ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

DOMENICO FRENI

Structure des hypergroupes quotients et des hypergroupes de type U

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 82, série *Mathématiques*, nº 22 (1984), p. 51-77

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1984__82_22_51_0>

Ann. Sci. Univ. Clermont II, Sér. Math., Fasc. 22, 1984, pp. 51-77

STRUCTURE DES HYPERGROUPES QUOTIENTS ET DES HYPERGROUPES DE TYPE U

Domenico FRENI

Université de CLERMONT II

Summary :

A few results are given concerning hypergroups of type C on the right, then a new class of hypergroups is defined : the hypergroups of type U on the right, which forms a more general class than the hypergroups of type C on the right ; these latter can be considered as quotients of an hypergroup of type U by one of its subhypergroupe ultra-clos on the right.

Then we study the structures of the quotients $H_{/h}$ of an hypergroup H modulo one of its subhypergroups, h, bi-ultra-clos or conjugable , and, in that last case, we characterize the core $\omega_{H_{/h}}$ of $H_{/h}$.

At last, a requisite condition is determined so that an hypergroup quotient, $H_{/h}$ of an hypergroup H modulo one of its subhypergroups h, may be a commutative hypergroup. We are driven to definite the derived subhypergroup D(H) of H. We particularly analyse the structure of D(H) in the case H would be of type C on the right.

Introduction :

On donne quelques résultats sur les hypergroupes de type C à droite, puis on définit une nouvelle classe d'hypergroupes : les hypergroupes de type U à droite ; qui constitue une classe plus générale que les hypergroupes de type C à droite ; ces derniers pouvant être considérés comme des quotients d'un hypergroupe de type U par un de ses sous-hypergroupes ultra-clos à droite.

Ensuite, on étudie les structures des quotients $H_{/h}$ d'un hypergroupe H modulo un de ses sous-hypergroupes, h, bi-ultra-clos ou conjugable et, dans ce dernier cas,on caractérise le coeur $\omega_{H_{/h}}$ de $H_{/h}$.

Enfin, on détermine une condition nécessaire pour qu'un hypergroupe quotient, $H_{/h}$, d'un hypergroupe H modulo un de ses sous-hypergroupes h, soit un hypergroupe commutatif. On est conduit à définir le sous-hypergroupe dérivé D(H) de H. En particulier, on analyse la structure de D(H) dans le cas où H est de type C à droite.

Je tiens à remercier ici Monsieur Y. SUREAU de tous les conseils qu'il m'a prodigués pour mener à bien ce travail et pour l'aide qu'il m'a apportée pour sa rédaction.

Notations et rappels.

Dans tout ce travail, H et H' représentent des hypergroupes multiplicatifs, h et h' des sous-hypergroupes de H et H' respectivement.

Pour toute partie A de H, on note H-A le complémentaire de A dans H.

H est dit REGULIER s'il a au moins une unité bilatère, e (i.e., pour tout $x \in H$, $x \in xe \cap ex$), et si chaque élément $x \in H$ possède un inverse bilatère x' (i.e. $e \in xx' \cap x'x$).

On dit que H est REVERSIBLE à droite (resp. gauche) s'il est régulier et si pour tout $(x, y, z) \in H^3$ tel que $x \in yz$, il existe un inverse z' de z (resp. y' de y) vérifiant $y \in xz'$ (resp. $z \in y'x$).

On rappelle que h est clos si $h(H\text{-}h) = (H\text{-}h)h = H\text{-}h$, qu'il est INVERSIBLE à droite (resp. gauche) dans H, si, pour tout couple $(x,y) \in H^2$, $x \in yh$ (resp. $x \in hy$) équivaut à $y \in xh$ (resp. $y \in hx$). Dans ce dernier cas, l'ensemble $H_{/h}$ (resp. $h\backslash H$) des classes à droite x h (resp. gauche h x) est alors muni d'une structure d'hypergroupe , en posant $(xh)(yh) = \{zh \,;\, z \in xhy\}$. (resp. $(hx)(hy) = \{hz \,;\, z \in xhy\}$).

Le sous-hypergroupe h de H est dit ULTRA-CLOS à droite (resp. gauche) dans H si pour tout $x \in H$ on a $xh \cap x(H\text{-}h) = \emptyset$ (resp. $hx \cap (H\text{-}h)x = \emptyset$). Enfin, il est dit CONJUGABLE (on dit aussi H-conjugable) s'il est clos et si pour tout $x \in H$ il existe $x' \in H$, tel que $xx' \subset h$.

On appelle COEUR de H, et l'on note ω_H l'intersection de tous les sous-hypergroupes conjugables de H.

On dit que h est INFRA-INVARIANT dans H si pour tout $x \in H$, on a $hxh \subset xh \cup hx$; on le dit SEMI-INVARIANT à droite (resp. gauche) si $xh \subset hx$ (resp. $hx \subset xh$) et INVARIANT si $hx = xh$.

Pour les propriétés attachées à ces notions, on renvoie à [5], [7] et [8].

Les MORPHISMES d'hypergroupes de H dans H' que nous considérons ici sont des applications f : H $\rightarrow$ H' vérifiant, pour tout couple (x, y) d'éléments de H, $f(xy) \subset f(x) f(y)$. Si l'on a l'égalité $f(xy) = f(x)f(y)$, on dit que f est BON. Un ISOMORPHISME est un morphisme bon bijectif.

On utilisera fréquemment les résultats suivants :

h est inversible à droite dans H si et seulement si la famille $\{ xh \}_{x \in H}$ est une partition de H.

Si h est ultra-clos à droite dans H, alors h est inversible à droite et clos dans H.

$H_{/h}$ est un groupe si et seulement si h est conjugable et invariant dans H.

Si h et k sont deux sous-hypergroupes inversibles de H, tels que $k \subset h$, alors $H_{/k/h_{/k}}$ est isomorphe à $H_{/h}$.

h est ultra-clos à droite dans H si et seulement si l'ensemble des identités partielles à droite(*) de $H_{/h}$ est réduit à $h_{/h}$.

(*) Un élément $a \in H$ est une identité partielle à droite de H s'il existe $x \in H$ vérifiant $x \in xa$.

§ 1. Rappels et compléments sur les hypergroupes de types C.

On dit que H est de type C à droite s'il satisfait aux deux conditions suivantes :

C1) il existe $\varepsilon \in H$ tel que, pour tout $x \in H$, on ait $x\varepsilon = x$ (i.e. ε est unité scalaire à droite).

C2) pour tout triplet $(x, y, z) \in H^3$, $xy \cap xz \neq \emptyset$ implique $\varepsilon y = \varepsilon z$.

Si H est de type C à droite, il vérifie les propriétés suivantes (cf. [9]) énoncées pour tout $(x, y, z) \in H^3$ et tout $\bar{x} \in H$ tel que $\varepsilon \in x\bar{x}$:

1) $x \in \varepsilon x$
2) $x \in xy$ implique $y = \varepsilon$
3) $\varepsilon \in xy$ si et seulement si $\varepsilon \in yx$
4) $\varepsilon \in xy$ si et seulement si $\varepsilon \bar{x} = \varepsilon y$
5) Si $\bar{\bar{x}} \in H$ vérifie $\varepsilon \in \bar{x}\,\bar{\bar{x}}$, alors $\varepsilon x = \varepsilon \bar{\bar{x}}$ (et donc $\bar{x}\,\bar{\bar{x}} = \bar{x}\, x$)
6) $\varepsilon x = \varepsilon y$ si et seulement si $\varepsilon \bar{x} = \varepsilon \bar{y}$
7) Si $z \in xy$, alors $x \in z\bar{y}$ et $y \in \varepsilon \bar{x} z$
8) Si $x \in x_1 x_2 \ldots x_n$, alors $\varepsilon \bar{x} \subseteq \varepsilon \bar{x}_n \ldots \bar{x}_2 \bar{x}_1$ (où $x_i \in H, \bar{x}_i \in H$, $\varepsilon \in x_i \bar{x}_i$, $i = 1, \ldots, n$)
9) ε appartient à tout sous-hypergroupe de H
10) Tout sous-hypergroupe de H est ultra-clos à droite et inversible dans H
11) $x \in h$ si et seulement si $\bar{x} \in h$
12) h et $H_{/h}$ sont de type C à droite
13) Les conditions suivantes sont équivalentes :
   i) H est un groupe
   ii) ε est scalaire à gauche
   iii) H est aussi de type C à gauche.

On va démontrer maintenant quatre propositions qui donnent quelques résultats complémentaires sur les hypergroupes de type C à droite.

Proposition 1.1.

Si H est de type C à droite, son coeur ω_H est l'intersection de ses sous-hypergroupes contenant $A = \bigcup_{x \in H} x\bar{x}$.

Notons $<A>$ l'intersection de tous les sous-hypergroupes contenant A(*). Pour tout $x \in H$ on a $x\bar{x} \subset \omega_H$ et donc $<A> \subset \omega_H$. D'autre part, pour tout $x \in H$, il existe $y \in \varepsilon\bar{x}$ vérifiant $xy \subset <A>$, donc $<A>$ est conjugable et $\omega_H \subset <A>$.

Proposition 1.2.

Si H est de type C à droite, une condition nécessaire et suffisante pour que h soit ultra-clos à gauche dans H est qu'il soit conjugable.

La condition est évidemment suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire.

Soient $x \in H$ et y et z deux éléments de H vérifiant $z \in xy \cap h$. Alors on a $x \in z\bar{y}$ et donc $x \in h\bar{y}$; si, de plus, $xy \cap (H\text{-}h) \neq \emptyset$, par un raisonnement analogue, on obtient $x \in (H\text{-}h)\bar{y}$, ce qui contredit l'hypothèse d'ultra-clôture à gauche de h dans H. Donc on a $xy \subset h$, d'où la conjugabilité de h.

Proposition 1.3.

Si H est de type C à droite, alors h est semi-invariant à gauche dans H, si et seulement s'il est invariant dans H.

Supposons h semi-invariant à gauche dans H et soient $x \in H$, et $u \in xh$; il existe $v \in h$ tel que $u \in xv$, et l'on a $\bar{u} \in \varepsilon\,\bar{v}\,\bar{x} \subset \varepsilon\,h\,\bar{x} = h\,\bar{x} \subset \bar{x}\,h$; d'où l'existence de $w \in h$ vérifiant $\bar{u} \in \bar{x}\,w$, et par suite, $u \in \varepsilon\,\bar{w}\,x \subset \varepsilon\,h\,x = hx$. Ainsi $xh \subset hx$ et, comme, par hypothèse $hx \subset xh$, h est invariant dans H.

(*) On sait que $<A>$ est un sous-hypergroupe car c'est l'intersection d'une famille de sous-hypergroupes ultra-clos à droite de H (cf. [8]).

Proposition 1.4.

Si H est de type C à droite, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) h est réflexif(*)

ii) h est semi-invariant à droite

iii) pour tout $x \in H$, on a $hx = \varepsilon xh$.

i) implique ii).

Soient $x \in H$ et $z \in xh$; il existe $u \in h$ tel que $z \in xu$. Alors on a $u \in \varepsilon \bar{x}z$ et $\varepsilon \bar{x}z \cap h \neq \emptyset$; d'où l'existence de $v \in \bar{x}z$ vérifiant $\varepsilon v \cap h \neq \emptyset$, et donc aussi $v\varepsilon \cap h \neq \emptyset$. Il s'ensuit $\bar{x}z \cap h \neq \emptyset$, et $z\bar{x} \cap h \neq \emptyset$. Ainsi, pour tout $v \in z\bar{x} \cap h$, on a $z \in v\bar{\bar{x}} = vx \subset hx$, d'où $xh \subset hx$.

ii) implique iii).

Pour tout $x \in H$, l'inclusion $xh \subset hx$ implique $\varepsilon xh \subset \varepsilon hx = hx$. Réciproquement, si $u \in hx$, alors il existe $v \in h$ tel que $u \in vx$ et donc $\bar{u} \in \varepsilon \bar{x}\bar{v} \subset \varepsilon \bar{x}h \subset \varepsilon h\bar{x} = h\bar{x}$, d'où l'existence de $w \in h$ vérifiant $\bar{u} \in w\bar{x}$; on a alors $u \in \varepsilon x\bar{w} \subset \varepsilon xh$ et il en résulte $hx \subset \varepsilon xh$.

iii) implique i).

Soient $(x,y) \in H^2$ tel que $xy \cap h \neq \emptyset$ et $u \in xy \cap h$; on a $x \in u\bar{y} \cap h\bar{y}$ et, puisque h est inversible dans H, on a $\bar{y} \in hx$, d'où $\bar{y} \in \varepsilon xh$. Ainsi il existe $a \in h$ vérifiant $\bar{y} \in \varepsilon xa$, et alors $\varepsilon \bar{\bar{y}} \subset \varepsilon \bar{a}\bar{x}$, soit $\varepsilon y \subset \varepsilon \bar{a}\bar{x}$, donc $y \in \varepsilon \bar{a}\bar{x}$ et, si $v \in \varepsilon \bar{a}$ est tel que $y \in v\bar{x}$, on a $v \in h$, $v \in yx$ et donc $yx \cap h \neq \emptyset$.

(*) Un sous-ensemble non vide A de H est dit réflexif si pour tout $(x, y) \in H^2$, on a $xy \cap A \neq \emptyset$ si et seulement si $yx \cap A \neq \emptyset$.

§ 2. **Quelques résultats sur les morphismes d'hypergroupes.**

Dans tout ce paragraphe, f désigne un morphisme d'hypergroupes de H dans H'.

Proposition 2.1.

1) Si h' est clos dans H' et $f^{-1}(h') \neq \emptyset$ alors $f^{-1}(h')$ est un sous-hypergroupe clos de H.

2) Si h' est ultra-clos à droite (resp. gauche) alors $f^{-1}(h')$ est un sous-hypergroupe ultra-clos à droite (resp. gauche) de H.

3) Si h' est conjugable alors $f^{-1}(h')$ est un sous-hypergroupe conjugable de H.

Pour la démonstration de 1) on renvoie à l'article [1] de P. BONANSINGA - P. CORSINI

2) Démontrons tout d'abord que $f^{-1}(h')$ est non vide :

Pour tout $u \in H$, il existe $v \in H$ tel que $u \in uv$ et donc $f(u) \in f(u) f(v)$; il s'ensuit, puisque h' est ultra-clos à droite dans H, $f(v) \in h'$ soit $v \in f^{-1}(h')$. Ainsi $f^{-1}(h')$ est non vide et, d'après 1), c'est un sous-hypergroupe clos de H.

Mais, tout $x \in H$ vérifie $f(xf^{-1}(h') \cap x(H\text{-}f^{-1}(h')) \subset f(x)h' \cap h(x)(H\text{-}h')$ et, le deuxième membre de l'inclusion étant vide, il vérifie aussi $x f^{-1}(h') \cap x(H - f^{-1}(h')) = \emptyset$.

3) Si h' est conjugable, on a $\omega_{H'} \subset h'$ et donc $f^{-1}(\omega_{H'}) \subset f^{-1}(h')$. Or, d'après la proposition 3 de [1] on sait que $f(\omega_h) \subset \omega_{H'}$; il s'ensuit les inclusions $\omega_H \subset f^{-1}(\omega_{H'}) \subset f^{-1}(h')$ et, en appliquant la proposition 2.6 de [8] on conclut que $f^{-1}(h')$ est conjugable.

Proposition 2.2.

Si h' est ultra-clos à droite dans H', pour tout couple $(x,y) \in H^2$ on a $y \in xf^{-1}(h')$ si et seulement si $f(y) \in f(x)h'$.

Il est évident que $y \in xf^{-1}(h')$ implique $f(y) \in f(x)h'$. Montrons l'implication inverse :

Soit $z \in H$ tel que $y \in xz$, alors $f(y) \in f(x)f(z)$ et si $f(z) \in H'\text{-}h'$ on a $f(y) \in f(x)h' \cap f(x)(H'\text{-}h') = \emptyset$, ce qui est absurde, donc $f(z) \in h'$, d'où $z \in f^{-1}(h')$ et, en définitive, $y \in xf^{-1}(h')$.

On remarquera (cf. Proposition 2.1) que $f^{-1}(h')$ est un sous-hypergroupe ultra-clos à droite de H.

Corollaire 2.1.

Si h' est ultra-clos infra-invariant (resp. invariant) dans H', il en est de même de $f^{-1}(h')$ dans H.

La proposition 2.1 établit que $f^{-1}(h')$ est un sous-hypergroupe ultra-clos et donc inversible de H, d'où l'inclusion

$x f^{-1}(h') \cup f^{-1}(h')x \subset f^{-1}(h') x f^{-1}(h')$.

Inversement, soit $u \in f^{-1}(h')x f^{-1}(h')$, alors on a $f(u) \in h' f(x)h' = h'f(x) \cup f(x)h'$ et, par la proposition 2.2, $u \in f^{-1}(h') x \cup x f^{-1}(h')$, d'où l'on déduit l'égalité

$f^{-1}(h')x f^{-1}(h') = f^{-1}(h')x \cup x f^{-1}(h')$.

La démonstration concernant le cas invariant se fait de façon analogue.

§ 3. Une nouvelle classe d'hypergroupes.

On dira que H est un hypergroupe de type U à droite si les conditions suivantes sont satisfaites :

U1) Il existe $\varepsilon \in H$ tel que pour tout $x \in H$ on ait $x\varepsilon = x$ (i.e. ε est unité scalaire à droite).

U2) Pour tout $(x,y) \in H^2$, $x \in xy$ implique $y = \varepsilon$.

On définit corrélativement les hypergroupes de type U à gauche.

Exemples.

1) Les hypergroupes de type C à droite sont des hypergroupes de type U à droite.

2) Soit l'hypergroupe défini par l'ensemble $\{\varepsilon, y, z, t, w\}$ muni de l'hyperproduit commutatif donné par la table suivante (*)

(*) Cet exemple a été construit par une méthode indiquée dans le contre-exemple 3 du travail de P. CORSINI-Y. SUREAU précédemment cité.

	ε	y	z	t	w
ε	ε	y	z	t	w
y	z	ε,z,t,w	ε,t,w	ε,z, w	ε , z, t
z	z	ε , t, w	ε , y, t, w	ε , y, w	ε, y, t
t	t	ε, z, w	ε , y, w	ε , y, z, w	ε , y, z
w	w	ε , z, t	ε, y, t	ε , y, z	ε , y, z, t

Cet hypergroupe est de type U à gauche et à droite mais n'est pas de type C. (Sinon ce serait un groupe !)

3) Si h est inversible à droite, l'ensemble des identités partielles à droite de $H_{/h}$ est réduit à $h_{/h}$ si et seulement si $H_{/h}$ vérifie U2 et donc (cf. Rappels) h est ultra-clos à droite dans H si et seulement si $H_{/h}$ est de type U à droite.

On donne maintenant quelques propriétés des hypergroupes de type U à droite :

Si H est de type U à droite et si ε est son unité scalaire à droite, alors

1) ε appartient à tout sous-hypergroupe de H.

2) ε est un sous-hypergroupe ultra-clos à droite de H.

3) h est clos à droite si et seulement s'il est ultra-clos à droite.

4) Si H' est de type U à droite d'unité scalaire à droite ε' et si $f : H \to H'$ est un morphisme d'hypergroupes, alors :

I) $f(\varepsilon) = \varepsilon'$

II) $f^{-1}(\varepsilon')$ est un sous-hypergroupe ultra-clos à droite de H.

III) $x \in y f^{-1}(\varepsilon')$ si et seulement si $f(x) = f(y)$.

IV) f est injectif si et seulement si $f^{-1}(\varepsilon') = \varepsilon$

V) Si h est ultra-clos à droite et contenu dans $f^{-1}(\varepsilon')$ et si $p : H \to H_{/h}$ est la surjection canonique, alors il existe un unique morphisme $g : H_{/h} \to H'$ tel que le *diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & H' \\ H_{/h} \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

et tel que l'on ait

a) $Img = Imf$

b) $g^{-1}(\varepsilon') = f^{-1}(\varepsilon')_{/h} = p(f^{-1}(\varepsilon'))$

c) Si f est un morphisme bon alors g l'est aussi.

VI) Si H' est de type U à droite et à gauche, alors $f^{-1}(\varepsilon')$ *est un sous-hypergroupe invariant de H.*

Démonstrations.

1) Pour tout $x \in h$, il existe $y \in h$ tel que $x \in xy$ et donc, par U2, $y = \varepsilon$.

2) Il est évident que ε est un sous-hypergroupe de H car c'est une unité scalaire à droite. Si, pour un élément $x \in H$ on a $x\varepsilon \cap x(H - \varepsilon) \neq \emptyset$ alors $x \in x(H - \varepsilon)$ et, par U2, $\varepsilon \in H - \varepsilon$ ce qui est absurde. Donc ε est ultra-clos à droite dans H.

3) Si h est ultra-clos à droite, on sait qu'il est clos (cf. Proposition 1.1 de [8]). Réciproquement, supposons h clos à droite et $A = xh \cap x(H - h) \neq \emptyset$. Soit $y \in A$, par la reproductibilité de H, il existe $u \in H$ tel que $x \in yu$ et donc $x \in xhu$ d'où, par U2, $\varepsilon \in hu$ et, puisque $\varepsilon \in h$, et h est clos à droite, on a $u \in h$. Ainsi, $y \in x(H - h) \subset yu(H - h) \subset yh(H - h) = y(H - h)$; il s'ensuit (par U2) $\varepsilon \in H - h$, ce qui est absurde. Donc A est vide et h est ultra-clos à droite dans H.

4-I) $f(\varepsilon) = f(\varepsilon\varepsilon) \subset f(\varepsilon)f(\varepsilon)$ d'où $f(\varepsilon) = \varepsilon'$.

4-II) On sait (cf. 2)) que ε' est un sous-hypergroupe ultra-clos à droite dans H'. Donc (Proposition 2.1) $f^{-1}(\varepsilon')$ est un sous-hypergroupe ultra-clos à droite de H.

4-III) Si $x \in y f^{-1}(\varepsilon')$ on a $f(x) \in f(y)\varepsilon' = f(y)$ soit $f(x) = f(y)$.

Réciproquement, $f(x) = f(y) = f(y)\varepsilon'$ implique, par la proposition 2.2, $x \in y f^{-1}(\varepsilon')$.

4-IV) Si $x \in f^{-1}(\varepsilon')$ alors $f(x) = f(\varepsilon') = f(\varepsilon)$ et si f est injectif alors $x = \varepsilon = f^{-1}(\varepsilon')$.

Réciproquement, supposons $\varepsilon = f^{-1}(\varepsilon')$ et $f(x) = f(y)$ alors (cf. 4-III) $x \in yf^{-1}(\varepsilon') = y$ et f est injectif.

4-V) On définit $g : H_{/h} \to H'$ en posant, pour tout $p(x) \in H_{/h}$, $g(p(x)) = f(x)$. Puisque h est contenu dans $f^{-1}(\varepsilon')$ ($\neq \emptyset$), pour tout $x \in H$, on a $f(xh) \subset f(x)f(h) \subset f(x)\,\varepsilon' = f(x)$ d'où $f(xh) = f(x)$. Il s'ensuit, si $p(x) = p(y)$, que l'on a $g(p(x)) = f(x) = f(xh) = f(yh) = f(y) = g(p(y))$; g est donc bien défini.

D'autre part, on a $g(p(x)p(y)) = g(p(p^{-1}(p(x)p(y)))) = f(p^{-1}(p(x)p(y))) = f(p^{-1}(p(x))\,p^{-1}(p(y))) = f(xhyh) \subset f(xh)f(yh) = f(x)f(y) = g(p(x))g(p(y))$.
Ce qui prouve que g est un morphisme d'hypergroupe.

Remarquons que si f est bon, on a $f(xhyh) = f(xh)f(yh)$ d'où $g(p(x)p(y)) = g(p(x))g(p(y))$ et g est donc lui aussi un morphisme bon.

Par construction, g est unique et vérifie $gop = f$ et $\mathrm{Img} = \mathrm{Imf}$. De plus on a $g^{-1}(\varepsilon') = \{p(x) \in H_{/h}\ ;\ g(p(x)) = \varepsilon'\} = \{p(x) \in H_{/h}\ ; f(x) = \varepsilon'\} = p(f^{-1}(\varepsilon')) = f^{-1}(\varepsilon')_{/h}$.

4-VI) Si H' est de type U à gauche et à droite, ε' est une unité scalaire bilatère, c'est donc un sous-hypergroupe invariant de H et, par le corollaire 1, $f^{-1}(\varepsilon')$ est invariant.

Théorème 3.1.

Si H et H' sont de type U à droite d'identité scalaire ε et ε' respectivement, alors $H \times H'$ est de type U à droite d'unité scalaire $(\varepsilon, \varepsilon')$. De plus $H \times H'_{/\varepsilon \times H'}$ est isomorphe à H et $H \times H'_{/H \times \varepsilon'}$ est isomorphe à H'.

Pour démontrer ce théorème, il nous faut le lemme technique suivant :

Lemme 3.1.

Si H et H' admettent respectivement h et h' comme sous-hypergroupe ultra-clos à droite alors $h \times H'$ et $H \times h'$ sont des sous-hypergroupes ultra-clos à droite de $H \times H'$.

On sait que $h \times H'$ et $H \times h'$ sont des sous-hypergroupes de $H \times H'$. Montrons, par exemple, que $h \times H'$ est ultra-clos à droite dans $H \times H'$.

Pour tout couple $(x,y) \in H \times H'$ on peut écrire

$(x,y)(h \times H') \cap (x,y)\ [(H\times H') - (h \times H')] = (x,y)(h \times H') \cap (x,y)\ [(H - h) \times H']\ =$

$(xh, yH') \cap (x(H - h), yH') = (xh, H') \cap (x(H\text{-}h), H') = \emptyset$

(car $xh \cap x(H\text{-}h) = \emptyset$ pour tout $x \in H$).

De façon analogue, on montre l'ultra-clôture à droite de $H\times h'$ dans $H \times H'$.

Revenons maintenant à la démonstration du théorème.

Il est trivial que $(\varepsilon, \varepsilon')$ est une unité scalaire à droite. D'autre part, pour (x, y) et (a, b) de $H \times H'$, si $(x,y) \in (x,y)(a, b)$ alors $x \in xa$ et $y \in yb$, d'où $a = \varepsilon$ et $b = \varepsilon'$; donc $H \times H'$ est de type U à droite.

L'application $f : H \times H' \longrightarrow H\times \varepsilon'$ définie par $f((x,y)) = f(x,y) = (x, \varepsilon')$ est surjective et c'est trivialement un morphisme bon vérifiant $f^{-1}(\varepsilon, \varepsilon') = \varepsilon \times H'$. Ainsi d'après la propriété 4-V, il existe un unique morphisme g faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} H\times H' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & H\times \varepsilon' \\ H\times H'/_{\varepsilon\times H'} \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$, $g^{-1}(\varepsilon, \varepsilon') = p(f^{-1}(\varepsilon, \varepsilon'))$ et g est bon. Mais alors, puisque f est surjectif, g l'est aussi et comme $f^{-1}(\varepsilon, \varepsilon') = \varepsilon \times H'$ on a $g^{-1}(\varepsilon, \varepsilon') = p(\varepsilon\times H')$, il s'ensuit, d'après la propriété 1, que g est injectif. Ainsi g est un isomorphisme d'hypergroupes.

Enfin, l'application $t : H \times \varepsilon' \longrightarrow H$ telle que $t(x, \varepsilon') = x \quad (\forall x \in H)$ est trivialement un isomorphisme d'hypergroupes. Le composé $t \circ g$ nous donne l'isomorphisme cherché entre $H \times H'/_{\varepsilon\times H'}$ et H.

De façon analogue, on établit un isomorphisme entre $H \times H'/_{H\times \varepsilon'}$ et H'.

Remarque :

L'hypergroupe quotient, $G/_g$, des classes à droite d'un groupe G modulo un de ses sous-groupes, g, est un hypergroupe de type C à droite. Mais tout hypergroupe de type C à droite n'est pas nécessairement isomorphe à un hypergroupe quotient $G/_g$ (cf. Y. UTUMI [10]).

Ici, le théorème 3.1 permet d'affirmer que tout hypergroupe, H, de type C à droite, d'unité scalaire à droite ε , est quotient d'un hypergroupe de type U à droite par un de ses sous-hypergroupes ultra-clos à droite. En effet, si K est un hypergroupe de type U à droite, $H \times K$ en est un admettant $\varepsilon \times K$ comme sous-hypergroupe ultra-clos à droite et $H \times K/_{\varepsilon \times K}$ est isomorphe à H.

Proposition 3.1.

Si H est de type U à droite, d'identité scalaire à droite ε , il y a équivalence des conditions suivantes :

i) ε est unité à gauche

ii) H est régulier et réversible à droite.

Démonstration :

i) $\Rightarrow$ ii) : ε est donc unité bilatère. Soit $z \in H$, il existe $z' \in H$ tel que $\varepsilon \in z'z$ et alors $z' \in \varepsilon z' \subset (z'z)z' = z'(zz')$ donc, par U2, $\varepsilon \in zz'$; ainsi z' est inverse bilatère de z et H est régulier.

Soient $x \in yz$ et $z'' \in H$ tels que $y \in xz''$; on a $x \in (xz'')z = x(z''z)$ soit, par U2, $\varepsilon \in z''z$ et, comme le montre la première partie de la démonstration, z'' est inverse bilatère de z. Donc H est réversible à droite.

ii) $\Rightarrow$ i) : H étant régulier, il existe au moins une unité bilatère ε'. En particulier ε' est une unité à droite et, par U2, $\varepsilon = \varepsilon'$; donc ε est aussi une unité à gauche.

Remarque :

Dans l'exemple (3) on a vu que l'hypergroupe quotient, $H_{/h}$, de H modulo un de ses sous-hypergroupes, h, ultra-clos à droite et inversible à gauche est un hypergroupe de type U à droite. Aussi, puisque $h_{/h}$ est une unité à gauche de $H_{/h}$, la proposition 3.1 démontre que $H_{/h}$ est régulier et réversible à droite.

Dans la proposition suivante, on caractérise les inverses de $H_{/h}$.

Proposition 3.2.

Si h est ultra-clos à droite et inversible à gauche dans H, alors :

1) pour tout couple (x,x') d'éléments de H tel que $xx' \cap h \neq \emptyset$, x'h est inverse bilatère de xh dans $H_{/h}$.

2) Si h est semi-invariant à droite dans H, pour tout $(x,x') \in H^2$ on a $xx' \cap h \neq \emptyset$ si et seulement si x'h est inverse bilatère de xh dans $H_{/h}$.

1) Supposons $xx' \cap h \neq \emptyset$; h étant inversible, on a, $x \in xh$ et donc $xx' \subset xhx'$; il s'ensuit pour tout $u \in xx' \cap h$, l'appartenance $u \in xhx'$, d'où $h = uh \subset xhx'h$. Ainsi x'h est inverse à droite de xh.

Mais l'inversibilité de h implique aussi l'appartenance $x \in hx$, d'où l'inclusion $xh \subseteq hxh$ et donc $xh \subset (xhx'h)xh = xh(x'hxh)$. Or x'hxh n'est pas inclus dans H-h sinon on aurait $xh \subset xh(x'hxh) \subseteq xh(H\text{-}h) = x(H\text{-}h)$. Ce qui contredit l'ultra-clôture à droite de h ; ainsi $x'hxh \cap h \neq \emptyset$.

En définitive, on a $h \subset x'h\,xh \cap xhx'h$, ce qui établit que x'h est inverse bilatère de xh dans $H_{/h}$.

2) La condition est nécessaire d'après 1). Montrons qu'elle est suffisante. Puisque x'h est inverse bilatère de xh dans $H_{/h}$ on a $h \subseteq xhx'h$ et donc $xhx' \cap h \neq \emptyset$. Mais, par hypothèse, on a $xh \subset hx$, d'où $hxx' \cap h \neq \emptyset$ et, h étant clos, $xx' \cap h \neq \emptyset$.

§ 4. Structure des hypergroupes de doubles classes.

L'ensemble ${}_{h}\backslash H_{/h}$ des doubles classes hxh $(x \in H)$ de H modulo h, où h est supposé inversible, est muni d'une structure d'hypergroupe par l'hyperproduit (hxh)(hyh) = $\{ hzh \; ; z \in xhy \}$. Cet hypergroupe de doubles classes a déjà été étudié par M. DRESHER et O. ORE (cf. [5]) et M. KRASNER (cf. [7]). On donne ici un théorème dans le cas où h est ultra-clos dans H.

Théorème 4.1.

Si h est ultra-clos dans H, alors ${}_{h}\backslash H_{/h}$ est un hypergroupe régulier et réversible.

Il est évident que ${}_{h}\backslash^{h}/_{h}$ est une unité bilatère de l'hypergroupe ${}_{h}\backslash^{H}/_{h}$. Soit hxh $\in$ ${}_{h}\backslash^{H}/_{h}$, il existe $h\bar{x}h$ tel que h $\in$ $(hxh)(h\bar{x}h)$; il s'ensuit $xh\bar{x} \cap h \neq \emptyset$ et donc $h \subset xh\bar{x}h$.
Si l'on suppose $\bar{x}hx \subset H\text{-}h$, alors on a
$xh \subset hxh \subset (xh\bar{x}h)xh = xh(\bar{x}hx)h \subset xh(H\text{-}h)h = x(H\text{-}h)$, ce qui contredit l'ultra-clôture à droite de h dans H ; ainsi $\bar{x}hx \cap h \neq \emptyset$ et $h \in (h\bar{x}h)(hxh)$. On a donc démontré l'existence d'un inverse bilatère, $h\bar{x}h$, de hxh et par là-même, que ${}_{h}\backslash^{H}/_{h}$ est régulier.

Montrons maintenant la reversibilité à gauche. Pour cela considérons $hxh \in (hzh)(hyh)$. Il existe $w \in zhy$ et $t \in hy$ tels que $hxh = hwh$ et $w \in zt$ et, puisque h est inversible dans H, on a $hth = hyh$. Mais la reproductibilité de H implique l'existence de $z' \in H$ vérifiant $t \in z'w$ et donc $t \in z'hw$; il s'ensuit $hth = hyh \in (hz'h)(hwh) = (hz'h)(hxh)$ soit $hyh \in (hz'h)(hxh)$. Il reste à prouver que $hz'h$ est un inverse bilatère de hzh dans ${}_{h}\backslash^{H}/_{h}$, or $w \in zt$ et $t \in z'w$ impliquent $t \in (z'z)t$ et $w \in (zz')w$ d'où, puisque h est ultra-clos, $z'z \cap h \neq \emptyset$ et $zz' \cap h \neq \emptyset$ donc $z'hz \cap h \neq \emptyset$ et $zhz' \cap h \neq \emptyset$ et l'on conclut à $h \in (hz'h)(hzh) \cap (hzh)(hz'h)$; c'est-à-dire que $hz'h$ est inverse bilatère de hzh.

Corrélativement, on démontre la réversibilité à droite de ${}_{h}\backslash^{H}/_{h}$.

Remarque :

La proposition 3.1 permet d'affirmer qu'un hypergroupe de type U à droite et à gauche est régulier et réversible. Or, ${}_{h}\backslash^{H}/_{h}$ admet une identité scalaire bilatère, ${}_{h}\backslash^{h}/_{h}$, et, comme il est régulier à gauche et à droite, on pourrait penser qu'il est de type U à gauche et à droite ; mais il n'en est rien comme le montre le contre-exemple suivant :

Contre- exemple 4.1.

Soit G le groupe non commutatif d'ordre 10 ; il est engendré par deux éléments a et b, d'ordres respectifs 5 et 2, vérifiant la relation $ba = a^4 b$. Le sous-groupe $g = \{1,b\}$ n'est pas normal dans G et les doubles classes de G modulo g sont :

$\varepsilon = g1g = gbg = \{1, b\}$

$x = gag = ga^4g = gabg = ga^4bg = \{a, a^4, ab, a^4b\}$

$y = ga^2g = ga^3g = ga^2bg = ga^3bg = \{a^2, a^3, a^2b, a^3b\}$

Enfin, la table de l'hyperproduit (ici commutatif) de ${}_g\backslash G/_g$ est la suivante :

	ε	x	y
ε	ε	x	y
x	x	ε, y	x, y
y	y	x, y	ε, x

et de toute évidence ${}_g\backslash G/_g$ n'est pas un hypergroupe de type U ni à gauche ni à droite.

§ 5. Structure des hypergroupes quotients, $H/_h$, de H modulo un de ses sous-hypergroupes, h, bi-ultra-clos ou conjugable.

Les sous-hypergroupes bi-ultra-clos constituent une classe de sous-hypergroupes intermédiaire entre celle des sous-hypergroupes ultra-clos et celle des sous-hypergroupes conjugables; ils furent introduits pour la première fois par P. CORSINI et Y. SUREAU dans [4] .

Définition 5.1.

On dit que h est un sous-hypergroupe bi-ultra-clos de H si et seulement si pour tout couple (x,y) d'éléments de H on a

$$xhy \cap x(H-h)y = \emptyset.$$

Théorème 5.1.

Si h est bi-ultra-clos dans H, alors $H/_h$ est un hypergroupe de type C à droite.

Remarquons tout d'abord que, h étant bi-ultra-clos dans H, il est ultra-clos, et donc inversible, dans H.

De toute évidence, h est identité scalaire à droite dans $H/_h$.

Considérons x, y et z, trois éléments de H, tels que $xhyh \cap xhzh \neq \emptyset$. Il existe $u \in xhy$ et $v \in xhz$ vérifiant $uh \cap vh \neq \emptyset$ soit $uh = vh$. Ainsi il y a un élément $w \in h$ pour lequel $u \in vw$ et alors $u \in vw \subset xhzw$; d'où l'existence de $a \in zw$ tel que $u \in xha$. Mais il existe $b \in H$ vérifiant $a \in by$ et donc $u \in xhby$. Si $b \in H\text{-}h$, on a

$u \in xhby \subset xh(H\text{-}h)y = x(H\text{-}h)y$ et, comme $u \in xhy$, $xhy \cap x(H\text{-}h)y \neq \emptyset$, ce qui contredit l'hypothèse de bi-ultra-clôture. Donc on a $b \in h$ soit $a \in hy$, d'où $zw \cap hy \neq \emptyset$; il s'ensuit $zh \cap hy \neq \emptyset$ et par conséquent $hzh \cap hyh \neq \emptyset$, donc $hzh = hyh$.

En définitive, $xhyh \cap xhzh \neq \emptyset$ implique $hyh = hzh$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Théorème 5.2.

Si h est conjugable, alors :

1) $H_{/h}$ est un hypergroupe de type C à droite

2) Le plus petit sous-hypergroupe clos et invariant contenant h existe et, si on le note $I_N(h)$, on a $\omega_{H_{/h}} = I_N(h)_{/h}$.

La première partie du théorème résulte du théorème 5.1 précédent puisque tout sous-hypergroupe conjugable de H est bi-ultra-clos dans H.

Pour démontrer la deuxième partie du Théorème, remarquons tout d'abord que tout sous-hypergroupe clos de H contenant h est conjugable (cf. proposition 2.6 de [8]) et que l'intersection $I_N(h)$ de la famille $\{K_i\}_{i \in I}$ de tous les sous-hypergroupes conjugables et invariants de H contenant h est aussi un sous-hypergroupe de H conjugable (donc clos) (cf. proposition 2.5 de [8]) et invariant (en effet, pour tout x de H, on a

$$x(H - I_N(h)) = \bigcup_{i \in I} x(H - K_i) = \bigcup_{i \in I} (H - xK_i) = \bigcup_{i \in I} (H - K_i x) = (H - I_N(h))x \quad \text{et,}$$

comme $I_N(h)$ est ultra-clos, on a $xI_N(h) = I_N(h)x$). Ainsi l'existence de $I_N(h)$ est démontrée.

Notons $p : H \to H_{/h}$ la surjection canonique. Puisque $\omega_{H_{/h}}$ est conjugable et invariant dans $H_{/h}$, il en est de même de $p^{-1}(\omega_{H_{/h}})$ dans H d'après la proposition 2.1 et le corollaire 2.1, et, comme h est contenu dans $p^{-1}(\omega_{H_{/h}})$ on a $I_N(h) \subset p^{-1}(\omega_{H_{/h}})$, d'où $I_N(h)_{/h} = p(I_N(h)) \subset \omega_{H_{/h}}$.

Inversement, $I_N(h)$ étant conjugable et invariant, on sait que $H_{/I_N(h)}$ est un groupe (cf. Théorème 3.1 de [8]) et, puisque $H_{/h/I_N(h)_{/h}}$ est isomorphe à $H_{/I_N(h)}$

il s'ensuit (par le même théorème cité ci-dessus) que $I_N(h)_{/h}$ est un sous-hypergroupe conjugable et invariant de $H_{/h}$. On a donc $\omega_{H/_h} \subset I_N(h)_{/h}$ et en définitive

$\omega_{H_{/h}} = I_N(h)_{/h}$.

Remarque :

Le Théorème 5.1 précédent permet d'affirmer qu'en général la réciproque de la première assertion du théorème 5.2 est fausse ; c'est-à-dire que si $H_{/h}$ est un hypergroupe de type C à droite, h n'est pas nécessairement conjugable. En fait, il existe des contre-exemples (voir par exemple le contre-exemple 2 du travail de P. CORSINI et Y. SUREAU [4]).
Mais on a la proposition suivante :

Proposition 5.1.

Si h est semi-invariant à droite et inversible dans H, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) h est bi-ultra-clos dans H.

ii) $H_{/h}$ est de type C à droite et ${}_h\backslash H$ et de type U à gauche.

i) implique ii) : On sait, par le théorème 5.1, que $H_{/h}$ est de type C à droite. D'autre part, puisque h est ultra-clos à gauche, ${}_h\backslash H$ est de type U à gauche (cf. exemple 3) du paragraphe 3 précédent).

ii) implique i) : Puisque ${}_h\backslash H$ est de type U à gauche, h est ultra-clos à gauche. Supposons qu'il existe un couple (x,y) d'éléments de H vérifiant $xhy \cap x(H\text{-}h)y \neq \emptyset$; alors, il existe $u \in hy$ et $v \in (H - h)y$ tels que $xu \cap xv \neq \emptyset$ et donc $xh\,uh \cap xh\,vh \neq \emptyset$. Mais, $H_{/h}$ étant de type C à droite, on a $huh = hvh$, d'où $huh = hvh \subset h(H\text{-}h)yh = (H\text{-}h)yh \subset$
$\subset (H - h)hy = (H - h)y$. Or $u \in hy$ implique $huh \subset hhyh = hyh \subset hhy = hy$;
il s'ensuit $hy \cap (H - h)y \neq \emptyset$, ce qui contredit l'hypothèse d'ultra-clôture à gauche faite sur h dans H. Donc on a $xhy \cap x(H - h)y = \emptyset$ pour tout couple (x,y) d'éléments de H ; c'est-à-dire que h est bi-ultra-clos dans H.

§ 6. Condition nécessaire pour que l'hypergroupe quotient $H_{/h}$ soit commutatif.

On définit et l'on utilise ici une notion équivalente à celle de commutateur pour les groupes.

Pour cela, on pose, pour tout couple $(a, b) \in H^2$, $a/_b = \{ x \in H \; ; a \in xb \}$ et $b\backslash^a = \{x \in H \; ; \; a \in bx\}$ et l'on étend cette définition à l'ensemble des parties non vides $\mathscr{P}^*(H)$, de H , en posant, pour toute paire (A, B) d'éléments de $\mathscr{P}^*(H)$,
$A/B = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} a/_b$ et $A\backslash B = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} a\backslash^b$. Enfin, on note $D_1 = \bigcup_{(x,y) \in H^2} xy/yx$,
$D_2 = \bigcup_{(x,y) \in H^2} xy \backslash yx$ et $D = D_1 \cup D_2$.

Proposition 6.1.

On a les propriétés suivantes :

1) Si $D_1 \subset h$ alors h est semi-invariant à droite dans H.

2) Si $D_2 \subset h$ alors h est semi-invariant à gauche dans H.

3) Si $D \subset h$ alors h est invariant dans H.

Démontrons 1). Soient $x \in H$ et $u \in xh$, alors il existe $y \in h$ vérifiant $u \in xy$ et, pour tout $v \in yx$, il existe $a \in H$ tel que $u \in av$; donc on a $a \in u/_v \subset xy/_{yx} \subset D_1 \subset h$. Il s'ensuit $u \in av \subset ayx \subset hhx = hx$, d'où $xh \subset hx$.

On démontre corrélativement la propriété 2), quant à la propriété 3) elle découle de 1) et 2).

Théorème 6.1.

Si h est inversible dans H et contient D, alors $H_{/h}$ est un hypergroupe commutatif.

En effet, $(x,y) \in H^2$ étant donné, pour tout $u \in xy$, on a $u/_{yx} \subset xy/_{yx} \subset D_1 \subset h$ d'où $u \in hyx$ et donc $xy \subset hyx$; il en résulte $h\,xyh \subset hyxh$. Mais, d'après la proposition 6.1 (3) précédente, h est invariant dans H ; on conclut donc à l'inclusion $xhyh \subset yhxh$.

De façon analogue, on établit l'inclusion inverse $yh\,xh \subset xh\,yh$ (en utilisant $yx\backslash xy \subset h$), d'où la commutativité de l'hypergroupe $H_{/h}$.

Remarque 6.1.

En général, la réciproque du Théorème 6.1 précédent est fausse. En effet, si H est l'hypergroupe commutatif de l'exemple 2) des hypergroupes de type U à droite, et si $h = \varepsilon$ (ε est ultra-clos, donc inversible) on a $H_{/\varepsilon} \simeq H$, donc $H_{/\varepsilon}$ est commutatif, mais $D \not\subset \varepsilon$. On a seulement le résultat suivant :

Proposition 6.2.

On suppose h inversible à droite (resp. gauche) dans H et tel que $H_{/h}$ (resp. ${}_{h\backslash}H$) soit commutatif.

1) Alors h est semi-invariant à gauche (resp. droite) dans H et pour tout $(x,y) \in H^2$ on a $(xy\backslash yx) \cap h \neq \emptyset$ (resp. $(xy/yx) \cap h \neq \emptyset$).

2) Si, de plus, h est ultra-clos à droite (ou à gauche), alors h est invariant dans H, et pour tout $(x,y) \in H^2$, on a

$(xy/yx) \cap h \neq \emptyset$ et $(xy\backslash yx) \cap h \neq \emptyset$.

Démonstration :

1) h étant inversible à droite, on a $hx \subset hxh$ et, puisque $H_{/h}$ est commutatif, $hxh = xh$ d'où $hx \subset xh$.

Pour tout $(x,y) \in H^2$, la commutativité de $H_{/h}$ et la semi-invariance à gauche de h impliquent $xyh \cap yxh \neq \emptyset$, d'où l'existence de $u \in xy$ et $v \in yx$ tels que $uh \cap vh \neq \emptyset$; soit, ici, $uh = vh$. Ainsi on a $v \in uh$, donc $(u \backslash v) \cap h \neq \emptyset$ et, par conséquent, $(xy \backslash yx) \cap h \neq \emptyset$.

2) Compte tenu de 1), il suffit, pour démontrer l'invariance de h, de prouver qu'il est semi-invariant à droite dans H :

pour tout $x \in H$ on a $xh \cap (H\text{-}h)x \subset xh \cap (H\text{-}h)hxh = xh \cap xh(H\text{-}h)h = xh \cap x(H\text{-}h) = \emptyset$. Donc $xh \subset hx$.

Enfin, l'invariance de h dans H implique l'inversibilité à gauche de h dans H et la commutativité de $_h\backslash H$ découlant alors de celle de $H_{/h}$ on peut appliquer 1) à gauche et à droite ; ce qui achève la démonstration de 2).

Remarque 6.2.

L'hypothèse d'ultra-clôture paraît nécessaire pour démontrer l'invariance de h dans H. En effet, l'inversibilité n'est pas une condition assez forte comme le montre le

Contre- exemple 6.1.

Soit H l'hypergroupe défini par l'ensemble $\{x, y, z, w\}$ muni de l'hyperproduit donné par le tableau suivant :

↷	x	y	z	w
x	x	y	z	z, w
y	y	x, y	z, w	z, w
z	z, w	z, w	x, y	x, y
w	z, w	z, w	x, y	x, y

H est non commutatif. Posons $h = \{x\}$. Il est évident que h est inversible à droite, mais non à gauche et que $H_{/h}$ est commutatif. En posant $\bar{x} = xh$, $\bar{y} = yh$ et $\bar{z} = zh = wh$, l'hyperproduit de $H_{/h}$ est donné par le tableau

	$\bar{X}$	$\bar{Y}$	$\bar{Z}$
$\bar{X}$	$\bar{X}$	$\bar{Y}$	$\bar{Z}$
$\bar{Y}$	$\bar{Y}$	$\bar{X},\bar{Y}$	$\bar{Z}$
$\bar{Z}$	$\bar{Z}$	$\bar{Z}$	$\bar{X},\bar{Y}$

il est alors trivial que h n'est pas semi-invariant à droite puisque $zh = \{z,w\} \not\subset hz = \{z\}$.

Théorème 6.2.

Si h est inversible dans H, il y a équivalence de :

i) $H_{/h}$ *est un groupe commutatif*

ii) h est conjugable et $D \subset h$

iii) ${}_{h\backslash}H$ *est un groupe commutatif.*

i) implique ii).

On sait que si $H_{/h}$ est un groupe, alors h est conjugable et invariant dans H (cf. Théorème 3.1 de [8]). Soit $(x,y) \in H^2$ et supposons $(xy \setminus yx) \cap (H\text{-}h) \neq \emptyset$; alors, $yx \cap xy\,(H\text{-}h) \neq \emptyset$, d'où $yhxh \cap xhy(H\text{-}h) \neq \emptyset$ et, puisque $H_{/h}$ est commutatif, $xhyh \cap xhy(H\text{-}h) \neq \emptyset$. Mais, h est conjugable ; il existe donc $x' \in H$ tel que $x'x \subset h$. Il s'ensuit $\emptyset \neq x'xhyh \cap x'xhy(H\text{-}h) = hyh \cap hy(H\text{-}h) = yh \cap y(H\text{-}h)$, ce qui est absurde. Donc on a $xy \setminus yx \subset h$ pour tout $(x,y) \in H^2$, c'est-à-dire $D_2 \subset h$. On démontre de même que l'on a $D_1 \subset h$, d'où l'inclusion $D \subset h$.

ii) implique i).

Le théorème 6.1 établit la commutativité de $H_{/h}$, la proposition 6.2 (2), l'invariance de h et le théorème 3.1 de [8] permet de conclure que $H_{/h}$ est un groupe.

L'équivalence entre ii) et iii) se démontre de façon analogue.

§ 7. Une notion de sous-hypergroupe dérivé.

On garde les notations du paragraphe précédent.

Le théorème 6.2 précédent incite à poser la définition suivante :

Définition 7.1.

On appelle sous-hypergroupe dérivé de H, et l'on note D(H), le sous-hypergroupe de H obtenu par l'intersection de tous les sous-hypergroupes conjugables de H contenant D.

Remarquons que D(H) est un sous-hypergroupe conjugable de H contenant D et que le théorème 6.2 précédent permet d'affirmer que D(H) est l'intersection de tous les sous-hypergroupes h de H tels que $H_{/h}$ soit commutatif. Enfin, dans le cas où H est un groupe, on retombe sur la définition classique du sous-groupe dérivé.

Lemme 7.1.

Si h est tel que $H_{/h}$ soit un groupe commutatif, alors on a $D(H_{/\omega_H}) \subset h_{/\omega_H}$.

En effet, $H_{/h}$ étant un groupe, on sait que h est conjugable et invariant dans H (cf. théorème 3.1 de [8]) ; donc ω_H est contenu dans h.

D'autre part, $(H_{/\omega_H})_{/(h_{/\omega_H})}$ et $H_{/h}$ sont des groupes isomorphes ; ils sont donc tous les deux commutatifs et alors $D(H_{/\omega_H})$ est contenu dans $(h_{/\omega_H})$.

Proposition 7.1.

On a $D(H_{/\omega_H}) = D(H)_{/\omega_H}$.

En appliquant le lemme 7.1 à D(H), on a l'inclusion $D(H_{/\omega_H}) \subset D(H)_{/\omega_H}$.

Mais $D(H_{/\omega_H})$ est un sous-groupe de $H_{/\omega_H}$, il existe donc un sous-hypergroupe L de H contenant ω_H tel que $D(H_{/\omega_H}) = L_{/\omega_H}$. Or, $H_{/L}$ est un groupe isomorphe à $H_{/\omega_H}{}_{/L_{/\omega_H}} = H_{/\omega_H}{}_{/D(H_{/\omega_H})}$, il est donc commutatif et D(H) est contenu dans L, d'où l'inclusion $D(H)_{/\omega_H} \subset L_{/\omega_H} = D(H_{/\omega_H})$.

Proposition 7.2.

Soit $D_u(H)$ l'intersection des sous-hypergroupes ultra-clos de H contenant D.

Si $f : H \rightarrow H'$ est un morphisme d'hypergroupes et $D_u(H')$ l'équivalent pour H' de $D_u(H)$

pour H, en notant $p : H \to H/D_u(H)$ et $p' : H' \to H'/D_u(H')$ les morphismes surjectifs canoniques, il existe un unique morphisme d'hypergroupes $f^* : H/D_u(H) \to H'/D_u(H')$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & H' \arrow[d, "p'"] \\ H/D_u(H) \arrow[r] & H'/D_u(H') \end{tikzcd}$$

Pour établir ce résultat, il suffit de prouver $f(D_u(H)) \subset D_u(H')$.

Soit $(x,y) \in H^2$, alors on a $f(xy/yx) \subset f(x)f(y)/f(y)f(x) \subset D' \subset D_u(H')$ et, analogiquement, $f(xy \setminus yx) \subset D_u(H')$, d'où $f(D) \subset D_u(H')$ et donc $D \subset f^{-1}(D_u(H'))$. Mais, compte tenu de la proposition 2.1, $f^{-1}(D_u(H'))$ est un sous-hypergroupe ultra-clos à droite de H, par conséquent, on a $D_u(H) \subset f^{-1}(D_u(H'))$; il en résulte $f(D_u(H)) \subset D_u(H')$.

De toute évidence, il s'ensuit le

Corollaire 7.1.

Si $p : H \to H/D(H)$ est le morphisme surjectif canonique, alors, pour tout groupe commutatif G et tout morphisme d'hypergroupes $f : H \to G$, il existe un et un seul morphisme $\bar{f} : H/D(H) \to G$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & G \\ H/D(H) \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

commute.

On va traiter maintenant

Un cas particulier : *La structure de D(H) lorsque H est de type C à droite.*

Dans la suite, on note ε l'unité scalaire à droite de H .

Proposition 7.3.

Si H est de type C à droite, pour tout quadruplet $(x, y, \bar{x}, \bar{y})$ d'éléments de H vérifiant $\varepsilon \in x\bar{x} \cap y\bar{y}$, on a :

1) $xy/yx = xy\bar{x}\bar{y}$

2) $xy \setminus \varepsilon yx = \varepsilon(\bar{x}\bar{y}/\bar{y}\bar{x})$

3) $xy \setminus yx \subset \varepsilon\ (\bar{x}\bar{y}/\bar{y}\bar{x})$

1) Soit $\alpha \in xy/yx$; il existe $a \in xy$ et $b \in yx$ tels que $\alpha \in a_{/b}$ et donc $a \in \alpha b$. Alors, H étant de type C à droite, on a $\alpha \in a\bar{b}$ et $\bar{b} \in \varepsilon\,\bar{b} \subset \varepsilon\,\bar{x}\bar{y}$; il s'ensuit $\alpha \in xy\varepsilon\bar{x}\bar{y} = xy\,\bar{x}\,\bar{y}$, d'où $xy/yx \subset xy\bar{x}\,\bar{y}$.

Inversement, soient $\alpha \in xy\,\bar{x}\,\bar{y}$, $a \in xy$ et $b \in \bar{x}\bar{y}$ tels que $\alpha \in ab$; alors on a $a \in \alpha\,\bar{b}$ et, par conséquent, $\bar{b} \in \varepsilon\,\bar{b} \subset \varepsilon\,\bar{\bar{y}}\,\bar{\bar{x}} = \varepsilon\bar{\bar{y}}\ \varepsilon\bar{\bar{x}} = \varepsilon y\ \ \varepsilon x = \varepsilon yx$; d'où $a \in \alpha\,\varepsilon yx = \alpha\, yx$. Ainsi, il existe $c \in yx$ vérifiant $a \in \alpha c$, et l'on a $\alpha \in a_{/c} \subset xy/yx$, d'où l'inclusion $xy\bar{x}\,\bar{y} \subset xy/yx$.

Enfin, x et y étant donnés, l'égalité $xy/yx = xy\,\bar{x}\,\bar{y}$ est indépendante du choix de $\bar{x}$ et $\bar{y}$ vérifiant $\varepsilon \in x\bar{x} \cap y\bar{y}$. En effet, si $\bar{x}'$ et $\bar{y}'$, éléments de H, vérifient $\varepsilon \in x\bar{x}' \cap y\bar{y}'$, alors $\varepsilon\,\bar{x} = \varepsilon\bar{x}'$, $\varepsilon\,\bar{y} = \varepsilon\bar{y}'$ et l'on a $xy\bar{x}\,\bar{y} = xy\ \varepsilon\bar{x}\ \ \varepsilon\bar{y} = xy\ \varepsilon\,\bar{x}'\ \ \varepsilon\bar{y}' = xy\bar{x}'\bar{y}'$.

2) Par une démonstration analogue à celle faite en 1), on obtient l'égalité $xy \setminus \varepsilon\, yx = \varepsilon\ \bar{x}\,\bar{y}\, xy$. D'autre part, on a $\bar{x}\,\bar{y}\, xy = \bar{x}\bar{y}\ \ \varepsilon\, x\ \ \varepsilon\, y = \bar{x}\bar{y}\ \ \varepsilon\,\bar{\bar{x}}\ \ \varepsilon\bar{\bar{y}} = \bar{x}\,\bar{y}/\,\bar{y}\ \bar{x}$, d'où $xy \setminus \varepsilon yx = \varepsilon\ (\bar{x}\,\bar{y}\,/\,\bar{y}\ \bar{x})$.

3) De l'inclusion $yx \subset \varepsilon\, yx$, on tire $xy \setminus yx \subset xy/\,\varepsilon\, yx$, donc, compte tenu de 2), on a $xy \setminus yx \subset \varepsilon\,(\bar{x}\,\bar{y}/\bar{y}\ \bar{x})$.

Proposition 7.4.

Si H est de type C à droite, alors D(H) est l'intersection de tous les sous-hypergroupes contenant D_1.

Notons $D_1(H)$ l'intersection de tous les sous-hypergroupes de H contenant D_1. L'inclusion $D_1(H) \subset D(H)$ est triviale ; on va démontrer l'inclusion inverse.

On sait que le sous-hypergroupe de H est clos, donc $D_1(H)$ est un sous-hypergroupe de H et, de plus, il est clos dans H.

D'autre part, pour tout $(x,y) \in H^2$ et tout $w \in y\,\bar{x}\,\bar{y}$, on a $x\,w \subset x\,y\,\bar{x}\,\bar{y} = xy/_{yx} \subset D_1 \subset D_1(H)$. Ainsi, quel que soit $x \in H$, il existe $w \in H$ tel que $x\,w \subset D_1(H)$; donc $D_1(H)$ est conjugable.

Enfin, en vertu de la proposition 7.3 précédente, on a $xy \setminus yx \subset \varepsilon(\bar{x}\,\bar{y}\ /\ \bar{y}\,\bar{x}) \subset \varepsilon\,D_1 \subset D_1(H)$. Il s'ensuit l'inclusion $D_2 \subset D_1(H)$, donc $D \subset D_1(H)$ et, comme $D_1(H)$ est conjugable, on conclut que l'on a $D(H) \subset D_1(H)$.

Proposition 7.5.

Si H est de type C à droite, alors tout sous-hypergroupe h, de H tel que $h \cap D(H) = \{\varepsilon\}$, est un groupe.

Soient x et y deux éléments de h. On sait que $\varepsilon\,\bar{x}$ et $\varepsilon\,\bar{y}$ sont contenus dans h ; on a donc $\varepsilon\,\bar{x}\,\bar{y}\ x\,y \subset h \cap D(H) = \{\varepsilon\}$, soit $\varepsilon\,\bar{x}\,\bar{y}\ x\ y = \varepsilon$. Or ε appartient à $y\,x\,\bar{x}\,\bar{y}$; il s'ensuit $xy \subset \varepsilon xy \subset (yx\,\bar{x}\,\bar{y})xy = yx(\varepsilon\,\bar{x}\,\bar{y}\,xy) = yx\,\varepsilon = yx$, d'où l'inclusion $x\,y \subset y\,x$. L'inclusion inverse se démontre de façon analogue. Mais alors ε est unité scalaire bilatère, et donc h est un groupe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. BONANSINGA - P. CORSINI - Su gli omomorfismi di semi-ipergruppi e di ipergruppi - Boll. Un. Mat. It. (1981).

[2] P. CORSINI - Contributo alla teoria degli ipergruppi - Atti soc. Pelor. Sc. Mat. Fis. Nat. - Messina (1980).

[3] P. CORSINI - Recenti risultati in teoria degli ipergruppi - Boll. Un. Mat. It. 2 - A (1983).

[4] P. CORSINI et Y. SUREAU - Article à paraître.

[5] M. DRESHER - O. ORE - Theory of multigroups - Amer. J. Math. 60 (1938).

[6] M. KOSKAS - Groupoides, Demi-hypergroupes et hypergroupes - J. Math. Pures et Appl. 49, (1970).

[7] M. KRASNER - La loi de Jordan - Hölder dans les hypergroupes et les suites génératrices des corps de nombres β-adiques- Duke Math. Jour. Vd 6 (1940).

[8] Y. SUREAU - Thèse de Doctorat d'Etat - Université de Clermont-Ferrand II - (1980).

[9] Y. SUREAU - Hypergroupes de type C - Conférence Taormine - (1983).

[10] Y. UTUMI - On hypergroups of group right cosets - Osaka Math. Journal Vol. 1, March, 1949.

Université de Clermont II, U.E.R. Sciences, Mathématiques Pures, 63170 - Aubière, France.

Adresse personnelle : Via Palermo n° 523, 98100 Messina, Italie.