

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

BERNARD BRUNET

Sur la compactification de Stone-Čech d'un espace de convergence

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 82, série *Mathématiques*, n° 22 (1984), p. 79-87

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1984__82_22_79_0>

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR LA COMPACTIFICATION DE STONE-ČECH
D'UN ESPACE DE CONVERGENCE**

Bernard BRUNET

Université de CLERMONT II

Le problème de la compactification de Stone-Čech d'un espace de convergence a notamment été abordé par G.D. Richardson et D.C. Kent. Dans [7], ces deux auteurs ont prouvé que si un espace de convergence régulier possédait une compactification régulière, il possédait une compactification régulière de Stone-Čech. La démonstration qu'ils donnent de ce résultat repose sur le théorème suivant : «Dans un espace de convergence compact régulier l'opération adhérence est idempotente», théorème lui-même déduit d'un résultat obtenu par G.D. Richardson [6], à savoir que tout espace de convergence régulier possède une compactification (non nécessairement régulière) de Stone-Čech.

Dans le présent article que j'ai pu écrire grâce aux précieuses remarques de L. Haddad - qu'il en soit tout particulièrement remercié ici - en donnant une démonstration directe du théorème cité précédemment et en montrant plus généralement que dans un espace de convergence de Grimeisen compact, l'opération adhérence était idempotente, je propose

une construction plus rationnelle de la compactification de Stone-Ćech d'un espace de convergence.

§ 0. Notations et Rappels.

Dans tout ce qui suit, le terme espace signifie espace de convergence. D'autre part les définitions et notations sont celles utilisées dans [1]. En particulier, nous désignerons pour toute structure de convergence q sur X :

- par $\lim_q \Phi$ ($\text{adh}_q \Phi$) l'ensemble des valeurs limites (d'adhérence) pour q d'un filtre Φ sur X .
- par $\text{Adh}_q A$ ou \bar{A} l'adhérence pour q d'une partie A de X .
- pour tout filtre Φ sur X , par $\bar{\Phi}$ le filtre de base $\{\bar{F}; F \in \Phi\}$
- par $\tau(q)$ la topologie associée à q .

Nous désignerons, d'autre part, pour toute application f de A dans X et toute structure de convergence (topologie T) sur X par $f^* q$ ($f^* T$) la structure de convergence (topologie) induite de $q(T)$ par f .

Nous rappelons par ailleurs que :

- un espace pseudotopologique (X, q) est dit *prétopologique* si et seulement si l'une des 3 conditions équivalentes suivantes (résultat dû à G. Choquet [2]) est vérifiée :
 - i) Pour tout point x de X , le filtre des q -voisinages de x (c'est-à-dire le filtre intersection des filtres qui convergent pour q vers x) converge pour q vers x .
 - ii) Pour tout filtre Φ sur X , $\text{adh}_q \Phi = \bigcap_{F \in \Phi} \bar{F}$
 - iii) Pour tout ultrafiltre \mathcal{U} sur X , $\lim_q \mathcal{U} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \bar{U}$.
- une application continue f d'un espace (X, q) dans un autre (X', q') est dite *propre* (*) si et seulement si l'une des 2 conditions équivalentes suivantes est vérifiée :
 - i) Pour tout ultrafiltre \mathcal{U} sur X et toute valeur limite x' pour q' de $f(\mathcal{U})$, il existe une valeur limite x pour q de \mathcal{U} telle que $x' = f(x)$.
 - ii) Pour tout filtre Φ sur X et toute valeur d'adhérence x' pour q' de $f(\Phi)$, il existe une valeur d'adhérence x pour q de Φ telle que $x' = f(x)$.

(*) Cette définition permet de généraliser [1] aux espaces de convergence les résultats concernant les applications propres d'un espace topologique dans un autre (N. Bourbaki, Topologie Générale I, 10).

- on appelle *compactifié* de (X, q) tout couple $(i, (\hat{X}, \hat{q}))$ tel que (\hat{X}, \hat{q}) soit compact et i soit une application injective de X dans \hat{X} telle que $i^* \hat{q} = q$ et $Adh_{\hat{q}}[i(X)] = \hat{X}$.
- on appelle *compactifié de Stone-Čech* de (X, q) tout compactifié $(i, (\hat{X}, \hat{q}))$ de cet espace tel que, pour tout espace compact (Y, r) et toute application continue f de (X, q) dans (Y, r) , il existe une application continue et une seule, g , de (\hat{X}, \hat{q}) dans (Y, r) telle que $g \circ i = f$.
- on appelle *grille* sur X , tout ensemble non vide \mathcal{G} de parties non vides de X , saturé par inclusion, satisfaisant à la condition : $A \cup B \in \mathcal{G}$ si et seulement si $A \in \mathcal{G}$ ou $B \in \mathcal{G}$.

§ 1. Espaces presque réguliers.

On dira qu'un espace séparé (X, q) est *presque régulier* si et seulement si pour tout ultrafiltre \mathcal{U} sur X convergeant pour q vers x , le filtre $\overline{\mathcal{U}}$ converge pour q vers x .

Il est trivial que tout espace régulier est presque régulier. D'autre part, puisque pour toute application continue f de (X, q) dans (X', q') et tout ultrafiltre \mathcal{U} sur X , le filtre $f(\overline{\mathcal{U}})$ est moins fin que le filtre $f(\mathcal{U})$, tout sous-espace d'un espace presque régulier, tout produit d'espaces presque réguliers sont des espaces presque réguliers.

Notons par ailleurs qu'un espace compact n'est pas nécessairement presque régulier. Soit pour cela (X, T) un espace topologique compact et q la structure de convergence sur X définie par $\Phi q x$ si et seulement si Φ est un ultrafiltre sur X convergeant pour T vers x ; (X, q) est un espace compact, et, si (X, T) n'est pas discret, (X, q) n'est pas presque régulier.

Proposition 1.1.

Si (X, q) est un espace compact presque régulier, l'opération Adh_q est idempotente (et par suite pour toute partie A de X , $Adh_q A = Adh_{\tau(q)} A$).

Soient A une partie de X et x un élément de \overline{A} . Il existe un ultrafiltre Φ sur X convergeant pour q vers x et contenant \overline{A} .

Considérons $\hat{\Phi} = \{ B, \overline{B} \notin \Phi \}$. $\hat{\Phi}$ est un filtre sur X moins fin que Φ . Comme, d'autre part, tout élément de $\hat{\Phi}$ rencontre A , il existe un ultrafiltre \mathcal{U} sur X plus fin que $\hat{\Phi}$ et contenant A . (X, q) étant compact, \mathcal{U} converge pour q vers un point y de X . (X, q) étant presque régulier, $\overline{\mathcal{U}}$ converge pour q vers y . Comme $\overline{\mathcal{U}}$ est moins fin que Φ , Φ converge pour q vers y . (X, q) étant séparé, on en déduit que $x = y$ et par suite que \mathcal{U} converge pour q vers x . Comme A appartient à \mathcal{U} , x appartient à \overline{A} , d'où le résultat.

Corollaire 1.2.

Si (X, q) est un espace compact presque régulier, pour toute partie A de X ,
 $\tau(i^* q) = i^* \tau(q)$, (i désignant l'injection canonique de A dans X).

Proposition 1.3.

Si (X, q) est un espace compact presque régulier, un ultrafiltre converge pour q vers un point x si et seulement si il converge pour $\tau(q)$ vers x .

On sait déjà que tout ultrafiltre qui converge pour q vers x converge pour $\tau(q)$ vers x . Soit alors \mathcal{U} un ultrafiltre convergeant pour $\tau(q)$ vers x . Il résulte de la proposition 1.1 que x appartient à $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} \bar{U}$, et par suite, que le filtre $\bar{\mathcal{U}}$ est moins fin que l'ultrafiltre trivial \hat{x} .

Comme (X, q) est compact, \mathcal{U} converge pour q vers un point y de X . (X, q) étant presque régulier, $\bar{\mathcal{U}}$ converge pour q vers y . Il en résulte que \hat{x} converge pour q vers y et, par suite, que $x = y$.

Corollaire 1.4.

Si (X, q) est un espace compact presque régulier, $(X, \tau(q))$ est un espace topologique compact. Il est en effet séparé d'après la proposition précédente.

§ 2. Espaces de Grimeisen.

Généralisant les définitions de [5], nous dirons que :

- Etant donné un espace (X, q) , une application φ de X dans l'ensemble des ultrafiltres sur X est *admissible* si et seulement si, pour tout point x de X , l'ultrafiltre $\varphi(x)$ converge pour q vers x .
- Un espace (X, q) est de *Grimeisen* si et seulement si, pour tout ultrafiltre \mathcal{U} sur X et toute application admissible φ , l'ensemble des valeurs limites pour q de l'ultrafiltre $\bigcup_{F \in \mathcal{U}} \bigcap_{y \in F} \varphi(y)$ est inclus dans l'ensemble des valeurs limites pour q de \mathcal{U} .

Proposition 2.1. (*)

Tout espace presque régulier est de Grimeisen.

(*) Cette proposition et la proposition 2.3 ci-après généralisent aux espaces de convergence des résultats obtenus dans le cas topologique par L. Haddad [5].

Soient (X, q) un espace presque régulier, \mathcal{U} un ultrafiltre sur X , φ une application admissible et x une valeur limite pour q de l'ultrafiltre $\bigcup_{F \in \mathcal{U}} \bigcap_{y \in F} \varphi(y)$. (X, q) étant presque régulier, le filtre $\overline{\bigcup_{F \in \mathcal{U}} \bigcap_{y \in F} \varphi(y)}$ converge pour q vers x . Comme ce filtre est moins fin que \mathcal{U} , on en déduit que \mathcal{U} converge pour q vers x .

Lemme 2.2.

Si (X, q) est un espace prétopologique de Grimeisen, un point x de X est adhérent à une partie A de X si et seulement s'il existe une application admissible φ tel que x soit valeur d'adhérence pour q du filtre $\bigcap_{y \in A} \varphi(y)$.

La condition est trivialement nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Supposons donc qu'il existe une application admissible φ telle que x soit valeur d'adhérence pour q du filtre $\bigcap_{y \in A} \varphi(y)$. Considérons $\mathcal{S} = \{B / x \in \text{adh}_q \bigcap_{y \in B} \varphi(y)\}$. \mathcal{S} est une grille. Par suite, il existe un ultrafiltre \mathcal{U} sur X tel que \mathcal{U} soit inclus dans \mathcal{S} et A appartienne à \mathcal{U} . Soit alors $\check{\mathcal{U}} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \bigcap_{y \in U} \varphi(y)$. Comme pour tout élément F de $\check{\mathcal{U}}$, x appartient à \overline{F} , et comme (X, q) est prétopologique, $\check{\mathcal{U}}$ converge pour q vers x . (X, q) étant de Grimeisen, on en déduit que \mathcal{U} converge pour q vers x et par suite, que x est adhérent à A .

Proposition 2.3.

Si f est une application propre surjective d'un espace prétopologique (X, q) dans un autre (Y, r) et si (X, q) est de Grimeisen, il en est de même de (Y, r) .

Soient Ψ un ultrafiltre sur Y , ψ une application admissible sur Y et y une valeur limite de l'ultrafiltre $\bigcup_{B \in \Psi} \bigcap_{b \in B} \psi(b)$. Quel que soit B appartenant à Ψ , y est alors valeur d'adhérence du filtre $\beta = \bigcap_{b \in B} \psi(b)$. Comme f est surjective, pour tout élément b de B , il existe un ultrafiltre α_b sur X tel que $f(\alpha_b) = \psi(b)$. Comme $\psi(b)$ converge vers b et comme f est propre, on en déduit qu'il existe un élément $x(b)$ de X tel que α_b converge vers $x(b)$ et $f(x(b)) = b$.

Soit alors $A = \{x(b) ; b \in B\}$ et soit φ l'application de X dans l'ensemble des ultra-filtres sur X définie par $\varphi(x) = \alpha_b$ si $x = x(b)$ et par $\varphi(x) = \check{x}$ sinon. Par construction

φ est admissible. Posons alors $\alpha = \bigcap_{x \in A} \varphi(x)$. Comme le filtre $f(\alpha)$ est moins fin que β , y

est valeur d'adhérence de $f(\alpha)$. f étant propre, on en déduit qu'il existe un point x de X tel que x soit valeur d'adhérence de α et tel que $y = f(x)$. Comme (X, q) est un espace prétopologique de Grimeisen, il résulte alors du lemme précédent que x est adhérent à A et par suite, puisque $B = f(A)$ que y est adhérent à B . On a donc montré que y était adhérent à tous les éléments de Ψ . (Y, r) étant prétopologique, il en résulte que Ψ converge vers y et par suite que (Y, r) est de Grimeisen.

Proposition 2.4.

Si (X, q) est un espace de Grimeisen compact, l'opération Adh_q est idempotente (et par suite pour toute partie A de X , $Adh_q A = Adh_{\tau(q)} A$). Soit x un élément de \bar{A} . Il existe alors un ultrafiltre Φ sur X tel que x soit valeur limite de Φ et \bar{A} appartienne à Φ . Soit φ l'application admissible

$$\begin{cases} y \in \bar{A} \longrightarrow \varphi(y) / \varphi(y) \text{ } q \text{ } y \text{ et } A \in \varphi(y) \\ y \notin \bar{A} \longrightarrow \dot{y} \end{cases}$$

et soit $\check{\Phi} = \bigcup_{F \in \Phi} \bigcap_{y \in F} \varphi(y)$.

Comme $\check{\Phi}$ est un ultrafiltre et (X, q) est compact, il existe un point z de X tel que $\check{\Phi}$ converge vers z . Comme (X, q) est de Grimeisen et comme Φ converge vers x , il en résulte que $z = x$.

Comme A appartient au filtre $\bigcap_{y \in \bar{A}} \varphi(y)$ et \bar{A} à Φ , A appartient à $\check{\Phi}$. Il en résulte que x appartient à \bar{A} .

N.B. La conjonction de 2.1 et 2.4 permet de retrouver 1.1.

Proposition 2.5.

Tout espace prétopologique de Grimeisen compact est régulier.

Soient (X, q) un espace prétopologique de Grimeisen compact et Φ un filtre sur X convergeant pour q vers x . Montrons que $\check{\Phi}$ converge pour q vers x . Soit pour cela \mathcal{U} un ultrafiltre plus fin que $\check{\Phi}$. Comme (X, q) est compact, \mathcal{U} converge vers un point y de X . \mathcal{U} étant plus fin que $\check{\Phi}$, y est valeur d'adhérence de $\check{\Phi}$ et par suite y appartient à $\bigcap_{F \in \check{\Phi}} \bar{F}$, (X, q) étant de Grimeisen compact, il résulte de la proposition précédente que y

appartient à $\bigcap_{F \in \check{\Phi}} \bar{F}$. D'où, puisque (X, q) est prétopologique, que y est valeur d'adhérence

du filtre \mathfrak{F} . Comme par hypothèse \mathfrak{F} converge vers x et comme (X, q) est séparé, on en déduit que $y = x$, ce qui implique que \mathcal{U} converge vers x , et par suite que \mathfrak{F} converge vers x .

Problème :

Construire un espace de Grimeisen compact qui ne soit pas presque régulier.

§ 3. Compactification de Stone-Čech d'un espace presque complètement régulier.

Soit (X, q) un espace presque régulier. Supposons que (X, q) possède un compactifié presque régulier $(i, (\hat{X}, \hat{q}))$. Il résulte alors de 1.3 que \hat{q} et $\tau(\hat{q})$ ont les mêmes ultrafiltres convergents ; q et $\tau(q)$ ont donc les mêmes ultrafiltres convergents puisque $i^*\hat{q} = q$.

D'autre part, comme d'après 1.4, $(\hat{X}, \tau(\hat{q}))$ est compact et, comme d'après 1.2, $i^*\tau(\hat{q}) = \tau(q)$, $(i, (\hat{X}, \tau(\hat{q})))$ est un compactifié de l'espace topologique $(X, \tau(q))$. On est par suite conduit à donner la définition suivante :

On dira qu'un espace (X, q) est *presque complètement régulier* si et seulement si les 3 conditions suivantes sont vérifiées :

- i) (X, q) est presque régulier.
- ii) $(X, \tau(q))$ est un espace topologique complètement régulier.
- iii) Un ultrafiltre converge pour q vers un point x de X si et seulement s'il converge pour $\tau(q)$ vers x .

Notons que tout espace compact presque régulier est presque complètement régulier et que, si (X, q) est presque complètement régulier, pour toute partie A de X , $\text{Adh}_q A = \text{Adh}_{\tau(q)} A$.

Théorème 3.

Tout espace presque complètement régulier possède un compactifié de Stone-Čech presque régulier.

Soit (X, q) un espace presque complètement régulier. Désignons par $(i, (\hat{X}, \hat{T}))$ le compactifié de Stone-Čech de $(X, \tau(q))$ et par \hat{q} la structure de convergence définie sur \hat{X} par $\mathfrak{F} \hat{q} \hat{x}$ si et seulement si :

- a) Il existe un ultrafiltre \mathcal{U} sur \hat{X} tel que \mathcal{U} converge pour \hat{T} vers \hat{x} et tel que \mathfrak{F} soit plus fin que le filtre de base $\{ \text{Adh}_{\hat{T}} U ; U \in \mathcal{U} \}$ noté $\text{Cl}_{\hat{T}} \mathcal{U}$
- ou bien :
- b) Si $\hat{x} = i(x)$ et $i(X)$ appartient à \mathfrak{F} , $i^{-1}(\mathfrak{F})$ converge pour q vers x .

Par construction, \hat{q} est plus fine que $q_{\hat{T}}$ et, par suite, (\hat{X}, \hat{q}) est séparé.

D'autre part, d'après a) et la condition iii) de la définition d'un espace presque complètement régulier, \hat{q} et \hat{T} ont les mêmes ultrafiltres convergents. Par suite (\hat{X}, \hat{q}) est compact et pour toute partie A de \hat{X} , $\text{Adh}_{\hat{q}} A = \text{Adh}_{\tau(\hat{q})} A$. Comme ce dernier résultat implique que pour tout filtre Ψ sur \hat{X} , $\text{Cl}_{\hat{T}} \Psi = \overline{\Psi}$, (\hat{X}, \hat{q}) est presque régulier.

Prouvons maintenant que i est un plongement de (X, q) dans (\hat{X}, \hat{q}) . D'après b), i est continue. Soient alors Φ un filtre sur X et x un point de X tels que $i(\Phi) \hat{q} i(x)$. Montrons que $\Phi q x$. Ecartons le cas trivial où $i^{-1}[i(\Phi)] q x$. Supposons donc qu'il existe un ultrafiltre \mathcal{U} sur \hat{X} tel que $i(\Phi)$ soit plus fin que $\text{Cl}_{\hat{T}} \mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}}$ et tel que \mathcal{U} converge pour \hat{T} vers $i(x)$. Comme $\text{Adh}_{\hat{T}} i(X) = \hat{X}$, il existe un ultrafiltre \mathcal{V} sur \hat{X} contenant les éléments de \mathcal{U} qui sont ouverts pour \hat{T} et $i(X)$. \mathcal{V} converge pour \hat{T} vers $i(x)$, et par suite, puisque $i^* \hat{T} = \tau(q)$, $i^{-1}(\mathcal{V})$ converge pour $\tau(q)$ vers x . q et $\tau(q)$ ayant les mêmes ultrafiltres convergents et (X, q) étant presque régulier, on en déduit que $i^{-1}(\mathcal{V})$ converge pour q vers x . Comme $i^{-1}(\mathcal{V}) = i^{-1}(\overline{\mathcal{U}})$ et comme $\overline{\mathcal{U}}$ est moins fin que $\overline{\mathcal{U}}$, lui-même moins fin que $i(\Phi)$, il en résulte que $i^{-1}[i(\Phi)]$ c'est-à-dire Φ converge pour q vers x .

$(i, (\hat{X}, \hat{q}))$ est par suite un compactifié presque régulier de (X, q) . Soient alors (\tilde{X}, \tilde{q}) un espace compact presque régulier et f une application continue de (X, q) dans (\tilde{X}, \tilde{q}) . Comme f est une application continue de $(X, \tau(q))$ dans $(\tilde{X}, \tau(\tilde{q}))$ et comme $(\tilde{X}, \tau(\tilde{q}))$ est compact, il existe une application continue g de (\hat{X}, \hat{T}) dans $(\tilde{X}, \tau(\tilde{q}))$ telle que $g \circ i = f$. Montrons que g est une application continue de (\hat{X}, \hat{q}) dans (\tilde{X}, \tilde{q}) . Soit pour cela Φ un filtre convergeant pour \hat{q} vers \hat{x} .

a) Si il existe un ultrafiltre \mathcal{U} sur \hat{X} convergeant pour \hat{T} vers \hat{x} et tel que Φ soit plus fin que $\text{Cl}_{\hat{T}} \mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}}$, comme g est une application continue de (\hat{X}, \hat{T}) dans $(\tilde{X}, \tau(\tilde{q}))$, $g(\mathcal{U})$ converge pour $\tau(\tilde{q})$ vers $g(\hat{x})$. (X, q) étant compact presque régulier, on en déduit que $g(\mathcal{U})$ et par suite $\overline{g(\mathcal{U})}$ converge pour \tilde{q} vers $g(\hat{x})$. Comme $g(\Phi)$ est plus fin que $g(\overline{\mathcal{U}})$, lui-même plus fin que $\overline{g(\mathcal{U})}$, on en déduit que $g(\Phi)$ converge pour \tilde{q} vers $g(\hat{x})$.

b) Si $\hat{x} = i(x)$ et $i(X)$ appartient à Φ , $i^{-1}(\Phi)$ converge pour q vers x . f étant continue, il en résulte que $f(i^{-1}(\Phi))$ converge pour \tilde{q} vers $f(x)$, c'est-à-dire que $g(\Phi)$ converge pour \tilde{q} vers $g(\hat{x})$. Comme d'après le théorème du prolongement des identités ([1], 2-1), g est la seule application continue de (\hat{X}, \hat{q}) dans (\tilde{X}, \tilde{q}) telle que $g \circ i = f$, il résulte de ce qui précède que $(i, (\hat{X}, \hat{q}))$ est le compactifié de Stone-Čech de (X, q) .

REFERENCES

- [1] B. BRUNET - «*Sur la classe des morphismes propres dans la catégorie des espaces de convergence*» ; Ann. Sci. Univ. Clermont, Sér. Math., Fasc 16, (1978), 107-120.
- [2] G. CHOQUET - «*Convergences*» ; Ann. Univ. Grenoble, 23 (1947), 57-112.
- [3] G. GRIMEISEN - «*Gefilterte Summation von Filtern und iterierte Grenzprozesse I*» ; Math. ann. 141, (1960), 318-342.
- [4] G. GRIMEISEN - «*Gefilterte Summation von Filtern und iterierte Grenzprozesse II*» ; Math. Ann., 142, (1961), 386-417.
- [5] L. HADDAD - «*Sur trois questions de Grimeisen en topologie générale*» ; Ann. Sci. Univ. Clermont, Série Math., Fasc 11, (1975).
- [6] G.D. RIDCHARDSON - «*A Stone-Čech compactification for limit spaces*» ; Proc. Amer. Math. Soc., 25, (1970), 403-404.
- [7] G.D. RIDCHARDSON et D.C. KENT - «*Regular compactifications of convergence spaces*» ; Proc. Amer. Math. Soc. 31, (1972), 571-573.
- [8] O. WYLER - «*The Stone-Čech compactification for limit spaces*» ; Notices Amer. Math. Soc., 15, (1968), 169.

Université de Clermont II, U.E.R. Sciences, Mathématiques Pures, 63170 Aubière, France.

Adresse personnelle : 55, Avenue Thermale, D., 63400 Chamalières, France.