

ANNALES SCIENTIFIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2  
*Série Mathématiques*

B. HEINKEL

**Le théorème central-limite et la loi du logarithme itéré  
dans les espaces de Banach**

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 69, série *Mathématiques*, n° 19 (1981), p. 67-69

[http://www.numdam.org/item?id=ASCFM\\_1981\\_\\_69\\_19\\_67\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1981__69_19_67_0)

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

LE THEOREME CENTRAL-LIMITE ET LA LOI DU LOGARITHME ITERE DANS LES  
ESPACES DE BANACH

B. HEINKEL

Université de Strasbourg

Dans cet exposé nous avons tout d'abord rappelé brièvement les principaux résultats relatifs à la loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach en mettant l'accent sur les différences avec la situation usuelle. Puis nous avons présenté notre solution du problème classique : "Quand une v.a. à valeurs dans un espace de Banach, vérifiant le théorème central-limite, vérifie-t-elle également la loi du logarithme itéré ?" La démonstration détaillée de notre résultat étant maintenant parue par ailleurs [1], nous nous contentons de rappeler sa formulation en quelques lignes.

Soit  $X$  une v.a. à valeurs dans un espace de Banach réel séparable  $(B, \|\cdot\|)$ , muni de sa tribu borélienne  $\mathcal{B}$ , de dual topologique  $B'$ . On suppose que  $X$  vérifie les conditions d'intégrabilité suivantes :

- i)  $\forall f \in B', Ef(X) = 0$ .
- ii)  $\forall f \in B', Ef^2(X) < +\infty$ .

Désignons par  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de copies indépendantes de  $X$  et notons pour tout entier  $n$  :

$$S_n(X) = X_1 + \dots + X_n .$$

De plus  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  désignera la suite de nombres positifs :

$$a_n = (2n L_2 n)^{1/2} ,$$

où :

$$L_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$L_2 x = \text{Log}(\text{Log } x) , \forall x \geq e^e ,$$

$$= 1 , \forall x \in [0, e^e[ .$$

On rappelle de plus que :

- la v.a.  $X$  vérifie le théorème central-limite si la suite de v.a.  $(S_n(X)/\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge en loi ;

- la v.a.  $X$  vérifie la loi du logarithme itéré (compacte) s'il existe un ensemble  $K \subset B$ , compact, convexe et symétrique, tel que :

$$a) \mathbb{P}\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} d\left(\frac{S_n(X)}{a_n}, K\right) = 0\right\} = 1,$$

$$b) \mathbb{P}\left\{C\left(\frac{S_n(X)}{a_n}\right) = K\right\} = 1,$$

où  $C\left(\frac{S_n(X)}{a_n}\right)$  désigne l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite  $\left(\frac{S_n(X)}{a_n}\right)$ .

Il est bien connu qu'une v.a.  $X$  vérifiant la loi du logarithme itéré (compacte), satisfait à (i) et (ii) et est telle que :

$$E\left(\frac{\|X\|^2}{L_2\|X\|}\right) < +\infty.$$

Nous pouvons à présent formuler le problème de la liaison entre théorème central-limite et loi du logarithme itéré (compacte) : "Quand une v.a.  $X$  vérifiant le théorème central-limite, (i) et (ii) et telle que de plus  $E\left(\frac{\|X\|^2}{L_2\|X\|}\right) < +\infty$ , vérifie-t-elle également la loi du logarithme itéré (compacte) ?"

La solution complète de ce problème a été obtenue il y a quelques mois indépendamment par moi-même d'une part [1] et par J. Kuelbs et J. Zinn [2] d'autre part.

Le résultat s'énonce :

**THEOREME** :

Soit  $X$  une v.a. à valeurs dans un espace de Banach réel séparable  $(B, \|\cdot\|)$ , telle que :

$$1) \forall f \in B', Ef(X) = 0, Ef^2(X) < +\infty.$$

$$2) E\left(\frac{\|X\|^2}{L_2\|X\|}\right) < +\infty.$$

