ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

B. MAISONNEUVE

Sur les chaos de Wiener

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 71, série *Mathématiques*, n° 20 (1982), p. 108-111

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1982__71_20_108_0>

SUR LES CHAOS DE WIENER

B. MAISONNEUVE

Université des Sciences Sociales de GRENOBLE

Cet exposé est purement pédagogique. Il s'agit de présenter de manière simple les chaos de Wiener d'un espace gaussien. Tout repose sur le choix d'une définition commode et qui, à ma connaissance, n'a pas été utilisée dans la littérature.

Soit G un espace gaussien réel défini sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},P)$; G est donc un sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ constitué de v.a. réelles gaussiennes, que nous supposerons de plus centrées.

DEFINITION. - Pour tout $n \in \mathbb{N}$ le $n^{\text{ème}}$ chaos de Wiener K_n associé à G est le sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ engendré par le système
$\{h_n(X) : X \in G \ , \ \|X\|=1\}$.

Les polynômes d'Hermite h_n sont définis par

(1) $$\exp(\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} h_n(x) \qquad (\lambda, x \in \mathbb{R}) ,$$

et $\|X\|$ désigne la norme de X dans L^2 .

THEOREME 1. (Wiener). - Soit $\mathcal{G}$ la tribu engendrée par G . L'espace $L^2(\mathcal{G}) = L^2(\Omega,\mathcal{G},P)$ admet la décomposition orthogonale

$$L^2(\mathcal{G}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} K_n .$$

Démonstration. -

1) $\bigcup_n K_n$ est total dans $L^2(\mathcal{G})$. En effet,

$$\exp X = (\exp \frac{1}{2}\|X\|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|X\|^n}{n!} h_n(\frac{X}{\|X\|})$$ dans L^2 pour tout $X \in G$ et l'ensemble

$\exp G$ est total dans $L^2(\mathcal{G})$ (si $Y \in L^2(\mathcal{G})$ est orthogonal à $\exp G$, on a $E(Y \exp \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i) = 0$ pour toutes suites finies $(X_1,\ldots,X_n)$, $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ de G et $\mathbb{R}$ respectivement ; donc $Y.P = 0$ sur $\bigcup\{\mathcal{T}(F) : F$ partie finie de $G\}$ et par suite $Y.P = 0$ sur $\mathcal{T}(G)$, i.e. $Y = 0$).

2) Les K_n sont deux à deux orthogonaux à cause du lemme suivant :

LEMME 1. - Si $X, Y \in G$ et si $\|X\| = \|Y\| = 1$ on a

(2) $$E(h_m(X)h_n(Y)) = n!(E(XY))^n \delta_{m,n} \quad , \quad m,n \in \mathbb{N} .$$

Démonstration. - Pour tous $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, la variable $Z = \lambda X + \mu Y$ est gaussienne centrée, donc $E(\exp Z - \frac{1}{2}E(Z^2)) = 1$, ce qui s'écrit aussi $(E(X^2) = E(Y^2) = 1)$

$$E[\exp(\lambda X - \frac{\lambda^2}{2})\exp(\mu Y - \frac{\mu^2}{2})] = \exp(\lambda\mu E(XY)) ,$$

$$\sum_{m,n} \frac{\lambda^m}{m!} \frac{\mu^n}{n!} E(h_m(X)h_n(Y)) = \sum_n \frac{\lambda^n \mu^n}{n!}(E(XY))^n ,$$

d'où le résultat.

Remarques.

1. La condition $\|X\| = 1$ dans la définition des K_n est indispensable ; en effet, $h_2(X) = X^2 - 1$ ne peut être orthogonal à $K_0 = \{\text{constantes}\}$ que si $E(X^2 - 1) = 0$.

2. Il résulte du théorème 1 que si (K'_n) est une suite de parties deux à deux disjointes de $L^2(\mathcal{G})$ et si $K_n \subset K'_n$ pour tout n, alors $K_n = K'_n$ pour tout n. Examinons par exemple le cas où G est engendré par un mouvement brownien standard $\{B_t , t \geq 0\}$ et posons

$$K'_0 = K_0 \ , \quad K'_n = \overline{E.V.}\left\{B^n_{f_1,\ldots,f_n} : f_1,\ldots,f_n \in L^2(\mathbb{R}_+, dt)\right\} , \quad n \geq 1 ,$$

où $$B^n_{f_1,\ldots,f_n} = \int_0^\infty f_1(s_1)dB_{s_1} \int_0^{s_1} f_2(s_2)dB_{s_2} \cdots \int_0^{s_{n-1}} f_n(s_n)dB_{s_n} .$$

Les K'_n sont deux à deux orthogonaux ; de plus, $K_n \subset K'_n$ $\forall n$, car un élément X de G s'écrit $\int_0^\infty f(s)dB_s$ $(f \in L^2(\mathbb{R}_+, dt))$ et, si $\|X\| = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} = 1$, on a $h_n(X) = n!B^n_{f,\ldots,f}$ (appliquer à la martingale $M_t = \int_0^t f(s)dB_s$ la formule suivante, qui résulte de la formule d'Itô : $M_t^{(n)} = n\int_0^t M_s^{(n-1)} dM_s$, où $M^{(n)} = \langle M\rangle^{n/2} h_n\left(\frac{M}{\langle M\rangle^{1/2}}\right)$). D'après la remarque faite ci-dessus, $K_n = K'_n$ pour tout n .

THEOREME 2. - Soit $\{G^i, i\in I\}$ une famille de sous-espaces vectoriels de G tels que $G = \underset{i\in I}{\oplus} G^i$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$

(3) $$K_n = \overline{\text{E.V.}}\left\{\prod_{i\in I} h_{\alpha_i}(X_i) : X_i \in G^i \ , \ \|X_i\|=1 \ , \ \alpha \in \mathbb{N}^I \ , \ \sum_{i\in I}\alpha_i = n\right\}.$$

<u>Remarque 3</u>. Ce théorème montre en particulier que si $\{X_i, i\in I\}$ est une base orthonormée de G on a

(4) $$K_n = \overline{\text{E.V.}}\left\{\prod_{i\in I} h_{\alpha_i}(X_i) : \alpha \in \mathbb{N}^I \ , \ \sum_{i\in I}\alpha_i = n\right\} ,$$

de sorte que K_n est bien le $n^{\text{ème}}$ chaos de Wiener tel qu'il était originellement défini. Comme notre définition de K_n ne fait pas intervenir de base, on retrouve le fait bien connu que le second membre de (4) ne dépend pas de la base choisie.

<u>Démonstration</u>. - Notons K'_n le second membre de (3). D'après la remarque 2) tout revient à montrer que :

a) les K'_n sont deux à deux orthogonaux,

b) $K_n \subset K'_n$ pour tout n .

Pour tout $i \in I$ soient $X_i, Y_i \in G^i$ tels que $\|X_i\| = \|Y_i\| = 1$; si $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^I$ sont tels que $\sum_i \alpha_i < \infty$, $\sum_i \beta_i < \infty$ on a

$$E\left(\prod_{i\in I} h_{\alpha_i}(X_i) \prod_{i\in I} h_{\beta_i}(Y_i)\right) = \prod_{i\in I} E\left(h_{\alpha_i}(X_i) h_{\beta_i}(Y_i)\right) \quad \text{(indépendance des } G^i\text{)}$$

$$= 0 \quad \text{si } \alpha \neq \beta \qquad \text{(lemme 1),}$$

d'où le point (a). D'autre part, si les X_i sont comme précédemment et si λ est une application à support fini de I dans $\mathbb{R}$ telle que $\sum_{i\in I} \lambda_i^2 = 1$, on a d'après la formule (1)

$$\frac{1}{n!} h_n\left(\sum_{i\in I} \lambda_i X_i\right) = \sum\left\{\prod_{i\in I} \frac{\lambda_i^{\alpha_i}}{\alpha_i!} h_{\alpha_i}(X_i) : \alpha \in \mathbb{N}^I \ , \ \sum_i \alpha_i = n\right\}$$

d'où le point (b), puisque l'ensemble des $h_n(\sum_i \lambda_i X_i)$ correspondant aux conditions précédentes est générateur de K_n .

Pour finir, disons quelques mots au sujet des espaces de Fock, dont D.W. Stroock a donné de belles applications dans son cours de l'Ecole d'Eté de Saint-Flour 1981. Soit I un ensemble quelconque non vide ; nous noterons F_I l'espace L^2 associé à l'espace probabilisé $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, N(0,1))^I$. Le processus des coordonnées $\{x_i , i \in I\}$ défini sur cet espace $\mathbb{R}^I$ est gaussien et le théorème 1 montre que $F_I = \bigoplus_{n=0}^{\infty} K_{I,n}$, où $K_{I,n} = \overline{E.V.}\{h_n(\sum_i \lambda_i x_i) : \sum_i \lambda_i^2 = 1\}$.

Revenons à notre expace gaussien G et supposons qu'il admette la famille $\{X_i , i \in I\}$ comme base orthonormée.

THEOREME 3. - L'application Λ de F_I dans $L^2(\mathcal{G})$ définie par $\Lambda f = f(\{X_i , i \in I\})$ réalise une isométrie de $K_{I,n}$ sur K_n pour tout n , donc aussi une isométrie de F_I sur $L^2(\mathcal{G})$.

Démonstration. - On a $K_n = \overline{E.V.}\{h_n(\sum_i \lambda_i X_i) : \sum_i \lambda_i^2 = 1\}$ et $\Lambda(f(\{x_i , i \in I\})) = f(\{X_i , i \in I\})$ pour tout $f \in F_I$. L'isométrie au niveau des chaos $K_{I,n}$, K_n résulte de ce que les processus $\{x_i , i \in I\}$ et $\{X_i , i \in I\}$ ont même loi.
