deux morphismes de C , alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a) Il existe $s : P \longrightarrow M$ de S tel que $fs = gs$.

b) Il existe $t : N \longrightarrow Q$ de S tel que $tf = tg$.

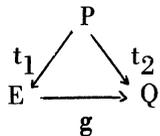
On dit que S permet un calcul de fractions bilatère .

Soient C une catégorie, S un ensemble multiplicatif pour tout objet P on considère la catégorie I_P dont les objets sont les éléments de S de but P et les morphismes sont les diagrammes commutatifs suivants :



f est un morphisme de C .

De même, on définit la catégorie J_P dont les objets sont les éléments de S , de source P , et les morphismes sont les diagrammes commutatifs suivants :



Remarque :

Les catégories I_P et J_P vérifient les axiomes L_1, L_2 et L_3 de [1] Ch 1 § 1.

En particulier, I_P et J_P sont cofiltrant et filtrant respectivement.

Soient C une catégorie et S un ensemble multiplicatif dans C .

On définit la catégorie C_S comme la catégorie dont les objets sont les objets de C et les morphismes sont définis de la façon suivante :

$$\text{Hom}_{C_S}(P, Q) = \varinjlim_{\substack{E \rightarrow P \\ s \in I_P}} \text{Hom}_C(E, Q)$$

Proposition 1 :

La catégorie C_S ainsi définie est une catégorie localisée de C par rapport à S .

Preuve :

Cf. [7] ch. 1 §3, prop. 3.1.

Remarque :

On peut définir C_S en posant

$$\text{Hom}_{C_S}(Q,P) = \varinjlim_{\substack{P \rightarrow E \\ t \\ t \in J_P}} \text{Hom}_C(Q,E)$$

Proposition 2 :

Soient C une catégorie, S un ensemble multiplicatif de C et D une sous-catégorie pleine de C telle que $S \cap D$ soit un ensemble multiplicatif de D .

Supposons que l'une des deux propriétés suivantes soit vérifiée :

a) pour tout morphisme $s : M \rightarrow N$ de S où N est un objet de D , il existe un objet P de D et un morphisme $f : P \rightarrow M$ de C tel que sf soit un élément de S .

b) Pour tout morphisme $t : M \rightarrow N$ de S où M est un objet de D , il existe un morphisme $g : N \rightarrow P$ de C , avec P un objet de D , tel que gt soit un élément de S .

Alors $D_S \cap D$ est une sous-catégorie pleine de C_S .

Preuve :

Découle des définitions.

§ 2 - Sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne

Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne. On note $C(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes d'objets de \mathcal{A} et $K(\mathcal{A})$ la catégorie dont les objets sont les objets de $C(\mathcal{A})$ et les morphismes sont les classes de morphismes à homotopie près. On considère $\text{QIS}(\mathcal{A})$ l'ensemble des quasi-isomorphismes de $K(\mathcal{A})$ (i.e. l'ensemble des morphismes qui induisent un isomorphisme en cohomologie).

Proposition 1 :

$\text{QIS}(\mathcal{A})$ est un ensemble multiplicatif de $K(\mathcal{A})$.

Cf [7] ch. 1 § 4 prop. 4.1.

Définition 1 :

La catégorie dérivée de \mathcal{A} , $D(\mathcal{A})$ est la catégorie localisée $K(\mathcal{A})_{\text{QIS}(\mathcal{A})}$ de $K(\mathcal{A})$ par rapport à l'ensemble des quasi-isomorphismes $\text{QIS}(\mathcal{A})$.

On définit de la même façon $D^-(\mathcal{A})$ (resp. $D^+(\mathcal{A})$, resp. $D^b(\mathcal{A})$) en remplaçant $K(\mathcal{A})$ par la sous-catégorie pleine $K^-(\mathcal{A})$ (resp. $K^+(\mathcal{A})$, resp. $K^b(\mathcal{A})$) formée des complexes bornés à droite (resp. à gauche, resp. à droite et à gauche).

Proposition 2 :

Soit \mathcal{P} la sous-catégorie pleine de \mathcal{A} formée par les objets projectifs. Le foncteur naturel $D^-(\mathcal{P}) \xrightarrow{\alpha} D^-(\mathcal{A})$ est pleinement fidèle, et si \mathcal{A} contient suffisamment de projectifs, alors α est une équivalence de catégories.

Preuve :

La première assertion découle de la proposition 2 § 1 et de [7] ch. 1 prop. 4.2.

La seconde assertion se démontre en remarquant que pour tout complexe M de $K^-(\mathcal{A})$ il existe un quasi-isomorphisme $s : P \rightarrow M$ où P est un objet de $K^-(\mathcal{P})$.

Soit $K^1(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $K(\mathcal{A})$ formée des complexes de longueur 1. On notera $\text{QIS}^1(\mathcal{A}) = \text{QIS}(\mathcal{A}) \cap K^1(\mathcal{A})$.

Soit \mathcal{B} une sous-catégorie additive pleine de \mathcal{A} vérifiant la propriété suivante :

i) Pour tout élément de $\text{QIS}^1(\mathcal{A})$

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \longrightarrow & P_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_1 & \longrightarrow & M_0 \end{array}$$

où P_1 et M_0 sont des objets de \mathcal{B} , alors M_1 est un objet de \mathcal{B} si et seulement si P_0 est un objet de \mathcal{B} .

Proposition 3 :

Soit le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} P. & & R. \\ & \searrow t. & \swarrow u. \\ & E. & \end{array}$$

dans $K(\mathcal{A})$, où $P.$ et $R.$ sont des objets de $K^1(\mathcal{B})$, $t.$ un quasi-isomorphisme. Il existe un objet $Q.$ de $K^1(\mathcal{B})$, des quasi-isomorphismes $s. : P. \rightarrow Q.$, $q. : Q. \rightarrow N.$, $h. : E. \rightarrow N.$ et un morphisme $v. : R. \rightarrow Q.$ tels que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} P. & & R. \\ & \searrow u. & \swarrow v. \\ t. \downarrow & & \downarrow \\ E. & \xrightarrow{s.} & Q. \\ & \searrow h. & \swarrow q. \\ & N. & \end{array}$$

commute dans $K(\mathcal{A})$.

Preuve :

On construit le quasi-isomorphisme $p. : M. \rightarrow E.$

$$\begin{array}{ccccccccccc} M. & = & \dots & \longrightarrow & E_2 & \xrightarrow{\gamma_2} & E_1 \times_{E_0} (P_0 \times R_0) & \xrightarrow{\gamma_1} & P_0 \times R_0 & & \\ & & & & \downarrow 1 & & \downarrow p_1 & & \downarrow p_0 & & \\ E. & = & \dots & \longrightarrow & E_2 & \xrightarrow{\delta_2} & E_1 & \xrightarrow{\delta_1} & E_0 & \xrightarrow{\delta_0} & E_{-1} \longrightarrow \dots \end{array}$$

où $p_0 = (t_0, u_0)$, p_1 et γ_1 sont les applications canoniques du produit fibré et

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} \delta_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On définit le morphisme

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & P_1 & \xrightarrow{d} & P_0 & \\
 & & & r_1 \downarrow & & \downarrow r_0 & \\
 \dots & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & E_1 \times_{E_0} (P_0 \times R_0) & \longrightarrow & P_0 \times R_0
 \end{array}$$

de la façon suivante : r_0 est l'injection canonique et r_1 est définie par la propriété universelle du produit fibré et découlant de la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 P_1 & \xrightarrow{(d,0)} & P_0 \times R_0 \\
 t_1 \downarrow & \delta_1 & \downarrow P_0 \\
 E_1 & \longrightarrow & E_0
 \end{array}$$

On a $p_0 r_0 = t_0$ et $p_1 r_1 = t_1$. Comme p et t sont des quasi-isomorphismes $r : P \rightarrow M$ est un quasi-isomorphisme.

On pose $Q = t_{[1]} M : M_1 / \text{Im}(\gamma_2) \rightarrow M_0$ et $g : M \rightarrow Q$.

le quasi-isomorphisme composé

$M \xrightarrow{p} E \xrightarrow{h} t_{[1]} E = N$ se factorise par Q .

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{h \cdot p} & N \\
 g \searrow & & \nearrow q \\
 & Q &
 \end{array}$$

où q est un quasi-isomorphisme. D'autre part, $g \cdot r$ est un quasi-isomorphisme.

Comme P_1, P_0 et Q_0 sont des objets de \mathcal{B} , Q_1 est un objet de \mathcal{B} . On définit

$f : R \rightarrow M$ de façon analogue à celle de r et on obtient le diagramme commutatif cherché en posant $g \cdot f = v$, $g \cdot r = s$.

Proposition 4 :

Soit le diagramme

$$(1) \quad \begin{array}{ccc}
 & E & \\
 t \swarrow & & \searrow u \\
 P & & R
 \end{array}$$

dans $K(\mathcal{A})$, où P et R sont des objets de $K^1(\mathcal{A})$ et t est un quasi-isomorphisme.

Il existe un objet Q de $K^1(\mathcal{A})$, des quasi-isomorphismes $q : M \rightarrow Q$ et $r : M \rightarrow E$, et un morphisme $v : Q \rightarrow R$ de $K(\mathcal{A})$ tels que le diagramme suivant :

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} & M & \\ r \swarrow & & \searrow q \\ E & & Q \\ t \downarrow & & \downarrow v \\ P & \xrightarrow{s} & R \end{array}$$

commute dans $K(\mathcal{A})$.

Preuve :

On construit le quasi-isomorphisme $p : E \rightarrow N$ suivant

$$(3) \quad \begin{array}{ccccccc} E = \dots & \longrightarrow & E_2 & \xrightarrow{\delta_2} & E_1 & \xrightarrow{\delta_1} & E_0 & \xrightarrow{\delta_0} & E_{-1} \\ & & & & \downarrow p_1 & & \downarrow p_0 & & \downarrow \\ N = & & 0 & \longrightarrow & P_1 \times R_1 & \xrightarrow{\gamma_1} & (P_1 \times R_1) \amalg_{E_1} E_0 & \xrightarrow{\gamma_0} & E_{-1} \longrightarrow \dots \end{array}$$

où $p_1 = (t_1, u_1)$, p_0 et γ_1 sont les applications canoniques de la somme amalgamée.

D'autre part, on définit $g : N \rightarrow P$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P_1 \times R_1 & \longrightarrow & (P_1 \times R_1) \amalg_{E_1} E_0 & \xrightarrow{\gamma_0} & E_{-1} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow g_1 & & \downarrow g_0 & & \\ & & P_1 & \xrightarrow{d} & P_0 & & \end{array}$$

g_1 est la projection sur le premier facteur et g_0 est définie par la propriété universelle de la somme amalgamée et découlant de la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\delta_1} & E_0 \\ p_1 \downarrow & & \downarrow t_0 \\ P_1 \times R_1 & \xrightarrow{(d)} & P_0 \end{array}$$

On a alors $g \cdot p \cdot = t \cdot$, ce qui entraîne que g est un quasi-isomorphisme.

On construit $f : N \rightarrow R$ de façon analogue à celle de g . On pose $Q = t \circ] N$.

et $w : Q \rightarrow N$ le quasi-isomorphisme canonique. On obtient un quasi-isomorphisme $s = g \cdot w : Q \rightarrow P$. Or, P_0, Q_1 et P_1 sont des objets de \mathcal{B} donc Q_0 est un objet de \mathcal{B} , ce qui entraîne que Q est un objet de $K^1(\mathcal{B})$.

De plus, le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & Q & \\ & \downarrow w & \\ E & \xrightarrow{p} & N \end{array}$$

se complète, dans $K(\mathcal{A})$, en un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{q} & Q \\ r \downarrow & & \downarrow w \\ E & \xrightarrow{p} & N \\ & p & \end{array}$$

où $M = t \circ] E$ et r et q sont les quasi-isomorphismes canoniques.

Le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{q} & Q & & \\ r \downarrow & & \downarrow w & & \\ E & \xrightarrow{p} & N & & \\ t \downarrow & \swarrow u & \searrow f & & \\ P & \xleftarrow{g} & R & & \end{array}$$

est donc commutatif. D'où le résultat cherché.

Proposition 5 :

Soit $u : Q \rightarrow P$ un morphisme de $K^1(\mathcal{A})$.

- a) s'il existe un élément $s' : E \rightarrow Q$ de $QIS(\mathcal{A})$ tel que $u \cdot s'$ soit nul dans $K(\mathcal{A})$ alors u est nul dans $K^1(\mathcal{A})$
- b) s'il existe un élément $t' : P \rightarrow E$ de $QIS(\mathcal{A})$ tel que $t' \cdot u$ soit nul dans $K(\mathcal{A})$ alors u est nul dans $K^1(\mathcal{A})$.

Preuve :

a) Soit $\iota : t_{01} E. \rightarrow E.$ le quasi-isomorphisme canonique. On pose

$s. = s.' \iota.,$ $u. s.$ est alors nul dans $K(\mathcal{A})$. Ce qui signifie que le morphisme de complexes u.s. $t_{01} E. \rightarrow P.$ est homotope à zéro.

Il existe un opérateur d'homotopie h qui fait commuter le diagramme suivant :

$$(1) \quad \begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\delta} & E'_0 = \text{Ker}(E_0 \longrightarrow E_1) \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow s_1 & \nearrow h & \downarrow s_0 \\ & & & & Q_1 & \xrightarrow{\gamma} & Q_0 \\ & & & & \downarrow u_1 & \nearrow k & \downarrow u_0 \\ & & & & P_1 & \xrightarrow{d} & P_0 \end{array}$$

comme $s.$ est un quasi-isomorphisme, Q_0 est isomorphe à la somme amalgamée $Q_1 \sqcup_{E_1} E'_0$.

Par la propriété universelle de la somme amalgamée, il existe une application $k : Q_0 \rightarrow P_1$ telle que $k \gamma = u_1$ et $d k = u_0 \cdot u.$ est donc homotope à zéro.

b) La démonstration est analogue à celle de a).

Proposition 6 :

$QIS^1(\mathcal{A})$ est un ensemble multiplicatif.

Preuve :

L'axiome 1) de la définition 2 du § 1 est évident.

L'axiome 3) découle de la proposition 5). Vérifions l'axiome 2).

a) Soit le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & P. \\ & & \downarrow s. \\ M. & \longrightarrow & N. \\ & & \downarrow f. \end{array}$$

de $K^1(\mathcal{A})$ où $s.$ est un quasi-isomorphisme. On peut le compléter dans $K^b(\mathcal{A})$ en un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 E. & \xrightarrow{g'} & P. \\
 t' \downarrow & & \downarrow s. \\
 M. & \xrightarrow{f} & N.
 \end{array}$$

avec t' un quasi-isomorphisme (§ 2. prop. 1).

On montre, en utilisant la proposition 4, qu'il existe un objet $Q.$ de $K^1(\mathcal{B})$, des quasi-isomorphismes $q. : E. \rightarrow Q.$ et $t. : Q. \rightarrow M.$ et un morphisme $g. : Q. \rightarrow P.$ tels que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 E. & \xrightarrow{g'} & P. \\
 \downarrow t' & \searrow q. & \nearrow g. \\
 & Q. & \\
 & \swarrow t. & \\
 M. & &
 \end{array}$$

commute dans $K(\mathcal{A})$. On conclut en remarquant que le diagramme de $K^1(\mathcal{B})$ suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 Q. & \xrightarrow{g.} & P. \\
 t. \downarrow & & \downarrow s. \\
 M. & \xrightarrow{f} & N.
 \end{array}$$

commute. En effet, on a $f.t' = f.t.q = s.g' = s.g.q$ dans $K(\mathcal{A})$, et comme $q.$ est un quasi-isomorphisme, la proposition (5) entraîne que $f.t = s.g$ dans $K^1(\mathcal{B})$.

On vérifie d'une façon analogue l'axiome 3) b).

Proposition 7 :

On note $D^1(\mathcal{B}) = K^1(\mathcal{B})_{QIS^1(\mathcal{B})}$. Le foncteur naturel $D^1(\mathcal{B}) \rightarrow D(\mathcal{A})$

est pleinement fidèle.

$D^1(\mathcal{B})$ est une sous-catégorie pleine de $D(\mathcal{A})$.

Preuve :

Découle des propositions 3), 4) et 5).

Remarque :

Les propositions 3), 4), 6) et 7) restent vraies si on remplace \mathcal{B} par la catégorie \mathcal{P} des objets projectifs de \mathcal{A} .

§ 3 - Catégories dérivées filtrées

Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne et $r \in \mathbb{N}$. On appelle $\mathcal{F}_r(\mathcal{A})$ la catégorie suivante :

Un objet de $\mathcal{F}_r(\mathcal{A})$ est la donnée de $r + 1$ objets de \mathcal{A} $l_0, l_1, l_2, \dots, l_r$ et de r flèches $i_j : l_j \rightarrow l_{j-1}$ de \mathcal{A} , il sera noté :

$\underline{L} = (l_0 \xleftarrow{i_1} l_1 \xleftarrow{i_2} l_2 \xleftarrow{\dots} \xleftarrow{i_r} l_r)$. Un morphisme $\underline{\varphi} : \underline{L} \rightarrow \underline{M}$ de $\mathcal{F}_r(\mathcal{A})$ est la donnée de $r + 1$ flèches $\varphi_k : l_k \rightarrow m_k$ commutant aux i_k et $j_k : m_k \rightarrow m_{k-1}$.

Proposition 1 :

Un morphisme $\underline{\varphi} : \underline{L} \rightarrow \underline{M}$ de $\mathcal{F}_r(\mathcal{A})$ est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) si et seulement si, pour tout k , $0 \leq k \leq r$. φ_k est un monomorphisme (resp. un épimorphisme).

Preuve :

Supposons que $\underline{\varphi} : \underline{L} \rightarrow \underline{M}$ est un monomorphisme de $\mathcal{F}_r(\mathcal{A})$.

Soit $\underline{\psi} : \underline{P} \rightarrow \underline{L}$ un morphisme de \mathcal{A} tel que $\varphi_k \circ \psi_k = 0$.

On considère l'objet $\underline{P} : (p \xleftarrow{\text{id}} p \xleftarrow{\text{id}} \dots \xleftarrow{\text{id}} p \xleftarrow{\text{id}} 0 \dots)$
k-ième

et on définit $\underline{\psi} : \underline{P} \rightarrow \underline{L}$ en posant

$$\psi_j = 0 \text{ si } j > k, \quad \psi_k = \psi \quad \text{et} \quad \psi_j = i_{j+1} \circ i_{j+2} \circ \dots \circ i_k \circ \psi \text{ pour } j < k.$$

On a alors : $\varphi_j \circ \psi_j = \varphi_j \circ i_{j+1} \circ \dots \circ i_k \circ \psi = i_{j+1} \circ i_{j+2} \circ \dots \circ \varphi_k \circ \psi = 0$.

On en déduit que $\underline{\psi}$ est nul car $\underline{\varphi}$ est un monomorphisme, ce qui entraîne que $\underline{\psi}$ est nul. La réciproque est évidente. La seconde assertion se démontre de façon analogue.

Corollaire 1 :

La catégorie $\mathcal{F}_r(\mathcal{A})$ est abélienne.

Soit $F_r(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}_r(\mathcal{A})$ des objets

$(l_0 \xleftarrow{i_1} l_1 \xleftarrow{\quad} l_2 \xleftarrow{\quad} \dots \xleftarrow{i_r} l_r)$ tels que i_j soit un monomorphisme pour tout $j \leq r$. On dira qu'un objet de $F_r(\mathcal{A})$ est un objet l_0 de \mathcal{A} muni d'une filtration à r -crans, ou r -filtrés.

Proposition 2 :

Pour tout objet \underline{L} de $\mathcal{F}_r(\mathcal{A})$ il existe un objet M de $F_r(\mathcal{A})$ et un épimorphisme

$$\underline{\varphi} : \underline{M} \longrightarrow \underline{L} \text{ de } \mathcal{F}_r(\mathcal{A}).$$

Preuve :

On dit que L est le cran 0 de la filtration et on le note l_0 :

On pose $m_j = \prod_{k=j}^r l_k$ pour tout $j \in \{0, \dots, r\}$.

On définit $x_j : l_j \times m_{j+1} \longrightarrow l_{j-1} \times l_j \times m_{j+1}$ par

$$x_j = \begin{pmatrix} i_j & 0 \\ \text{id}_{l_j} & 0 \\ 0 & \text{id}_{m_{j+1}} \end{pmatrix}; \text{ c'est un monomorphisme pour tout } j \in \{1, \dots, r\}$$

$\underline{M} = (m_0 \xleftarrow{x_1} m_1 \xleftarrow{x_2} m_2 \xleftarrow{\quad} \dots \xleftarrow{x_r} m_r)$ est un objet de $F_r(\mathcal{A})$.

On définit un épimorphisme $\underline{M} \longrightarrow \underline{L}$ de $F_r(\mathcal{A})$ en appelant $\varphi_j : m_j \longrightarrow l_j$

la projection canonique, en effet, le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} l_{j-1} \times l_j \times m_{j+1} & \xrightarrow{\varphi_{j-1}} & l_{j-1} \\ \uparrow x_j & & \uparrow i_j \\ l_j \times m_{j+1} & \xrightarrow{\varphi_j} & l_j \end{array}$$

commute pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$.

Corollaire 1 :

Pour tout complexe \underline{L} . d'objets de $\mathcal{F}_r(\mathcal{A})$ borné à droite, il existe un quasi-isomorphisme $\underline{s} : \underline{M} \rightarrow \underline{L}$. où \underline{M} . est un complexe d'objets de $F_r(\mathcal{A})$ borné à droite.
Cf. [7] ch. 1.

Dans ce qui suit, le signe $*$ désignera l'un des signes $+$, $-$, b ou $n \in \mathbb{N}$.

On notera $C_{\mathcal{F}_r}(\mathcal{A})$ (resp. $K_{\mathcal{F}_r}(\mathcal{A})$, resp. $QIS_{\mathcal{F}_r}(\mathcal{A})$) la catégorie des complexes d'objets de $\mathcal{F}_r(\mathcal{A})$, les morphismes sont les morphismes de complexes (resp. les classes de morphismes de complexes à homotopies près, resp. les quasi-isomorphismes, c'est-à-dire les morphismes qui induisent des quasi-isomorphismes sur chaque cran de la filtration). On définit de la même façon les catégories $CF_r(\mathcal{A})$, $KF_r(\mathcal{A})$, $QISF_r(\mathcal{A})$, $CF_r^*(\mathcal{A})$, $KF_r^*(\mathcal{A})$ et $QISF_r^*(\mathcal{A})$.

Remarque :

- 1) $QIS_{\mathcal{F}_r}(\mathcal{A})$ et $QIS_{\mathcal{F}_r^*}(\mathcal{A})$ sont des ensembles multiplicatifs de $K_{\mathcal{F}_r}(\mathcal{A})$
- 2) $QISF_r(\mathcal{A})$ et $QISF_r^*(\mathcal{A})$ sont des ensembles multiplicatifs de $KF_r(\mathcal{A})$.

On notera $D_{\mathcal{F}_r}(\mathcal{A}) = K_{\mathcal{F}_r}(\mathcal{A})_{QIS_{\mathcal{F}_r}(\mathcal{A})}$, $DF_r(\mathcal{A}) = KF_r(\mathcal{A})_{QISF_r(\mathcal{A})}$
 $D_{\mathcal{F}_r^*}(\mathcal{A}) = K_{\mathcal{F}_r^*}(\mathcal{A})_{QIS_{\mathcal{F}_r^*}(\mathcal{A})}$ et $DF_r^*(\mathcal{A}) = KF_r^*(\mathcal{A})_{QISF_r^*(\mathcal{A})}$

Théorème 1 :

Le foncteur naturel $DF_r(\mathcal{A}) \xrightarrow{\alpha} D_{\mathcal{F}_r}(\mathcal{A})$ est une équivalence de catégories.

Découle du corollaire 1 et de la proposition 2 du § 1.

Soient \mathcal{A}' et \mathcal{A} deux catégories abéliennes et T un foncteur additif exact à droite de \mathcal{A}' dans \mathcal{A} . On notera $\mathcal{F}_r(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ la catégorie des couples

$\underline{L} = (L', L \xleftarrow{i_1} l_1 \leftarrow l_2 \leftarrow \dots \leftarrow l_r)$ où L' est un objet de \mathcal{A}' et $(L \xleftarrow{i_1} l_1 \leftarrow l_r \leftarrow \dots)$ un objet de $\mathcal{F}_r(\mathcal{A})$ (où on a noté $l_0 = L$) tel que $T(L') = L$.

Un morphisme de $\underline{L} = (L', L \xleftarrow{i_1} l_1 \leftarrow \dots)$ dans $\underline{M} = (M', M \xleftarrow{j_1} m_1 \leftarrow \dots)$ de $\mathcal{F}_r(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ est la donnée d'un morphisme $\Phi' : L' \rightarrow M'$ et un morphisme $\varphi : (L \leftarrow l_1 \leftarrow \dots) \rightarrow (M \leftarrow m_1 \leftarrow \dots)$ de $\mathcal{F}_r(\mathcal{A})$ tel que $T(\Phi') = \varphi \circ \Phi$ que l'on notera Φ . On désigne par $F_r(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}_r(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ formée des objets $\underline{L} = (L', L \leftarrow l_1 \leftarrow \dots)$ tel que $(L \leftarrow l_1 \leftarrow \dots) \in \text{Obj}(F_r(\mathcal{A}))$

On notera $C^{\mathcal{F}_r}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ (resp. $K^{\mathcal{F}_r}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$) la catégorie des complexes d'objets de $\mathcal{F}_r(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ (resp. à homotopie près) : On dira qu'un morphisme de $C^{\mathcal{F}_r}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ ou de $K^{\mathcal{F}_r}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$, φ est un quasi-isomorphisme si $\Phi', \Phi = T(\Phi')$ et φ sont des quasi-isomorphismes. On notera $\text{QIS}^{\mathcal{F}_r}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ l'ensemble des quasi-isomorphismes de $K^{\mathcal{F}_r}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$. On définit les catégories $C^{\mathcal{F}_r^*}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$, $K^{\mathcal{F}_r^*}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ et $\text{QIS}^{\mathcal{F}_r^*}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$.

Proposition 3 :

Soit le diagramme suivant :

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \underline{P} & & \underline{R} \\ & \searrow \underline{t} & \swarrow \underline{u} \\ & \underline{E} & \end{array}$$

de $K^{\mathcal{F}_r}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ où \underline{P} et \underline{R} sont des objets de $K^{\mathcal{F}_r^1}(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ et \underline{t} un quasi-isomorphisme.

Il existe un objet \underline{Q} de $K^{\mathcal{F}_r^1}(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ des quasi-isomorphismes $\underline{s} : \underline{P} \rightarrow \underline{Q}$,

$\underline{q} : \underline{Q} \rightarrow \underline{N}$ et $\underline{f} : \underline{E} \rightarrow \underline{N}$ et un morphisme $\underline{v} : \underline{R} \rightarrow \underline{Q}$ tels que le diagramme

suivant :

$$(2) \quad \begin{array}{ccccc} \underline{P} & & & & \underline{R} \\ & \searrow \underline{s} & & \swarrow \underline{v} & \downarrow \underline{y} \\ & & \underline{E} & & \underline{Q} \\ & \searrow \underline{t} & \swarrow \underline{f} & \swarrow \underline{q} & \\ & & & & \underline{N} \end{array}$$

commute.

Preuve :

D'après la proposition 3 du § 2, et en adoptant des notations similaires, il suffit de

prouver que l'image du complexe

$$t_{[1]} M' : E'_0 \times_{E'_0} (P'_0 \times R'_0) / \text{Im}(\Lambda'_2) \longrightarrow P'_0 \times R'_0, \text{ par le}$$

foncteur T, est le complexe $t_{[1]} M. : E_1 \times_{E_0} (P_0 \times R_0) / \text{Im}(\Lambda_2) \longrightarrow P_0 \times R_0$

Dans le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & E'_2 & \xrightarrow{\Lambda'_2} & E'_1 \times_{E'_0} (P'_0 \times R'_0) & \xrightarrow{\Lambda'_1} & P'_0 \times R'_0 \\ & & \downarrow \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & E'_2 & \xrightarrow{\Delta'_2} & E'_1 & \xrightarrow{\Delta'_1} & E'_0 \longrightarrow E'_{-1} \longrightarrow \dots \end{array}$$

$E'_1 \times_{E'_0} (P'_0 \times R'_0) / \text{Im} \Lambda'_2 \xrightarrow{\sim} E'_1 / \text{Im} \Delta'_2 \times_{E'_0} (P'_0 \times R'_0)$. Et comme la flèche $T(E'_1 / \text{Im} \Delta'_2) \xrightarrow{\sim} E_1 / \text{Im} \Delta_2$ est un isomorphisme, la commutativité du

diagramme

$$\begin{array}{ccc} T(Q'_1) = T(E'_1 / \text{Im} \Delta'_2 \times_{E'_0} (P'_0 \times R'_0)) & \longrightarrow & P_0 \times R_0 = Q_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_1 / \text{Im} \Delta_2 & \longrightarrow & E_0 \end{array}$$

entraîne l'existence d'un morphisme φ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & P_1 & \longrightarrow & P_0 \\ & \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\ P_1 & \longrightarrow & P_0 & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \nearrow \varphi & Q_1 & \longrightarrow & Q_0 \\ T(Q'_1) & \longrightarrow & Q_0 & & \end{array}$$

donc φ est un isomorphisme.

Proposition 4 :

Soit le diagramme

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} & \underline{E} & \\ \underline{t} \swarrow & & \searrow \underline{u} \\ \underline{P} & & \underline{R} \end{array}$$

dans $K\mathcal{F}_r(\mathcal{A}', \mathcal{A})$, où \underline{P} et \underline{R} sont des objets de $K\mathcal{F}_r^1(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ et \underline{t} un quasi-isomorphisme. Il existe un objet \underline{Q} de $K\mathcal{F}_r^1(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ et des quasi-isomorphismes $\underline{q} : \underline{M} \rightarrow \underline{Q}$ et $\underline{r} : \underline{M} \rightarrow \underline{E}$, et un morphisme $\underline{v} : \underline{Q} \rightarrow \underline{R}$ de $K\mathcal{F}_r(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ tels que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} & & \underline{M} & & \\ & \swarrow \underline{r} & & \searrow \underline{q} & \\ \underline{E} & & & & \underline{Q} \\ \underline{t} \downarrow & & & & \downarrow \underline{v} \\ \underline{P} & \swarrow \underline{s} & & \searrow \underline{u} & \underline{R} \end{array}$$

commute dans $K\mathcal{F}_r(\mathcal{A}', \mathcal{A})$.

Preuve :

En adoptant des notations similaires à la proposition 4 du § 2 et en l'appliquant aux catégories \mathcal{A}' et \mathcal{A} . On obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \underline{E} & \xrightarrow{\underline{p}} & \underline{N} \\ \underline{t} \swarrow & & \searrow \underline{f} \\ \underline{P} & \xleftarrow{\underline{g}} & \underline{R} \end{array}$$

avec $\underline{N} = (N', N \leftarrow n)$ où N' et $(N \leftarrow n)$ sont définies comme dans le diagramme (3) de la proposition 4 du § 2. Appelons

$$K'_0 = \text{Ker} (E'_0 \xrightarrow{\Delta'_0} E'_{-1}) \xleftarrow{i} E'_0 \quad \text{et} \quad K_0 = \text{Ker} (E_0 \xrightarrow{\Delta_0} E_{-1}) \xleftarrow{j} E_0$$

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 T(E'_1) & \xrightarrow{T(l)} & T(K'_0) & \xrightarrow{T(i)} & T(E'_0) & \xrightarrow{T(\Delta'_0)} & T(E'_{-1}) \\
 \downarrow \parallel & & \downarrow \varphi & & \downarrow \parallel & & \downarrow \parallel \\
 E_1 & \xrightarrow{\Delta_1} & K_0 & \xrightarrow{j} & E_0 & \xrightarrow{\Delta_0} & E_{-1}
 \end{array}$$

où l et φ sont les applications canoniques. Comme T commute aux sommes amalgamées, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & E_1 & \xrightarrow{\Delta_1} & K_0 \\
 & \nearrow & \downarrow p_1 & & \downarrow \varphi \\
 T(E'_1) & \xrightarrow{\quad} & T(K'_0) & & \\
 \downarrow T(p'_1) & & \downarrow & & \downarrow \\
 T(P'_1) \times T(R'_1) & \xrightarrow{\quad} & T(P'_1) \times T(R'_1) & \xrightarrow{\psi} & (P_1 \times R_1) \sqcup_{E_1} K_0 \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & T(E'_1) \sqcup_{T(K'_0)} T(E'_1)
 \end{array}$$

ψ est l'application universelle de la somme amalgamée. On en déduit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 P_1 \times R_1 & \xrightarrow{\quad} & (P_1 \times R_1) \sqcup_{E_1} K_0 \\
 \downarrow & & \downarrow \psi \\
 T(P'_1) \times T(R'_1) & \xrightarrow{\quad} & T(P'_1) \times T(R'_1) \sqcup_{T(E'_1)} T(K'_0) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 T(P'_1) & \xrightarrow{\quad} & T(P'_0) & \xrightarrow{\quad} & P_0
 \end{array}$$

Ce qui prouve que ψ est un isomorphisme. On identifie alors l'image du complexe

$$t_{o_j} N' : P'_1 \times R'_1 \longrightarrow \text{Ker} (P'_1 \times R'_1 \sqcup_{E'_1} E'_0 \longrightarrow E'_{-1}).$$

par T au complexe $t_{o_j} N'$. Le couple $(t_{o_j} N', t_{o_j} N \longleftarrow t_{o_j} n)$

devient un objet de $K \mathcal{A}_r^1$ ($\mathcal{A}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$) que l'on notera $t_{o_j} \underline{N}$ ou \underline{Q} .

Et il existe un quasi-isomorphisme canonique $\underline{w} : t_{o_j} \underline{N} \longrightarrow \underline{N}$.

Il existe donc un diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{M} & \xrightarrow{\underline{q}} & \text{t.o.} \underline{N} = \underline{Q} \\
 \underline{r} \downarrow & & \downarrow \underline{w} \\
 \underline{E} & \xrightarrow{\underline{p}} & \underline{N}
 \end{array}$$

commutatif dans $K \mathcal{F}_r^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ où \underline{r} . et \underline{q} . sont des quasi-isomorphismes.

D'où le diagramme cherché.

Proposition 5 :

$QIS \mathcal{F}_r^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ est un ensemble multiplicatif.

Preuve :

L'axiome 1 de la définition 2 § 1, est évident et l'axiome 3 découle de la proposition 5 § 2.

Vérifions l'axiome 2).

a) Soit le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & & \underline{R} \\
 & & \downarrow \underline{s} \\
 \underline{P} & \xrightarrow{\underline{u}} & \underline{S}
 \end{array}$$

dans $K \mathcal{F}_r^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{A}, \mathcal{A}))$ considérons le complexe $\underline{M} : \underline{R}_1 \times \underline{P}_1 \xrightarrow{\underline{\varphi}_1} \underline{R}_0 \times \underline{S}_1 \times \underline{P}_0 \xrightarrow{\underline{\varphi}_0} \underline{S}_0$

$$\underline{M} : \underline{M}_1 \longrightarrow \underline{M}_0 \longrightarrow \underline{M}_1.$$

On note les différentielles de \underline{R} ., \underline{S} . et \underline{P} . δ , γ et d respectivement.

$$\underline{\varphi}_0 = (-\underline{s}_0, \underline{\gamma}, \underline{u}_0) \quad \text{et} \quad \underline{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ \underline{s}_1 & -\underline{u}_1 \\ 0 & \underline{d} \end{pmatrix}$$

On définit les morphismes $\underline{w} : \underline{M} \longrightarrow \underline{R}$. et $\underline{q} : \underline{M} \longrightarrow \underline{P}$.

Comme les projections canoniques. Comme \underline{s} . est un quasi-isomorphisme \underline{q} . est un quasi-isomorphisme et le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{M} & \xrightarrow{\underline{w}} & \underline{R} \\
 \underline{q} \downarrow & & \downarrow \underline{s} \\
 \underline{P} & \xrightarrow{\underline{u}} & \underline{S}
 \end{array}$$

commute à homotopie près, en effet :

On définit les opérateurs d'homotopies $\underline{h}_1 : \underline{R}_0 \times \underline{S}_1 \times \underline{P}_0 \longrightarrow \underline{S}_1$

par $\underline{h}_1 = (0, -\text{id}_{\underline{S}_1}, 0)$ et $\underline{h}_0 = \text{id}_{\underline{S}_0}$.

On obtient : $\underline{u}_1 \underline{q}_1 - \underline{s}_1 \underline{w}_1 = \underline{h}_1 \varphi_1$ et $\underline{u}_0 \underline{q}_0 - \underline{s}_0 \underline{w}_0 = \underline{\gamma} \underline{h}_1 + \underline{h}_0 \varphi_0$.

On considère les complexes $t_{o_j} M' : Q'_1 = R'_1 \times P'_1 \longrightarrow \text{Ker}(R'_0 \times S'_1 \times P'_0 \longrightarrow S'_0) = Q'_0$

et $t_{o_j} M : Q_1 = R_1 \times P_1 \longrightarrow \text{Ker}(R_0 \times S_1 \times P_0 \longrightarrow S_0) = Q_0$.

Il existe un morphisme $\psi : T(Q'_0) \longrightarrow Q_0$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & R_1 \times P_1 & \xrightarrow{\quad} & Q_0 \\
 & \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\
 R_1 \times P_1 & \xrightarrow{\quad} & T(Q'_0) & \xrightarrow{\psi} & Q_0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 P_1 & \xrightarrow{\quad} & P_1 & \xrightarrow{\quad} & P_0 \\
 & \searrow & & & \nearrow \\
 & & P_0 & &
 \end{array}$$

Ce qui entraîne que ψ est un isomorphisme et Q_0 est un objet de $\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$.

On obtient donc le diagramme commutatif cherché

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{Q} & \xrightarrow{\underline{v}} & \underline{R} \\
 \underline{t} \downarrow & & \downarrow \underline{s} \\
 \underline{P} & \xrightarrow{\underline{u}} & \underline{S}
 \end{array}$$

en appelant \underline{t} , le quasi-isomorphisme composé :

$$\begin{array}{ccccccc}
 t_{o_j} \underline{M} = & \underline{Q} & \longrightarrow & \underline{M} & \xrightarrow{\underline{q}} & \underline{P} & \\
 & \underline{Q} & \longrightarrow & \underline{M} & \xrightarrow{\underline{w}} & \underline{R} &
 \end{array}$$

b) Soit le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{S} & \xrightarrow{\underline{s}} & \underline{R} \\ \underline{u} \downarrow & & \\ \underline{P} & & \end{array}$$

dans $K \mathcal{F}_r(\mathcal{B}(\mathcal{A}, \mathcal{A}))$. On considère le complexe $\underline{M} : \underline{M}_2 \xrightarrow{\underline{\varphi}_2} \underline{M}_1 \xrightarrow{\underline{\varphi}_1} \underline{M}_0$ défini de la façon suivante :

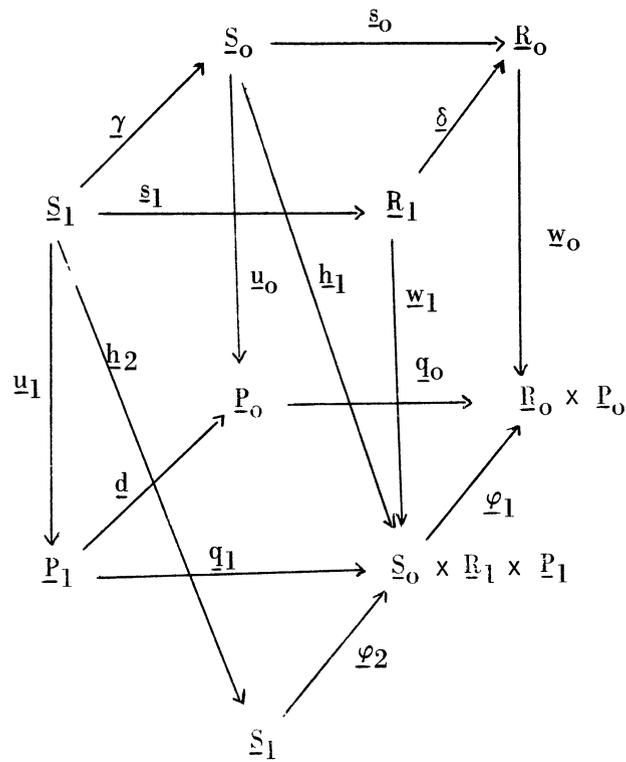
$$\underline{M} : \underline{S}_1 \xrightarrow{\underline{\varphi}_2} \underline{S}_0 \times \underline{R}_1 \times \underline{P}_1 \xrightarrow{\underline{\varphi}_1} \underline{R}_0 \times \underline{P}_0$$

$$\underline{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} \underline{\gamma} \\ -\underline{s}_1 \\ \underline{u}_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} \underline{s}_0 & \underline{\delta} & \underline{o} \\ -\underline{u}_0 & \underline{o} & \underline{d} \end{pmatrix}$$

Les flèches canoniques $\underline{R} \rightarrow \underline{M}$ et $\underline{P} \rightarrow \underline{M}$ font commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \underline{S} & \xrightarrow{\underline{s}} & \underline{R} \\ \underline{u} \downarrow & & \downarrow \underline{w} \\ \underline{P} & \xrightarrow{\underline{q}} & \underline{M} \end{array}$$

à homotopie près. En effet, en explicitant le diagramme précédent, on obtient :

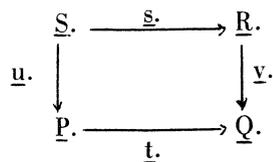


Où les opérateurs d'homotopie sont $h_1 = \begin{pmatrix} -id_{s_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$h_2 = id_{s_1}$. On a $q_0 u_0 - w_0 s_0 = \varphi_1 h_1$ et

$$q_1 u_1 - w_1 s_1 = h_1 \gamma + \varphi_2 h_2.$$

D'autre part q_1 est un quasi-isomorphisme car s_1 l'est et comme T est exact à droite, on peut tronquer le complexe \underline{M} . On obtient alors le diagramme commutatif cherché



où \underline{t} . est le quasi-isomorphisme composé $\underline{P}. \xrightarrow{q.} \underline{M}. \longrightarrow t_{[1]} \underline{M}. = \underline{Q}.$ et \underline{v} . est le morphisme composé $\underline{R}. \xrightarrow{w.} \underline{M}. \longrightarrow t_{[1]} \underline{M}.$

$\underline{Q}.$ est un objet de $K \mathcal{F}_r^1(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ car \underline{t} . est un quasi-isomorphisme et \underline{M}_0 est dans $\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$.

On définit $D \mathcal{F}_r^1(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ comme la catégorie localisée

$$K \mathcal{F}_r^1(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A})) \text{ QIS } \mathcal{F}_r^1(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A})).$$

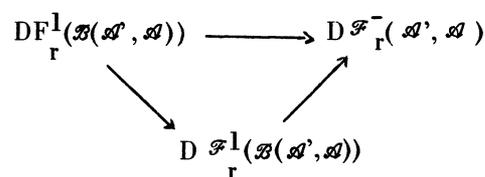
Théorème 2 :

Le foncteur naturel $D \mathcal{F}_r^1(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A})) \longrightarrow D \mathcal{F}_r^-(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ est pleinement fidèle.

$D \mathcal{F}_r^1(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ est une sous-catégorie pleine de $D \mathcal{F}_r^-(\mathcal{A}', \mathcal{A})$.

Théorème 3 :

Les foncteurs du diagramme commutatif suivant :



sont pleinement fidèles.

§4. Catégories dérivées filtrées :

Exemple 1 :

Soit $\chi : B \longrightarrow A$ un homomorphisme d'anneaux. On appellera \mathcal{A}' la catégorie des B-modules et \mathcal{A} la catégorie de A-modules.

$T : \mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{A}$ est le foncteur produit tensoriel $T(L') = L' \otimes_B A$.

Soit $\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ la sous-catégorie de $F_1(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ formée des objets $L = (L', L \xrightarrow{i} l)$ tels que, L, l et $\mathcal{L} = L/l$ soient projectifs de type fini. On dira que l est la filtration de L sur A et \mathcal{L} sa cofiltration.

$\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ est une sous-catégorie pleine de $F_1(\mathcal{A}', \mathcal{A})$.

Remarque :

La catégorie $\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ vérifie la propriété i) du § 3. On en déduit que

$\text{QIS } F_1^1(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ est un ensemble multiplicatif. (Pour une autre démonstration de ce résultat cf. [3]). On en déduit, d'autre part, le :

Théorème 1 :

Le foncteur naturel $DF_1^1(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A})) \longrightarrow D\mathcal{F}_1^-(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ est pleinement fidèle.

Lemme 1 :

Soient \mathcal{A} une catégorie abélienne et \mathcal{P} la sous-catégorie des objets projectifs de \mathcal{A} .

Soit L un objet de $C^-(\mathcal{P})$ acyclique en degré $i < k$. Alors $t_{k,i} L$ est un objet de $C^-(\mathcal{P})$.

Preuve :

Comme L est borné à droite et acyclique pour $i < k$, la suite

$0 \longrightarrow \text{Ker}(d_{L_k}) \longrightarrow L_{k-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow L_h \longrightarrow 0$ est exacte et est

scindée, donc $\text{Ker}(d_{L_k})$ est un objet de \mathcal{P} .

Lemme 2 :

Soient M . un objet de $C^n(\mathcal{P})$, que l'on suppose à composantes nulles en dehors de $[0, n]$, et L . un objet de $C^-(\mathcal{P})$. S'il existe un quasi-isomorphisme $s. : M. \rightarrow L$. ou un quasi-isomorphisme $t. : L. \rightarrow M$. alors les complexes $t_{[0]} L.$ et $t_{[n]} L.$ sont des objets de $C^-(\mathcal{P})$ et le complexe $t_{[n]} t_{[0]} L.$ est un objet de $C^n(\mathcal{P})$.

Preuve :

L'existence de l'un des quasi-isomorphismes s . ou t . entraîne que L . est acyclique en dehors de $[0, n]$. $t_{[0]} L.$ est donc un objet de $C^-(\mathcal{P})$.

Dans le premier cas, le morphisme composé $M. \xrightarrow{s.} L. \xrightarrow{t.} t_{[n]} L.$

est un quasi-isomorphisme, son cône est la suite exacte

$$0 \rightarrow M_n \rightarrow L_n / \text{Im } d_{n+1} \oplus M_{n-1} \rightarrow L_{n-1} \oplus M_{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow L_1 \oplus M_0 \rightarrow L_0 \rightarrow L_{-1} \rightarrow \dots \rightarrow L_{-h} \rightarrow 0$$

comme toutes les composantes L_i et M_i sont des objets de \mathcal{P} , $L_n / \text{Im } d_{n+1}$ est un objet de \mathcal{P} . Ce qui prouve que $t_{[n]} L.$ est un objet de $C^-(\mathcal{P})$.

Dans le second cas, t . se factorise par le quasi-isomorphisme $\iota. : t_{[n]} L. \rightarrow M$.

en considérant son cône, on démontre de la même façon que $t_{[n]} L.$ est un objet de $C^-(\mathcal{P})$.

On en déduit que $t_{[n]} t_{[0]} L.$ est un objet de $C^n(\mathcal{P})$.

Proposition 1 :

Soit $\underline{L}. = (L', L, \leftarrow 1)$ un objet de $C^-(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ acyclique (i.e. L' , L . et l . sont acycliques). En dehors de $[0, n]$, $n \in \mathbb{N}$. On note \mathcal{L} . sa cofiltration et $(d_{L'}, d_L, d_l)$ sa différentielle et $d_{\mathcal{L}}$. la différentielle induite sur sa cofiltration. On suppose que $L'_n / \text{Im}(d_{L', n+1})$, $L_n / \text{Im}(d_{L, n+1})$, $l_n / \text{Im}(d_{l, n+1})$ et $\mathcal{L}_n / \text{Im}(d_{\mathcal{L}, n+1})$ sont projectifs.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \mathcal{L}_{n+1} & \longrightarrow & \mathcal{L}_n & \longrightarrow & \mathcal{L}_n/\text{Im}(d_{\mathcal{L}_n}) \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \text{Ker}(d_{L_{n+1}}) & \longrightarrow & L_{n+1} & \longrightarrow & L_n & \longrightarrow & L_n/\text{Im}(d_{L_n}) \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \text{Ker}(d_{l_{n+1}}) & \longrightarrow & l_{n+1} & \longrightarrow & l_n & \longrightarrow & l_n/\text{Im}(d_{l_n}) \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

et la surjectivité des applications du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 L_{n+2} & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{L_{n+1}}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{L}_{n+2} & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{\mathcal{L}_{n+1}})
 \end{array}$$

entraîne la suite exacte $0 \longrightarrow l_n/\text{Im}(d_{l_{n+1}}) \longrightarrow L_n/\text{Im}(d_{L_{n+1}}) \longrightarrow \mathcal{L}_n/\text{Im}(d_{\mathcal{L}_{n+1}}) \longrightarrow 0$

D'où la deuxième assertion. La troisième assertion découle des deux premières.

Corollaire 1 :

Soient \underline{M} . un objet de $C^n(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ et \underline{L} . un objet de $C(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$.

S'il existe un quasi-isomorphisme $s. \underline{M}. \longrightarrow \underline{L}$. ou un quasi-isomorphisme $t. : \underline{L}. \longrightarrow \underline{M}$.

alors $t_{[0]} \underline{L}$. et $t_{[n]} \underline{L}$. sont des objets de $C(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ et $t_{[n]} t_{[0]} \underline{L}^?$. est un objet $C^n(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$.

Preuve :

Découle du lemme 2 et de la proposition précédente.

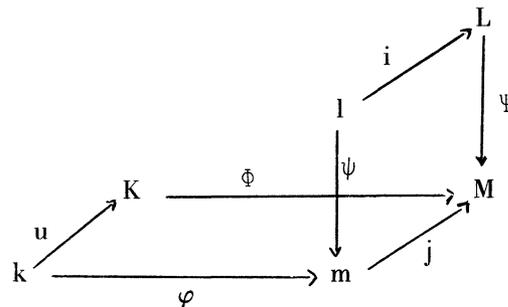
Proposition 2 :

Soient A un anneau et \mathcal{A} la catégorie des A -modules, dans la catégorie $\mathcal{F}_1(\mathcal{A})$ des objets $L = (L \xleftarrow{i} l)$ où i est un morphisme de A -modules, tout objet L , tels que i soit injectif et l, L et L/l soient projectifs, est projectif dans \mathcal{A} .

Il est, a fortiori, projectif dans $F_1(\mathcal{A})$.

Preuve :

Considérons le diagramme



où (Φ, φ) est un épimorphisme de \mathcal{A} . Φ et φ sont donc surjectifs, d'après § 3, Prop. 1. Comme L et l sont projectifs, il existe $w : l \rightarrow k$ et $f : L \rightarrow K$ tels que $\varphi w = \psi$ et $\Phi f = \Psi$. On a $\Phi(uw - fi) = 0$. On pose : $h = fi - uw$. $\mathcal{L} = L/l$ étant projectif, il existe une rétraction r de i . On pose : $\Omega = f - hr$. On obtient $\Omega_i = uw$ et $\Phi \Omega = \Psi$, d'où le résultat.

Proposition 3 :

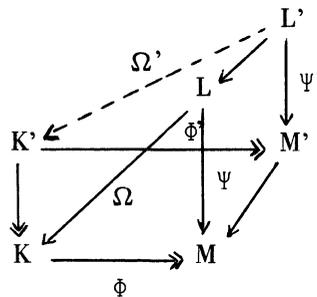
Soit $\chi : B \rightarrow A$ un homomorphisme d'anneaux surjectif, $I = \text{Ker}(\chi)$, et $L = (L', L \xleftarrow{i} l)$ un objet de la catégorie $\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ alors L est projectif dans $\mathcal{F}_1(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ et a fortiori dans $F_1(\mathcal{A}', \mathcal{A})$.

Preuve :

On conserve les notations de la proposition précédente.

Il suffit de prouver que l'application $\Omega : L \rightarrow K$ provient d'une application

B-linéaire $\Omega' : L' \rightarrow K'$, telle que $\Psi' \circ \Phi' = \Omega'$. Considérons le diagramme suivant :



et remarquons que Φ' est surjective car $\varphi : \underline{K} \rightarrow \underline{M}$ est supposé être un épimorphisme de $\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$. Comme L' est projectif et $K' \twoheadrightarrow K$ est surjective, car c'est la flèche de l'extension des scalaires via χ , il existe $\Omega'' : L' \rightarrow K'$ telle que $\Omega'' \otimes 1_A = \Omega$. On a alors $(\Phi' \Omega'' - \Psi')(L') \subset I.M' = I.\Phi'(K') = \Phi'(IK')$ donc il existe une flèche $g' : L' \rightarrow IK'$ telle que $\Phi' g' = \Phi' \Omega'' - \Psi'$.

On pose $\Omega' = \Omega'' \circ g'$ où g' est la composée $L' \xrightarrow{g'} I.K' \hookrightarrow K'$. On obtient $\Phi' \Omega' = \Psi'$ et $\Omega' \otimes 1_A = \Omega$.

Remarque :

Tout épimorphisme $\varphi : \underline{L} \rightarrow \underline{M}$ de $\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ admet $(\text{Ker } \Phi', \text{Ker } \Phi \leftarrow \text{Ker } \varphi)$ comme noyau dans $\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$.

Proposition 4 :

Sous les mêmes hypothèses sur $\chi : B \rightarrow A$, tout complexe \underline{L} , de $\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ borné à droite est homotope à zéro.

Preuve :

Par récurrence en utilisant la proposition 3.

Corollaire 1 :

Tout quasi-isomorphisme de $K \mathcal{F}_1^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ est inversible à homotopie près.

Dans ce cas, les foncteurs du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 K \mathcal{F}_1^n(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A})) & \longrightarrow & K \mathcal{F}_1^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A})) \\
 \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
 D \mathcal{F}_1^n(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A})) & \longrightarrow & D \mathcal{F}_1^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A}))
 \end{array}$$

sont pleinement fidèles.

Les foncteurs verticaux sont des équivalences de catégories.

Exemple II :

Soit donné le diagramme commutatif d'homomorphismes d'anneaux suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{\chi} & A \\
 \beta \swarrow & & \nearrow \alpha \\
 & W &
 \end{array}$$

On notera $\Omega_{B/W}^1$ le module des différentielles de B relativement à W.

Définition 1 :

Une «connexion» ∇_E d'un B-module E, relativement à W, est une application additive

$$\nabla_E : E \longrightarrow E \otimes_B \Omega_{B/W}^1$$

vérifiant : $\nabla_E(bx) = b \nabla_E(x) + x \otimes db$ où

$$d : B \longrightarrow \Omega_{B/W}^1 \text{ est la dérivation habituelle.}$$

Cf. [4] § 2.

Si E et F sont deux B-modules munis de connexions ∇_E et ∇_F respectivement.

Une application $u : E \longrightarrow F$ B -linéaire est dite compatible aux connexions ou «horizontale» si le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ \nabla_E \downarrow & & \downarrow \nabla_F \\ E \otimes_B \Omega^1_{B/W} & \xrightarrow{u \otimes 1} & F \otimes_B \Omega^1_{B/W} \end{array}$$

commute.

On notera \mathcal{A}' la catégorie des B -modules «à connexions».

Proposition 1 :

Si $\Omega^1_{B/W}$ est un B -module plat, alors \mathcal{A}' est une catégorie abélienne.

Preuve :

Soient $u : E \longrightarrow F$ un morphisme horizontal, et C son conoyau. On obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow{u} & F & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ \nabla_E \downarrow & & \downarrow \nabla_F & & \downarrow \nabla_C & & \\ E \otimes_B \Omega^1_{B/W} & \xrightarrow{u \otimes 1} & F \otimes_B \Omega^1_{B/W} & \longrightarrow & C \otimes_B \Omega^1_{B/W} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes. On définit ∇_C par passage aux quotients.

Si K est le noyau de u , comme $\Omega^1_{B/W}$ est plat le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbf{K} & \longrightarrow & \mathbf{E} & \longrightarrow & \mathbf{F} \\
& & \downarrow \nabla_{\mathbf{K}} & & \downarrow \nabla_{\mathbf{E}} & & \downarrow \nabla_{\mathbf{E}} \\
0 & \longrightarrow & \mathbf{K} \otimes_{\mathbf{B}} \Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{W}}^1 & \longrightarrow & \mathbf{E} \otimes_{\mathbf{B}} \Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{W}}^1 & \longrightarrow & \mathbf{F} \otimes_{\mathbf{B}} \Omega_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}^1
\end{array}$$

est commutatif et les lignes sont exacts. On définit $\nabla_{\mathbf{K}}$ comme restriction de $\nabla_{\mathbf{E}}$.

Soit \mathcal{A} la catégorie des A-modules et $\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ la sous-catégorie de $\mathcal{F}_1(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ des objets $\underline{L} = (L', L \xleftarrow{i} l)$ tels que i soit injectif, L' soit un B-module projectif de type fini L, l et L/l soient des A-modules projectifs de type fini.

Remarque :

$\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ vérifie la propriété i) du § 3.

On en déduit le

Théorème 1 :

Le foncteur $D \mathcal{F}_1^l(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A})) \longrightarrow D \mathcal{F}_1^-(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ est pleinement fidèle.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ARTIN : «Grothendieck Topologies» Seminar Notes 1962 - Harvard University.
- [2] A. BADRA : C.R. Acad. Sc. 291 - Série A, 1980, 539.
- [3] A. BADRA : Thèse de 3ème cycle - Université de Rennes.
- [4] P. BERTHELOT et A. OGUS : Notes on Crystalline Cohomology - Princeton University Press.
- [5] N. BOURBAKI : Algèbre, chapitre 10 - MASSON.
- [6] L. ILLUSIE : Complexe cotangent et Déformations I.
Lecture Notes in Mathematics Springer Verlag n° 239.
- [7] R. HARTSHORNE : Residues and Duality - Lecture Notes in Mathematics
Springer-Verlag n° 20.
- [8] B. MITCHELL : Theory of Categories - Academic Press.

S.G.A. 4 1/2 : P. DELIGNE : Cohomologie Etale, Lecture Note in Math. n° 569 -
Springer-Verlag.

S.G.A. 6 : P. BERTHELOT, A. GROTHENDIECK, L. ILLUSIE : Théorie des intersections
et théorème de Riemann-Roch, Lecture Notes in Math , n° 225,
Springer-Verlag.

Reçu en décembre 1987.

Université de Clermont II, U.F.R. Sciences, Mathématiques Pures, 63170 Aubière, France.

Adresse personnelle : 1, Impasse Gauguin - Le Clos des Saules, 63540 Romagnat.