# Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 Série Mathématiques

## A. EHRHARD

## Une démonstration de l'inégalité de Borell

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 69, série Mathématiques, nº 19 (1981), p. 165-184

<a href="http://www.numdam.org/item?id=ASCFM">http://www.numdam.org/item?id=ASCFM</a> 1981 69 19 165 0>

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

## UNE DEMONSTRATION DE L'INEGALITE DE BORELL

#### A. EHRHARD

#### Université de Strasbourg

#### RESUME

A partir de l'inégalité de Brunn-Minkowski sur la sphère euclidienne on donne une démonstration détaillée d'une inégalité de type Brunn-Minkowski pour les espaces de Gauss due à Christer Borell. (C. Borell : Invent. Math. 1975 p. 207-215).

On rappelle d'abord l'inégalité de Brunn-Minkowski sur la sphère.

Dans la première partie on démontre l'inégalité de Borell dans  $\mathbb{R}^d$  en s'appuyant sur un lemme de Poincaré et on donne une application simple à l'évaluation d'une loi gaussienne.

Dans la deuxième partie on démontre le lemme de Poincaré.

La troisième partie ainsi que la quatrième sont consacrées à la généralisation en dimension infinie.

## O - RAPPELS

#### 01 - L'inégalité de Brunn-Minkowski sur la sphère

On utilisera les notations suivantes :

 $s_r^{n-1}$  est la sphère de centre O de rayon r de dimension (n-1) dans  $\mathbb{R}^n$ ; on la munit de la mesure uniforme et de masse 1 que l'on note  $\sigma_r^{n-1}$  et de la distance géodésique notée  $\theta_r^{n-1}$ : pour  $(x,y) \in (s_r^{n-1})^2$ ,  $\theta_r^{n-1}(x,y)$  est la longueur du plus petit arc de grand cercle sur  $s_r^{n-1}$  joignant x à y.

Pour toute partie A de  $S_r^{n-1}$  et pour tout réel positif h, on définit  $A_h$  par :

$$A_h = \{x \in S_r^{n-1} / \exists y \in A : \partial_r^{n-1}(x,y) \le h\}.$$

Pour tout  $x_0$  appartenant à  $s_r^{n-1}$  et pour tout  $\rho$  positif, on pose :

$$\beta_0 = \beta_0 (x_0) = \{x \in S_r^{n-1} / \partial_r^{n-1} (x_0, x) \le \rho\}.$$

L'inégalité de Brunn-Minkowski s'énonce alors :

#### Inégalité de Brunn-Minkowski:

A tout ensemble mesurable A de  $S_r^{n-1}$  on associe le nombre positif  $\rho = \rho(A)$  tel que :

$$\sigma_r^{n-1}(A) = \sigma_r^{n-1}(B_0)$$

On a alors :

$$\forall_h \geq 0 : \sigma_r^{n-1}(A_h) \geq \sigma_r^{n-1}(B_{0+h})$$

Pour A fermé l'égalité n'a lieu que si A est égal à  $S_r^{n-1}$  ou si A est lui-même une boule de rayon  $\rho$  sur  $S_r^{n-1}$ .

O2 - Le volume de la sphère de rayon 1 de dimension n-1 dans  $\mathbb{R}^n$  est :

$$\frac{2\Pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

## 1 - L'INEGALITE DE BORELL EN DIMENSION FINIE

1.1 - Soit  $\mathbb{R}^d$  l'espace euclidien de dimension d, d  $\in \mathbb{N}^*$ , muni de la tribu borélienne  $\mathcal{D}$  ( $\mathbb{R}^d$ ) et de la mesure canonique de Gauss notée  $\gamma_d$ ; on pose :

$$\emptyset(.) = \gamma_1 (]-\infty,.]);$$

on note:

$$\mathcal{O}_{d} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d} / ||\mathbf{x}|| \leq 1 \} ;$$

on a alors :

Théorème 1.1. (Inégalité de Borell)

Soit A une partie borélienne de  $\mathbb{R}^d$ , on lui associe le nombre  $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$  tel que :

$$\gamma_{d}(A) = \emptyset (\alpha)$$
.

On a alors

$$\forall$$
t \geq 0 :  $\gamma_d$  (A + t \mathcal{O} d) \geq \mathcal{O}(\alpha + t).

1.2 - L'outil principal pour la démonstration du théorème 1.1 sera le lemme de Poincaré (lemme 1.2)

On considère  $\mathbb{R}^m$  comme étant le produit  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n+2}$   $n \ge 0$ , m = m(n)= n + d + 2, d fixe.

On note  $\Pi_{m,d}$  la projection canonique de  $R^m$  sur  $R^d$ . On simplifie les notations introduites en 0.1 en posant :

$$S_{\sqrt{n}}^{n+d+1} = S_n \text{ et } \sigma_{\sqrt{n}}^{n+d+1} = \sigma_n$$

Pour toute partie borélienne A de  $\mathbb{R}^d$  on définit  $v_{d,n}$  par :

$$v_{\underline{d,n}}(A) = \sigma_{\underline{n}}(\Pi_{\underline{m,d}}^{-1}(A) \cap S_{\underline{n}})$$

La fonction d'ensemble  $v_{d,n}$  est une mesure de support  $\sup v_{d,n} = \{x \in \mathbb{R}^d / ||x|| \le n\} .$ 

On a le lemme

Lemme 1.2: 
$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$
:  $\lim_{n\to\infty} v_{d,n}(A) = v_{d}(A)$ .

Le lemme 1.2. sera démontré en 2.

#### 1.3 - Démonstration du théorème 1.1

A est une partie borélienne de  $\mathbb{R}^d$  et  $\alpha$  un réel tel que :

$$\gamma_{\vec{d}}(A) = \emptyset (\alpha)$$
.

On va montrer que pour tout réel  $\beta < \alpha$  on a :

$$\forall t \geq 0 : \gamma_d((A) + t \mathcal{O}_d) \geq \emptyset(\beta + t).$$

On fixe  $\beta$ ,  $\beta < \alpha$  et on pose :

$$B = \Pi_{d,1}^{-1} (]-\infty,\beta]),$$

de sorte que l'on ait :

$$\forall t \geq 0 : \gamma_d(B + t \mathcal{O}_d) = \emptyset (\beta + t).$$

En appliquant le lemme 1.2 on a :

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n (\prod_{m,d}^{-1}(A) \cap S_n) = \emptyset(\alpha) > \emptyset \beta),$$

et par suite en réappliquant le lemme à B on a :

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(\prod_{m,d}^{-1}(A) \cap S_n) > \lim_{n\to\infty} \sigma_n(\prod_{m,d}^{-1}(B) \cap S_n).$$

D'où l'on déduit qu'à partir d'un rang  $\boldsymbol{n}_{\mbox{\scriptsize O}}$  on a :

(i) 
$$\forall n \ge n_0 : \sigma_n(\Pi_{m,d}^{-1}(A)) > \sigma_n(\Pi_{m,d}^{-1}(B)) > \sigma_n(\Pi_{m,d}^{-1}(B))$$

L'ensemble  $\Pi_{m,d}^{-1}(B) \cap S_n$  est ou bien vide ou bien une boule sur  $S_n$  on peut donc appliquer l'inégalité de Brunn-Minkowski (0.1) à partir de (i), on obtient :

(ii) 
$$\sigma_{n}([\Pi_{m,d}^{-1}(A) \cap S_{n}]_{t}) > \sigma_{n}([\Pi_{m,d}^{-1}(B) \cap S_{n}]_{t}).$$

En comparant la distance géodésique sur  $s_n$  et la distance euclidienne dans  ${I\!\!R}^m$ , on obtient l'inclusion :

$$(\Pi_{m,d}^{-1}(A) \cap s_n)_t \subset \Pi_{m,d}^{-1}(A+t \mathcal{O}_d) \cap s_n.$$

Ce qui entraîne avec (ii) :

$$\sigma_{n}(\prod_{m,d}^{-1}(A + t\mathcal{O}_{d}) \cap S_{n}) > \sigma_{n}(\prod_{m,d}^{-1}(B) \cap S_{n}).$$

On remarque alors que pour n assez grand devant  $\beta$  et t on peut écrire :

$$(\Pi_{m,d}^{-1}(\mathsf{B}) \cap \mathsf{S}_{\mathsf{n}})_{\mathsf{t}} = \Pi_{m,d}^{-1}(\mathsf{B} + \mathsf{r}(\mathsf{t},\mathsf{n},\beta) \mathcal{O}_{\mathsf{d}}) \cap \mathsf{S}_{\mathsf{n}},$$

il suffit de poser :

$$r(t,n,\beta) = \sqrt{n} \cos \left[ (Arcos \beta/\sqrt{n}) - t/\sqrt{n} \right] - \beta$$
.

On vérifie que :

$$\lim_{n\to\infty} r(t,n,\beta) = t.$$

On a donc :

$$v_{d,n}(A + tO_d) \ge v_{d,n}(B + r(t,n,\beta)O_d)$$
.

Soit en faisant tendre n vers l'infini :

$$\gamma_d(A + t \mathcal{O}_d) \ge \gamma_d(B + t \mathcal{O}_d)$$
;

le théorème est démontré.

## 1.4 - Une application simple et directe du théorème 1.1

Le vecteur  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un vecteur gaussien centré à valeur dans 1 , avec, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , E  $x_n^2 = 1$ .

On note B la boule unité de  $1^{\infty}$ .

On a alors la proposition suivante.

# Proposition 1.4. Pour tout ensemble mesurable A de R $^{N}$ et pour tout réel $\alpha$

tel que :

$$P(x \notin A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}} dx,$$

on a:

$$\forall t \geq 0 : P \{x \notin A + t B\} \leq \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{\alpha+t}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

## 1.5 - Démonstration de la proposition 1.4

Sous les hypothèses de 1.4, il existe un tableau numérique  $L = (L_{k,n} ; k = 1,..., n ; n \in \mathbb{N}) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{R}_{k}, \text{ et une suite}$   $Y = (Y_{n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ de variables aléatoires gaussiennes de loi } \mathscr{N}(0,1), \text{ indépensions to the suite}$ 

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \sum_{k=1}^n L_{k,n} Y_k$$
.

On définit une application  $L_n$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{m}, L_{n}(x) = (\sum_{j=1}^{k} L_{j,k} x_{j}, k \in \{1, ..., n\}).$$

On désigne par  $\Pi_n$  la projection canonique de  $\mathbb{R}^N$  sur  $\mathbb{R}^n$ . On a alors pour tout ensemble A mesurable dans  $\mathbb{R}^N$  et pour tout réel  $\alpha$  tels que  $P(X \in A) = \emptyset(\alpha) :$ 

$$P\left\{\prod_{n}(X) \in \prod_{n}(A)\right\} \geq \emptyset(\alpha).$$

D'où on déduit :

dantes, tels que :

$$\mathbb{P}\{\Pi_{n}(Y)\in L_{n}^{-1}(\Pi_{n}(A))\} \geq \emptyset(\alpha),$$

puis en appliquant le théorème

$$P \{ \Pi_n(Y) \in L_n^{-1}(\Pi_n(A)) + t \mathcal{O}_n \} \ge \emptyset(\alpha + t).$$

On a donc :

$$P \{ \Pi_{n}(X) \in \Pi_{n}(A) + t.L_{n}(\mathcal{O}_{n}) \} \ge \emptyset(\alpha+t).$$

Comme la condition :

$$E x_k^2 = 1$$

entraîne :

$$\max_{\substack{k \leq n \\ \mathbf{x} \in \mathcal{O}_{n}}} \sum_{j=1}^{k} \mathbf{L}_{j,k} \mathbf{x}_{j} \leq \max_{\substack{k \leq n \\ \mathbf{x} \in \mathcal{O}_{n}}} (\sum_{j=1}^{k} \mathbf{L}_{j,k}^{2})^{\frac{1}{2}} (\sum_{j=1}^{k} \mathbf{x}_{j}^{2})^{\frac{1}{2}} \leq 1,$$

On a:

$$L_n(\theta_n) \subset \Pi_n(B)$$
,

et donc :

$$P\{\Pi_{n}(X) \in \Pi_{n}(A + tB)\} \ge \emptyset (\alpha+t)$$
;

en faisant tendre n vers l'infini on obtient la proposition.

#### 2 - DEMONSTRATION DU LEMME 1.2

Nous allons montrer que la mesure  $\nu_{d,n}$  définie en 1.2 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dx et que,  $f_{d,n}$  désignant sa densité,on a uniformément sur tout compact :

$$\lim_{n\to\infty} f_{d,n} = \frac{d_{\gamma d}}{dx} .$$

On conserve pour cela les notations introduites en 1.2 et on considère le paramétrage  $(\Phi,\Omega)$  où on a :

$$\Omega = \{\lambda = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x}_1^2 + \ldots + \mathbf{x}^2 \boldsymbol{\alpha} < \mathbf{n} : -\frac{\mathbb{I}}{2} < \boldsymbol{\theta}_1, \ldots, \boldsymbol{\theta}_n < \frac{\mathbb{I}}{2} ,$$

$$0 < \boldsymbol{\theta}_{n+1} < 2 \, \mathbb{I} \} ,$$

$$\Phi(\lambda) = x = (x_1, \dots, x_{d+n+2}),$$

$$\begin{aligned} &x_1 = x_1 \\ &\vdots \\ &x_d = x_d \\ &x_{d+1} = \begin{bmatrix} n - x_1^2 + \dots + x_d^2 \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}} &\cos \theta_1 & \dots & \cos \theta_n & \cos \theta_{n+1} \\ &x_{d+2} = \begin{bmatrix} n - x_1^2 + \dots + x_d^2 \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}} &\cos \theta_1 & \dots & \cos \theta_n & \sin \theta_{n+1} \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$X_{\alpha+n_{\tau}} k = [n - (x_1^2 + ... + x_n^2)]^{\frac{1}{2}} \cos \theta_1 \dots \cos \theta_{n+1-k} \sin \theta_{n+2-k}$$

$$x_{d+n+2} = [n - (x_1^2 + ... + x_n^2)]^{\frac{1}{2}} \sin \theta_1.$$

 $(\!\!\!/\, \varphi\,,\!\!\!\!/\, \Omega)$  est une carte representant un ouvert dense de S  $_{n}^{}$  .

L'élément d'aire normalisé de  $S_n$  au point  $\Phi(\lambda)$  où  $\lambda$  = (n,  $\theta$ ) s'écrit :

$$d\sigma_{n}(\Phi(\lambda)) = \frac{\Gamma((n+d+2)/2)}{2\Pi(n+d+2)/2} \quad \det_{k,1} (\frac{\partial \emptyset}{\partial \lambda_{k}}) \frac{\frac{1}{2}}{\partial \lambda_{1}} d \theta dx$$

On va calculer det  $(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_k} \mid \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1})$ .

On remarque que :

$$\forall k, 1 \le k \le d$$
;  $\forall 1, 1 \le 1 \le n+1$ :  $(\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \middle| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1}) = 0$ .

On a:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_{k}} \middle| \frac{\partial \Phi}{\partial x_{1}}\right) = \partial_{k,1} + \frac{x_{k} x_{1}}{n - (x_{1}^{2} + .. + x_{d}^{2})},$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_{\mathbf{k}}} \middle| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_{\mathbf{l}}} \right) = \partial_{\mathbf{k},\mathbf{l}} \cdot \left[ \mathbf{n} - (\mathbf{x}_{\mathbf{l}}^2 + \ldots + \mathbf{x}^2 \mathbf{d}) \right] \cos^2 \theta_{\mathbf{l}} \cdot \ldots \cos^2 \theta_{\mathbf{k}-\mathbf{l}}.$$

D'où on déduit :

$$\det_{k,1} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_k} \middle| \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1} \right) = \det_{(Id_{(d)}} + \frac{1}{n - (x_1^2 + \ldots + x_d^2)} (x_i x_j)_{1 \le i, j \le d}$$

$$\times \left[ n - (x_1^2 + \ldots + x_d^2) \right]^{n+1} \cos_{1} \theta_{1}^{2n} \ldots \cos^{2} \theta_{n}^{2n}.$$

On pose alors:

$$P(\lambda) = \det ((x_i x_j)_{1 \le j, i \le d} - \lambda Id_{(d)})$$

 $P(\lambda)$  est le polynôme caractéristique de  $(x_i x_j)_{1 \le i,j \le d}$ .

Comme:

$$(x_i x_j)_{1 \le i, j \le d} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \dots x_d \\ 0 \end{pmatrix}$$

l'équation :

$$(x_i x_j)_{1 \le i, j \le d}$$
  $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}$ 

s'écrit :

$$\forall j : x_j \sum x_i a_i = \lambda a_j$$
.

Ce qui s'écrit encore :

$$\sum x_{j}^{2} \sum x_{i} a_{i} = \lambda \sum x_{j} a_{j}.$$

Les valeurs propres de  $(x_i x_j)_{1 \le i,j \le d}$  sont :

$$\lambda = 0$$
,

qui correspond au sous-espace propre de dimension n-1 défini par

$$\{\sum x_i a_i = 0\},$$

et:

$$\lambda = \sum_{i} x_{i}^{2} .$$

On en déduit :

$$P(\lambda) = (-1)^{d} (\lambda)^{d-1} (\lambda - \sum_{i=1}^{d} x_{i}^{2}).$$

D'où on a:

$$\det(\mathrm{Id}_{(d)} + \frac{1}{n - ||x||_{d}^{2}} (x_{i} x_{j})_{1 \le i, j \le d}) = \frac{n}{n - ||x||_{d}^{2}}$$

et det 
$$(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_k} \mid \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1})$$
 s'écrit

$$\det \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_{k}} \middle| \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_{1}}\right) = n \left[ |x| \middle|_{d}^{2} \right]^{n} \cos^{2n} \theta_{1} \dots \cos^{2} \theta_{n}.$$

On a par suite:

$$\frac{dv_{d,n}}{dx} = \frac{\Gamma((n+d+2)/2)}{2\Pi(n+d+2)/2} n^{(n+1)/2} 1 - \left[\frac{||x||_d^2}{n}\right]^{n/2}$$

$$x \int |\cos^{2n}\theta_1 \cdots \cos\theta_n| d\theta_1 \cdots d\theta_n I_{\{||x||_d^2 < n\}}$$

$$-\frac{\Pi}{2} < \theta_1, \dots, \theta_n = \frac{\Pi}{2}$$

$$0 < \theta_{n+1} < 2\Pi$$

La dernière intégrale représente le volume de la sphère unité de dimension (n+1) dans  $\mathbb{R}^{n+2}$ , on a donc :

$$\frac{dv_{d,n}}{dx}(x) = \frac{\Gamma((n+2+d)/2)}{\prod^{d/2}\Gamma((n+2)/2)} n^{(n+1)/2} [1-||x||^2/n] \cdot I_{\{||x||^2 < n\}}.$$

En faisant tendre n vers l'infini on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{dv_{d,n}}{dx} (x) = (2\pi)^{-d/2} \exp(-|x||^2/2),$$

la convergence étant uniforme sur tout compact de  $\mathbb{R}^d$  ceci achève la démonstration du lemme.

## 3 - L'INEGALITE DE BORELL POUR UNE MESURE DE GAUSS SUR UN ESPACE LOCALE-MENT CONVEXE ET SEPARE

On définit d'abord les espaces de Gauss (E, $\mu$ ) (définition 3.1). On montre ensuite (Théorème 3.2) l'existence dans E de l'espace autoreproduisant  $\mathcal{H}(\mu)$  associé à la mesure gaussienne  $\mu$ . Le théorème 3.2 est du à C. Borell (C. Borell : Gauss-Radon measure... Math. Scand. 38(76)). La mesure  $\mu$  étant de Radon on note  $\mu$  la mesure intérieure définie par :

$$\forall A \subset E \quad \mu_{\star}(A) = Sup \quad \{ \mu(K) ; K \text{ compact, } K < \subset A \}.$$

## 3.1 - Définition d'un espace de Gauss

#### Définition 3.1

E est un espace vectoriel topologique localement convexe et séparé  $(e.v.t.l.c.s) \; \mu \quad \text{est une mesure de Radon sur la tribu borélienne de E} : \\ on dit que (E,\mu) est un espace de Gauss si de plus pour tout <math>\xi \in E', \\ \xi(\mu) \text{ est une mesure de Gauss sur R}.$ 

3.2 - Théorème d'existence de l'espace autoreproduisant associé à  $\mu$  dans E.

Si  $(E,\mu)$  est un espace de Gauss d'après la définition 3.1 on a :

on pose alors :

$$E_2^{\dagger} = \overline{E^{\dagger}} L^2(E, \mu)$$
.

Si  $\mu$  a un barycentre b dans E on note  $\;\mu_{O}$  la mesure définie par :

$$\mu_{O}(.) = \mu(. + b).$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.2. Si  $(E,\mu)$  est un espace de Gauss alors :

- (a)  $\mu$  a un barycentre b dans E
- (b) pour tout  $\xi \in E'_{2}(\mu)$ ,  $\xi(\mu_{0})$  a un barycentre noté  $\Lambda(\xi)$  dans E
- (c) l'application  $\Lambda$  qui a tout  $\xi \in E_2'(\mu)$  associe son barycentre  $\Lambda(\xi)$  dans E est injective et  $E_2'$  dans E.

On pose alors :

$$\mathcal{H}(\mu) = \operatorname{Im}(\Lambda) = \Lambda(E_2(\mu))$$

et pour tout (h,g) élément de  $\mathcal{H}(\mu)^2$ :

$$< h | g> = \int \Lambda^{-1} h(x) \cdot \Lambda^{-1} g(x) d \mu_0(x)$$
.

On désigne par  $\theta$  l'injection canonique de  $\mathcal{H}(\mu)$  dans E.

- (d)  $(\Re(\mu), <.|.>)$  est un espace Hilbert et  $\theta$  est faiblement continue.
- (e) Si  $\gamma$  désigne la promesure gaussienne canonique sur  $\mathcal{H}$  ( $\mu$ ) on a :

$$\frac{\theta(\gamma \mathcal{G}_{(\mu)})}{\mathcal{G}_{(\mu)}} = \mu_0.$$

3.3 - Démonstration du théorème 3.2

La démonstration du théorème 3.2 s'appuie sur les lemmes 3.4 et 3.5 que l'on démontre d'abord.

3.4 - Supposons les points (a), (b) et (c) du théorème 3.2 vérifiés pour  $(E,\mu)$ .

Pour tout  $h \in \mathcal{H}(\mu)$  on note:

$$\mu_h(.) = \mu(.-h) .$$

On a alors le lemme

Lemme 3.4: 
$$\mu_h = \exp ((\Lambda^{-h} - ||h||^2/2)) \mu_0$$
.

3.5 - Sous les mêmes hypothèses que 3.4, on a le lemme :

Lemme 3.5 : Soit G un sous-groupe additif de E, de mesure strictement positive (ie de mesure 1) alors :

2b 
$$\in$$
 G et  $\Re(\mu)$   $\subset$  G.

- 3.6 Démonstration des lemmes 3.4 et 3.5
- 3.6.1 Démonstration du lemme 3.4 : il suffit de démontrer que les mesures  $\mu_h$  et  $[\exp(\Lambda^{-1}\ h\ -||h||^2/2)\ \mu_O]$  ont même transformée de Fourier. On en a d'une part, pour tout  $\xi$  dans E' :

$$\int \exp(-i <\xi \mid x>) d\mu_h(x) = \exp(-i <\xi \mid h>) \exp[-\frac{1}{2}\mu_O(\xi^2)],$$
 et d'autre part, pour tout  $\xi$  dans E' :

$$\begin{split} \int & \exp{(-i\ <\!\xi\,\big|\,\mathbf{x}\!>\,+\,\Lambda^{-1}\mathbf{h}\,(\mathbf{u})\,\,-\,\big|\,|\mathbf{h}\,\big|\,\big|^{2}/2)} \ d\mu_{O}(\mathbf{x}) \; = \\ & \exp{(-\big|\,\big|\,\mathbf{h}\,\big|\,\big|^{2}/2)} \ \exp{[\,-\,\frac{1}{2}\,\,\int{(\xi\!+\,\mathbf{i}\,\,\Lambda^{-1}\mathbf{h})^{\,2}}\,\,d\mu_{O}]} = \\ & \exp{(-i\ <\!\xi\,\big|\,\mathbf{h}\!>)} \ \exp{[\,-\,\frac{1}{2}\,\,\mu_{O}(\xi^{\,2})\,]}\,, \end{split}$$

car pour tout  $h\in\mathcal{H}(\mu)$  et pour tout  $\xi$  dans E' on a :

On peut donc conclure.

#### 3.6.2 - Démonstration du lemme 3.5

On a par hypothèse :

$$\mu(G) = 1$$

donc aussi :

$$\mu_{O}(-b+G) = 1.$$

La mesure  $\mu_{O}$  étant symétrique :

$$\mu_{O}(-(-b+G)) = \mu_{O}(b+G) = 1$$
,

on a par conséquent :

$$\mu_{O}((-b+G) \cap (b+G)) = 1.$$

On a donc:

$$(-b+G) \cap (b+G) \neq \emptyset$$

ce qui implique :

De plus par le lemme 3.4 on a :

$$\forall h \in \mathcal{J}_{h}(\mu) : \mu_{-h}(-b+G) = 1.$$

On a donc:

$$\mu_{O}((h-b+G) \cap (-b+G)) = 1$$

d'où:

$$(h-b+G) \cap (-b+G) \neq \emptyset$$
.

Ce qui implique :

Le lemme est donc démontré.

### 3.7 - Démonstration du théorème 3.2

## 3.7.1 - On suppose d'abord E complet et on montre (a) et (b).

Si E est complet l'enveloppe convexe de tout compact de E est compacte ; par conséquent,  $\mu$  étant de Radon, pour tout  $\epsilon > 0$  il existe un compact convexe K tel que :

(i) 
$$\mu(K) > 1 - \epsilon$$
.

On munit E' de la topologie de Marckey  $\tau(E',E)$  de la convergence uniforme sur les parties faiblement compactes et convexes de E ; on a alors :

(ii) l'application de E' dans  $\mathbb R$  qui à tout  $\xi$   $\epsilon$  E' associe le réel  $\mu(\xi^2)$  est  $\tau(E',E)$  -continue.

En effet d'après (i) la convergence suivant  $\tau(E',E)$  revient à la convergence en probabilité des variables aléatoires à valeurs réelles  $\xi(\mu)$  ce qui, pour des gaussiennes, implique la convergence dans  $L^2(\mu)$ .

On conclut ensuite par le théorème de Mackey :

(a) l'application de E' dans  ${\mathbb R}$  qui a tout  $\xi$   ${\boldsymbol \epsilon}$  E' associe le réel  $\mu(\xi)$  est  $\tau({\text E}',{\text E})$ -continue donc :

$$\exists ! b \in E \mid \forall \xi \in E' : \mu(\xi) = \langle \xi | b \rangle_{E',E'}$$

b est le barycentre de  $\boldsymbol{\mu}$  .

(b) pour tout  $\xi \in E_2'(\mu)$  l'application de E' dans  $\mathbb R$  qui a tout  $\eta \in E'$  associe le nombre réel  $\mu(\xi, \eta)$  est  $\tau(E', E)$ -continue donc :

 $\forall \, \xi \in E_2', \, \, \exists \, ! \, \Lambda(\xi) \in E \, | \, \forall \, \eta \in E' \, : \, \mu_O(\xi \cdot \eta) \, = \, \langle \eta \, \big| \, \, \Lambda(\xi) \rangle_{E',E}$   $\Lambda(\xi)$  est le barycentre de  $\xi(\mu_O)$  .

#### 3.7.2 - Cas général (a) et (b)

Soit F le complété de E et j l'injection canonique de E dans F ; on pose :

$$v = j(\mu)$$
.

La mesure  $\nu$  est gaussienne et de Radon sur F.

On pose :

$$F_2'(v) = \overline{F'}^{L^2(v)}$$
.

On applique le théorème à  $(F,\nu)$ , on définit l'application  $\Lambda$  de  $F_2^!(\nu)$  dans F comme dans le théorème et on pose :

$$\mathcal{H}(v) = \operatorname{Im}(\Lambda) = \Lambda(F_2(v)).$$

Par les lemmes 3.4 et 3.5 on a :

$$v(E) = 1$$
,

donc v a un barycentre b dans F et b  $\in$  E.

Par suite b est le barycentre de  $\mu$ , (a) est démontré.

Comme on a:

$$j(\mu_0) = \nu_0$$

en réapliquant les lemmes on a :

$$\forall \xi \in E'_2 : \Lambda \xi \in E$$

et ceci montre (b).

## 3.7.3 - On démontre maintenant les points (c), (d) et (e) du théorème 3.2

- (c) L'espace E est un e.v.t.l.c.s., il est donc séparé par son dual.
- (d) L'espace  $\mathcal{H}(\mu)$  est muni du produit scalaire :

$$\begin{array}{lll} \forall (\mathtt{h},\mathtt{g}) \in \mathcal{H}(\mathtt{\mu})^2 : \langle \mathtt{h} \big| \mathtt{g} \rangle_{H(\mathtt{\mu})} & = & \int \Lambda^{-1}(\mathtt{x}) \ \Lambda^{-1}\mathtt{g} \ (\mathtt{x}) \ \mathtt{d} \mathtt{\mu}_{\mathrm{O}}(\mathtt{x}) \\ \\ & = & \langle \Lambda^{-1} \ \mathtt{h}, \ \Lambda^{-1}\mathtt{g} \rangle_{E_2^+} \end{array}.$$

L'espace  $\mathcal{H}$   $(\mu)$  est donc un espace de Hilbert puisque  $E_2'$  en est un. De plus pour tout  $\,\xi$  dans E' on a :

$$\forall h \in \mathcal{J}_{(\mu)}, \langle \xi | \theta(h) \rangle = \langle \Lambda \xi | h \rangle$$

Donc l'application  $\theta$  de l'espace de Hilbert ( $\mathcal{H}(\mu)$ , <...) dans E est bien faiblement continue.

(e) On vérifie que pour tout cylindre fermé A dont la base est de dimension finie on a :

$$\theta(\gamma_{O})$$
 (A) =  $\mu_{O}$  (A).

Soient  $\xi = (\xi_j, j=1,...,n) \in (E')^n$  et M un fermé de  $\mathbb{R}^n$  ; on considère :

$$A = \{x \in E \mid \xi(x) \in M\}.$$

On a:

$$\theta^{-1}(A) = \{a \in \mathcal{H}(\mu) \mid \langle a | \Lambda \xi \rangle_{\mathcal{H}(\mu)} \in M\}$$

et

$$\gamma_{\mathcal{J}(\mu)}(\theta^{-1}(\mathbf{A})) = \mathcal{N}(0, [\langle \Lambda \xi_{\mathbf{j}} | \Lambda \xi_{\mathbf{k}} \rangle]_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}) \quad (\mathbf{M})$$

$$= \mathcal{N}(0, [\int \xi_{\mathbf{j}} \xi_{\mathbf{k}} d\mu_{\mathbf{0}}]_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}) \quad (\mathbf{M})$$

$$= \mu_{\mathbf{0}}(\mathbf{A}).$$

## 3.8 - Compacité de la boule de l'espace autoreproduisant

Avec les mêmes notations que pour le théorème 3.2 on a le corollaire suivant :

Corollaire 3.8: soit  $\mathcal{O}(\mu) = \{h \in \mathcal{H}(\mu) \mid |h| \mid_{\mathcal{H}} \leq 1\}$ ; on a:

- 
$$\mathcal{O}(\mu)$$
 est compact dans E

$$- \forall \xi \in E' : \mu_0(\xi^2) = \int \xi^2 d\mu_0 = \text{Max} \{\xi(x) : x \in \mathcal{O}(\mu)\}$$
.

#### Démonstration du corollaire 3.8

On reprend la démonstration du théorème 3.2 pour les points (a) et (b), avec les mêmes notations on a :

$$\mathcal{J}_{b}(u) = \mathcal{J}_{b}(v) \subset E$$
.

On en déduit :

$$Q(u) = Q(v)$$
.

On montre alors que  $\mathcal{O}(v)$  est compact dans F.

Comme il existe dans F un compact convexe symétrique en O, K tel que :

$$\sim$$
  $V(K) > 0,$ 

On pose :

$$G = U(nK, n \in N)$$

et on a :

$$\nu(G) > 0.$$

Mais G est un sous-espace vectoriel de F on a donc d'après le lemme 3.5. :

$$(\mathcal{O}(v) \subseteq G.$$

Or  $\mathcal{O}(v)$  est faiblement compact car  $\theta$  et faiblement continue et pour tout n, n. K est faiblement compact car compact ; on considère alors l'application  $N_K$  de G dans  $R_+$  définie par :

$$\forall x \in G, N_K(x) = \inf \{\lambda > 0 \mid x \in \lambda K\}$$
.

N est continue pour la topologie faible restreinte à G donc N admet un maximum sur  $\mathcal{O}(v)$  qui est compact pour cette topologie, c'est-à-dire :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \ (0(v) \subset n_0.K.$$

Donc  $\mathcal{O}(v)$  est compact.

Pour tout x dans  $\mathcal{J}_{6}(\mu)$  et pour tout  $\xi$  dans E' on a :

$$<\xi |x>_{E',E} = <\xi |x>_{g_{E}} = \int \xi \Lambda^{-1} x d\mu_{0}.$$

en découle :

$$\mu_0(\xi^2) = \langle \xi, \Lambda \xi \rangle g_{\mathcal{B}}$$

et on a bien :

$$\operatorname{Max}(\langle \Lambda \xi, \mathbf{x} \rangle, ||\mathbf{x}|| \leq 1) = ||\Lambda \xi||.$$

#### 4. - L'INEGALITE DE BORELL DANS (E, u) ESPACE DE GAUSS

L'espace E est un e.v.t.l.c.s.,  $\mu$  est une mesure de Radon gaussienne sur E,  $\mathcal{H}$  désigne l'espace autoreproduisant associé à  $(E,\mu)$ . On reprend les notations de 1.

## 4.1 - L'inégalité de Borell s'énonce alors :

Théorème 4.1 (Inégalité de Borell) : A tout ensemble A, $\mu$ -mesurable dans E, on associe le réel  $\alpha$  tel que :

$$\mu(A) = \emptyset(\alpha)$$

on a alors :

$$\forall t \geq 0 \quad \mu \quad (A + t \mathcal{O} (\mu)) \geq \mathcal{O}(\alpha + t)$$

l'égalité ayant lieu si A est un demi-espace.

## 4.2 - On démontre d'abord un lemme topologique

Soient K un compact dans E et  $\mathcal{F}$  (K) la famille des cylindres fermés dans E qui contiennent K et dont les bases sont de dimensions finies ; on a :

Lemme 4.2: Pour tout compact K' dans E on a:

$$\bigcap (F + K' ; F \in \mathcal{F}(K)) = K + K'.$$

## 4.3 - Démonstration du lemme 4.2

C'est un corollaire immédiat du théorème de Hahn-Banach. Pour tout x n'appartenant pas à K + K' on trouve F  $\epsilon$   $\mathcal{F}$ (K) tel que :

$$K \subset F$$
 et  $F \cap (x - K') = \emptyset$ .

En effet si x  $\not\in$  K + K' alors il existe un voisinage convexe de O, u, dans E, tel que :

$$(K + K' + u) \cap \{x\} = \emptyset .$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$(K + u) \bigcap (x - K') = \emptyset.$$

On considère :

$$K + u = U (y + u ; y \in K)$$
.

C'est un recouvrement du compact K dont on extrait un recouvrement fini :

$$\exists n, \exists (y_1, ..., y_n) \in K^n : K \subset \bigcup_{1=k}^n (y_k + u).$$

D'après le théorème de Hahn-Banach pour tout j  $\in \{1, \ldots, n\}$  il existe un demi-espace  $F_j$  tel que :

$$(y_j + u) \subset F_j$$
 et  $F_j \cap (x-K') = \emptyset$ .

On prend alors  $F = \bigcup_{j=1}^{n} F_{j}$ . Le lemme est démontré.

#### 4.4 - Démonstration du théorème 4.1

On peut supposer :

$$-\infty < \alpha < +\infty$$
.

Soit  $\beta \in ]-\infty, \alpha [$ ; comme  $\mu$  est de Radon il existe un compact K, K  $\subset$  A, tel que :

$$\mu(K) > \emptyset(\beta)$$
.

On montre :

$$\forall t \geq 0 : \mu(K + t \mathcal{O}(\mu)) \geq \emptyset (\beta + t).$$

On désigne par  $\mathcal{F}$  (K) la famille des cylindres fermés dont les bases sont de dimensions finies et qui contiennent K :

$$F \in \mathcal{F}(K) \longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists \xi = (\xi_j j=1, ..., n) \in (E')^n, \exists M \text{ fermé, } M \subset \mathbb{R}^n :$$

$$F = \{x \in E' \mid \xi(x) \in M\} \text{ et } F \supset K.$$

Par le lemme 4.2 on a :

$$\bigcap (F, F \in \mathcal{F}(K)) = K.$$

Soit  $F \in \mathcal{F}(K)$ ,  $F = \{x \in E/\xi(x) \in M\}$ ; pour tout  $j \in \{1,...,n\}$   $\xi_j \circ \theta$  est une forme linéaire continue sur  $\mathcal{F}$  car  $\theta$  est continue. Si L désigne le sous-espace vectoriel engendré par les formes linéaires  $(\xi \circ \theta, j \in \{1,...n\})$  dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{F}$  on a par l'inégalité de Borell dans  $\mathbb{R}^n$ :

$$\forall t \geq 0, \ \gamma \neq \beta \left(\theta^{-1}(F) + t(\mathcal{O}(\mu) \cap L)\right) > \emptyset(\beta + t).$$

On a donc pour tout  $t \ge 0$  et pour tout  $F \in \mathcal{F}(K)$ :

(i) 
$$\mu(F + t \mathcal{O}(\mu)) \ge \mu(F + t(\mathcal{O}(\mu) \cap L)) > \emptyset(\beta + t)$$
.

Comme la mesure  $\mu$  est de Radon on a :

(ii) inf 
$$\{\mu(F + t\mathcal{O}(\mu)) ; F \in \mathcal{F}(K)\} = \mu[\Lambda(F + t\mathcal{O}(\mu)) ; F \in \mathcal{F}(K)]$$
. La boule  $(\mathcal{O}(\mu))$  étant compacte on applique le lemme 4.2 :

(iii)  $\mu [ \cap (F + t \mathcal{O}(\mu)) ; F \in \mathcal{F}(K) ] = \mu(K + t \mathcal{O}(\mu)).$ 

En prenant l'infimum en F dans (i) on obtient avec (i) et (iii) :

$$\mu(K + t \mathcal{O}(\mu)) \ge \emptyset(\beta + t),$$

ce qui achève la démonstration.

## REFERENCES:

- C. BORELL: Invent. Math. 1975, p. 207-215.
- C. BORELL: Gauss-Radon measure.... Math. Scand. 38(76).