ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

G. BEN AROUS

Équations stochastiques à coefficients analytiques et séries de Taylor stochastiques

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 71, série *Mathématiques*, n° 20 (1982), p. 55-69

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1982__71_20_55_0>

EQUATIONS STOCHASTIQUES A COEFFICIENTS ANALYTIQUES ET SÉRIES DE TAYLOR STOCHASTIQUES

G. BEN AROUS

Elève à E.N.S. de SAINT-CLOUD

Récemment R. Azencott (*) a établi une formule de Taylor stochastique pour la solution d'une équation différentielle stochastique dont les coefficients sont des fonctions de classe C^k d'un paramètre et a donné une application à l'étude des diffusions en temps petit. On s'intéresse ici à l'étude des équations stochastiques sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à coefficients analytiques (en utilisant l'intégrale de Stratonovich). On étudie la dépendance de la solution en fonction de la condition initiale pour obtenir le résultat "local" naturel qui affirme que "en temps petit" la solution d'une équation stochastique à coefficients analytiques dépend analytiquement de la condition initiale. On obtient ensuite un résultat analogue de dépendance des paramètres puis on étudie la dépendance de la solution en fonction du temps et, en utilisant ici les idées introduites par R. Azencott, on montre, qu'en temps petit la solution peut se développer en série de Taylor stochastique c'est-à-dire en une série où, heuristiquement, les intégrales stochastiques itérées jouent le rôle des monômes $\frac{t^m}{m!}$ ($= \int\limits_{0<t_1<\ldots<t_m<t}\!\!\cdots\!\int dt_1 \ldots dt_m$) dans la série de Taylor usuelle, (à ceci près qu'ici les intégrations stochastiques successives ne permutent pas).

Pour les applications des séries de Taylor stochastiques au problème de la représentation explicite des solutions d'équations stochastiques invariantes sur un groupe de Lie, on renvoie à Ben Arous in *Journées de la Société Mathématique de France à Nancy* (mai 81) sur les marches aléatoires sur les groupes, publiées chez *Springer* ("Lecture Notes in Mathematics").

(*) Azencott, *Formule de Taylor stochastique et développement asymptotique d'intégrales de Feynmann*, in (à paraître) *Zeitschrift für Warschenlichtkeittheorie*.

EQUATIONS STOCHASTIQUES A COEFFICIENTS ANALYTIQUES

1. DEPENDANCE ANALYTIQUE DE LA CONDITION INITIALE

Soit un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et $\sigma_0, \dots, \sigma_r$ $r+1$ champs de vecteurs analytiques sur U : soit $X_t(x)$ la solution de l'équation de Stratonovitch

$$\begin{cases} X_0(x) = x \in U \\ dX_t(x) = \sum_{i=0}^{r} \sigma_i(X_t(x)) \circ dB_t^i \end{cases}$$

On va montrer ici que, en temps petit, $X_t(\cdot)$ est analytique.

Plus précisément : soit $x_0 \in U$ et V le domaine de convergence des séries de Taylor des σ_i en x_0, soit P un pavé ouvert de $\mathbb{R}^n$ de centre x_0 tel que : $\overline{P} \subset V$ on a alors :

<u>THEOREME</u>.- *Avec les hypothèses et les notations précédentes : il existe un temps d'arrêt T p.s. strictement positif tel que : si $t < T(\omega)$ alors $X_t(\cdot)$ est p.s. analytique sur P.*

Preuve : On va utiliser ici une méthode de variable complexe et de localisation.

Précisons d'abord quelques notations : soit ϕ l'application de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{C}^n$ suivante qui identifie $\mathbb{R}^{2n}$ et $\mathbb{C}^n$:

$$\phi(x_1 \dots x_{2n}) = (x_1 + i\,x_{n+1}, \dots, x_k + i\,x_{n+k}, \dots, x_n + i\,x_{2n})$$

Si W est un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$ et f une application de classe C^1 de W dans $\mathbb{R}^{2n}$ alors $\hat{f} = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ définit une application sur l'ouvert $\phi(W)$ de $\mathbb{C}^n$ qui est analytique sur $\phi(W)$ si et seulement si les conditions de Cauchy sont vérifiées, à savoir :

$$\forall k \in \{1 \dots n\} \quad \forall \ell \in \{1 \dots n\} \qquad \frac{\partial f_k}{\partial x_\ell} = \frac{\partial f_{n+k}}{\partial x_{n+\ell}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_{n+k}}{\partial x_\ell} = -\frac{\partial f_k}{\partial x_{n+\ell}}$$

C'est-à-dire si la matrice jacobienne de f est de la forme $\begin{array}{c} \\ n\{ \\ n\{ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \overbrace{\quad}^{n}\ \overbrace{\quad}^{n} \\ \left(\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline B & A \end{array}\right) \end{array}$
en tout point de W .

Notons $\mathcal{M}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ constitué des matrices de cette forme. Remarquons que c'est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Réciproquement une application analytique g sur un ouvert V de $\mathbb{C}^n$ définit une application f de classe C^∞ sur $\phi^{-1}(V)$ donnée par $f = \phi^{-1} \circ g \circ \phi$ dont la différentielle vérifie les conditions de Cauchy.

Démontrons maintenant le théorème :

Par l'hypothèse $\overline{P} \subset V$ on peut construire des pavés ouverts de $\mathbb{R}^n$: P', P'' tels que : $P \subset P' \subset P'' \subset V$ (les inclusions étant strictes).

Soient alors Q (respectivement Q' , Q'') le polydisque ouvert de $\mathbb{C}^n$ tel que $Q \cap \mathbb{R}^n = P$ (respectivement $Q' \cap \mathbb{R}^n = P'$, $Q'' \cap \mathbb{R}^n = P''$).

Les séries de Taylor des σ_i en x_0 définissent des applications analytiques $\tau_0, \dots, \tau_r$ sur Q'' telles que τ_i soit égale à σ_i sur P'' , ceci pour tout i . Sur l'ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$ $\phi^{-1}(Q'')$ ces applications $\tau_0 \dots \tau_r$ définissent donc des applications $\eta_i = \phi^{-1} \circ \tau_i \circ \phi$ de classe C^∞ qui vérifient les conditions de Cauchy. Soit alors un voisinage relativement compact de $\overline{\phi^{-1}(Q'')}$: pour tout $i \in \{0 \dots r\}$ il existe une application $\tilde{\eta}_i$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{2n}$ nulle hors de ce voisinage et égale à η_i sur $\phi^{-1}(Q'')$. Chaque $\tilde{\eta}_i$ est évidemment bornée, à dérivées bornées.

Considérons alors l'équation stochastique sur $\mathbb{R}^{2n}$ associée aux $\tilde{\eta}_i$:

$$\begin{cases} Y_0(y) = y \in \mathbb{R}^{2n} \\ dY_t(y) = \sum_{i=0}^{r} \tilde{\eta}_i(Y_t(y)) \circ dB_t^i \end{cases}$$

Du fait que les $\tilde{\eta}_i$ sont bornées, à dérivées bornées on sait que $Y_t(y)$ a un temps de vie infini et que $Y_t(\cdot)$ est p.s. de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{2n}$ (cf. Bismut ou Stroock). De plus si l'on note $Z_t(y)$ la différentielle de $Y_t(\cdot)$ en y on a l'équation stochastique aux variations dans $M_{2n}(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} Z_0(y) = \mathrm{Id} \\ dZ_t(y) = \sum_{i=0}^{r} d\tilde{\eta}_i(Y_t(y)) \cdot Z_t(y) \circ dB_t^i \end{cases}$$

Notons alors : $T = \inf(t\ ,\ \exists y \in \phi^{-1}(Q) \quad Y_t(y) \notin \overline{\phi^{-1}(Q')}\ ))$

On a :

LEMME : T est un temps d'arrêt p.s. strictement positif.

Admettons ce lemme pour l'instant.

On va montrer que : $Z_{t\wedge T}(y) \in M \qquad \forall y \in \phi^{-1}(Q)$

et donc que si $t < T$: $Y_t(\cdot)$ vérifie les conditions de Cauchy sur $\phi^{-1}(Q)$.

Posons $Z_t^T(y) = Z_{t\wedge T}(y)$, on sait que Z^T est l'unique solution sur $M_{2n}(\mathbb{R})$ de l'équation stochastique

$$\begin{cases} Z_0^T(y) = 0 \\ dZ_t^T(y) = \sum_{i=0}^{r} A_t^i \cdot Z_t^T(y) \circ dB_t^i \end{cases}$$

où l'on a posé $A_t^i = d\tilde{\eta}_i(Y_{t\wedge T}(y))$.

Considérons, par ailleurs, la solution $U_t(y)$ de l'équation stochastique sur M donnée par :

$$\begin{cases} U_0(y) = 0 \\ dU_t(y) = \sum_{i=0}^{r} B_t^i \cdot U_t(y) \circ dB_t^i \end{cases}$$

où l'on a posé : $B_t^i = d\eta_i(Y_{t\wedge T}(y))$. Ceci a un sens car, par la définition de T on a : $Y_{t\wedge T}(y) \in \overline{\phi^{-1}(Q')} \subset \phi^{-1}(Q'')$ et donc, comme les η_i

vérifient les conditions de Cauchy sur $\phi^{-1}(Q'')$ on a bien : $B_t^i = d\eta_i(Y_{t\wedge T}(y)) \in M$, et l'équation stochastique ci-dessus a bien un sens car M est une sous-algèbre de $M_{2n}(\mathbb{R})$. Cette équation a une solution unique $U_t(y)$ dans $M \subset M_{2n}(\mathbb{R})$.

Or par le fait que $Y_{t\wedge T}(y) \in \phi^{-1}(Q'')$ et que η_i et $\tilde{\eta}_i$ coïncident sur $\phi^{-1}(Q'')$, on peut écrire : $A_t^i = d\tilde{\eta}_i(Y_{t\wedge T}(y)) = d\tilde{\eta}_i(Y_{t\wedge T}(y) = B_t^i$ et par le théorème d'unicité de la solution de l'équation vérifiée par $Z^T(y)$ on obtient : $Z_t^T(y) = U_t(y)$.

D'où l'on conclut que : $Z_{t\wedge T}(y) \in M$. Ceci pour tout $y \in \phi^{-1}(Q)$. Ainsi, si $t < T$, $Y_t(\cdot)$ définit une application de classe C^∞ sur $\phi^{-1}(Q)$ dont la différentielle $Z_t(y)$ en $y \in \phi^{-1}(Q)$ vérifie les conditions de Cauchy. On sait donc que l'application $\hat{Y}_t(\cdot) = \phi \circ Y_t \circ \phi^{-1}$ définie sur l'ouvert Q de $\mathbb{C}^n$ est analytique si $t < T$.

Revenons alors au problème initial :

Soit $x \in P$, considérons le point $(x , 0)$ de $\mathbb{R}^{2n}$ et $Y_t(x , 0)$. On va montrer que $Y_t((x , 0)$ demeure dans $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{2n}$.

Soit $k \in \{1 \dots n\}$, la $(n+k)$-ième coordonnée $Y_t^{n+k}(x , 0)$ de $Y_t(x , 0)$ vérifie l'équation stochastique

$$\begin{cases} Y_0^{n+k}(x , 0) = 0 \\ dY_t^{n+k}(x , 0) = \sum_{i=0}^{r} \tilde{\eta}_i^{n+k}(Y_t(x , 0)) \circ dB_t^i \end{cases}$$

Or : $\tilde{\eta}_i^{n+k}(x , 0) = \eta_i^{n+k}(x , 0) = \operatorname{Im} \tau_i^k(x)$ et l'on a : $\tau_i(x) = \sigma_i(x) \in \mathbb{R}^n$ d'où $\tilde{\eta}_i^{n+k}(x , 0) = 0$. D'où l'unique solution de l'équation ci-dessus est nulle : $Y_t^{n+k}(x , 0) = 0$. Ce qui signifie que $Y_t(x , 0) \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$ ou encore que l'on a :

$$\hat{Y}_t(x) = (Y_t^1(x , 0) + i\, Y_t^{n+1}(x , 0) , \dots , Y_t^n(x , 0) + i\, Y_t^{2n}(x , 0))$$

$$\hat{Y}_t(x) = (Y_t^1(x , 0) , \dots , Y_t^n(x , 0)) \in \mathbb{R}^n$$

On a de plus : $Y_{t\wedge T}(x\,,0) \in \phi^{-1}(Q') \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = P' \times \{0\}$

et donc : $\tilde{\eta}_i(Y_{t\wedge T}(x\,,0) = \eta_i(Y_{t\wedge T}(x\,,0)) = \sigma_i(Y^1_{t\wedge T}(x\,,0)\,,\ldots,Y^n_{t\wedge T}(x\,,0))$

et ainsi $(Y^1_{t\wedge T}(x\,,0)\,,\ldots,Y^n_{t\wedge T}(x\,,0))$ est solution de l'équation stochastique vérifiée par $X_{t\wedge T}(x)$ sur $\mathbb{R}^n$, et l'on obtient ainsi par le théorème d'unicité que : $\hat{Y}_{t\wedge T}(\cdot)$ coïncide avec $X_{t\wedge T}(\cdot)$ sur P .

Ainsi en réunissant ces deux résultats on obtient que si $t < T$ alors $X_t(\cdot)$ est analytique sur P , comme restriction à P de l'application $\hat{Y}_t(\cdot)$ analytique sur Q . C.Q.F.D.

Il reste à démontrer le lemme.

Rappelons d'abord que par la bicontinuité de l'application : $(t,y)\to Y_t(y)$ on sait que si l'on se donne $t \geq 0$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$ alors il existe un voisinage V de y_0 tel que :

$\forall s \in [0\,,t]\ \ \forall y \in V \quad \|Y_s(y) - Y_s(y_0)\|_{\mathbb{R}^{2n}} < \varepsilon$.

Notons $T_y = \inf(t\,, Y_t(y) \notin \phi^{-1}(Q'))$ pour $y \in \phi^{-1}(Q')$, le temps de première sortie hors de $\phi^{-1}(Q')$. Alors l'application : $\begin{cases}\phi^{-1}(Q') \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \\ y \to T_y(\omega)\end{cases}$ à ω fixé , est semi-continue inférieurement.

En effet : soit y_0 fixé et $t < T_{y_0}(\omega)$.

Considérons la trajectoire de $Y_s(y_0)$ jusqu'au temps t , c'est un compact dont la distance δ au fermé $\phi^{-1}(Q')^c$ est strictement positive. Par la remarque précédente on sait qu'il existe un voisinage V de y_0 tel que : $\forall y \in V\ \ \forall s \in [0\,,t]\quad \|Y_s(y) - Y_s(y_0)\| < \frac{\delta}{2}$, et donc, pour tout y de V , la trajectoire de $Y_s(y)$ jusqu'au temps t ne rencontre pas $\phi^{-1}(Q')^c$, elle reste donc dans $\phi^{-1}(Q')$ et ainsi : $\forall y \in V\quad T_y(\omega) > t$.

Ceci montre que $y \to T_y$ est s.c.i. . On sait alors que la borne inférieure de T_y sur le compact $\overline{\phi^{-1}(Q)}$ est atteinte en un point $y_0 \in \overline{\phi^{-1}(Q)}$, elle est donc strictement positive (car la distance de y_0 à $\phi^{-1}(Q')^c$ est strictement positive).

Ainsi on a : $\inf_{y \in \phi^{-1}(Q)} T_y \geq \inf_{y \in \overline{\phi^{-1}(Q)}} T_y > 0$.

Notons alors $T^y = \inf(t\,,\, Y_t(y) \notin \overline{\phi^{-1}(Q')})$ pour $y \in \phi^{-1}(Q')$ le temps de première sortie hors de $\overline{\phi^{-1}(Q')}$ on a bien sûr : $\underline{T_y \leq T^y}$.

La définition du temps $T = \inf(t\,,\, y \in \phi^{-1}(Q)\ \ Y_t(y) \notin \overline{\phi^{-1}(Q')})$ montre que :

$$T = \inf_{y \in \phi^{-1}(Q)} T^y \geq \inf_{y \in \phi^{-1}(Q)} T_y \geq \inf_{y \in \overline{\phi^{-1}(Q)}} T_y > 0$$

Ainsi on a montré que T est strictement positif.

Montrons maintenant que T est un temps d'arrêt : fixons-nous un dénombrable dense D de $\mathbb{R}^{2n}$; soit $y_0 \in \phi^{-1}(Q)$ tel que $Y_t(y_0) \notin \overline{\phi^{-1}(Q')}$. Comme $\overline{\phi^{-1}(Q')}^{\,c}$ est ouvert il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule de centre $Y_t(y_0)$ et de rayon ε est incluse dans $\overline{\phi^{-1}(Q')}^{\,c}$. Par la remarque initiale on sait qu'il existe un voisinage V de y_0 tel que :

$$\forall y \in V \quad Y_t(y) \in B \subset \overline{\phi^{-1}(Q')}^{\,c}$$

et donc par densité de D : $\exists y \in V \cap D \quad Y_t(y) \notin \overline{\phi^{-1}(Q')}$

et donc on a :

$$T = \inf(t\,,\, \exists y \in \phi^{-1}(Q) \quad Y_t(y) \notin \overline{\phi^{-1}(Q')})$$

$$T = \inf(t\,,\, \exists y \in \phi^{-1}(Q) \cap D \quad Y_t(y) \notin \overline{\phi^{-1}(Q')})$$

et donc $T = \inf_{y \in \phi^{-1}(Q) \cap D} T^y$, ainsi T est la borne inférieure d'un ensemble <u>dénombrable</u> de temps d'arrêt, T est donc un temps d'arrêt. C.Q.F.D.

2. <u>DEPENDANCE DES PARAMETRES</u>

On peut déduire de façon très simple un résultat de dépendance des paramètres à partir du résultat précédent de dépendance de la condition initiale : soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit $E \subset \mathbb{R}^m$ l'ouvert des "paramètres" et soient $\sigma_0, \ldots \sigma_r$ $r+1$ applications analytiques de

$E \times U$ dans $\mathbb{R}^n$. $\sigma_i : E \times U \to \mathbb{R}^n$

$$(\varepsilon , x) \to \sigma_i(\varepsilon , x)$$

Considérons alors l'équation stochastique dépendant du paramètre ε :

$$\begin{cases} X_0(\varepsilon , x) = x \in U \\ dX_t(\varepsilon , x) = \sum_{i=0}^{r} \sigma_i(\varepsilon , X_t(\varepsilon , x)) \circ dB_t^i \end{cases}$$

Soit alors $(\varepsilon_0 , x_0) \in E \times U$ et $P = P_\varepsilon \times P_x$ un pavé ouvert de centre (ε_0 , x_0) (où P_ε (resp^t P_x) est un pavé ouvert de centre ε_0 (resp^t x_0)) tel que $\overline{P}$ soit inclus dans le domaine de convergence des séries de Taylor en (ε_0 , x_0) des σ_i . On a de même :

<u>*THEOREME*</u>*.- Avec les hypothèses et notations prédédentes, il existe un temps d'arrêt T p.s. strictement positif tel que si $t < T$ alors $X_t(\cdot , \cdot)$ est analytique sur P .*

Preuve : On se ramène au théorème précédent.

Posons : $Y_t(\varepsilon , x) = (\varepsilon , X_t(\varepsilon , x)) \in E \times U$

et $\tilde{\sigma}_i(\varepsilon , x) = (0 , \sigma_i(\varepsilon , x)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Alors $Y_t(\varepsilon , x)$ est solution de l'équation stochastique sur l'ouvert $E \times U$ de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ donnée par : $\begin{cases} Y_0(\varepsilon , x) = (\varepsilon , x) \\ dY_t(\varepsilon , x) = \sum_{i=0}^{r} \tilde{\sigma}_i(Y_t(\varepsilon , x)) \circ dB_t^i \end{cases}$

Il suffit maintenant d'appliquer le théorème précédent à cette équation pour conclure.

3. <u>SERIE DE TAYLOR STOCHASTIQUE</u>

Considérons de nouveau l'équation stochastique :

$$\begin{cases} X_0(x) = x \\ dX_t(x) = \sum_{i=0}^{r} \sigma_i(X_t(x)) \circ dB_t^i \end{cases}$$

où les σ_i désignent des champs de vecteurs analytiques sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Ici on va fixer la condition initiale $x_0 \in U$ et étudier la dépendance de $X_t(x_0)$ en fonction de t en temps petit. Si l'on avait affaire à une équation différentielle ordinaire on pourrait affirmer qu'en temps petit $X_t(x_0)$ est analytique en t et donc se développe en une série de Taylor. Ici un tel résultat est évidemment absurde : pourtant on va obtenir un développement en "série de Taylor stochastique" de la solution, à savoir un développement en fonction des intégrales stochastiques itérées introduites plus haut. Heuristiquement les intégrales $\int\limits_{0<t_1<\ldots<t_m<t}\!\!\cdots\!\int dB_{t_1}^{j_1} \circ \ldots \circ dB_{t_m}^{j_m}$ remplacent ici les monômes

$$t^m = m! \int\limits_{0<t_1<\ldots<t_m<t}\!\!\cdots\!\int dt_1 \circ \ldots \circ dt_m .$$

Pour montrer cela, introduisons une suite d'équations stochastiques qui s'intègrent par quadratures successives, en suivant dans ce cas une idée développée par R. Azencott dans un cadre beaucoup plus général :

Sans restreindre la généralité nous pouvons supposer ici que $x_0 = 0$.
Pour simplifier nous noterons $X_t(0) : X_t$.

Soit V le domaine de convergence des séries de Taylor des σ_i en 0.
Notons : $\sigma_i(x) = \sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}^n} a_{i,\nu} x^\nu$ le développement de Taylor en 0 de σ_i avec la convention de notation $x^\nu = x_1^{\nu_1} \ldots x_n^{\nu_n}$ si $x = (x_1 \ldots x_n) \in V$ et $\nu = (\nu_1 \ldots \nu_n) \in \mathbb{N}^n$.

Si $\gamma_1 \ldots \gamma_m$ désignent m éléments de $\mathbb{R}^n$, soit le polynôme "vectoriel" : $\gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \ldots + \gamma_m x^m$ pour $x \in \mathbb{R}$, et soit alors $C_i^m(\gamma_1 \ldots \gamma_m)$ le coefficient de x^m dans la série formelle $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}^n} a_{i,\nu}(\gamma_1 x + \ldots + \gamma_m x^m)$ obtenue par composition de la série formelle donnée par la série de Taylor de σ_i

et de ce polynome sans terme constant. Nous pouvons maintenant introduire la suite d'équations stochastiques donnée par :

$$(S_m)\quad \begin{cases} d\gamma_1(t) = \sum_{i=0}^{r} a_{i,0} \circ dB_t^i \\ d\gamma_2(t) = \sum_{i=0}^{r} C_i^1(\gamma_1(t)) \circ dB_t^i \\ \vdots \\ d\gamma_m(t) = \sum_{i=0}^{r} C_i^{m-1}(\gamma_1(t) \ldots \gamma_{m-1}(t)) \circ dB_t^i \end{cases} \qquad \text{avec} \quad \gamma_i(0) = 0 \quad \forall i$$

Cette suite de systèmes stochastiques emboîtés S_m va permettre de décrire X_t en temps petit, on a en effet :

__THEOREME__

1.- Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ *le système stochastique* S_m *définit une diffusion* $(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_m(t))$ *sur* $(\mathbb{R}^n)^m$ *à temps de vie infini.*

Chaque $\gamma_k(t)$ *se calcule à partir d'intégrales itérées de Stratonovich d'ordre* k *: si* $\gamma_k^j(t)$ *désigne la j-ième coordonnée de* $\gamma_k(t)$ *on a :*

$$\gamma_k^j(t) = \sum_{\substack{J \in \{0 \ldots r\}^k \\ J = j_1 \ldots j_k}} P_J^j(a_{i,\nu}, |\nu| \le k) \int_{0<t_1<\ldots<t_k<t} \!\!\cdots\!\int dB_{t_1}^{j_1} \circ \ldots \circ dB_{t_k}^{j_k}$$

où les $P_J^j(a_{i,\nu}, |\nu| \le k)$ *sont des polynômes universels (à coefficients rationnels) pris sur les* $(a_{i,\nu})_{|\nu| \le k}$.

2.- Il existe un temps d'arrêt T *p.s. strictement positif tel que : sur* $[\![0, T[\![$ *on ait :*

$$X_t = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{J \in \{0 \ldots r\}^k} P_J(a_\nu, |\nu| \le k) \int_{0<t_1<\ldots<t_k<t} \!\!\cdots\!\int dB_{t_1}^{j_1} \circ \ldots \circ dB_{t_k}^{j_k}$$

où l'on a noté $P_J(a_\nu, |\nu| \le k)$ *le vecteur de coordonnées* $P_J^j(a_{i,\nu}, |\nu| \le k)$.

3.- Si sur un intervalle $[\![0\,,S[\![$ *on a un développement*

$$X_t = \sum_{k=1} \sum_{J\in\{0\ldots r\}^k} C_J \int_{0<t_1<\ldots<t_k<t}\!\!\!\ldots\int dB_{t_1}^{j_1}\circ\ldots\circ dB_{t_k}^{j_k} \quad \text{avec } C_J \in \mathbb{R}^n$$

alors $\forall J \quad C_J = P_J(a_{i,\nu}, |\nu| \le k)$.

Ce théorème donne donc l'existence et l'unicité (dans le sens précisé au 3.) d'un développement de X_t en série de Taylor stochastique en temps petit.

<u>Preuve du théorème</u>

1. Il suffit de constater que le système S_m se résoud par quadratures stochastiques successives pour montrerqu'il définit une diffusion $(\gamma_1(t),\ldots,\gamma_m(t))$ dans $(\mathbb{R}^n)^m$ à temps de vie infini.

L'équation qui définit $\gamma_m(t)$ s'écrit :

$$d\gamma_m(t) = \sum_{i=0}^{r} C_{\sigma_i}^{m-1}(\gamma_1 \ldots \gamma_{m-1}(t)) \circ dB_t^i$$

La j-ième coordonnée de $C_{\sigma_i}^{m-1}(\gamma_1(t) \ldots \gamma_{m-1}(t))$ est un polynôme en fonction des coordonnées de $\gamma_1(t) \ldots \gamma_{m-1}(t)$ (dont les coefficients s'obtiennent de façon universelle à partir des coefficients (a_ν^i) de la série de Taylor de σ_i). Supposons que les coordonnées de $\gamma_1(t) \ldots \gamma_{m-1}(t)$ s'expriment comme des combinaisons d'intégrales itérées alors la j-ième coordonnée de $\gamma_m(t)$ s'obtient comme combinaison d'intégrales du type

$$\int_{s=0}^{t}\left(\int_{0<t_1<\ldots<t_{k_1}<S}\!\!\!\ldots\int dB_{t_1}^{j_1}\circ\ldots\circ dB_{t_{k_1}}^{j_{k_1}}\right)^{n_1}\left(\int_{0<t_1<\ldots<t_{k_2}<S}\!\!\!\ldots\int dB_{t_1}^{j_1}\circ\ldots\circ dB_{t_{k_2}}^{j_{k_2}}\right)^{n_2}$$

$$\ldots\left(\int_{0<t_1<\ldots<t_{k_\ell}<S}\!\!\!\ldots\int dB_{t_1}^{j_1}\circ\ldots\circ dB_{t_{k_\ell}}^{j_{k_\ell}}\right)^{n_\ell} dB_S^i$$

qui par application itérée de la formule d'Ito se ramène à des combinaisons d'intégrales itérées, d'où la seconde assertion du 1. est démontrée par récurrence en constatant que $\gamma_1(t) = \sum_{i=0}^{t} a_0^i B_t^i$ est bien combinaison d'intégrales d'ordre 1 .

2.- Soit $x \in U$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}$, considérons l'équation stochastique sur U :

$$\begin{cases} X_0(\varepsilon , x) = x \\ dX_t(\varepsilon , x) = \sum_{i=0}^{r} \varepsilon\sigma_i(X_t(\varepsilon , x)) \circ dB_t^i \end{cases}$$

Pour $x = 0$ et $\varepsilon = 1$ on a : $X_t(\varepsilon , x) = X_t$.

Le théorème de dépendance analytique des paramètres démontré au b. montre que : si P désigne un pavé ouvert de $\mathbb{R}^n$ centré en 0 et tel que $\overline{P}$ soit inclus dans le domaine de convergence V des séries de Taylor des σ_i en 0 , si $]a , b[$ désigne un intevalle quelconque de $\mathbb{R}$ il existe un temps d'arrêt T tel que si $t < T$: $X_t(\cdot , \cdot)$ est analytique sur $]a , b[\times P$. En particulier l'application partielle : $X_t(\cdot , 0)$ est analytique sur $]a , b[$ si $t < T$. Fixons-nous un intervalle $]a , b[=]-r , +r[$ centré en 0 et de rayon supérieur à 1 : Notons $X_t(\varepsilon , 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \gamma_m(t)$, si $t < T$, le développement de Taylor en 0 de $X_t(\cdot , 0)$ (on a $\gamma_0(t) = 0$ car $X_t(0 , 0) = 0$). $X_{t\wedge T}(\cdot , 0)$ est, comme le montre la démonstration du théorème a., la restriction à $]-r , +r[$ d'une application analytique sur le disque de $\mathbb{C}$ dont l'intersection avec $\mathbb{R}$ est égale à $]-r , +r[$ ainsi on peut affirmer que $X_t(\cdot , 0)$ est somme de son développement de Taylor en 0 sur $]-r , +r[$: Ainsi si $t < T$ on a $X_t(\varepsilon , 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \gamma_m(t)$ pour $\varepsilon \in]-r , +r[$.

Identifions les coefficients $\gamma_m(t)$. Considérons la solution : $Z_t(\varepsilon)$ de l'équation stochastique

$$\begin{cases} Z_0(\varepsilon) = 0 \\ dZ_t(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{r} (\sigma_i(X_t(\varepsilon , 0)) + \varepsilon\, d\sigma_i(X_t(\varepsilon , 0)) \cdot Z_t(\varepsilon)) \circ dB_t^i \end{cases}$$

La démonstration du théorème a. montre que :

Si $t < T$ on a : $\frac{d}{d\varepsilon} X_t(\varepsilon\,,0) = Z_t(\varepsilon)$

En particulier on a :

Si $t < T$ $\gamma_1(t) = \frac{d}{d\varepsilon} X_t(\varepsilon\,,0)_{|\varepsilon=0} = Z_t(0)$

Or $Z_t(0)$ est bien solution de l'équation (S_1) :

$$d(Z_t(0)) = \sum_{i=0}^{r} \sigma_i(0) \circ dB_t^i$$

Ainsi on a bien identifié le 1[er] terme du développement de Taylor de $X_t(\varepsilon\,,0)$ avec la solution de l'équation (S_1). De même par récurrence en utilisant le fait que $\gamma_m(t) = m!\, \frac{d^m}{d\varepsilon^m} X_t(\varepsilon\,,0)_{|\varepsilon=0}$, et en écrivant l'équation stochastique vérifiée par $\frac{d^m}{d\varepsilon^m} X_t(\varepsilon\,,0)$ on montre que $(\gamma_1(t) \ldots \gamma_m(t))$ est bien égale à la solution du système (S_m) pour tout m.

Or on a pris $r > 1$ ainsi on a pour $\varepsilon = 1$:

Si $t < T$: $X_t = X_t(1\,,0) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m(t)$ C.Q.F.D.

Remarquons que l'on peut, bien sûr, faire le lien entre ce développement en série de Taylor stochastique et une formule de Taylor stochastique comparable à celle d'Azencott, à l'ordre M, pour tout $M > 0$.

Pour $J = (j_1 \dots j_k) \in \{0 \dots r\}^k$ on appelle $\alpha(J) = \mathrm{card}\{i \in \{i \dots k\} / j_i = 0\}$ le nombre de zéros dans J, ou encore le nombre d'intégrations par rapport à t dans l'intégrale itérée $\int \dots \int_{0 < t_1 < \dots < t_m < t} dB_{t_1}^{j_1} \circ \dots \circ dB_{t_m}^{j_m}$ (rappelons que l'on a posé $t = B_t^0$).

Si l'on pose alors :

$$g_\ell(t) = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{\substack{J \in \{0 \dots r\}^k \\ \alpha(J) = \ell - k}} P_J(a_\nu, |\nu| \le k) \int \dots \int_{0 < t_1 < \dots < t_k < t} dB_{t_1}^{j_1} \circ \dots \circ dB_{t_k}^{j_k}.$$

Alors si t est fixé, *le processus* $s \to (g_1(st), \dots, g_M(st))$ *a même loi que* $s \to (\sqrt{t}\, g_1(s), \dots, \sqrt{t}^M g_M(s))$ et l'on obtient :

$$X_t = \sum_{\ell=1}^{M} g_\ell(t) + S(t) + \sum_{k=M+1}^{\infty} \gamma_k(t) \quad \text{sur } [0, T[$$

où $$S(t) = \sum_{k=1}^{M} \sum_{\substack{J \in \{0 \dots r\}^k \\ \alpha(J) > M-k}} P_J(a_\nu, |\nu| \le k) \int \dots \int_{0 < t_1 < \dots < t_k < t} dB_{t_1}^{j_1} \circ \dots \circ dB_{t_k}^{j_k}$$

Chacune des intégrales itérées intervenant dans $S(t)$ ou dans $\sum_{M+1}^{\infty} \gamma_k(t)$ a la même loi que $\sqrt{t}^{\,\beta} \int \dots \int_{0 < t_1 < \dots < t_k < 1} dB_{t_1}^{j_1} \dots dB_{t_k}^{j_k}$ où $\beta = k + \alpha(J) > M$

et donc $$R_{M+1}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}^{M+1}} \Big(S(t) + \sum_{M+1}^{\infty} \gamma_k(t)\Big)$$

est *borné en probabilité,* i.e. $\lim_{t \to 0} P(|R_{m+1}(t)| > r,\ t < T)$ pour r assez grand; on obtient ainsi une formule de Taylor stochastique pour X_t à l'ordre M :

$$X_t = \sum_{\ell=1}^{M} g_\ell(t) + \sqrt{t}^{M+1} R_{M+1}(t)$$

Une telle écriture avec les conditions a. et b. est unique.

3. Unicité

Soit S un temps d'arrêt tel que sur un intervalle $[\![0\,,S[\![$ on ait

$$X(t) = \sum_{k=1} \sum_{J\in\{0\ldots r\}^k} C_J \int\cdots\int_{0<t_1<\ldots<t_k<t} dB_{t_1}^{j_1}\circ\ldots\circ dB_{t_k}^{j_k}$$

Par la construction précédente on peut en déduire pour tout $M>0$, une formule de Taylor stochastique à l'ordre M sur $[\![0\,,S[\![$ du type :

$$X(t) = \sum_{\ell=1}^{M} g'_\ell(t) + \sqrt{t}^{\,M+1} R'_{M+1}(t)$$

où $$g'_\ell(t) = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{\substack{J=(j_1\ldots j_k)\\ \alpha(J)=\ell-k}} C_J \int\cdots\int_{0<t_1<\ldots<t_k<t} dB_{t_1}^{j_1}\circ\ldots\circ dB_{t_k}^{j_k}$$

On en déduit que sur $[\![0\,,S\wedge T[\![$ $g'_\ell(t)$ et $g_\ell(t)$ coïncident, et donc que les coefficients C_J et P_J $(a_\nu\,,|\nu|\le k)$ coïncident pour J de longueur k et tel que $\alpha(J)=\ell-k$. Si maintenant J est quelconque de longueur k, il suffit de considérer un développement de Taylor à l'ordre $M>\alpha(J)+k$ pour pouvoir obtenir $C_J = P_J(a_\nu\,,|\nu|\le k)$.