ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

BERTIN DIARRA

Ultraproduits ultramétriques de corps valués

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 82, série *Mathématiques*, n° 22 (1984), p. 1-37

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1984__82_22_1_0>

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Sci. Univ. Clermont II, Sér. Math., Fasc. 22, 1984, pp. 1-37

ULTRAPRODUITS ULTRAMETRIQUES DE CORPS VALUES

Bertin DIARRA

Université de CLERMONT II

La notion d'ultraproduits d'espaces vectoriels normés réels ou complexes définie dans [3] par Dacunha-Castelle et Krivine s'applique aussitôt aux espaces normés ultramétriques. Un prolongement immédiat de cette notion conduit à celle d'ultraproduits *métriques* de corps valués.

Notons ici que l'ultraproduit de corps valués de valuation discrète, convenablement normalisés, est un corps de valuation discrète (théorème 1). Ce qui appliqué aux corps p-adiques Q_p donne un corps de séries formelles, résultat qui est comparable au théorème 4 de [1]. Ce même résultat est démontré indépendamment dans [12] par U. Kiehne qui l'applique pour donner une démonstration du théorème d'Ax-Kochen. Pour les ultrafiltres ω-incomplets, les ultraproduits sont sphériquement complets (Proposition 1). On traite aussi du cas des ultraproduits construits sur **R** et **C** ; on obtient des corps semblables à ceux introduits par A. Robinson à l'aide de l'analyse non-standard (cf. [8] ou [9]).

Ce texte a été rédigé en 1979-80. Il contient en partie, toutes les démonstrations étant données ici, un exposé que nous avons fait le 18/12/1978 au Séminaire du Groupe d'Etude d'Analyse ultramétrique. I.H.P. - Paris (cf. [11]).

1) Définition.

Soit $(K_i)_{i \in I}$ une famille de corps munis d'une valeur absolue ultramétrique. Considérons le *sous-anneau* $\overline{\prod_{i \in I}} K_i$ de l'anneau produit $\prod_{i \in I} K_i$ formé des éléments $a = (a_i)_{i \in I}$ de $\prod_{i \in I} K_i$ tels que $\sup_{i \in I} |a_i| < +\infty$.

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur l'ensemble I des indices. On définit une *semi-valeur absolue* sur l'anneau $\overline{\prod_{i \in I}} K_i$ en posant pour tout

$a = (a_i)_{i \in I} \in \overline{\prod_{i \in I}} K_i$, $|a| = \lim_{\mathcal{U}} |a_i|$. Cette semi-valeur absolue est ultramétrique.

Le sous-ensemble $\mathfrak{J}$ de $\overline{\prod_{i \in I}} K_i$ formé des éléments de semi-valeur absolue nulle est un idéal.

On dit que l'anneau quotient $\overline{\prod_{i \in I}} K_{i/\mathfrak{J}}$ *muni de la valeur absolue quotient est l'ultraproduit des corps valués* K_i ; *on le note* $\overline{\prod_{i \in I}} K_{i/\mathcal{U}}$.

Si $a = (a_i)_{i \in I} \in \overline{\prod_{i \in I}} K_i$, on note encore par a sa classe dans $\overline{\prod_{i \in I}} K_{i/\mathcal{U}}$.
On désigne aussi par $|\ |$ la valeur absolue quotient sur $\overline{\prod_{i \in I}} K_{i/\mathcal{U}}$ de la semi-valeur absolue $|\ |$ de $\overline{\prod_{i \in I}} K_i$.

Lemme 1. *Soit $(K_i)_{i \in I}$ une famille de corps munis d'une valeur absolue ultramétrique.*

L'ultraproduit $\overline{\prod_{i \in I}} K_{i/\mathcal{U}}$ des corps K_i est un corps muni d'une valeur absolue ultramétrique.

Il reste à démontrer que $\prod_{i \in I} K_i/\mathcal{U}$ est un corps. Or soit

$a = (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} K_i/\mathcal{U}$ différent de zéro, autrement dit $|a| = \lim_{\mathcal{U}} |a_i| \neq 0$.

Il existe $J(a) \in \mathcal{U}$ tel que $\frac{|a|}{2} \leqslant |a_i| \leqslant \frac{3}{2}|a|$ pour tout $i \in J(a)$. Donc pour tout

$i \in J(a)$, a_i est *non nul*, de plus $\frac{2}{3|a|} \leqslant |a_i^{-1}| \leqslant \frac{2}{|a|}$. Considérons $b = (b_i)_{i \in I}$

défini par $b_i = a_i^{-1}$, si $i \in J(a)$ et $b_i = 1$ si $i \notin J(a)$. On a

$\sup_{i \in I} |b_i| \leqslant \max\left(\frac{2}{|a|}, 1\right)$; ainsi $b = (b_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} K_i$. Comme $a\,b-1 = (c_i)_{i \in I}$

où $c_i = o$ si $i \in J(a)$ et $c_i = a_i - 1$ si $i \notin J(a)$, il devient clair que

$|a\,b - 1| = \lim_{\mathcal{U}} |c_i| = o$; c'est-à-dire $a\,b - 1 \in \mathfrak{I}$. On a donc dans $\prod_{i \in I} K_i/\mathcal{U}$, $a\,b = 1$.

On supposera le plus souvent dans la suite les ultrafiltres non principaux ; car si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre engendré par $j \in I$ on a $\prod_{i \in I} K_i/\mathcal{U} = K_j$.

Posons pour tout $a \in \prod_{i \in I} K_i$, $|a|_\infty = \operatorname{Sup}_{i \in I} |a_i|$; alors $|a|_\infty$ est une quasi-valeur absolue sur $\prod_{i \in I} K_i$; c'est-à-dire $|a + b|_\infty \leqslant \max(|a|_\infty, |b|_\infty)$ et $|ab|_\infty \leqslant |a|_\infty |b|_\infty$. L'adhérence $\overline{\mathcal{A}}$ de tout idéal propre $\mathcal{A}$ de $\prod_{i \in I} K_i$ pour la quasi-valeur absolue $|\;|_\infty$ est un idéal propre de $\prod_{i \in I} K_i$: car si un idéal $\mathcal{A}$ de $\prod_{i \in I} K_i$ est tel que $1 \in \overline{\mathcal{A}}$, il existe $a_o = (a_{i,o})_{i \in I} \in \mathcal{A}$ tel que

$\sup_{i \in I} |1 - a_{i,o}| = |1 - a_o|_\infty < \frac{1}{2}$; ainsi $\frac{1}{2} < |a_{i,o}| < \frac{3}{2}$ pour tout $i \in I$, d'où

$b_o = (a_{i,o}^{-1})_{i \in I} \in \prod_{i \in I} K_i$ et $a_o b_o = 1 \in \mathscr{A}$. Tout idéal maximal de $\prod_{i \in I} K_i$ est donc $|\ |_\infty$-fermé. Si J est une partie de I, on pose $e_J = (a_i)_{i \in I}$ où $a_i = 0$ pour $i \in J$ et $a_i = 1$ pour $i \notin J$. Associons à tout idéal $\mathscr{A}$ de $\prod_{i \in I} K_i$ l'ensemble $\mathcal{U}_{\mathscr{A}}$ des parties J de I telles que $e_J \in \mathscr{A}$; $\mathcal{U}_{\mathscr{A}}$ est un filtre et c'est un ultrafiltre lorsque $\mathscr{A}$ est un idéal premier. Réciproquement, si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur I, alors $\mathfrak{I}_{\mathcal{U}} = \{ a \in \prod_{i \in I} K_i / \lim_{\mathcal{U}} |a_i| = 0 \}$ est un idéal maximal (lemme 1) et l'idéal $\mathscr{A}_{\mathcal{U}}$ de $\prod_{i \in I} K_i$ engendré par les e_J , $J \in \mathcal{U}$ est un idéal premier minimal, $|\ |_\infty$-dense dans $\mathfrak{I}_{\mathcal{U}}$. On déduit du fait que tout idéal maximal de $\prod_{i \in I} K_i$ est $|\ |_\infty$-fermé le

Corollaire : *(i) L'adhérence pour $|\ |_\infty$ dans $\prod_{i \in I} K_i$ de tout idéal premier est un idéal maximal.*

(ii) Il y a une correspondance bijective entre l'ensemble des idéaux maximaux (resp. premiers minimaux) de $\prod_{i \in I} K_i$ et l'ensemble des ultrafiltres sur I.

Désignons par $\|\ \|_\infty$ la quasi-valeur absolue sur $\prod_{i \in I} K_{i/\mathcal{U}}$ obtenue par passage au quotient de $|\ |_\infty$; par définition, $\| a \|_\infty = \operatorname{Inf}_{b \in \mathfrak{I}} | a-b |_\infty$. On peut démontrer directement que $\|\ \|_\infty$ est une valeur absolue ; mais on a :

Lemme 2. *Soit $a = (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} K_{i/\mathcal{U}}$. Alors*

$$\| a \|_\infty = \operatorname{Inf}_{b \in \mathfrak{I}} |a-b|_\infty = \lim_{\mathcal{U}} |a_i| = |a| .$$

En effet, soient $a = (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} K_i$ et $J \in \mathcal{U}$; posons $a_J = a(1-e_J)$ et $a'_J = ae_J$; comme $a = a_J + a'_J$ avec $a'_J \in \mathfrak{I}$, on a

$\|a\|_\infty = \inf_{b \in \mathfrak{I}} |a-b|_\infty \leqslant |a - a'_J|_\infty = |a_J|_\infty = \sup_{i \in J} |a_i|$ pour tout $J \in \mathcal{U}$. Il vient que

$\|a\|_\infty \leqslant \inf_{J \in \mathcal{U}} \sup_{i \in I} |a_i| = \lim_{\mathcal{U}} |a_i| = |a|$. D'autre part, il est clair que pour tout

$b \in \mathfrak{I}$, $|a-b| = |a| \leqslant |a-b|_\infty$; ainsi $|a| \leqslant \|a\|_\infty$, d'où $|a| = \|a\|_\infty$.

Il est clair que si chaque corps K_i est complet, alors l'anneau $\prod_{i \in I} K_i$ muni de la quasi-valeur absolue $|\ |_\infty$ est complet. D'où

Corollaire 1. (i) *L'ultraproduit* $\prod_{i \in I} K_{i/\mathcal{U}}$ *d'une famille* $(K_i)_{i \in I}$ *de corps valués complets est complet.*

(ii) Si l'on désigne par $\hat{K}$ *le complété d'un corps valué K, on a*

$$\left(\prod_{i \in I} K_{i/\mathcal{U}}\right)^{\wedge} = \prod_{i \in I} \hat{K}_{i/\mathcal{U}} .$$

Corollaire 2. *L'ultraproduit* $\prod_{i \in I} K_{i/\mathcal{U}}$ *d'une famille* $(K_i)_{i \in I}$ *de corps valués sphériquement complets est un corps sphériquement complet.*

La proposition suivante, analogue au lemme 9 de [1], beaucoup plus précise que le corollaire 2, est à rapprocher de la Proposition 2.5 de [5]. Comme nous l'a suggéré oralement L. Haddad, la démonstration que nous en avions donnée en supposant l'ensemble I des indices, dénombrable, se transpose dans le cas plus général donné ci-dessous. Rappelons qu'un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur un ensemble I est ω-incomplet s'il existe une suite $(X_n)_{n \geqslant o}$, $X_n \in \mathcal{U}$, $X_{n+1} \subseteq X_n$ pour tout $n \geqslant o$, telle que $\bigcap_{n \geqslant o} X_n = \emptyset$. Alors $I = \bigcup_{n \geqslant o} Y_n$ où $Y_n = I \setminus X_n$ $Y_n \subseteq Y_{n+1}$; posant $I_o = Y_o$ et $I_n = Y_n \setminus Y_{n-1}$ si $n \geqslant 1$; on a une partition de I, $I = \bigcup_{n \geqslant o} I_n$, d'où une application *g de I sur* N telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{-1}(n) = I_n$ et $I_n \notin \mathcal{U}$. Tout ultrafiltre *non principal* sur un ensemble *dénombrable* est *ω-incomplet.* Il existe sur tout ensemble infini I des ultrafiltres ω-incomplets (c.f. par exemple [2]).

Proposition 1. *Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre ω-incomplet sur l'ensemble I.*

L'ultraproduit $\overline{\prod_{i \in I}} K_{i/\mathcal{U}}$ d'une famille $(K_i)_{i \in I}$ de corps valués ultramétriques est sphériquement complet. En particulier $\overline{\prod_{i \in I}} K_{i/\mathcal{U}}$ est complet.

Considérons une suite décroissante $(B(a^n, r_n))_{n \geqslant o}$ de boules ouvertes de $\overline{\prod_{i \in I}} K_{i/\mathcal{U}}$. On a $|a^n - a^{n+1}| < r_n$; d'où $|a^n - a^m| < r_n$, $\forall\, m > n$. Puisque $|a^n - a^m| = \operatorname{Inf}_{b \in \mathfrak{J}} |a^n - a^m - b|_\infty < r_n$, il existe $b_{n,m} \in \mathfrak{J}$ tel que $|a^n - a^m - b_{n,m}|_\infty < r_n$. On peut donc supposer la suite $(a^n)_{n \geqslant o}$ de $\overline{\prod_{i \in I}} K_{i/\mathcal{U}}$ telle que dans $\overline{\prod_{i \in I}} K_i$, on ait $|a^n - a^m|_\infty = \operatorname{Sup}_{i \in I} |a_i^n - a_i^m| < r_n$, $\forall\, m > n$.

Considérons, avec les notations ci-dessus une application g de I sur N telle que $I = \bigcup_{n \geqslant o} I_n$ où $I_n = g^{-1}(n) \notin \mathcal{U}$. On a aussi $I = L_n \cup J_n$ avec $L_n = \bigcup_{k=o}^{n} I_k \notin \mathcal{U}$, $J_n = \bigcup_{k \geqslant n+1} I_k \in \mathcal{U}$ et $L_n \cap I_n = \emptyset$. La suite $(a^n)_{n \geqslant o} = (a_i^n)_{n \in N,\, i \in I}$ de $\overline{\prod_{i \in I}} K_i$ s'écrit sous la forme $(a^n)_{n \geqslant o} = (a_i^{g(j)})_{(j,i) \in I \times I}$.

Posons $a_i = a_i^{g(i)}$, $i \in I$; puisque $|a^n|_\infty = \operatorname{Sup}_{i \in I} |a_i^n| \leqslant \max(|a_o|_\infty, r_o) = \alpha$, on a pour tout $i \in I$, $|a_i^{g(i)}| \leqslant \alpha$, donc $a = (a_i)_{i \in I} \in \overline{\prod_{i \in I}} K_i$. Puisque pour tout $i \in I$, $|a_i^n - a_i^m| \leqslant |a^n - a^m|_\infty < r_n$, $\forall\, m > n$ et puisque pour tout $i \in J_n = \bigcup_{k \geqslant n+1} I_k$, il existe $m > n$ tel que $g(i) = m$, on a $|a_i^n - a_i^{g(i)}| < r_n$, $\forall\, i \in J_n$. Mais $J_n \in \mathcal{U}$, donc $\lim_{\mathcal{U}} |a_i^n - a_i^{g(i)}| = |a^n - a| \leqslant r_n$ pour tout $n \in N$. En particulier,

$|a^{n+1} - a| \leqslant r_{n+1} < r_n$; d'où $|a^n - a| \leqslant \max(|a^n - a^{n+1}|, |a^{n+1} - a|) < r_n$ et $a \in \bigcap_{n > o} B(a^n, r_n) \neq \emptyset$.

2) Remarques diverses.

(i) Soit L un corps valué ultramétrique. Posons $K_i = L$ pour tout $i \in I$; on dit que $\overline{\prod_{i \in I}} L_{/\mathcal{U}}$ est l'ultrapuissance de L ; le corps L s'identifie canoniquement à un sous-corps valué de $\overline{\prod_{i \in I}} L_{/\mathcal{U}}$. L'ultrapuissance de tout corps local L est égale à L (ici local signifie localement compact). □

(ii) L'ultraproduit conserve les homomorphismes isométriques de corps valués. En particulier, si la famille $(K_i)_{i \in I}$ est constituée de surcorps valués de L, on a les extensions de corps valués $L \subset \overline{\prod_{i \in I}} L_{/\mathcal{U}} \subset \overline{\prod_{i \in I}} K_{i/\mathcal{U}}$. □

(iii) Posons $K = \overline{\prod_{i \in I}} K_{i/\mathcal{U}}$; désignons par Λ (resp. Λ_i) et $\mathfrak{m}$ (resp. $\mathfrak{m}_i$) l'anneau de valuation et l'idéal maximal de K (resp. K_i). Soit $\overline{\prod_{i \in I}} \Lambda_{i/\mathcal{U}}$ (resp. $\overline{\prod_{i \in I}} \mathfrak{m}_{i/\mathcal{U}}$) l'image canonique de $\prod_{i \in I} \Lambda_i$ (resp. $\prod_{i \in I} \mathfrak{m}_i$) dans $\overline{\prod_{i \in I}} K_{i/\mathcal{U}}$. On a

$$\mathfrak{m} \subseteq \overline{\prod_{i \in I}} \mathfrak{m}_{i/\mathcal{U}} \subset \overline{\prod_{i \in I}} \Lambda_{i/\mathcal{U}} \subseteq \Lambda.$$

Si $\mathcal{U}$ est ω-complet, on a $\mathfrak{m} = \overline{\prod} \mathfrak{m}_{i/\mathcal{U}}$ et $\Lambda = \overline{\prod_{i \in I}} \Lambda_{i/\mathcal{U}}$.

La première et la dernière inclusions peuvent être strictes comme le montre certaines ultrapuissances d'un corps de valuation dense. Plus simplement, on a :

Exemple 1 : Soit p un nombre premier ; désignons par v_p la valuation p-adique sur Q. Considérons une suite $(\rho_i)_{i \in N} \subset]0,1[$ telle que $\lim_{i \to +\infty} \rho_i = 1$ et pour tout $i \in N$, la valeur absolue sur Q définie par $|a|_{\rho_i} = \rho_i^{v_p(a)}$. Posons $Q_{\rho_i} = (Q, |\ |_{\rho_i})$; soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur N ; alors $K = \overline{\prod_{i \in N}} Q_{\rho_{i/\mathcal{U}}}$ est un corps sphériquement complet de valuation dense. Pour tout $i \in N$, $\Lambda_i = \mathbf{Z}_{(p)}$ (le localisé de Z en p) et

$\mathfrak{m}_i = p\mathbf{Z}_{(p)}$; de plus $\mathbf{Q} \subset \Lambda$, car si $a \in \mathbf{Q}$, $a \neq 0$, alors $|a| = \lim\limits_{\mathcal{U}} \rho_i^{v_p(a)} = 1$.

En particulier $a_o = (p)_{i \in \mathbf{N}}$ est tel que $a_o \notin \mathfrak{m}$, mais $a_o \in \overline{\prod\limits_{i \in \mathbf{N}}} \Lambda_{i/\mathcal{U}}$,

donc $\mathfrak{m} \neq \overline{\prod\limits_{i \in \mathbf{N}}} \mathfrak{m}_{i/\mathcal{U}}$. On voit que $a_o^{-1} = (\frac{1}{p})_{i \in \mathbf{N}} \notin \overline{\prod\limits_{i \in \mathbf{N}}} \Lambda_{i/\mathcal{U}}$,

mais $a_o^{-1} \in \Lambda$, ainsi $\Lambda \neq \overline{\prod\limits_{i \in \mathbf{N}}} \Lambda_{i/\mathcal{U}}$.

Le complété de $\mathbf{Q}_{\rho_i}$ étant égal à $\mathbf{Q}_p$, notons $\mathbf{Q}_{p,i}$ le corps $\mathbf{Q}_p$ muni de la valeur absolue qui prolonge $|\ |_{\rho_i}$; alors $K = \overline{\prod\limits_{i \in \mathbf{N}}} \mathbf{Q}_{p,i/\mathcal{U}}$ (corollaire 1 - Lemme 2), de plus $\mathbf{Q}_p \subset \Lambda$. □

(iv) Lorsque la valeur absolue de chaque K_i est triviale, la valeur absolue de $\overline{\prod\limits_{i \in I}} K_{i/\mathcal{U}}$ est triviale. On retrouve la notion algébrique d'ultraproduit de corps que l'on écrit $\prod\limits_{i \in I} K_{i/\mathcal{U}}$ (c.f. [6]). □

(v) Posons, avec les notations de (iii), $\Gamma = \overline{\prod\limits_{i \in I}} \Lambda_{i/\mathcal{U}}$ et $\eta = \overline{\prod\limits_{i \in I}} \mathfrak{m}_{i/\mathcal{U}}$;

alors Γ est un anneau local d'idéal maximal η : car si $a \in \Gamma$ et $a \notin \eta$, l'ensemble des $i \in I$ tels que $|a_i| < 1$ n'appartient pas à $\mathcal{U}$, donc $\{i \in I/\ |a_i| = |a_i^{-1}| = 1\} \in \mathcal{U}$, il vient que $a^{-1} \in \Gamma$.

Lorsque $\mathfrak{m} \neq \eta$, *le localisé de* Γ *en* $\mathfrak{m}$ *est égal à* Λ *et* $\Lambda/\mathfrak{m}$ *est le corps des fractions de* $\Gamma/\mathfrak{m}$.

Désignons par k_i le corps résiduel de chaque corps K_i. On a

Lemme 3. *Le corps résiduel de l'anneau local* $\Gamma = \overline{\prod\limits_{i \in I}} \Lambda_{i/\mathcal{U}}$ *est isomorphe à l'ultraproduit* $\prod\limits_{i \in I} k_{i/\mathcal{U}}$ *des corps résiduels* k_i.

En effet l'homomorphisme d'anneaux φ, composé des homomorphismes canoniques

$\prod_{i \in I} \Lambda_i \longrightarrow \prod_{i \in I} k_i \longrightarrow \prod_{i \in I} k_{i/\mathcal{U}}$, est surjectif. Si $a = (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \Lambda_i$ est tel que $\lim_{\mathcal{U}} |a_i| = 0$, il existe $J \in \mathcal{U}$ tel que pour tout $i \in J$, $|a_i| < 1$; ainsi $\varphi(a) = 0$; d'où, par passage au quotient, un homomorphisme surjectif Ψ de $\Gamma = \bar{\prod}_{i \in I} \Lambda_{i/\mathcal{U}}$ sur $\prod_{i \in I} k_{i/\mathcal{U}}$ dont le noyau $\ker \Psi = \eta$.

Lemme 4. *Soit $(K_i)_{i \in I}$ une famille de corps valués ultramétriques henséliens.*

Alors l'anneau local $\Gamma = \bar{\prod}_{i \in I} \Lambda_{i/\mathcal{U}}$ est hensélien. Si, de plus, $\prod_{i \in I} k_{i/\mathcal{U}}$ est de caractéristique zéro, Γ contient un sous-corps de représentants de son corps résiduel.

Pour voir que Γ est hensélien, il suffit de remarquer, puisque $\Gamma/_\eta = \prod_{i \in I} k_{i/\mathcal{U}}$, que l'identité de Bézout et la factorisation des polynômes à coefficients dans $\Gamma/_\eta$ se relèvent dans des Λ_i pour i parcourant un élément de l'ultrafiltre. Le reste est classique. □

(vi) La valeur absolue sur $\bar{\prod}_{i \in I} K_{i/\mathcal{U}}$ peut être triviale sans que celles des K_i le soient.

Exemple 2. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Considérons pour $p \in \mathcal{P}$ le corps p-adique Q_p muni de la valeur absolue $|a_p| = p^{-v_p(a_p)}$; ici $\Lambda_p = Z_p$ et $\mathfrak{m}_p = pZ_p$. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\mathcal{P}$, non principal ; puisque pour tout $a_p \in p\,Z_p$, $|a_p| \leqslant p^{-1}$, on a pour tout $a = (a_p) \in \prod_{p \in \mathcal{P}} p\,Z_p$, $|a| = \lim_{\mathcal{U}} |a_p| = 0$. Ainsi

$\bar{\prod}_{p \in \mathcal{P}} p\,Z_{p/\mathcal{U}} = (0)$; l'idéal maximal de $\bar{\prod}_{p \in \mathcal{P}} Z_{p/\mathcal{U}}$ est donc nul et la valeur absolue de $\bar{\prod}_{p \in \mathcal{P}} Q_{p/\mathcal{U}}$ est triviale. De plus

$$\bar{\prod}_{p \in \mathcal{P}} Q_{p/\mathcal{U}} = \bar{\prod}_{p \in \mathcal{P}} Z_{p/\mathcal{U}} = \bar{\prod}_{p \in \mathcal{P}} Q_{/\mathcal{U}} = \bar{\prod}_{p \in \mathcal{P}} Z_{/\mathcal{U}} = \prod_{p \in \mathcal{P}} F_{p/\mathcal{U}} \text{ où } F_p = Z_p/pZ_p.$$

3) Ultraproduits de corps de valuations discrètes.

Théorème 1. *Soit* $(K_i)_{i \in I}$ *une famille de corps de valuations discrètes* v_i *telles que* $v_i(K_i^*) = Z$ *et soit* $(\rho_i)_{i \in I}$ *une famille de nombres réels tels que* $o < \rho_i < 1$.

Considérons sur chaque corps K_i *la valeur absolue définie par*

$|a_i| = \rho_i^{v_i(a_i)}$.

(i) Si $\lim\limits_{\mathcal{U}} \rho_i = 0$, *la valeur absolue de* $\overline{\pi}_{i \in I} K_{i/\mathcal{U}}$ *est triviale.*

(ii) Si $\lim\limits_{\mathcal{U}} \rho_i = 1$, *le corps* $K = \overline{\pi}_{i \in I} K_{i/\mathcal{U}}$ *est de valuation dense tel que* $|K^*| = R_+^*$. *De plus* $\mathcal{U}$ *est* ω*-incomplet et* K *sphériquement complet.*

(iii) Si $0 < \lim \rho_i = \rho < 1$ *; alors* $\overline{\pi}_{i \in I} K_{i/\mathcal{U}}$ *est un corps de valuation discrète.*

On a $\mathfrak{m} = \overline{\pi}_{i \in I} \mathfrak{m}_{i/\mathcal{U}}$ *et* $\Lambda = \overline{\pi}_{i \in I} \Lambda_{i/\mathcal{U}}$.

(i) Si $\lim\limits_{\mathcal{U}} \rho_i = 0$, on voit, comme dans l'exemple 2, que la valeur absolue de $\overline{\pi}_{i \in I} K_{i/\mathcal{U}}$ est triviale.

(ii) Supposons $\lim\limits_{\mathcal{U}} \rho_i = 1$. Fixons $\rho \in R_+$, $0 < \rho < 1$; on a pour tout $i \in I$, $\rho_i = \rho^{\alpha_i}$ où $\alpha_i = \dfrac{\operatorname{Log} \rho_i}{\operatorname{Log} \rho} > 0$ et $\lim\limits_{\mathcal{U}} \alpha_i = 0$. Désignons par n_i la partie entière de $\dfrac{1}{\alpha_i}$; on a $\dfrac{1}{1+n_i} < \alpha_i \leqslant \dfrac{1}{n_i}$ et $\lim\limits_{\mathcal{U}} \dfrac{n_i}{1+n_i} = \lim\limits_{\mathcal{U}} \alpha_i n_i = 1$.

Soit $(\pi_i)_{i \in I}$ une famille d'uniformisantes des corps K_i. Considérons $a_\rho = (\pi_i^{n_i})_{i \in I}$; on a $\rho \leqslant \rho^{\alpha_i n_i} = |\pi_i|^{n_i} < \rho^{\frac{n_i}{1+n_i}} \leqslant 1$; ainsi $a_\rho \in \overline{\pi}_{i \in I} K_i$

est tel que $|a_\rho| = \lim_{\mathcal{U}} |\pi_i|^{n_i} = \rho$ et $|a^{-1}| = \lim_{\mathcal{U}} |\pi_i^{-n_i}| = \rho^{-1}$. Soit $r \in R_+^*$;

ou bien $r < 1$, il existe donc $a_r = (\pi_i^{n_i})_{i \in I} \in K$ tel que $|a_r| = r$; ou bien $r = 1$,

mais $a_1 = (\pi_i)_{i \in I}$ est tel que $|a_1| = 1$; ou bien $r > 1$, il existe alors

$b_r = a^{-1}_{r^{-1}}$ tel que $|b_r| = |a^{-1}_{r^{-1}}| = r$; ainsi $|K^*| = R_+^*$. Pour le reste voir la fin de la démonstration de la Proposition 7.

(iii) Supposons $0 < \lim_{\mathcal{U}} \rho_i = \rho < 1$. On a pour tout $i \in I$, $\rho_i = \rho^{\alpha_i}$ avec

$$\alpha_i = \frac{\operatorname{Log} \rho_i}{\operatorname{Log} \rho} > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\mathcal{U}} \alpha_i = 1.$$

On a vu que $\mathfrak{m} \subseteq \prod_{i \in I} \mathfrak{m}_{i/\mathcal{U}} \subset \prod_{i \in I} \Lambda_{i/\mathcal{U}} \subseteq \Lambda$.

Si $a = (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathfrak{m}_{i/\mathcal{U}}$, puisque pour tout $i \in I$, $v_i(a_i) \geqslant 1$, on a

$|a_i| = \rho_i^{v_i(a_i)} < \rho_i$; il vient que $\lim_{\mathcal{U}} |a_i| \leqslant \lim_{\mathcal{U}} \rho_i = \rho < 1$ et $a \in \mathfrak{m}$; donc

$$\mathfrak{m} = \prod_{i \in I} \mathfrak{m}_{i/\mathcal{U}} .$$

Soit $a \in \Lambda$; ou bien $|a| < 1$, alors $a \in \mathfrak{m} \subset \prod_{i \in I} \Lambda_{i/\mathcal{U}}$; ou bien

$|a| = \lim_{\mathcal{U}} |a_i| = \lim_{\mathcal{U}} \rho^{\alpha_i v_i(a_i)} = 1$, on a alors dans R , $\lim_{\mathcal{U}} \alpha_i v_i(a_i) = 0$; mais

$v_i(a_i) \in Z$ pour tout $i \in I$, donc $\{i \in I / v_i(a_i) = 0\} \in \mathcal{U}$ et $a = (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \Lambda_{i/\mathcal{U}}$.

Ainsi $\Lambda \subset \prod_{i \in I} \Lambda_{i/\mathcal{U}}$ et $\Lambda = \prod_{i \in I} \Lambda_{i/\mathcal{U}}$.

Soit $(\pi_i)_{i \in I}$ une famille d'uniformisantes des corps K_i ; alors

$\pi = (\pi_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} K_{i/\mathcal{U}}$ est tel que $|\pi| = \lim_{\mathcal{U}} |\pi_i| = \lim_{\mathcal{U}} \rho_i = \rho < 1$. On voit que

$\pi \Lambda = \mathfrak{m}$; il vient que $\prod_{i \in I} K_{i/\mathcal{U}}$ est un corps de valuation discrète.

Remarque 1 : Pour fixer les idées, on note K_{i,ρ_i} le corps K_i muni de la valeur absolue $|a_i| = \rho_i^{v_i(a_i)}$.

(a) Si $\lim_{\mathcal{U}} \rho_i = 1$, on a comme dans l'exemple 1, $\mathfrak{m} \neq \overline{\prod_{i\in I}} \mathfrak{m}_{i/\mathcal{U}}$ et $\Lambda \neq \overline{\prod_{i\in I}} \Lambda_{i/\mathcal{U}} = \Gamma$. Soit $\rho \in \mathbf{R}_+^*$, $0 < \rho < 1$, fixé. Pour tout $a = (a_i)_{i\in I} \in \overline{\prod_{i\in I}} K_{i,\rho}$, on a $\lim_{\mathcal{U}} \rho_i^{v_i(a_i)} \leqslant 1$. Soit $\mathcal{P}_1$ (resp. $\mathfrak{m}_1$) l'idéal de $\overline{\prod_{i\in I}} K_{i,\rho}$ formé des éléments $a = (a_i)_{i\in I}$ tels que $\lim_{\mathcal{U}} \rho_i^{v_i(a_i)} = 0$ (resp. $\lim_{\mathcal{U}} \rho_i^{v_i(a_i)} < 1$).

On obtient, par passage au quotient, un homomorphisme injectif d'anneaux de $\overline{\prod_{i\in I}} K_{i,\rho}/\mathcal{P}_1$ dans $\overline{\prod_{i\in I}} K_{i,\rho_{i/\mathcal{U}}}$. Identifiant $\overline{\prod_{i\in I}} K_{i,\rho}/\mathcal{P}_1$ à son image Γ_1 dans $\overline{\prod_{i\in I}} K_{i,\rho_{i/\mathcal{U}}}$, on a $\Gamma \subset \Gamma_1 \subset \Lambda$ et $\mathfrak{m}_1/\mathcal{P}_1$ est égal à l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de Λ. L'idéal maximal $\mathcal{A}_{1,\rho}$ de $\overline{\prod_{i\in I}} K_{i,\rho}$ formé des $a \in \overline{\prod_{i\in I}} K_{i,\rho}$ tels que $\lim_{\mathcal{U}} \rho^{v_i(a_i)} = 0$ est l'unique idéal maximal de $\overline{\prod_{i\in I}} K_{i,\rho}$ qui contient $\mathfrak{m}_1$ (Corollaire - Lemme 2) ; ainsi Γ_1 est un anneau local d'idéal maximal $\mathcal{A}_{1,\rho}/\mathcal{P}_1$. On voit que $\Lambda/\mathfrak{m}$ est égal au corps des fractions de $\Gamma/\mathfrak{m}$ et à celui de $\overline{\prod_{i\in I}} K_{i,\rho}/\mathfrak{m}_1$.

(b) Considérons une autre famille $(\rho'_i)_{i\in I} \subset]0,1[$; $\rho'_i = \rho_i^{\gamma_i}$ où $\gamma_i = \dfrac{\operatorname{Log}\rho'_i}{\operatorname{Log}\rho_i} > 0$. Supposons $\lim_{\mathcal{U}} \rho_i = \lim_{\mathcal{U}} \rho'_i = 1$; si $\lim_{\mathcal{U}} \gamma_i$ est fini non nul, les corps valués $\overline{\prod_{i\in I}} K_{i,\rho_{i/\mathcal{U}}}$ et $\overline{\prod_{i\in I}} K_{i,\rho'_i}$ sont isomorphes. Par contre, si

$\lim\limits_{\mathcal{U}} \gamma_i = 0$ (resp. $\lim\limits_{\mathcal{U}} \gamma_i = +\infty$) ces deux corps ne sont plus isomorphes.

(c) Si $0 < \lim\limits_{\mathcal{U}} \rho_i = \rho < 1$, les corps valués $\overline{\prod_{i \in I}} K_{i,\rho_i/\mathcal{U}}$ et $\overline{\prod_{i \in I}} K_{i,\rho/\mathcal{U}}$ sont isométriquement isomorphes. De plus, pour toute famille $(\rho'_i)_{i \in I} \subset]0,1[$ telle que $0 < \lim \rho'_i = \rho' < 1$, les corps valués $\overline{\prod_{i \in I}} K_{i,\rho_i/\mathcal{U}}$ et $\overline{\prod_{i \in I}} K_{i,\rho'_i/\mathcal{U}}$ sont isomorphes.

Corollaire 1 : *Supposons $\lim\limits_{\mathcal{U}} \rho_i \neq 0$, le corps valué non discret $\overline{\prod_{i \in I}} K_{i/\mathcal{U}}$ est sphériquement complet (donc complet) lorsque l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

(i) Chaque corps K_i est complet.

(ii) L'ultrafiltre $\mathcal{U}$ est ω-incomplet. Ce qui a lieu lorsque $\lim\limits_{\mathcal{U}} \rho_i = 1$.

Il suffit d'appliquer, ou bien le corollaire 2 du lemme 2 (un corps de valuation discrète est sphériquement complet si et seulement s'il est complet), ou bien la proposition 1.

Corollaire 2 : *Supposons $0 < \lim\limits_{\mathcal{U}} \rho_i = \rho < 1$. Le corps résiduel k du corps de valuation discrète $K = \overline{\prod_{i \in I}} K_{i/\mathcal{U}}$ est isomorphe à l'ultraproduit $\prod_{i \in I} k_{i/\mathcal{U}}$ des corps résiduels k_i des corps K_i.*

C'est une conséquence immédiate du lemme 4, car $\Lambda = \overline{\prod_{i \in I}} \Lambda_{i/\mathcal{U}}$ et $\mathfrak{m} = \overline{\prod_{i \in I}} \mathfrak{m}_{i/\mathcal{U}}$.

Remarque 2 : Le corollaire 2 *n'est plus vrai* si $\lim\limits_{\mathcal{U}} \rho_i = 1$. En effet, on a vu dans *l'exemple 1 que* $\mathbf{Q} \subset \Lambda$, tandis que le corps résiduel de $\overline{\prod_{i \in \mathbf{N}}} \mathbf{Z}_{(p)/\mathcal{U}}$ est égal à $\prod_{i \in \mathbf{N}} \mathbf{F}_{p/\mathcal{U}} = \mathbf{F}_p$. Ceci montre, si besoin était, que la notion, de *caractère métrique,* d'ultraproduit de corps valués définie ici est *différente* de celle donnée dans [1].

Corollaire 3 : *Supposons* $0 < \lim_{\mathcal{U}} \rho_i = \rho < 1$. *Soit* σ_i *un système de représentants dans* Λ_i *du corps résiduel* k_i *de* K_i.

(i) L'image canonique $\overline{\prod_{i \in I}} \sigma_{i/\mathcal{U}}$ *de* $\prod_{i \in I} \sigma_i$ *dans* $K = \overline{\prod_{i \in I}} K_{i/\mathcal{U}}$, *identique à l'ultraproduit d'ensembles* $\prod_{i \in I} \sigma_{i/\mathcal{U}}$, *est un système de représentants dans* $\Lambda = \overline{\prod_{i \in I}} \Lambda_{i/\mathcal{U}}$ *du corps résiduel* k *de* K.

(ii) Soit π_i *une uniformisante de* K_i. *Si* $\overline{\prod_{i \in I}} K_{i/\mathcal{U}}$ *est complet (c.f. corollaire 1), alors tout élément* a *de* $\overline{\prod_{i \in I}} K_{i/\mathcal{U}}$ *s'écrit sous la forme unique*

$$a = \sum_{n=-n_o}^{+\infty} \alpha_n \pi^n \quad \text{où} \quad n_o \in \mathbb{Z}, \ \alpha_n \in \overline{\prod_{i \in I}} \sigma_{i/\mathcal{U}} \text{ pour } n \geqslant -n_o \text{ et}$$

$\pi = (\pi_i)_{i \in I}$.

Soient L un corps valué ultramétrique complet et K une extension algébrique de L. On sait que la valeur absolue de L se prolonge de façon unique en une valeur absolue de K : si $a \in K$ est de degré n, $|a| = |P(0)|^{\frac{1}{n}}$ où P est le polynôme caractéristique de a. De plus si L est de valuation discrète et si $[K : L] = n < +\infty$, on a $n = ef$ avec $e = [|K^*| : |L^*|]$ et $f = [k : l]$ où k (resp. l) est le corps résiduel de K (resp. L) ; soit π_K (resp. π_L) une uniformisante de K (resp. L) on a $|\pi_K| = |\pi_L|^{\frac{1}{e}}$. Ceci étant, on a comme illustration du théorème 1 les deux propositions suivantes (c.f. [4]).

Proposition 2 : *Ultraproduit d'extensions non ramifiées.*

Soit L un corps valué complet de valuation discrète. Considérons une famille $(K_i)_{i \in I}$ *d'extensions finies de L telles que* $[K_i : L] = [k_i : l] = n_i$ *où* k_i *(resp. l) est le corps résiduel de* K_i *(resp. L).*

(i) Le sur-corps valué $K = \overline{\pi}_{i \in I} K_{i/\mathcal{U}}$ *de L est complet de valuation discrète et de corps résiduel* $k = \pi_{i \in I} k_{i/\mathcal{U}}$.

(ii) Si $\lim_{\mathcal{U}} n_i = +\infty$ *et si l est parfait, le corps* $K = \overline{\pi}_{i \in I} K_{i/\mathcal{U}}$ *est une extension transcendante de l'ultrapuissance* $L_o = \overline{\pi}_{i \in I} L_{/\mathcal{U}}$ *de L.*

Proposition 2' : *Ultraproduit d'extensions totalement ramifiées.*

Soit L un corps valué complet de valuation discrète. Considérons une famille $(K_i)_{i \in I}$ *d'extensions finies totalement ramifiées de L de degrés* n_i *tels que* $\lim_{\mathcal{U}} n_i = +\infty$.

(i) Le sur-corps valué $K = \overline{\pi}_{i \in I} K_{i/\mathcal{U}}$ *de L est sphériquement complet de valuation dense ; de plus* $|K^*| = \mathbf{R}_+^*$.

(ii) Le corps $K = \overline{\pi}_{i \in I} K_{i/\mathcal{U}}$ *est une extension transcendante de l'ultrapuissace* $L_o = \overline{\pi}_{i \in I} L_{/\mathcal{U}}$ *de L.*

Exemple 3 : Désignons par $L_{p,i}$ l'unique (à isomorphisme près) extension non ramifiée de degré i du corps p-adique $\mathbf{Q}_p$. Le corps résiduel de $L_{p,i}$ est le corps fini à p^i éléments $\mathbf{F}_{p^i}$ et son anneau des entiers s'identifie à l'anneau des vecteurs de Witt $W_{p,i}$ à coefficients dans $\mathbf{F}_{p^i}$; l'idéal maximal de $W_{p,i}$ est égal à $p\, W_{p,i}$.

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur $\mathbf{N}^*$; le corps ultraproduit $C_p = \overline{\pi}_{i \in \mathbf{N}^*} L_{p,i/\mathcal{U}}$ est un corps de valuation discrète, d'anneau des entiers $W_p = \overline{\pi}_{i \in \mathbf{N}^*} W_{p,i/\mathcal{U}}$ dont l'idéal maximal est $p\, W_p$. Le corps résiduel $c_p = \pi_{i \in \mathbf{N}} \mathbf{F}_{p^i/\mathcal{U}}$ est parfait de caractéristique p (son cardinal est égal à celui du continu). Ainsi W_p s'identifie à l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans c_p.

Si $\mathcal{U}$ *contient tous les ensembles* $m\mathbf{N}^* = \{mi,\ i \in \mathbf{N}^*\}$, $m \geqslant 1$, alors $c_p = \prod_{i \in \mathbf{N}} F_{p^i}/\mathcal{U}$ est *algébriquement clos.* On peut identifier canoniquement chaque corps F_{p^m} (donc $\bigcup_{m \geqslant 1} F_{p^m}$) à un sous-corps de $\prod_{i \in \mathbf{N}^*} F_{p^i}/\mathcal{U} = c_p$.

Posons $L_p = (\bigcup_{i \geqslant 1} L_{p,i})^\wedge$ le complété de l'extension maximale non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$.

Puisque le corps résiduel de L_p est égale à la clôture algébrique $\widetilde{F}_p$ de F_p (c'est-à-dire à $\bigcup_{i \geqslant 1} F_{p^i}$), L_p s'identifie à un sous-corps de C_p.

Exemple 3' : Considérons comme ci-dessus le complété L_p de l'extension maximale non ramifiée de Q_p. Définissons par récurrence la suite de corps :

$K_{p,1} = L_p$; $K_{p,2} = L_p[\pi_2]$, $\pi_2^2 = p$; ... ; $K_{p,i+1} = K_{p,i}[\pi_{i+1}]$, $\pi_{i+1}^{i+1} = \pi_i$.

Alors $K_{p,i} = L_p[\pi_i]$ et π_i est racine du polynôme d'Einseinstein $X^{i!} - p$. Donc $|\pi_i| = |p|^{\frac{1}{i!}}$, il vient que $\overline{\prod}_{i \in \mathbf{N}^*} K_{p,i}/\mathcal{U}$ est un corps de valuation dense ($|\overline{\prod}_{i \in \mathbf{N}^*} L_{p,i}/\mathcal{U}| = \mathbf{R}_+$) extension transcendante du corps de valuation discrète $\overline{\prod}_{i \in \mathbf{N}^*} L_p/\mathcal{U}$.

Puisque $K_{p,i} \subset K_{p,i+1}$, on peut identifier canoniquement $K_{p,j}$ (donc $\bigcup_{i \geqslant 1} K_{p,i}$) à un sous-corps de $\overline{\prod}_{i \in \mathbf{N}^*} K_{p,i}/\mathcal{U}$. On sait (c.f. [5]) que $\bigcup_{i \geqslant 1} K_{p,i}$ est dense dans le complété C_p de la clôture algébrique de Q_p. Il vient que C_p s'identifie à un sous-corps de $\overline{\prod}_{i \in \mathbf{N}} K_{p,i}/\mathcal{U}$ et le corps sphériquement complet $\overline{\prod}_{i \in \mathbf{N}^*} K_{p,i}/\mathcal{U}$ *contient* (strictement) *une complétion sphérique de* C_p.

En contraste avec les propositions 2 et 2', on a

Proposition 3 : *Soit* $(L_i)_{i \in I}$ *une famille de corps valués ultramétriques complets. Considérons pour chaque* $i \in I$ *une extension* K_i *de* L_i *de degré fini* n_i *et sur* K_i *l'unique valeur absolue qui prolonge celle de* L_i.

Alors si $\lim\limits_{\mathcal{U}} n_i = n < +\infty$, *le corps* $\overline{\pi}_{i \in I} K_{i/\mathcal{U}}$ *est une extension finie de* $\overline{\pi}_{i \in I} L_{i/\mathcal{U}}$ *de degré n.*

C'est une conséquence immédiate du lemme suivant :

Lemme 5 : *Soit* E_i *un* L_i *- espace de Banach ultramétrique de dimension finie* n_i. *Si* $\lim\limits_{\mathcal{U}} n_i = n < +\infty$, *alors* $\overline{\pi}_{i \in I} E_{i/\mathcal{U}}$ *est un* $\overline{\pi}_{i \in I} L_{i/\mathcal{U}}$ *-espace de Banach de dimension finie n.*

Désignons par $\overline{\pi}_{i \in I} E_i$ le sous-groupe de $\pi_{i \in I} E_i$ formé des $x = (x_i)_{i \in I}$ tels que $\sup\limits_{i \in I} \| x_i \| < +\infty$ et posons $\| x \| = \lim\limits_{\mathcal{U}} \| x_i \|$. Par définition $\overline{\pi}_{i \in I} E_{i/\mathcal{U}}$ est le groupe quotient de $\overline{\pi}_{i \in I} E_i$ par son sous-groupe formé des éléments x tels que $\| x \| = 0$. On voit alors que $\overline{\pi}_{i \in I} E_{i/\mathcal{U}}$ est un $\overline{\pi}_{i \in I} L_{i/\mathcal{U}}$ - espace vectoriel normé.

On se ramène facilement au cas où pour tout $i \in I$, $\dim_{L_i} E_i = n$.

Soit α fixé, $0 < \alpha < 1$, il existe (c.f. [5]) une base α -orthogonale $(e_{ij})_{1 \leq j \leq n}$ de E_i :

tout $x_i \in E_i$ s'écrit $x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{ij} e_{ij}$ avec $\alpha \max\limits_{1 \leq j \leq n} |\lambda_{ij}| \| e_{ij} \| \leq \| x_i \| \leq$

$\leq \max\limits_{1 \leq j \leq n} |\lambda_{ij}| \| e_{ij} \|$. Soit $\lambda_i \in L_i$, $0 < |\lambda_i| < 1$, il existe

$n_{ij} = 1 - \left[\dfrac{\mathrm{Log} \, \| e_{ij} \|}{\mathrm{Log} \, |\lambda_i|} \right] \in \mathbb{Z}$ tel que $|\lambda_i| < \| \lambda_i^{n_{ij}} e_{ij} \| \leq 1$. Posons $e'_{ij} = \lambda_j^{n_{ij}} e_{ij}$;

si $x_i \in E_i$, $x_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e'_{ij}$ avec

$\alpha \mid \lambda_i \mid \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \mid \mu_{ij} \mid \leqslant \| x_i \| \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \mid \mu_{ij} \mid$. Choisissant

$\lambda = (\lambda_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} L_{i/\mathcal{U}}$ tel que $0 < \mid \lambda_i \mid < 1$ et $\lim_{\mathcal{U}} \mid \lambda_i \mid = \mid \lambda \mid \neq 0$, on a

$\mid \lambda \mid \leqslant \lim_{\mathcal{U}} \| e'_{ij} \| \leqslant 1$. De plus, tout $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_{i/\mathcal{U}}$ s'écrit de façon

unique $x = \sum_{j=1}^{n} \mu_j e'_j$ où $\mu_j = (\mu_{ij})_{i \in I} \in \prod_{i \in I} L_{i/\mathcal{U}}$,

$0 \neq e'_j = (e'_{ij})_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_{i/\mathcal{U}}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, avec

$\alpha \mid \lambda \mid \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \mid \mu_j \mid \leqslant \| x \| \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \mid \mu_j \mid$. On en déduit d'une part que

$\prod_{i \in I} E_{i/\mathcal{U}}$ est un $\prod_{i \in I} L_{i/\mathcal{U}}$-espace vectoriel de dimension n et d'autre part que la norme de $\prod_{i \in I} E_{i/\mathcal{U}}$ est triviale lorsque $\prod_{i \in I} L_{i/\mathcal{U}}$ est de valeur absolue triviale.

Corollaire : *Soit L un corps local.*

Si $(K_i)_{i \in I}$ est une famille d'extensions finies de L de degrés finis n_i tels que $\lim_{\mathcal{U}} n_i = n < +\infty$; alors $\prod_{i \in I} K_{i/\mathcal{U}}$ est un corps local.

N.B. On peut aussi démontrer le corollaire ci-dessus en remarquant que si $\lim_{\mathcal{U}} n_i < +\infty$, alors $\prod_{i \in I} K_{i/\mathcal{U}}$ est un corps de valuation discrète de corps résiduel fini. D'autre part, si L est une extension finie de Q_p, on sait (c.f. [7]) que le nombre des extensions finies de L de degré n est fini, dans ce cas le corollaire est évident.

4) Ultraproduit ρ -normalisé des corps p-adiques Q_p.

a) *Le corps de valuation discrète* K_ρ .

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Considérons pour $p \in \mathcal{P}$, le corps p-adique Q_p et le corps des séries formelles de Laurent $F_p((X_p))$ où F_p est le corps fini à p éléments.

Soit $\rho \in R_+$, $0 < \rho < 1$; on considère sur Q_p (resp. $F_p((X_p))$) la valeur absolue $|a_p|_\rho = \rho^{v_p(a_p)}$ (resp. $|S_p|_\rho = \rho^{w_p(S_p)}$) où v_p (resp. w_p) est la valuation de Q_p (resp. $F_p((X_p))$). Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\mathcal{P}$, non principal. Les corps $K_\rho = \bar{\pi}_{p \in \mathcal{P}} Q_{p/\mathcal{U}}$ et $\mathcal{S}_\rho = \bar{\pi}_{p \in \mathcal{P}} F_p((X_p))_{/\mathcal{U}}$ sont complets et ont le même corps résiduel $k = \pi_{p \in \mathcal{P}} F_{p/\mathcal{U}}$ (corollaire 1 et 2 du théorème 1).

Théorème 2 : *Les corps de valuation discrète, complets* $K_\rho = \bar{\pi}_{p \in \mathcal{P}} Q_{p/\mathcal{U}}$ *et* $\mathcal{S}_\rho = \bar{\pi}_{p \in \mathcal{P}} F_p((X_p))_{/\mathcal{U}}$ *sont isomorphes. En fait chacun de ces deux corps est isométriquement isomorphe au corps des séries formelles de Laurent* $k((X))$ *muni de la valeur absolue* $|S|_\rho = \rho^{w(S)}$ *où* w *est la valuation de* $k((X))$.

(i) Puisque F_p est un système de représentants dans $F_p[[X_p]]$ du corps résiduel de $F_p((X_p))$, on déduit du corollaire 3 - théorème 1 que $k = \pi_{p \in \mathcal{P}} F_{p/\mathcal{U}}$ est un système de représentants dans $\bar{\pi}_{p \in \mathcal{P}} F_p[[X_p]]_{/\mathcal{U}}$ du corps résiduel de $\mathcal{S}_\rho$ et que tout $S = (S_p)_{p \in \mathcal{P}} \in \mathcal{S}_\rho$ s'écrit de façon unique $S = \sum_{n=-n_0}^{+\infty} \alpha_n X^n$ où $\alpha_n \in k$, $n \geq -n_0$, $X = (X_p)_{p \in \mathcal{P}}$. D'où l'identification de $\bar{\pi}_{p \in \mathcal{P}} F_p((X_p))_{/\mathcal{U}}$ à $k((X))$.

(ii) Soit $\Lambda_\rho = \bar{\pi}_{p \in \mathcal{P}} Z_{p/\mathcal{U}}$ l'anneau de valuation de K_ρ. On sait (c.f. [1]) que le corps $k = \pi_{p \in \mathcal{P}} F_{p/\mathcal{U}}$ est de caractéristique zéro. Il existe donc ([10]-Prop. 6 - chap. II) un sous-corps de représentants $C_\rho \subset \Lambda_\rho$, isomorphe à **k** tel que Λ_ρ est isomorphe à $C_\rho[[X]]$, donc à $\mathbf{k}[[X]]$ ([10] - théorème 2 - ch. II). Il vient que les corps

$K_\rho = \prod_{p \in \mathscr{P}} Q_{p}/_{\mathcal{U}}$ et $\mathbf{k}((X))$ sont isomorphes.

Remarque 3 : Soient K_p un sur-corps valué complet de Q_p de valuation discrète et k_p le corps résiduel de K_p. Si la valeur absolue de chaque corps K_p, $p \in \mathscr{P}$, est ρ-normalisée comme ci-dessus, alors $\overline{\prod_{p \in \mathscr{P}}} K_{p}/_{\mathcal{U}}$ est isométriquement isomorphe à $(\prod_{p \in \mathscr{P}} k_{p}/_{\mathcal{U}})((X))$.

Remarque 4 : Soit $(\rho_p)_{p \in \mathscr{P}} \subset]0,1[$. Considérons sur Q_p (resp. $F_p((X_p))$) la valeur absolue ρ_p-normalisée. Si $0 < \lim_{\mathcal{U}} \rho_p < 1$, voir remarque 1 - (c). Si $\lim_{\mathcal{U}} \rho_p = 1$, les corps $\overline{\prod_{p \in \mathscr{P}}} Q_{p}/_{\mathcal{U}}$ et $\overline{\prod_{p \in \mathscr{P}}} F_p((X_p))/_{\mathcal{U}}$ sont sphériquement complets, de valuation dense. Le corps résiduel de chacun de ces corps contient **k** et en est distinct. *Ces deux corps ont-ils le même corps résiduel ?* S'il en est ainsi, ils sont isomorphes.

N.B. Le théorème 2 ci-dessus est l'analogue du théorème 4 de [1]. La démonstration du théorème 1 de [1] se reproduit ici mots pour mots. Quant au théorème 5 sur les équations diophantiennes de [1], on en trouvera une démonstration dans [12] basée sur le théorème 2 ; notons toutefois que l'on a :

Proposition 4 : *Considérons une famille $(K_i)_{i \in I}$ de corps valués ultramétriques complets ; $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I et le sous-anneau $\Gamma = \overline{\prod_{i \in I}} \Lambda_{i}/_{\mathcal{U}}$ de $K = \overline{\prod_{i \in I}} K_{i}/_{\mathcal{U}}$.*

Soient r et n deux entiers positifs avec $r \leqslant n$. Si les polynômes de la famille finie $F = (f_\nu)_{1 \leqslant \nu \leqslant r}$ de $\Gamma[X_1, ..., X_n]$ possèdent un zéro commun $a \in \Gamma^n$ tel qu'il existe $(j_1, ..., j_r) \subset [1, n]$ avec $e = \det\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial X_{j_\nu}}(a)\right) \neq 0$; alors pour tout système de représentants $(f_{\nu,i})_{i \in I}$, $1 \leqslant \nu \leqslant r$, de f_ν avec $f_{\nu,i} \in \Lambda_i[X_1, ..., X_n]$, il existe $J \in \mathcal{U}$ tel que pour tout $i \in J$, il existe $b_i = (b_{j,i})_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \Lambda_i^n$ zéro commun des polynômes

$f_{\nu,i}$, $1 \leqslant \nu \leqslant r$, *tel que* $f_\nu(b) = 0$, $1 \leqslant \nu \leqslant r$, *avec* $b = (b^{(j)})_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \Gamma^n$,

$b^{(j)} = (b_{j,i})_{i \in I}$ *et pour tout* $1 \leqslant j \leqslant n$, $b^{(j)} \equiv a^{(j)}$ (*mod.* $e\eta$) *où* $\eta = \overline{\pi}_{i \in I} \mathfrak{m}_{i/\mathcal{U}}$.

On peut supposer $j_1 = 1, \dots, j_r = r$ et $r = n$ en posant $f_\nu = X_\nu - a_\nu$, $r+1 \leqslant \nu \leqslant n$; la matrice jacobienne s'écrit alors $M(F) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial X_j}\right) & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$. Par hypothèse

$e = \det M(F)(a) = \det \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial X_j}(a)\right) \neq 0$. Mais $e = (e_i)_{i \in I}$ avec $e_i = \det M(F_i)(a_i) \in \Lambda_i$ où $a = (a_i)_{i \in I} \in \Gamma^n$, $F_i = (f_{\nu,i})_{1 \leqslant \nu \leqslant n}$ et les $f_{\nu,i} \in \Lambda_i[X_1, \dots, X_n]$ représentent f_ν. Puisque $f_\nu(a) = (f_{\nu,i}(a_i))_{i \in I} = 0$, $1 \leqslant \nu \leqslant n$ et $e \neq 0$, il existe $J \in \mathcal{U}$ tel que pour tout $i \in J$, $|f_{\nu,i}(a_i)| < \frac{|e^2|}{2} < |e_i^2|$. Ainsi pour tout $i \in J$, $f_{\nu,i}(a_i) \in e_i^2 \mathfrak{m}_i$, $1 \leqslant \nu \leqslant n$. On sait alors (c'est une conséquence du lemme de Hensel) qu'il existe $b_i = (b_{j,i})_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \Lambda_i^n$ tel que pour $1 \leqslant \nu \leqslant n$, $f_{\nu,i}(b_i) = 0$ avec $b_{j,i} \equiv a_{j,i}$ (mod. $e_i \mathfrak{m}_i$), $1 \leqslant j \leqslant n$. Il vient que $f_\nu(b) = 0$, $1 \leqslant \nu \leqslant n$, où $b = (b^{(j)})_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \Gamma^n$, $b^{(j)} = (b_{ji})_{i \in I}$ et pour $1 \leqslant j \leqslant n$, $b^{(j)} \equiv a^{(j)}$ (mod. $e\eta$).

b) *La clôture algébrique de* $K_\rho = \overline{\pi}_{p \in \mathcal{P}} Q_{p/\mathcal{U}}$.

Lemme 6 : *Soit* $(K_i)_{i \in I}$ *une famille de corps valués ultramétriques, algébriquement clos.*

Tout corps ultraproduit $K = \overline{\pi}_{i \in I} K_{i/\mathcal{U}}$ *est algébriquement clos.*

Soit $P = \sum_{j=o}^{n} \alpha_j Y^j \in K[Y]$ un polynôme unitaire de degré $n \geqslant 2$ et soit $(\alpha_{ij})_{i \in I} \in \overline{\pi}_{i \in I} K_i$ un représentant de $\alpha_j \in K = \overline{\pi}_{i \in I} K_{i/\mathcal{U}}$ avec $\alpha_{i,n} = 1$,

$\forall\, i \in I$. On a pour tout $i \in I$ et tout j, $0 \leq j \leq n$,

$|\alpha_{ij}| \leq \sup_{i \in I} |\alpha_{ij}| = |\alpha_j|_\infty \leq \max_{0 \leq j \leq n} |\alpha_j|_\infty = M < +\infty$. Puisque K_i est

algébriquement clos, le polynôme unitaire $P_i = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{i,j} Y^j \in K_i[Y]$ a toutes ses racines dans K_i. Mais si un corps valué L contient toutes les racines du polynôme unitaire $Q \in L[Y]$ de degré n, alors l'une au moins de ces racines $a \in L$ est telle que $|a| \leq |Q(0)|^{\frac{1}{n}}$. Ainsi l'une des racines a_i de P_i dans K_i est telle que $|a_i| \leq |P_i(0)|^{\frac{1}{n}} = |\alpha_{i,o}|^{\frac{1}{n}} \leq M^{\frac{1}{n}}$.

Il vient que $a = (a_i)_{i \in I} \in \pi K_i$, on a dans $K = \pi_{i \in I} K_{i/\mathcal{U}}$, $P(a) = (P_i(a_i))_{i \in I} = 0$.

Le corps $K = \pi_{i \in I} K_{i/\mathcal{U}}$ est donc algébriquement clos.

Soit L un corps ; on désignera par $\tilde{L}$ sa clôture algébrique. La valeur absolue ρ-normalisée de Q_p s'étend de façon unique en une valeur absolue sur $\tilde{Q}_p$. Le complété C_p de $\tilde{Q}_p$ est indépendant de la ρ-normalisation de la valeur absolue de Q_p. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre, non principal, sur $\mathcal{P}$; compte tenu de la proposition 1, du corollaire 1 - Lemme 2 et du lemme 6, on a :

Proposition 5 : *Les corps valués* $\pi_{p \in \mathcal{P}} \tilde{Q}_{p/\mathcal{U}}$ *et* $\pi_{p \in \mathcal{P}} C_{p/\mathcal{U}}$ *sont égaux et sphériquement complets. De plus* $\Gamma_\rho = \pi_{p \in \mathcal{P}} \tilde{Q}_{p/\mathcal{U}} = \pi_{p \in \mathcal{P}} C_{p/\mathcal{U}}$ *est un corps algébriquement clos.*

Le groupe des valeurs $|\Gamma_\rho^*|$ *de* Γ_ρ *est égal à* R_+^*.

Considérons $K_\rho = \pi_{p \in \mathcal{P}} Q_{p/\mathcal{U}} \subset \Gamma_\rho = \pi_{p \in \mathcal{P}} \tilde{Q}_{p/\mathcal{U}} = \pi_{p \in \mathcal{P}} C_{p/\mathcal{U}}$.

Le corps, algébriquement clos et sphériquement complet Γ_ρ contient comme sous-corps valués, extensions valuées de K_ρ, une clôture algébrique $\tilde{K}_\rho$ de K_ρ, le complété $\hat{\tilde{K}}_\rho$ de $\tilde{K}_\rho$ et une complétion sphérique de $\tilde{K}_\rho$ donc aussi de $\hat{\tilde{K}}_\rho$. Tous ces sous-corps de Γ_ρ ont le même corps résiduel $\tilde{k}$.

Lemme 7 : *(i) La clôture algébrique* $\tilde{\mathbf{k}}$ *de* $\mathbf{k} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbf{F}_{p}/\mathcal{U}$ *est égale à* $\bigcup_{n \geqslant 1} \mathbf{k}_n$ *où* $\mathbf{k}_n = \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbf{F}_{p^n}/\mathcal{U}$.

(ii) Le sur-corps $\prod_{p \in \mathcal{P}} \tilde{\mathbf{F}}_{p}/\mathcal{U}$ *de* $\tilde{\mathbf{k}}$ *, ultraproduit des clôtures algébriques des* $\mathbf{F}_p$ *, est algébriquement clos et transcendant sur* **k.**

(i) On voit, comme dans la proposition 3, que le corps $\mathbf{k}_n = \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbf{F}_{p^n}/\mathcal{U}$ est un **k**-espace vectoriel de dimension finie n. Il vient que $\bigcup_{n \geqslant 1} \mathbf{k}_n$ est une extension algébrique de **k** . Considérons un polynôme unitaire, irréductible $P = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j Y^j$ à coefficients $\alpha_j = (\alpha_{p,j})_{p \in \mathcal{P}}$ dans **k** ; posons $P_p = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{p,j} Y^j \in \mathbf{F}_p[Y]$; alors $J = \{p \in \mathcal{P} / P_p \text{ irréductible}\} \in \mathcal{U}$. Puisque pour tout $p \in J$, le polynôme irréductible P_p est de degré n et que toute extension algébrique de $\mathbf{F}_p$ de degré n est isomorphe à $\mathbf{F}_{p^n}$, le polynôme P_p a une racine x_p dans $\mathbf{F}_{p^n}$; ainsi $x = (x_p)_{p \in \mathcal{P}} \in \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbf{F}_{p^n}/\mathcal{U}$ est une racine de P. Le corps $\bigcup_{n \geqslant 1} \mathbf{k}_n$ est donc une clôture algébrique de **k** .

(ii) Tout comme dans le lemme 6 et la proposition 3, on voit que $\prod_{p \in \mathcal{P}} \tilde{\mathbf{F}}_{p}/\mathcal{U}$ est algébriquement clos et que c'est une extension transcendante de **k** .

Remarque 5 : (i) On voit facilement que pour tout entier $n \geqslant 2$, le corps $\mathbf{k}_n = \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbf{F}_{p^n}/\mathcal{U}$ est une extension cyclique de **k** . On en déduit que le corps *k est quasi-fini* (c.f. [10] - chap. III - § 2). On peut donc associer au corps de valuation discrète $\mathbf{K}_\rho = \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbf{Q}_{p}/\mathcal{U}$ une formation de classes (c.f. [10] chap. XIII - § 4).

(ii) L'extension maximale non ramifiée de $\mathbf{K}_\rho$ est isomorphe à $\bigcup_{n \geqslant 1} \mathbf{k}_n((X))$

et le complété de ce corps est $\tilde{k}((X))$. Soit D_p un corps gauche de centre Q_p, de dimension n^2 ; le corps ultraproduit $\underset{p \in \mathscr{P}}{\pi} D_{p/\mathscr{U}}$ est un *corps gauche* de centre K_ρ, de dimension n^2 ; ce corps contient un sous-corps *non ramifié maximal isomorphe* à $k_n((X))$. On obtient de cette manière tous les corps gauches de centre K_ρ de dimension finie.

(iii) L'extension abélienne maximale de K_ρ est égal à la clôture algébrique $\tilde{K}_\rho = \bigcup_{n \geqslant 1} \bigcup_{m \geqslant 1} k_n((X^{\frac{1}{m}}))$ de K_ρ. Le groupe de Galois de l'extension $\tilde{K}_\rho \mid K_\rho$ est isomorphe au groupe $\hat{Z} \times \hat{Z}$ où $\hat{Z} = \varprojlim Z/_{nZ}$.

Revenons à $K_\rho = \underset{p \in \mathscr{P}}{\pi} Q_p /_{\mathscr{U}} \subset \Gamma_\rho = \underset{p \in \mathscr{P}}{\pi} C_{p/\mathscr{U}}$. Puisque K_ρ est un corps de valuation discrète, le groupe $|\tilde{K}_\rho^*| = |\hat{\tilde{K}}_\rho^*|$ est égal au groupe dénombrable ρ^Q ; comme $|\Gamma_\rho^*| = R_+^*$ (Proposition 5), le corps Γ_ρ *n'est pas une extension immédiate* de $\tilde{K}_\rho$ (resp. $\hat{\tilde{K}}_\rho$).

Soient A_p l'anneau des entiers de C_p et M_p son idéal maximal ; le corps résiduel de C_p est égal à $\tilde{F}_p$. Chaque anneau A_p étant local hensélien et $\underset{p \in \mathscr{P}}{\pi} \tilde{F}_{p/\mathscr{U}}$ étant de caractéristique zéro, on déduit du lemme 4 que l'anneau local hensélien $\underset{p \in \mathscr{P}}{\pi} A_{p/\mathscr{U}}$ d'idéal maximal $\underset{p \in \mathscr{P}}{\pi} M_{p/\mathscr{U}}$ contient un sous-corps de représentants R_ρ isomorphe à $\underset{p \in \mathscr{P}}{\pi} \tilde{F}_{p/\mathscr{U}}$. Puisque Γ_ρ est complet de caractéristique résiduelle zéro, son anneau des entiers A_ρ contient un sous-corps de repésentants $\mathscr{R}_\rho$ isomorphe à son corps résiduel $A_\rho / \mathfrak{m}_\rho$ ($\mathfrak{m}_\rho$ idéal maximal de A_ρ). Mais $\mathfrak{m}_\rho \subset \underset{p \in \mathscr{P}}{\pi} M_{p/\mathscr{U}}$, il vient que $R_\rho \neq \mathscr{R}_\rho$.

On déduit, d'une part, du lemme 7, et d'autre part, de ce qui précède, que les inclusions $\tilde{k} \subset \underset{p \in \mathscr{P}}{\pi} \tilde{F}_{p/\mathscr{U}} \subset A_\rho / \mathfrak{m}_\rho$ sont strictes. Le corps Γ_ρ est à tout point de vue beaucoup plus «grand» que $\hat{\tilde{K}}_\rho$. Sachant que $K_\rho \simeq k((X))$, on a

Proposition 6 : *(i) Le complété* $\hat{\tilde{K}}_\rho$ *de la clôture algébrique* $\tilde{K}_\rho$ *de* K_ρ *, sous-corps de* Γ_ρ *est isométriquement isomorphe au corps* $\tilde{k}((X))_Q$ *des séries formelles* $\sum_{j \geqslant o} \alpha_j X^{q_j}$ *à coefficients* $\alpha_j \in \tilde{k}$ *et à exposants rationnels* q_j *finis ou formant une suite strictement croissante.*

(ii) Le corps sphériquement complet Γ_ρ *contient une complétion sphérique de* $\hat{\tilde{K}}_\rho$ *, isométriquement isomorphe au corps* $S(\tilde{k}, Q)$ *des séries formelles à coefficients dans* $\tilde{k}$ *et à exposants rationnels.*

Exemple 4 : Sous-corps de Γ_ρ *de corps résiduel égal à* $\underset{p \in \mathscr{P}}{\pi} \tilde{\tilde{F}}_{p/\mathcal{U}}$

Soit L_p le complété de l'extension maximale non ramifiée de Q_p.

Le corps résiduel de L_p est égal à $\tilde{\tilde{F}}_p$. On déduit de la remarque 3 que

$$L_p = \underset{p \in \mathscr{P}}{\overline{\pi}} L_{p/\mathcal{U}} \quad \text{est isomorphe à} \quad (\pi \tilde{\tilde{F}}_{p/\mathcal{U}})((X)).$$

Soit $i \geqslant 1$; considérons avec les notations de l'exemple 3',

$L_{p,i} = L_p[\pi_{i,p}]$ où $\pi_{i,p}^{i!} = p$; alors $\underset{p \in \mathscr{P}}{\overline{\pi}} L_{p,i/\mathcal{U}} = (\underset{p \in \mathscr{P}}{\overline{\pi}} L_{p/\mathcal{U}})[\alpha_i]$

où $\alpha_i^{i!} = \pi$, $\pi = (p)_{p \in \mathscr{P}}$. On voit que $\underset{p \in \mathscr{P}}{\overline{\pi}} L_{p,i/\mathcal{U}}$ est isomorphe à

$(\pi \tilde{F}_{p/\mathcal{U}})((X^{\frac{1}{i!}}))$ et que $\bigcup_{i \geqslant 1} (\pi \tilde{F}_{p/\mathcal{U}})((X^{\frac{1}{i!}})) = \bigcup_{i \geqslant 1} (\pi \tilde{F}_{p/\mathcal{U}})((X^{\frac{1}{i}}))$

est la clôture algébrique de $(\underset{p \in \mathscr{P}}{\pi} \tilde{\tilde{F}}_{p/\mathcal{U}})((X)$; il vient que $\tilde{L}_\rho = \bigcup_{i \geqslant 1} (\overline{\pi} \tilde{L}_{p,i/\mathcal{U}})$.

Soit R_ρ un relèvement de $\underset{p \in \mathscr{P}}{\pi} \tilde{F}_{p/\mathcal{U}}$ dans $\tilde{L}_\rho$ tel que $\tilde{C}_\rho \subset R_\rho \subset \mathscr{R}_\rho$;

On a alors $\hat{\hat{L}}_\rho = \left\{ \sum_{j \geqslant 0} \alpha_j \, \pi^{q_j}, \ \alpha_j \in R_\rho, (q_j)_{j \geqslant 0} \subset Q \right.$ finie ou strictement croissante $\left.\right\}$ et $S(R_\rho, \pi^q, q \in Q)$ est une complétion sphérique de $\hat{\hat{L}}_\rho$.

Noter que pour chaque p, $\hat{L}_p$ *coïncide avec* C_p tandis que $\hat{\hat{L}}_\rho$ est *loin d'être égal* à Γ_ρ.

5) Ultraproduits construits sur R.

Rappelons (c.f. par exemple N. Bourbaki - Alg. com. - Chap. VI) que les valeurs absolues non ultramétriques sur **R** sont de la forme $|a|^\alpha$ où $|\ |$ est la valeur absolue usuelle sur **R** et $\alpha \in \,]0, 1]$. On notera R_α le corps **R** muni de la valeur absolue $|\ |^\alpha$.
Considérons une famille $(\alpha_i)_{i \in I} \subset \,]0, 1]$. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I ; on définit comme en 1) le corps ultraproduit $\overline{\pi}_{i \in I} R_{\alpha_i/\mathcal{U}}$ des corps valués R_{α_i}.

Proposition 7 : *Soient* $\sigma = (\alpha_i)_{i \in I} \subset \,]0, 1]$ *et* $\mathcal{U}$ *un ultrafiltre sur I.*

(i) Si $\lim_{\mathcal{U}} \alpha_i = \alpha \neq 0$, *le corps* $\overline{\pi}_{i \in I} R_{\alpha_i/\mathcal{U}}$ *est égal à* R_α.

(ii) Si $\lim_{\mathcal{U}} \alpha_i = 0$, *alors* $\mathfrak{R}_\sigma = \overline{\pi}_{i \in I} R_{\alpha_i/\mathcal{U}}$ *est un corps valué ultramétrique de valuation dense avec* $|\mathfrak{R}_\sigma| = R_+$. *De plus* $\mathcal{U}$ *est* ω*-incomplet et* $\mathfrak{R}_\sigma$ *est sphériquement complet.*

(i) Supposons $\lim_{\mathcal{U}} \alpha_i = \alpha \neq 0$. Considérons $a = (a_i)_{i \in I} \in \overline{\pi}_{i \in I} R_{\alpha_i/\mathcal{U}}$ et posons $\beta = \operatorname{Sup}_{i \in I} |a_i|^{\alpha_i}$; on a $|a_i| \leqslant \beta^{\frac{1}{\alpha_i}}$ pour tout $i \in I$. Comme $\lim_{\mathcal{U}} \beta^{\frac{1}{\alpha_i}} = \beta^{\frac{1}{\alpha}}$; il existe $J_0 \in \mathcal{U}$ tel que pour tout $i \in J_0$, $|a_i| \leqslant \beta^{\frac{1}{\alpha_i}} < \frac{3}{2} \beta^{\frac{1}{\alpha}} = \beta_0$.

L'élément $b = (b_i)_{i \in I}$ de $\prod_{i \in I} R_{\alpha_i}$ défini par $b_i = a_i$, si $i \in J_o$ et $b_i = o$ si $i \notin J_o$ coïncide avec a dans $\prod_{i \in I} R_{\alpha_i/\mathcal{U}}$. De plus, $|b_i| \leq \beta_o$ pour tout $i \in I$; donc $\lim_{\mathcal{U}} b_i = x$ existe dans $\mathbf{R}$. Soit $\varepsilon > o$, il existe $J_\varepsilon \in \mathcal{U}$ tel que pour tout $i \in J_\varepsilon$, $|b_i - x| < \varepsilon$. Ainsi $|b_i - x|^{\alpha_i} < \varepsilon^{\alpha_i}$ et $\lim_{\mathcal{U}} |b_i - x|^{\alpha_i} \leq \varepsilon^{\alpha}$; d'où $\lim_{\mathcal{U}} |b_i - x|^{\alpha_i} = 0$. Comme $|a| = |b| = \lim_{\mathcal{U}} |b_i|^{\alpha_i} = \lim_{\mathcal{U}} |x|^{\alpha_i} = |x|^{\alpha}$, on a $\prod_{i \in I} R_{\alpha_i/\mathcal{U}} = R_\alpha$.

(ii) Supposons $\lim_{\mathcal{U}} \alpha_i = 0$. Soient $a = (a_i)_{i \in I}$ et $b = (b_i)_{i \in I}$ deux éléments de $\mathfrak{R}_\sigma = \prod_{i \in I} R_{\alpha_i/\mathcal{U}}$; comme pour tout $i \in I$,

$|a_i + b_i| \leq 2^{\alpha_i} \max(|a_i|^{\alpha_i}, |b_i|^{\alpha_i})$, on a $|a+b| \leqslant \max(|a|, |b|)$;

la valeur absolue de $\mathfrak{R}_\sigma$ est donc ultramétrique. D'autre part, si $\alpha \in \mathbf{R}_+$, alors

$a = (\alpha^{\frac{1}{\alpha_i}})_{i \in I} \in \prod_{i \in I} R_{\alpha_i}$ avec $|a| = \lim_{\mathcal{U}} |a_i|^{\alpha_i} = \alpha$; donc $|\mathfrak{R}_\sigma| = \mathbf{R}_+$.

Soit n un entier ≥ 1 ; comme $\lim_{\mathcal{U}} \alpha_i = o$, l'ensemble J_n des $i \in I$ tels que $\alpha_i < \frac{1}{n}$ appartient à $\mathcal{U}$; on a $J_{n+1} \subset J_n$ et $\bigcap_{n \geq 1} J_n = \emptyset$ (si $\bigcap_{n \geq 1} J_n$ était non vide, il existerait $i \in \bigcap_{n \geq 1} J_n$ tel que $\alpha_i < \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$; c'est-à-dire $\alpha_i = 0$, ce qui est absurde). Il vient que l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ est ω-incomplet. La démonstration de la proposition 1 montre alors que $\mathfrak{R}_\sigma$ est sphériquement complet.

Remarque 6 : Soit Q_{α_i} le corps $\mathbf{Q}$ muni de la valeur absolue $|\ |^{\alpha_i}$. Si $\lim_{\mathcal{U}} \alpha_i = 0$; on voit comme ci-dessus que $\prod_{i \in I} Q_{\alpha_i/\mathcal{U}}$ est un corps valué ultramétrique, sphériquement complet.

De plus $\prod_{i \in I} Q_{\alpha_i/\mathcal{U}} = \prod_{i \in I} R_{\alpha_i/\mathcal{U}}$. □

Les corps valués ultramétriques $\mathfrak{R}_\sigma$ obtenus dans la proposition 6-(ii) sont semblables à ceux construits à l'aide de l'analyse non standard par A. Robinson (c.f. [8] ou [9]). On peut décrire ici avec plus de «précisions» le corps résiduel de $\mathfrak{R}_\sigma$.

Dans toute la suite, on suppose que la famille $\sigma = (\alpha_i)_{i \in I} \subset]0,1]$ est telle que $\lim_{\mathcal{U}} \alpha_i = 0$. Soit $a = (a_i)_{i \in I} \in l^\infty_{\mathbf{R}}(I)$; posons $\beta = \sup_{i \in I} |a_i|$; alors, ou bien $\beta \leqslant 1$, donc $|a_i|^{\alpha_i} \leqslant 1, i \in I$, ou bien $1 < \beta$, donc $\beta^{\alpha_i} \leqslant \beta$ et $|a_i|^{\alpha_i} \leqslant \beta^{\alpha_i} < \beta$, $i \in I$. Dans tous les cas, $\sup_{i \in I} |a_i|^{\alpha_i} < +\infty$. On peut donc identifier $l^\infty_{\mathbf{R}}(I)$ à un sous-anneau de $\prod_{i \in I} R_{\alpha_i}$. De plus, tout $a = (a_i)_{i \in I} \in l^\infty_{\mathbf{R}}(I)$ est tel que $|a| = \lim_{\mathcal{U}} |a_i|^{\alpha_i} \leqslant 1$; car si $\beta \leqslant 1$, $|a_i|^{\alpha_i} \leqslant 1$, d'où $\lim_{\mathcal{U}} |a_i|^{\alpha_i} \leqslant 1$ et si $1 < \beta$, $|a_i|^{\alpha_i} \leqslant \beta^{\alpha_i}$, d'où $\lim_{\mathcal{U}} |a_i|^{\alpha_i} \leqslant 1$. Il est clair que l'ensemble $\mathscr{P}_\sigma$ des $a \in l^\infty_{\mathbf{R}}(I)$ tels que $|a| = \lim_{\mathcal{U}} |a_i|^{\alpha_i} < 1$ est un idéal premier de $l^\infty_{\mathbf{R}}(I)$. On déduit du corollaire - lemme 1, que $\mathscr{P}_\sigma$ est contenu dans un seul idéal maximal de $l^\infty_{\mathbf{R}}(I)$, à savoir, l'idéal maximal $\mathfrak{b}_{\mathcal{U}}$ formé des $a \in l^\infty_{\mathbf{R}}(I)$ tels que $\lim_{\mathcal{U}} |a_i| = 0$.

Soit φ l'application canonique de $\prod_{i \in I} R_{\alpha_i}$ sur $\mathfrak{R}_\sigma = \prod_{i \in I} R_{\alpha_i/\mathcal{U}}$. On déduit de ce qui précède que l'image canonique $\Gamma_\sigma = \varphi(l^\infty_{\mathbf{R}}(I))$ de $l^\infty_{\mathbf{R}}(I)$ dans $\mathfrak{R}_\sigma$ est un sous-anneau unitaire de l'anneau des entiers Λ_σ de $\mathfrak{R}_\sigma$. L'idéal maximal $\mathfrak{m}_\sigma$ de Λ_σ est égal à $\varphi(\mathscr{P}_\sigma)$. On a $\Gamma_\sigma \neq \Lambda_\sigma$; par exemple $a = (\alpha_i^{-1})_{i \in I} \in \Lambda_\sigma$ et $a \not\in \Gamma_\sigma$.

L'anneau Γ_σ est local d'idéal maximal $\mathfrak{b}_\sigma = \varphi(\mathfrak{b}_{\mathcal{U}})$; de plus $\Gamma_\sigma = \mathbf{R} \oplus \mathfrak{b}_\sigma$. Comme

$b = (\alpha_i)_{i \in I} \in \mathfrak{b}_\sigma$ tandis que $|b| = \lim_{\mathcal{U}} \alpha_i^{\alpha_i} = 1$, l'inclusion $\mathfrak{m}_\sigma \subset \mathfrak{b}_\sigma$ est stricte.

Proposition 8 : *Soit* $\sigma = (\alpha_i)_{i \in I} \subset \left]0, 1\right]$ *telle que* $\lim_{\mathcal{U}} \alpha_i = 0$. *Le corps résiduel* $\Lambda_\sigma / \mathfrak{m}_\sigma$ *de* $\mathfrak{R}_\sigma$ *contient strictement* $\mathbf{R}$ *et est égal au corps des fractions de l'anneau intègre* $l^\infty_{\mathbf{R}}(I)/\mathcal{P}_\sigma$.

(i) Puisque les inclusions $\mathfrak{m}_\sigma \subset \mathfrak{b}_\sigma \subset \Gamma_\sigma \subset \Lambda_\sigma$ sont strictes et que $\Gamma_\sigma = \mathbf{R} \oplus \mathfrak{b}_\sigma$; les inclusions suivantes sont strictes : $\mathbf{R} \subset \Gamma_\sigma / \mathfrak{m}_\sigma \subset \Lambda_\sigma / \mathfrak{m}_\sigma$

(ii) Soit $S = \Gamma_\sigma \setminus \mathfrak{m}_\sigma$; comme $\mathfrak{m}_\sigma$ est l'idéal maximal de Λ_σ , le localisé $S^{-1}\Gamma_\sigma$ de Γ_σ en $\mathfrak{m}_\sigma$ est contenu dans Λ_σ . Soit $a \in \Lambda_\sigma$; ou bien $|a| < 1$, alors $a \in \mathfrak{m}_\sigma \subset \Gamma_\sigma \subset S^{-1}\Gamma_\sigma$; ou bien $|a| = \lim_{\mathcal{U}} |a_i|^{\alpha_i} = 1$; s'il existe $\beta \in \mathbf{R}^*_+$ tel que l'ensemble $\{i \in I / |a_i| \leqslant \beta\} \in \mathcal{U}$ alors $a \in \Gamma_\sigma$, sinon pour tout $\beta \in \mathbf{R}^*_+$, $\{i \in I / \beta < |a_i|\} \in \mathcal{U}$; en particulier $\{i \in I/ 1 < |a_i|\} = \{i \in I / |a_i^{-1}| < 1\} \in \mathcal{U}$, d'où $s = a^{-1} \in \Gamma_\sigma$ avec $|s| = |a^{-1}| = 1$ et $a = s^{-1} \in S^{-1}\Gamma_\sigma$. Il vient que $\Lambda_\sigma \subset S^{-1}\Gamma_\sigma$ et $\Lambda_\sigma = S^{-1}\Gamma_\sigma$. On a $\Lambda_\sigma / \mathfrak{m}_\sigma = S^{-1}\Gamma_\sigma / S^{-1}\mathfrak{m}_\sigma = \bar{S}^{-1}(\Gamma_\sigma / \mathfrak{m}_\sigma)$; mais $\bar{S} = \Gamma_\sigma / \mathfrak{m}_\sigma \setminus \{o\}$, donc $\Lambda_\sigma / \mathfrak{m}_\sigma$ est le corps des fractions de $\Gamma_\sigma / \mathfrak{m}_\sigma$. On achève la démonstration de la proposition 8 en remarquant, vu les définitions de $\mathcal{P}_\sigma$ et Γ_σ , que les anneaux $\Gamma_\sigma / \mathfrak{m}_\sigma$ et $l^\infty_{\mathbf{R}}(I) / \mathcal{P}_\sigma$ sont isomorphes.

Corollaire : *Soit* F_σ *le corps des fractions de* $l^\infty_{\mathbf{R}}(I)/\mathcal{P}_\sigma$.

Le corps $\mathfrak{R}_\sigma$ *est isométriquement isomorphe au corps* $S(F_\sigma , \mathbf{R})$ *des séries formelles à coefficients dans* F_σ *et à exposants réels.*

C'est classique. En voici une brève démonstration. Soit R_σ un sous-corps de représentants dans Λ_σ du corps résiduel (isomorphe à) F_σ de $\mathfrak{K}_\sigma$.

Fixons $\alpha \in]0,1[$ et posons $\pi = (\alpha^{\frac{1}{\alpha_i}})_{i \in I}$; on a $\pi \in \mathfrak{m}_\sigma$. Considérons pour tout $r \in \mathbf{R}$, $\pi^r = (\alpha^{\frac{r}{\alpha_i}})_{i \in I}$; on a $\pi^r \pi^{r'} = \pi^{r+r'}$. Le sous-ensemble $S(R_\sigma, \pi^r, r \in \mathbf{R})$ de $\mathfrak{K}_\sigma$ formé des familles sommables $\sum_{r \in A} \gamma_r \pi^r$ où $\gamma_r \in R_\sigma$ et A une partie bien ordonnée de $\mathbf{R}$, est un sous-corps de $\mathfrak{K}_\sigma$ isométriquement isomorphe à $S(F_\sigma, \mathbf{R})$, donc $S(R_\sigma, \pi^r, r \in \mathbf{R})$ est sphériquement complet. Comme $\mathfrak{K}_\sigma$ est une extension immédiate de $S(R_\sigma, \pi^r, r \in \mathbf{R})$, on a $\mathfrak{K}_\sigma = S(R_\sigma, \pi^r, r \in \mathbf{R})$.

Remarque 7 : Désignons par $\mathfrak{S}$ l'ensemble des familles $\sigma = (\alpha_i)_{i \in I} \subset]0,1]$ telles que $\lim_{\mathcal{U}} \alpha_i = 0$.

(i) Si σ et $\tau \in \mathfrak{S}$ sont telles que $\lim_{\mathcal{U}} \frac{\alpha_i}{\tau_i} \neq 0$, les corps $\mathfrak{K}_\sigma$ et $\mathfrak{K}_\tau$ sont isomorphes.

(ii) On a sur $\mathfrak{S}$ une relation de préordre total en posant $\sigma \leqslant \tau$ si et seulement si $\{i \in I / \alpha_i \leqslant \tau_i\} \in \mathcal{U}$. Si $\sigma \leqslant \tau$, les idéaux premiers $\mathcal{P}_\sigma$ et $\mathcal{P}_\tau$ de $l^\infty_{\mathbf{R}}(I)$ sont tels que $\mathcal{P}_\sigma \subset \mathcal{P}_\tau$. La famille d'idéaux premiers $(\mathcal{P}_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{S}}$ de $l^\infty_{\mathbf{R}}(I)$ est donc totalement ordonnée par l'inclusion. De plus si $\lim_{\mathcal{U}} \frac{\alpha_i}{\tau_i} \neq 0$, alors $\mathcal{P}_\sigma = \mathcal{P}_\tau$. Par contre si $\sigma \leqslant \tau$ et $\lim_{\mathcal{U}} \frac{\alpha_i}{\tau_i} = 0$, on a $\mathcal{P}_\sigma \subsetneqq \mathcal{P}_\tau$, car si $\alpha \in]0,1[$, $a = (\alpha^{\frac{1}{\tau_i}})_{i \in I} \in \mathcal{P}_\tau$, mais $|a| = \lim_{\mathcal{U}} \alpha^{\frac{\alpha_i}{\tau_i}} = 1$, donc $a \notin \mathcal{P}_\sigma$. □

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathbf{R}$-espaces vectoriels normés de normes $\| \ \|_i$. Désignons par E_{i,α_i} l'espace E_i muni de la R_{α_i}-norme $\| x_i \|_i^{\alpha_i}$. Définissant, comme on l'a fait pour $\mathfrak{K}_\sigma$, l'ultraproduit $\prod_{i \in I} E_{i,\alpha_i}/\mathcal{U}$ des R_{α_i}-espaces normés E_{i,α_i}, on obtient un $\mathfrak{R}_\sigma$-espace vectoriel *normé ultramétrique sphériquement complet* (pour ce dernier point, on reproduit la démonstration de la proposition 1) si $E_i = E$ et $\| \ \|_i = \| \ \|$ pour tout $i \in I$, on pose $\prod_{i \in I} E_{\alpha_i/\mathcal{U}} = \mathcal{E}_\sigma$ et E s'identifie canoniquement à un sous-ensemble discret de $\mathcal{E}_\sigma$. Supposons $\dim E = n < +\infty$; considérons une $\mathbf{R}$-base $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ de E, alors $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ devient une $\mathfrak{R}_\sigma$*-base orthonormale de* $\mathcal{E}_\sigma$.

En effet, il existe $m > o$ et $M > o$ tels que pour tout $y = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \in E$, $\lambda_j \in \mathbf{R}$ on a

$$m \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\lambda_j| \leqslant \|y\| \leqslant M \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\lambda_j|.$$

Alors, si $x = (x_i)_{i \in I} \in \mathcal{E}_\sigma$, on a pour tout $i \in I$, $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$, $a_{ij} \in \mathbf{R}$ et $m^{\alpha_i} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_{ij}|^{\alpha_i} \leqslant$

$$\|x_i\|^{\alpha_i} \leqslant M^{\alpha_i} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_{ij}|^{\alpha_i}.$$

Ainsi $\|x\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\|^{\alpha_i} =$

$$= \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \lim_{\mathcal{U}} |a_{ij}|^{\alpha_i} = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_j| \text{ où } a_j = (a_{ij})_{i \in I} \in \mathfrak{R}_\sigma$$

avec $x = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j$.

Considérons alors sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes la valeur absolue usuelle. Posant $\mathcal{C}_\sigma = \prod_{i \in I} \mathbf{C}_{\alpha_i/\mathcal{U}}$, on obtient un sur-corps valué de $\mathfrak{R}_\sigma$ sphériquement complet. Le $\mathfrak{R}_\sigma$-espace vectoriel normé $\mathcal{C}_\sigma$ de dimension 2 a pour base orthonormale $(1,j)$ où $j^2 = -1$. Tout $z = (z_i)_{i \in I} \in \mathcal{C}_\sigma$ s'écrit de façon unique $z = a + jb$, $a, b \in \mathfrak{R}_\sigma$ avec $|z| = \lim_{\mathcal{U}} |z_i|^{\alpha_i} = \max(|a|, |b|)$. Posons $\bar{z} = a - jb$; on a $|\bar{z}| = \max(|a|, |b|)$,

$z\bar{z} = a^2 + b^2$ et $|z\bar{z}| = |a^2 + b^2| = |z|\,|\bar{z}| = \max(|a|^2, |b|^2)$. On en déduit par récurrence que pour tout $n \geqslant 2$ et toute famille finie $(a_\nu)_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \subset \mathfrak{R}_\sigma$,

$|a_1^2 + \ldots + a_n^2| = \max(|a_1|^2, \ldots, |a_n|^2)$. En effet si $|a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2| = \max(|a_1|^2, \ldots, |a_{n-1}|^2)$, puisque $a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2 = b_n^2$

où $b_n = \left(\left(\sum_{\nu=1}^{n-1} a_{\nu,i}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)_{i \in I} \in \mathfrak{R}_\sigma$, posant $z_n = b_n + ja_n$, on a

$|z_n \bar{z}_n| = |b_n^2 + a_n^2| = |a_1^2 + \ldots + a_n^2| = \max(|b_n^2|, |a_n|^2) = \max(|a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2|, |a_n|^2) = \max(|a_1|^2, \ldots, |a_{n-1}|^2, |a_n|^2)$. Donc si $(a_\nu)_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \subset \mathfrak{R}_\sigma$ est telle que

$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2 = 0$, on a $a_\nu = 0$, $1 \leqslant \nu \leqslant n$. Il vient que $\mathfrak{R}_\sigma$ est un corps ordonné (théorème d'Artin-Schreier - c.f. N. BOURBAKI – Alg. Chap. VI).

On déduit de la démonstration du lemme 6 que $\mathscr{C}_\sigma$ est un corps algébriquement clos. Compte-tenu du théorème d'Euler-Lagrange (c.f. N. BOURBAKI loc. cit.), on a

Théorème 3 : *Soit* $\sigma = (\alpha_i)_{i \in I} \subset \,]0,1]$ *telle que* $\lim\limits_{\mathscr{U}} \alpha_i = 0.$

Le corps $\mathfrak{R}_\sigma = \prod_{i \in I} R_{\alpha_i} / \mathscr{U}$ *est un corps ordonné maximal. Sa clôture algébrique est égale au corps valué ultramétrique, sphériquement complet*

$$\mathscr{C}_\sigma = \prod_{i \in I} C_{\alpha_i} / \mathscr{U}$$

Soit A_σ (resp. M_σ) l'anneau des entiers (resp. l'idéal maximal) de $\mathscr{C}_\sigma$. On voit, tout comme pour $\mathfrak{R}_\sigma$, que l'ensemble P_σ des $z = (z_i)_{i \in I} \in l_C^\infty(I)$ tels que

$|z| = \lim\limits_{\mathscr{U}} |z_i|^{\alpha_i} < 1$ est un idéal premier de $l_C^\infty(I)$ et que le corps *résiduel* A_σ / M_σ de

$\mathscr{C}_\sigma$ est égal au *corps des fractions* L_σ de $l^\infty_{\mathbf{C}}(I)/P_\sigma$; de plus $\mathscr{C}_\sigma$ est isométriquement isomorphe à $S(L_\sigma, \mathbf{R})$.

Soit $(\bar{a}_\nu)_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \subset \Lambda_\sigma / \mathfrak{m}_\sigma$; si $\sum_{\nu=1}^{n} \bar{a}_\nu^2 = 0$, on a

$$\max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} |a_\nu|^2 = \Big|\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2\Big| < 1 \text{ ; donc } \bar{a}_\nu = 0,\ 1 \leqslant \nu \leqslant n \text{ et } \Lambda_\sigma / \mathfrak{m}_\sigma$$

est un corps ordonné. D'autre part, l'ordre usuel sur $l^\infty_{\mathbf{R}}(I)$ induit sur $l^\infty_{\mathbf{R}}(I)/\mathscr{P}_\sigma$ un ordre total ; cet ordre détermine sur $\Lambda_\sigma/\mathfrak{m}_\sigma$ par passage au corps des fractions une structure de corps ordonné. Il est clair que $A_\sigma = \Lambda_\sigma + j\,\Lambda_\sigma$ et $M_\sigma = \mathfrak{m}_\sigma + j\,\mathfrak{m}_\sigma$; ainsi A_σ / M_σ est un sur-corps de $\Lambda_\sigma / \mathfrak{m}_\sigma$ de dimension 2 engendré par $\bar{j}(\bar{j}^2 = -1)$. Le corps résiduel A_σ/M_σ du corps algébriquement clos $\mathscr{C}_\sigma$ est algébriquement clos ; d'où

Corollaire : *Le corps résiduel* $\Lambda_\sigma / \mathfrak{m}_\sigma$ *de* $\mathfrak{R}_\sigma$ *est un corps ordonné maximal ; son ordre est déterminé par l'ordre sur* $l^\infty_{\mathbf{R}}(I)/\mathscr{P}_\sigma$ *obtenu par passage au quotient de l'ordre usuel de* $l^\infty_{\mathbf{R}}(I)$.

Remarque 8 : (i) L'ordre de $\mathfrak{R}_\sigma$ coïncide avec l'ordre obtenu par passage au quotient de l'ordre induit sur $\prod_{i \in I} \mathbf{R}_{\alpha_i}$ par l'ordre usuel de $\mathbf{R}^I$.

(ii) Soit $z \in \mathscr{C}_\sigma$; désignons par abs$z$ l'unique élément positif de $\mathfrak{R}_\sigma$ tel que $(\text{abs}\,z)^2 = z\bar{z}$; on a $|\text{abs}z| = |z|$. Si $z' \in \mathscr{C}_\sigma$ est tel que abs$z \leqslant$ absz', alors $|z| \leqslant |z'|$. □

Nous avons déjà observé qu'étant donnée une famille $(E_i)_{i \in I}$ d'espaces vectoriels $\mathbf{R}$-normés, on peut lui associer un ultraproduit $\prod_{i \in I} E_{i,\alpha_i}/\mathscr{U}$ qui est un $\mathfrak{R}_\sigma$-espace normé ultramétrique, sphériquement complet. Pour une construction analogue utilisant l'analyse non-standard lorsque $E_i = E$, $i \in I$, c.f. [8]. Voici un exemple d'espace de Banach sur $\mathbb{R}_\sigma$, ultraproduit de R_{α_i} - espaces normés dont la norme n'est pas ultramétrique.

Exemple 5 : Soit $\sigma = (\alpha_i)_{i \in I} \subset]0,1]$ telle que $\lim\limits_{\mathcal{U}} \alpha_i = 0$. Considérons l'espace vectoriel $L^{\alpha_i}[0,1]$ des classes de fonctions $x_i : [0,1] \to R$ telles que $|x_i|^{\alpha_i}$ est Lebesgue - intégrable ; c'est un R_{α_i}-espace de Banach pour la norme $\|x_i\|_i = \int_0^1 |x_i(t)|^{\alpha_i} dt$. La norme du $\mathbb{R}_\sigma$-espace de Banach $\prod\limits_{i \in I} L^{\alpha_i}[0,1]/_{\mathcal{U}}$ ultraproduit des $L^{\alpha_i}[0,1]$ *n'est pas ultramétrique.* Fixons en effet $\alpha \in]0,1[$; posons $A = [0, \alpha[$, $B = [\alpha, 1]$ et désignons par χ_A(resp. χ_B) la fonction caractéristique de A (resp. B). Il est clair que pour tous $\lambda, \mu \in R$, non nuls et pour tout $i \in I$, $\lambda\chi_A$ et $\mu\chi_B \in L^{\alpha_i}[0,1]$ avec $\|\lambda\chi_A\|_i = \alpha|\lambda|^{\alpha_i} \neq 0$ et $\|\mu\chi_B\|_i = (1-\alpha)|\mu|^{\alpha_i} \neq 0$; de plus $\|\lambda\chi_A + \mu\chi_B\|_i = \alpha|\lambda|^{\alpha_i} + (1-\alpha)|\mu|^{\alpha_i}$. D'où

$$\|\lambda\chi_A + \mu\chi_B\| = \lim_{\mathcal{U}} \|\lambda\chi_A + \mu\chi_B\|_i = 1 > \max(\alpha, 1-\alpha) =$$

$$\max(\|\lambda\chi_A\|, \|\mu\chi_B\|).$$

Désignons par V_i l'espace vectoriel V des fonctions continues $x : [0,1] \to R$ muni de la R_{α_i}-norme $\|x\|_i = \int_0^1 |x(t)|^{\alpha_i} dt$. Une légère modification de la démonstration de la proposition 1 montre que l'espace ultraproduit $\mathcal{V}_\sigma = \prod\limits_{i \in I} V_i/_{\mathcal{U}}$ est un $\mathbb{R}_\sigma$-espace de Banach ($\mathcal{U}$ est ω-incomplet !). Puisque V_i est $\|\ \|_i$-dense dans $L^{\alpha_i}[0,1]$, on a

$$\mathcal{V}_\sigma = \prod_{i \in I} V_i/_{\mathcal{U}} = \prod_{i \in I} L^{\alpha_i}[0,1]/_{\mathcal{U}}.$$

Posons pour toute fonction $x \in V$, $\nu(x) = \sup\limits_{t \in [0,1]} |x(t)|$. Alors si $\nu(x) \leq 1$, on a pour tout $i \in I$, $\|x\|_i \leqslant \nu(x)^{\alpha_i} \leqslant 1$ et si $1 < \nu(x)$, $\|x\|_i \leqslant \nu(x)^{\alpha_i} \leqslant \nu(x)$.

Ainsi $\sup_{i \in I} \|x\|_i < +\infty$ et $\|x\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x\|_i \leqslant 1$.

De plus, on voit facilement que $\|x\| \neq 0$ lorsque $0 \neq x \in V$. Tout ceci montre que l'on peut *identifier* V à *un sous-ensemble de la boule unité* fermée de $\mathcal{V}_\sigma$. Il est clair que V est un sous-groupe de $\mathcal{V}_\sigma$. Considérons $\alpha \in]0,1[$; la fonction continue $x_\alpha : [0,1] \to \mathbf{R}$ définie par $x_\alpha(t) = \frac{t}{\alpha}$ si $0 \leqslant t \leqslant \frac{\alpha}{2}$, $x_\alpha(t) = 1 - \frac{t}{\alpha}$ si $\frac{\alpha}{2} \leqslant t \leqslant \alpha$ et $x_\alpha(t) = 0$ si $\alpha \leqslant t \leqslant 1$ est telle que $\|x_\alpha\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x_\alpha\|_i = \alpha$ $\left(\|x_\alpha\|_i = \alpha \frac{2^{-\alpha_i}}{1+\alpha_i}, \ i \in I\right)$;

il vient que *V est un sous-groupe non discret* de $\mathcal{V}_\sigma$ et si l'on note $\mathbf{R}_d$ le corps des nombres réels muni de la topologie discrète, V devient un $\mathbf{R}_d$-espace vectoriel normé.

Exemple 6 : Fixons $\alpha \in]0,1[$. Soit $\sigma = (\alpha_i)_{i \in I} \subset]0,1]$ telle que $\lim_{\mathcal{U}} \alpha_i = 0$; posons $\alpha\sigma = (\alpha\,\alpha_i)_{i \in I}$. Le corps valué sphériquement complet $\mathfrak{R}_{\alpha\sigma}$ est égal au corps $\mathfrak{R}_\sigma$ muni de la valeur absolue $|a|^\alpha = \lim_{\mathcal{U}} |a_i|^{\alpha\,\alpha_i}$ (remarque 6).

Désignons par $\| \ \|_\alpha$ la $\mathbf{R}_\alpha$-norme de l'espace $E_\alpha = L^\alpha[0,1]$. Si l'on pose pour tout $i \in I$ et tout $x \in E_\alpha$, $\|x\|_\alpha^{\alpha_i} = \left(\int_0^1 |x(t)|^\alpha \, dt\right)^{\alpha_i}$, on a sur E_α une structure de $\mathbf{R}_{\alpha\alpha_i}$-espace de Banach notée $E_\alpha^{(\alpha_i)}$. Soit $V^{(\alpha_i)}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ muni de la norme induite par celle de $E_\alpha^{(\alpha_i)}$.

Alors si l'on pose $\mathcal{L}_{\alpha,\sigma} = \prod_{i \in I} E_\alpha^{(\alpha_i)}/\mathcal{U}$, on a $\prod_{i \in I} V^{(\alpha_i)}/\mathcal{U} = \mathcal{L}_{\alpha,\sigma}$ et $\mathcal{L}_{\alpha,\sigma}$ est un $\mathfrak{R}_{\alpha\sigma}$-espace ultramétrique, sphériquement complet (c.f. démonstration de la proposition 1). De plus, E_α (resp. V) s'identifie à un sous-ensemble *discret* de $\mathcal{L}_{\alpha,\sigma}$ car tout $x \in E_\alpha$ (resp: V) non nul, $\|x\| = 1$.

Puisque $\mathfrak{R}_{\alpha\sigma}$ est sphériquement complet, on déduit du théorème d'Ingleton que le dual $\mathscr{L}'_{\alpha,\sigma}$ de l'espace normé ultramétrique $\mathscr{L}_{\alpha,\sigma}$ est *non nul* alors que d'après le théorème de Day $E'_\alpha = V' = (0)$.

On détermine facilement des suites $\varphi = (\varphi_n)_{n \geqslant 1}$ systèmes libres du **R**-espace vectoriel E_α qui sont des familles *orthonormales* dans le $\mathfrak{K}_{\alpha\,\sigma}$ -espace ultramétrique $\mathscr{L}_{\alpha,\sigma}$, c'est-à-dire pour toute partie finie J de **N** et toute famille $(a_n)_{n \in J} \subset \mathfrak{K}_{\alpha\sigma}$,

$\left|\left| \sum_{n \in J} a_n \varphi_n \right|\right| = \max_{n \in J} |a_n|$. Il suffit par exemple de considérer les fonctions caractéristiques φ_n des intervalles $]\beta_{n+1}, \beta_n[$ où $(\beta_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite strictement décroissante de $[0, 1]$ telle que $\beta_1 = 1$ et $\lim_{n \to +\infty} \beta_n = 0$.

Si l'on désigne donc par W_φ le sous- **R**-espace vectoriel de E_α *engendré par une telle suite* φ, alors il existe $x' \in \mathscr{L}'_{\alpha,\sigma}$ tel que $<x', \varphi_n> = 1$, $n \geqslant 1$ et tel que pour tout $x \in W_\varphi$, $<x', x> \in \mathbf{R} \subset \mathfrak{K}_{\alpha\,\sigma}$, *ainsi* $|<x', x>| = 1$ lorsque $x \in W_\varphi$, $x \neq 0$.

REFERENCES

[1] J. AX and S. KOCHEN : Diophantine problems over local fields I, Amer. Jour. of Math. - 87 - 1965 - pp. 605-630.

[2] J.L. BELL and A.B. SLOMSON : Models and ultraproducts, North-Holland, Amsterdam-London - 1969.

[3] D. DACUNHA - CASTELLE et J.L. KRIVINE : Applications des ultraproduits à l'étude des espaces et des algèbres de Banach, Studia Math. - 41 - 1972 - pp. 315-334.

[4] B. DIARRA : Ultraproduits de corps munis d'une valeur absolue ultramétrique C.R. Acad. Sc. Paris - t. 284 - 1977 - pp. 1261-1263.

[5] L. GRUSON and M. Van der PUT : Banach spaces. Table ronde Anal. non-arch. (1972 - Paris), Bull. Soc. Math. France ; Mémoire 39-40 - 1974 - pp. 56-100.

[6] S. KOCHEN : Ultraproducts in the theory of models, Annals of Math. Vol. 74 - n° 2 - 1961 - pp. 221-261.

[7] M. KRASNER : Nombre des extensions d'un degré donné d'un corps p-adique, Colloque C.N.R.S. - Clermont-Ferrand - 1966 - pp. 143-169.

[8] W.A.J. LUXEMBOURG : On a class of valuation fields introduced by A. ROBINSON, Israel Journal of Math. Vol. 35 - 1976 - pp. 189-201.

[9] A. ROBINSON : Functions theory on some non archimedean fields - Amer. Math., Monthly - Vol. 80 - 1973 - pp. 87-109.

[10] J.P. SERRE : Corps locaux A.S.I. 1296 - Hermann - Paris - 1968.

[11] B. DIARRA : Ultraproduits ultramétriques de corps valués, Groupe d'Etude d'Analyse Ultramétrique (Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA). 6e année, 1978-79. Exposé 5 - 11 p. - Institut Henri Poincaré - Paris - 1980.

[12] U. KIEHNE : Bounded products in the theory of valued fields, J. reine angew. Math. - t. 305 - n° 4 - 1979 - pp. 9-36.

Université de Clermont II, U.E.R. Sciences, Mathématiques Pures, 63170 - Aubière, France.

Adresse personnelle : 11, Avenue de Russie, 03700 Bellerive sur Allier, France.