ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

G. GRÉGOIRE

Processus ponctuels binomiaux négatifs

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 69, série *Mathématiques*, n° 19 (1981), p. 197-200

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1981__69_19_197_0>

PROCESSUS PONCTUELS BINOMIAUX NEGATIFS

G. GREGOIRE

Université de Grenoble

Ce texte présente les idées et résultats essentiels d'un travail concernant les processus ponctuels binomiaux négatifs. Pour des résultats plus précis, des démonstrations et d'autres développements concernant le sujet, le lecteur pourra consulter [2] et [3].

L'objectif est de définir et étudier une classe de lois de probabilité généralisant aux processus ponctuels les lois géométriques et binomiales négatives habituelles. Les processus ponctuels envisagés ici sont des éléments aléatoires à valeurs dans l'espace $\mathbb{M}p$ des mesures de Radon ponctuelles sur un espace X localement compact à base dénombrable ; pour la théorie générale de ces processus ponctuels, voir par exemple KALLENBERG ([4]), KRICKEBERG ([5]), MATTHES et al. ([6]) ou NEVEU ([7]).

BARNDORFF-NIELSEN et YEO ([1]) ont appelé processus binomiaux négatifs des processus ponctuels sur $\mathbb{R}^n$ qui sont des processus de Cox où l'intensité aléatoire est définie par un processus de loi gamma. Notre approche est différente et conduit, en particulier, à des lois cylindriques de dimension unité qui sont des lois binomiales négatives usuelles.

Considérons une urne contenant (n+1) types de boules - les boules de type $0,1,2,\ldots,n$, en proportions p, q_1, $q_2,\ldots,q_n$ - et effectuons des tirages avec remise. La loi du vecteur $\underline{N} = (N_1,\ldots,N_n)$, N_i désignant pour $1 \le i \le n$ le nombre de boules de type i obtenues avant le r-ème tirage d'une boule de type 0, admet pour fonction génératrice :

$$G_{\underline{N}}(s_1,\ldots,s_n) = \left[\frac{p}{1 - \sum\limits_{i=1}^{n} q_i\, s_i}\right]^r , \quad (s_1,\ldots,s_n) \in [0,1]^n.$$

La loi ainsi définie sur $\mathbb{N}^n$ est appelée loi binomiale négative et notée $\mathcal{BN}(r,p;q_1,\ldots,q_n)$. Les marginales de cette loi sont des lois du même type.

Généralisant ce modèle de tirage, nous construisons le processus ponctuel $\xi = \sum\limits_{i=1}^{N} \delta_{\tau_i}$ où les τ_i sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi ν_0 sur X et N est une variable aléatoire entière indépendante des τ_i et de loi binomiale négative de paramètres r et p. Les lois cylindriques de dimension finie de ce processus d'échantillonnage mélangé sont toutes des lois binomiales négatives du type défini ci-dessus. La fonctionnelle de Laplace associée à la loi de ξ a pour expression :

$$\phi(f) = \left[1 + \int_X (1-e^{-f(x)})\ \nu(dx)\right]^{-r} ,$$

où ν est la mesure finie $\nu = \frac{q}{p}\nu_0$, $q = 1-p$. Or nous constatons que, pour toute mesure de Radon ν sur X, ϕ définit une loi de processus ponctuel dont les lois cylindriques de dimension finie sont encore binomiales négatives. Nous définissons donc la loi binomiale négative de paramètres ν et r comme la loi associée à ϕ et nous la notons $\mathcal{BN}(\nu,r)$.

Lorsque ν est infinie, la loi $\mathcal{BN}(\nu,r)$ ne peut pas être considérée comme la loi d'un processus d'échantillonnage mélangé, mais on peut vérifier qu'elle possède localement cette propriété. Il s'ensuit qu'elle admet une représentation comme loi de processus de Poisson mélangé donnée par :

$$\int_0^\infty \mathbf{P}_{\ell\nu}\,\sigma(d\ell),$$

où σ désigne la loi $\Gamma(r,1)$ et $P_{\ell\nu}$ la loi du processus de Poisson de paramètre la mesure $\ell\nu$. Nous utilisons de manière intensive cette représentation. Elle nous permet, par exemple, de calculer simplement les mesures d'intensité et de covariance d'un processus ξ de loi $\mathcal{BN}(\nu,r)$:

$$E(\xi(A)) = r\nu(A)$$

$$\mathrm{Cov}(\xi(A),\xi(B)) = r[\nu(A\cap B) + \nu(A) \,.\, \nu(B)] \,,$$

où A et B sont des boréliens bornés de X. Nous montrons aussi que les lois $\mathcal{BN}(\nu,r)$ sont indéfiniment divisibles et de représentation canonique associée donnée par :

$$\phi(f) = \exp\{-\int_{M_p^*} (1-e^{-\mu(f)})\, \tilde{P}(d\mu)\}$$

où

$$\tilde{P} = \int_0^\infty P_{\ell\nu} r \frac{e^{-\ell}}{\ell}\, d\ell \quad , M_p^* = M_p \setminus \{0\}.$$

Etudiant les probabilités de Palm associées aux lois $\mathcal{BN}(\nu,r)$ nous montrons qu'elles ont une propriété de stabilité intéressante, à savoir : la loi de Palm P^x associée à la loi $\mathcal{BN}(\nu,r)$ ne dépend pas de x et n'est autre que la loi $\mathcal{BN}(\nu,r+1)$.

Lorsque $X = \mathbb{R}_+$, décrivant les processus ponctuels de la manière suivante :

$$\xi = \Sigma\delta_{T_i} \quad , \quad 0 \le T_1 \le T_2 \le \ldots \le T_i \le T_{i+1} \le \ldots \quad ,$$

et appelant variables inter-occurrences les variables $U_i = T_{i+1} - T_i$, nous donnons deux exemples.

Le premier est celui d'un processus de loi $\mathcal{BN}(\nu,r)$ avec $\nu = am$, $a > 0$ et m la mesure de Lebesgue. Un tel processus est stationnaire, non ergodique et la loi du vecteur $(T_1,\ldots,T_k)$ admet pour densité :

$$f_{T_1,\ldots,T_k}(t_1,\ldots,t_k) = \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(r)}\, a^k \left(\frac{1}{1+at_k}\right)^{k+r} \quad , 0 \le t_1 \le \ldots \le t_k$$

Les variables U_i sont équidistribuées et de loi définie par la densité :

$$g_U(u) = ra\left(\frac{1}{1+au}\right)^{r+1} \qquad , u \in \mathbb{R}_+ \ .$$

Le deuxième exemple est celui où ν est la mesure sur $\mathbb{R}_+$ définie par $\nu([0,t]) = e^{\lambda t}-1$, λ étant un paramètre réel positif. On a alors :

$$f_{T_1,\ldots,T_k}(t_1,\ldots,t_k) = \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(r)} \lambda^k \exp\{\lambda \sum_{i=1}^{k} t_i - \lambda(k+r)t_k\} ,$$

$$0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k ,$$

et les U_i sont indépendantes et de lois respectives $\Gamma(1,r+i-1)$. Remarquons aussi que la loi $\mathcal{BN}(\nu,1)$, c'est-à-dire la loi géométrique, n'est autre que la loi du processus de naissance de Yule.

REFERENCES

[1] BARNDORFF-NIELSEN, O. YEO, G.F. — Negative binomial processes (1969) - J. Appl. Prob., 6, 633-647

[2] GREGOIRE, G. — Lois géométriques et binomiales négatives pour des vecteurs de dimension finie et des processus ponctuels. (1979) - Séminaire de Statistique, USMG, Grenoble, 175-198

[3] GREGOIRE, G. — Quelques outils en vue de la modélisation des processus ponctuels et des processus de clustering. (1980) - Thèse de 3ème cycle, Grenoble

[4] KALLENBERG, O. — Random measures (1976) - Academic Press, Londres-New York, San Francisco

[5] KRICKEBERG, K. — Processus ponctuels (1977) - Cours Polycopié, Universités Paris V, VI, VII

[6] MATTHES, K., KERSTAN, J., MECKE, J. — Infinitely divisible point processes (1978) - Wiley

[7] NEVEU, J. — Processus ponctuels (1977) - Ecole d'Eté de Probabilités de St Flour, Springer-Verlag.

GREGOIRE Gérard
I.R.M.A.
Boite Postale 53 X
38041 GRENOBLE CEDEX