ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

YOUSSEF HAOUAT
FULVIO GRAZZINI

Polynômes de Barsky

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 68, série *Mathématiques*, nº 18 (1979), p. 65-81
<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1979__68_18_65_0>

Ann. Sci. Univ. Clermont II, Sér. Math., Fasc. 18, 1979, pp. 65 - 81

POLYNOMES DE BARSKY

HAOUAT Youssef et GRAZZINI Fulvio

Sur l'anneau $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adiques, Yvette AMICE [1] a introduit les fonctions k-lipschitziennes à valeurs dans Q_p, et Daniel BARSKY [2] s'est intéressé à la boule unité de cet anneau de fonctions. L'intersection avec $Q_p[X]$ de cette boule est l'anneau de polynômes à valeurs entières, dont les k premières différences finies divisées sont à valeurs entières.

De leur côté, CAHEN et CHABERT [5], [6] ont montré que pour étudier le spectre de l'anneau des polynômes à valeurs entières sur un anneau A noethérien, intégralement clos (c'est-à-dire l'ensemble des polynômes à coefficients dans le corps des fractions de A, qui prennent sur A leurs valeurs dans cet anneau), on pouvait par des méthodes de localisation se ramener au cas où A est un anneau de valuation discrète. On généralise ici toutes ces techniques en les appliquant aux polynômes introduits par BARSKY :

- Dans une première partie, on montre que si A est un anneau noethérien qui satisfait à la seule condition (S_2), on peut, par des méthodes de localisation, réduire considérablement l'étude du spectre de cet anneau de polynômes.

- Dans une 2^e partie, on étudie le spectre au-dessus de l'idéal maximal d'un anneau local de dimension 1, de corps résiduel fini.

- Dans une 3e partie, on applique cette étude à l'anneau des polynômes dont toutes les différences finies divisées sont à valeurs entières.

- Enfin, dans une dernière partie, on examine la structure additive de ces anneaux de polynômes, dans le cas particulier où A est un anneau de valuation discrète.

Notations :

- A désigne un anneau intègre, noethérien, de corps de fractions K, vérifiant la propriété (S_2) : pour tout idéal premier P, on a : $\mathrm{prof}(A_P) \geq \inf(2, h(P))$.

- On note A_S l'anneau des polynômes à valeurs entières

$$A_S = \{f \in K[X] \ / \ f(A) \subset A\}$$

et $A_{S(n)}$ l'anneau des polynômes dont les n premières dérivées sont à valeurs entières

$$A_{S(n)} = \{f \in K[X] \ / \ f(A), f'(A), \dots, f^{(n)}(A) \subset A\}$$

On note $A_{S(\infty)} = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_{S(n)}$.

- Pour $f \in K[X]$ et $h_1 \in A^*$ (où A^* désigne l'ensemble des éléments de A distincts de 0), on pose :

$$\Delta^0_{h_1} f = f \quad \text{et} \quad \Delta^1_{h_1} f(X) = \frac{f(X + h_1) - f(X)}{h_1}$$

puis, par récurrence, on définit les différences finies divisées :

$$\Delta^n_{h_1, \dots, h_n} f(X) = \frac{\Delta^{n-1}_{h_1, \dots, h_{n-1}} f(X + h_n) - \Delta^{n-1}_{h_1, \dots, h_{n-1}} f(X)}{h_n}$$

On note $A_{B(n)}$ l'anneau des polynômes dont les n premières différences finies divisées sont à valeurs entières :

$$A_{B(n)} = \left\{ f \in K[X] \ : \ \forall (h_1, \dots, h_k, x) \in (A^*)^k \times A, \ \forall k, \ 0 \le k \le n \quad \Delta^k_{h_1, \dots, h_k} f(x) \in A \right\}$$

$$\text{et} \qquad A_{B(\infty)} = \bigcap_{n \ge 0} A_{B(n)}$$

PREMIERE PARTIE : Etude locale du spectre.

On a les inclusions suivantes :

$$A \subset A[X] \subset A_{B(\infty)} \subset A_{B(n)} \subset A_{S(n)} \subset A_S$$

On montre ici qu'un procédé de «localisation» permet de se ramener au cas où A est un anneau local, de dimension 1, de corps résiduel fini.

Localisation :

Proposition 1 : *Soit A un anneau intègre noethérien, pour toute partie multiplicative T de A et $n \ge 0$, on a :*

$$T^{-1}(A_{B(n)}) = (T^{-1}A)_{B(n)}$$

Démonstration : Soit f dans $T^{-1}(A_{B(n)})$. Alors f et ses n premières différences finies divisées prennent leurs valeurs dans $T^{-1}A$. Donc :

$$\Delta^k_{h_1, \dots, h_k} f(x) \in T^{-1}A, \quad \forall (h_1, \dots, h_k, x) \in (A^*)^k \times A, \quad \forall k, 0 \le k \le n.$$

pour $h_1, \dots, h_k$ fixés, le polynôme en X,

$P(X) = \Delta^k_{h_1, \dots, h_k} f(X)$ vérifie : $P(A) \subset T^{-1}A$. D'après CAHEN et CHABERT [6] :

$P(T^{-1}A) \subset T^{-1}A$. On a donc $\Delta^k_{h_1, \dots, h_k} f(x) \in T^{-1}A$, $\forall (h_1, \dots, h_k, x) \in (A^*)^k \times T^{-1}A$.

Considérons alors pour $h_2, ..., h_k, x$ fixés dans $(A^*)^{k-1} \times T^{-1}A$, le polynôme en $h_1 : Q(h_1) = \Delta^k_{h_1, ..., h_k} f(x)$. Ce polynôme vérifie $Q(A) \subset T^{-1}A$. En utilisant [6], on a $Q(T^{-1}A) \subset T^{-1}A$. Ainsi, $\Delta^k_{h_1, ..., h_k} f(x) \in T^{-1}A$, $\forall h_1 \in (T^{-1}A)^*$, $\forall x \in T^{-1}A$, $\forall (h_2, ..., h_k) \in (A^*)^{k-1}$. On itère le procédé pour $h_2, ..., h_k$. On obtient finalement que $f \in (T^{-1}A)_{B(n)}$ et donc $T^{-1}(A_{B(n)}) \subset (T^{-1}A)_{B(n)}$.

Inversement, soit $f \in (T^{-1}A)_{B(n)}$. Comme A est noethérien, le A module engendré par les valeurs prises par f sur A et pas les valeurs prises par les différentes n premières différences finies divisées est de type fini. Il existe un dénominateur commun $s \in T$ à toutes ces valeurs prises (qui sont dans $T^{-1}A$). Ainsi $sf \in A_{B(n)}$ et $f \in T^{-1}(A_{B(n)})$ ce qui achève la démonstration.

Cette proposition simplifie considérablement l'étude du spectre de $A_{B(n)}$. On considère chaque fibre séparément ; l'ensemble des idéaux premiers de $A_{B(n)}$ au-dessus d'un idéal premier P de A est en bijection avec les idéaux premiers de $(A_{B(n)})_P$ au-dessus de l'idéal PA_P de A_P.

Or on a : $(A_{B(n)})_P = (A_P)_{B(n)}$.

a) Il y a d'abord les idéaux au-dessus de (0) qui sont les idéaux au-dessus de (0) de $T^{-1}(A_{B(n)}) = A_{B(n)} \otimes K = K[X]$ où $(T = A^*)$.

b) Il y a ensuite les idéaux premiers au-dessus d'un idéal premier P de hauteur 1 et de corps résiduel fini.

Dans ce cas, A_P est un anneau noethérien, intègre, local, de dimension 1 de corps residuel fini, et on s'intéresse à la fibre au-dessus de l'idéal maximal de cet anneau. On étudiera cette fibre plus loin.

c) Enfin, il y a les idéaux premiers au-dessus d'un idéal P de hauteur au moins 2 ou de corps résiduel infini. Mais pour ces idéaux premiers, nous allons montrer dans ce qui suit, que lorsque A est un anneau (S_2), on a : $(A_P)_{B(n)} = A_P[X]$. En fait, on a même l'égalité

$(A_P)_S = A_P[X]$. On considère alors l'anneau des polynômes à valeurs entières comme trivial.

Cas trivial.

L'égalité $A_S = A[X]$ exprime qu'en fait le polynôme 0 est le seul polynôme à coefficients dans K/A nul en tout point de A.

CAHEN et CHABERT [6] démontrent que c'est le cas si et seulement si A/P est infini $\forall P \in \mathrm{Ass}(K_{/A})$.

Dans l'étude des polynômes à valeurs entières, on est donc amené à considérer $\mathrm{Ass}(K_{/A})$. CAHEN et CHABERT ont été conduits à privilégier les anneaux de Krull, parce qu'ils portaient leur attention sur les idéaux premiers de hauteur 1, qui dans ce cas coïncident avec les idéaux de l'assassin de $K_{/A}$: En fait, il semble que la bonne notion soit celle des idéaux de profondeur 1. On établit, en effet, le résultat suivant :

Proposition 2 : *Soit A un anneau intègre noethérien. Alors $\mathrm{Ass}(K_{/A}) = \mathrm{Prof}\,(1)$ où $\mathrm{Prof}\,(1)$ désigne l'ensemble des idéaux premiers de A tels que $\mathrm{prof}\,(A_P) = 1$.*

Démonstration. On peut supposer que A est un anneau local d'idéal maximal P. Si $\bar{x}$ désigne la classe de $\frac{a}{b}$ dans $K_{/A}$ et $\tilde{a}$ la classe de a dans $A_{/bA}$, alors $\mathrm{Ann}_A(\bar{x}) = \mathrm{Ann}_A(\tilde{a})$. Ainsi P est dans $\mathrm{Ass}(K_{/A})$ si et seulement si P est dans $\mathrm{Ass}(A_{/bA})$, donc si et seulement si $A_{/bA}$ est de profondeur 0, donc si et seulement si A est de profondeur 1.

Proposition 3 : *Soit A un anneau intègre noethérien.*

Alors
$$A = \bigcap_{P \in \mathrm{Ass}(K_{/A})} A_P$$

Il suffit de démontrer que $\bigcap_{P \in \mathrm{Ass}(K_{/A})} A_P \subset A$. *Soit* $x = \frac{a}{b} \in K$, $x \notin A$. *Alors*

$\bar{x}$ est non nul dans $K_{/A}$. Il existe P dans $\mathrm{Ass}(K_{/A})$ et $\mathrm{Ann}_A(\bar{x}) \subset P$. Ainsi $x \notin A_P$

(car sinon on pourrait trouver s dans A-P tel que sx soit dans A).

Proposition 4 : *Soit A un anneau intègre noethérien. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $Ass(K_{/A}) = Ht(1)$.

b) $A = \bigcap_{P \in Ht(1)} A_P$

c) A vérifie la propriété (S_2)

où Ht(1) désigne l'ensemble des éléments de Spec(A) de hauteur 1.

Démonstration : Nous allons montrer que (a) est équivalent à (c) et que (a) est équivalent à (b).

Supposons (a). Soit $P \in$ Spec A. Si $\mathrm{prof}(A_P) = 0$, comme A est intègre $h(P) = 0$. Si $\mathrm{prof}(A_P) = 1$, d'après la proposition 2, $h(P) = 1$, d'où (c).

Supposons (c). Alors $\mathrm{prof}(1) = Ht(1)$ et d'après la proposition 2, on a (a). D'après les propositions 3 et 2, (a) entraîne (b). Enfin, comme A est intègre, on a :
$Ht(1) \subset \mathrm{prof}(1) = Ass\,K_{/A}$.

Si on suppose que (a) n'est pas vrai, il existe Q dans $Ass(K_{/A})$ pour lequel $h(Q) \geq 2$.
Soit $\frac{a}{b}$ dans K - A tel que $Q = Ann_A \left(\overline{\frac{a}{b}}\right)$. Montrons que $\frac{a}{b} \in \bigcap_{P \in Ht(1)} A_P$, ce qui prouvera que (b) n'est pas vrai. Pour tout P dans Ht(1), on a $Q \not\subset P$; il existe $d \in Q$, $d \notin P$; alors $d\frac{a}{b}$ est un élément c de A ; donc $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \in A_P$.

Cas d'un anneau (S_2).

Proposition 5 : *Soient A un anneau intègre, noethérien, vérifiant la propriété* (S_2). *et P un idéal premier de hauteur au moins 2 ou de corps résiduel infini. Alors* $(A_P)_{B(n)} = A_P[X]$

En effet, pour $Q\,A_P \in Ass(K_{/A_P})$, comme A_P est (S_2), $Q\,A_P$ est de hauteur 1. Il est donc strictement contenu dans $P\,A_P$. Par suite $\dfrac{A_P}{QA_P}$ est infini.

Il reste cependant à étudier la fibre au-dessus d'un idéal premier de hauteur 1 et de corps résiduel fini. Un tel idéal est maximal. On se ramène donc à un anneau A local, intègre, noethérien, de dimension 1, de corps résiduel fini et on s'intéresse à la fibre au-dessus de $\mathfrak{m}$, idéal maximal de A.

DEUXIEME PARTIE : Etude sur un anneau local, de dimension 1, de corps résiduel fini.

On désigne par $\hat{A}$ et $\hat{K}$ les complétés respectifs de A et K pour la topologie $\mathfrak{m}$ adique. On plonge $A_{B(n)}$ dans l'anneau des fonctions continues de $\hat{A}$ dans $\hat{A}$, noté $\mathscr{C}(\hat{A}, \hat{A})$:

$$A_{B(n)} \subset A_{S(n)} \subset A_S \subset \mathscr{C}(\hat{A}, \hat{A})$$

On sait [5] que pour tout n, $A_{S(n)}$ est dense dans $\mathscr{C}(\hat{A}, \hat{A})$, CAHEN s'est servi de ce résultat pour étudier la fibre des $A_{S(n)}$ au-dessus de $\mathfrak{m}$. Pour les $A_{B(n)}$, il faudra changer d'argument, puisqu'ils sont fermés dans A_S.

Lemme 6. *Pour tout x_o non nul de $\mathfrak{m}$, il existe r entier positif tel que $\mathfrak{m}^r \subset Ax_o$.*

On a $\sqrt{Ax_o} = \mathfrak{m}$. Comme A est noethérien, et $\mathfrak{m}$ de type fini, il existe r tel que $\mathfrak{m}^r \subset Ax_o$.

Remarques : Si f et g sont deux éléments de K [X] :

$$\Delta_h^1 fg(x) = f(x+h)\ \Delta_h^1 g(x) + g(x)\ \Delta_h^1 f(x)$$

$$\Delta_h^1 g^{n+1}(x) = \Delta_h^1 g(x) \sum_{l_1 + l_2 = n} g(y_1)^{l_1}\ g(y_1)^{l_2}$$

où y_1 et y_2 sont des éléments de A.

Une récurrence sur k prouve que :

$$\Delta^k_{h_1, \ldots, h_k} g^{n+1}(x) = \sum_{\substack{\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = k \\ n-k < \beta_1 + \ldots + \beta_2 \leq n}} \Delta^{\alpha_1} g(z_1) \ldots \Delta^{\alpha_r} g(z_r)\, g^{\beta_1}(y_1) \ldots g^{\beta_2}(y_2)$$

Lemme 7. *Soit g dans* $A_{B(n)}$ *et* x_o *non nul dans A, tel que* $g(x)$ $A\, x_o$, $\forall x$ A : *alors* g^{n+1} $A_{B(n)}\, x_o$.

Pour k, 0 k n : $\Delta^{k}_{h_1, \dots, h_k} \dfrac{g^{n+1}}{x_o}$ est une somme du type :

$$\sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_r = k \\ n-k < \beta_1 + \dots + \beta_l \; n}} \Delta^{\alpha_1} g(y_1) \dots \Delta^{\alpha_r} g(y_r) \; \frac{g^{\beta_1}(z_1) \dots g^{\beta_l}(z_l)}{x_o}$$

Une telle somme est dans A, donc $\dfrac{g^{n+1}}{x_o}$ $A_{B(n)}$.

Lemme 8. *Soit g dans* $A_{B(n)}$ *et* x_o *non nul dans* $\mathfrak{m}$. *On suppose que* $g(x)$ $\mathfrak{m}$ $\forall x$ 1. *Il existe alors s* 0 *tel que* g^s $A_{B(n)}\, x_o$.

Il existe r tel que $g^r(x)$ $A\, x_o$. $\forall x$ A.

Le polynôme $(g^r)^{n+1}$ $A_{B(n)}$ x_o ; donc $s = r(n+1)$ convient.

Proposition 9. *Les idéaux premiers de* $A_{B(n)}$ *au-dessus de* $\mathfrak{m}$ *sont maximaux et de corps résiduel* $A/\mathfrak{m}$.

Soient P un tel idéal et f dans P.

$\prod_{i=0}^{q-1} (f\text{-}u_i)(x)$ $\mathfrak{m}$ $\forall x$ A. Il existe donc un entier s tel que

$$\left[\prod_{i=0}^{q-1} (f\text{-}u_i)\right]^{s} \; A_{B(n)}\, x_o \subset P \qquad \text{où } x_o \in \mathfrak{m}^*$$

On peut donc trouver k tel que $f\text{-}u_k$ soit dans P. Ainsi $\dfrac{A_{B(n)}}{P} \simeq \dfrac{A}{\mathfrak{m}}$.

Théorème 10. *Les idéaux premiers de* $A_{B(n)}$ *au-dessus de* $\mathfrak{m}$ *sont en bijection avec les points de* $A/\mathfrak{m}$.

Remarque importante :

Les idéaux premiers de $A_{B(n)}$ au-dessus de $\mathfrak{m}$ se retrouvent dans $A_{B(n)} \otimes A/_{\mathfrak{m}}$. Les idéaux premiers de l'anneau $A_{B(n)} \otimes A/_{\mathfrak{m}}$ sont maximaux et minimaux et se relèvent dans n'importe quel anneau le contenant. Attention, l'épimorphisme canonique de $A_{B(n)}$ dans $\mathscr{C}(\hat{A}, \hat{A})$ ne demeure pas injectif après tensorisation par $A/_{\mathfrak{m}}$, mais le spectre demeure toutefois le même.

En effet : $\mathscr{C}(\hat{A}, \hat{A}) \otimes A/_{\mathfrak{m}} = \mathscr{C}(\hat{A}, A/_{\mathfrak{m}})$ contient $J = \dfrac{A_{B(n)} \otimes A/_{\mathfrak{m}}}{\ker \Psi}$ où Ψ est l'application :

$$A_{B(n)} \otimes \frac{A}{\mathfrak{m}} = \frac{A_{B(n)}}{\mathfrak{m}\, A_{B(n)}} \longrightarrow \mathscr{C}(\hat{A}, \hat{A}) \otimes A/_{\mathfrak{m}} = \frac{\mathscr{C}(\hat{A}, \hat{A})}{\mathfrak{m}\, \mathscr{C}(\hat{A}, \hat{A})}$$

$$\bar{g} \longrightarrow \dot{g}$$

Le spectre de J est le même que celui de $A_{B(n)} \otimes A/_{\mathfrak{m}}$ car si $\Psi(\bar{g}) = 0$, alors $g \in \mathfrak{m}\,\mathscr{C}(\hat{A}, \hat{A})$ et si x_o est un élément quelconque non nul de $\mathfrak{m}$, puisque g est dans $A_{B(n)}$, il existe s tel que $g^s \in A_{B(n)}\, x_o$, donc tel que $\bar{g}^s = 0$.

Ainsi ker $\Psi \subset \sqrt{(0)}$. Or tous les idéaux premiers de $A_{B(n)} \otimes A/_{\mathfrak{m}}$ contiennent $\sqrt{(0)}$ donc ker Ψ . Comme il existe une bijection entre les idéaux premiers de $A_{B(n)} \otimes A/_{\mathfrak{m}}$ contenant ker Ψ et les idéaux premiers de J, on a donc :

$$\operatorname{spec}(A_{B(n)} \otimes \frac{A}{\mathfrak{m}}) = \operatorname{spec}(J)$$

Les idéaux premiers de $A_{B(n)}$ au-dessus de $\mathfrak{m}$ se retrouvent dans $A_{B(n)} \otimes A/_{\mathfrak{m}}$, dont le spectre est le même que celui de J. Or les idéaux premiers de J se relèvent dans $\mathscr{C}(\hat{A}, A/_{\mathfrak{m}})$.

Pour connaître les idéaux premiers de $A_{B(n)}$ au-dessus de $\mathfrak{m}$, il suffit de connaître les idéaux premiers de $\mathscr{C}(\hat{A}, A/_{\mathfrak{m}})$ c'est-à-dire les idéaux premiers des fonctions localement constantes de $\hat{A}$ dans $A/_{\mathfrak{m}}$.

D'après [3] (Chapitre II, § IV Exercices) les idéaux premiers de cet anneau, sont en bijection avec les points de $\hat{A}$. A tout a dans $\hat{A}$ correspond :

$$\mathfrak{m}_a = \{ f \in \mathscr{C}(\hat{A}, \hat{A}) \,/\, f(a) \in \hat{\mathfrak{m}} \}$$

Les idéaux premiers de $A_{B(n)}$ au-dessus de $\mathfrak{m}$, sont donc de la forme :

$$M_a = \{ f \in A_{B(n)} \,/\, f(a) \in \hat{\mathfrak{m}} \}$$

De plus si $a \equiv b$ modulo $\mathfrak{m}$, alors $M_a = M_b$, car si $f \in A_{B(n)}$ le rapport $\frac{f(a) - f(b)}{a-b} = \Delta^1_{a-b} f(b) \in \hat{A}$. Ainsi si $u_o, u_1, \ldots, u_{q-1}$ sont les représentants de A modulo $\mathfrak{m}$, alors $M_{u_o}, M_{u_1}, \ldots, M_{u_{q-1}}$ sont les seuls idéaux de $A_{B(n)}$ au-dessus de $\mathfrak{m}$.

TROISIEME PARTIE : Etude spectrale de $A_{B(\infty)}$.

Comme dans le cas de $A_{B(n)}$, par localisation, on se ramène à la détermination de la fibre de $A_{B(\infty)}$ au-dessus de $\mathfrak{m}$.

Remarques : Si p est la caractéristique de $A/_{\mathfrak{m}}$, alors $q = p^s$ avec s entier $s \geq 1$ et p divise $\binom{q}{i}$ pour $1 \leq i \leq q-1$.

Le polynôme $g(X) = X^{q^2} - X^q$ vérifie :

$$\frac{g(h)}{h} = h^{q-1} \,[(h^q)^{q-1} - 1] \in \mathfrak{m} \quad \forall\, h \in A - \{0\}$$

$$g(X + h) = g(X) + p\,h\, \alpha(X) + g(h) \quad \text{où le polynôme } \alpha(X) \text{ est dans } A\,[X].$$

Posons $f(X) = \frac{g^{q^n}(X)}{x_o}$ où x_o est un élément de $\mathfrak{m}$ qu'on précisera.

D'après ce qui précède, on a :

$$\Delta^1_h f(X) = \frac{1}{h\, x_o} \,[\, ph\, \beta(X) + pg(h)\, \gamma(X) + g^{q^n}(h) \,]$$

$$\Delta^1_h f(X) = \frac{p}{x_o}\, \beta(X) + \frac{p\, g(h)}{x_o h}\, \gamma(X) + \frac{1}{h\, x_o}\, g^{q^n}(h)$$

Si K est de caractéristique p, les deux premiers termes sont nuls, on prend x_o dans $\mathfrak{m}$ non nul ;

pour n assez grand $\frac{1}{h\,x_o}\, g^{q^n}(h)$ est dans $\mathfrak{m}$.

Si la caractéristique de K est nulle, on prend $x_o = p$. Les deux premiers termes sont dans $A[X]$;

et pour n assez grand $\triangle_h^1 f(X)$ appartient à $A[X]$. Ainsi pour x_o convenablement bien choisi

dans $\mathfrak{m}$, pour n assez grand, $f(X) = \frac{g^{q^n}(X)}{x_o}$ est dans $A_{B(\infty)}$.

Soit P un idéal premier de $A_{B(\infty)}$ au-dessus de $\mathfrak{m}$. Pour n assez grand :

$g^{q^n}(X) = (X^{q^2} - X^q)^{q^n}$ est dans $A_{B(\infty)}\, x_o$ et $A_{B(\infty)}\, x_o$ est inclus dans P.

Dans $\frac{A}{\mathfrak{m}}$ qui est un corps fini à q éléments, on a :

$$\prod_{i=0}^{q-1} (X - \bar{u}_i) = X^q - X$$

par suite $$\left[\prod_{i=0}^{q-1} (X - \bar{u}_i)\right]^{q^{n+1}} = (X^{q^2} - X^q)^{q^n}$$

ce qui montre que dans $A[X]$, g^{q^n} est congru à $\prod_{i=0}^{q-1} (X - u_i)^{q^{n+1}}$ modulo $\mathfrak{m}[X]$.

D'où $\prod_{i=0}^{q-1} (X - u_i)^{q^{n+1}}$ est dans P. Il existe donc k, $0 \leq k \leq q-1$ tel que $X - u_k \in P$.

Et on conclut comme pour les $A_{B(n)}$. D'où

Théorème 11. *Les idéaux premiers de $A_{B(\infty)}$ au-dessus de $\mathfrak{m}$ sont en bijection avec les points de $A/\mathfrak{m}$.*

QUATRIEME PARTIE : Cas particulier où A est un anneau de valuation discrète.

On s'intéresse alors à la structure de A module de $A_{B(n)}$ ou de $A_{B(\infty)}$ dont on détermine une base. On démontre ensuite que ces anneaux de polynômes ne sont pas noethériens.

On note :

v : la valuation associée à A.

t : une uniformisante, donc un élément de A tel que $v(t) = 1$.

q : le cardinal de $A/\mathfrak{m}$ (supposé fini)

$(u_0, u_1, ..., u_{q-1})$ un système de représentants de A modulo $\mathfrak{m}$.

Soit $u_0, ..., u_n, ...$ une suite très bien répartie, bien ordonnée de $\hat{A}$ formée d'éléments de A.

On pose

$$P_n(X) = (X - u_0) \dots (X - u_{n-1}) \qquad Q_n(X) = \frac{P_n(X)}{P_n(u_n)} \quad \text{et } Q_0(X) = 1.$$

Alors les $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une base normale de $\mathscr{C}(\hat{A}, \hat{K})$, c'est-à-dire que toute fonction $f \in \mathscr{C}(\hat{A}, \hat{K})$ s'écrit d'une façon unique : $f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n(X)$ avec $a_n \in \hat{K}$ et $\lim_{n \to \infty} v(a_n) = \infty$.

On note A_{B*} l'un quelconque des anneaux $A_{B(n)}$ $(n \geq 1)$ ou $A_{B(\infty)}$.

Une base de A_{B*}.

Proposition 14. *Les A_{B*} sont des A modules libres avec des bases de polynômes de degré croissant.*

Soient $f_0, f_1, ..., f_s ...$ une suite de polynômes de A_{B*} , où f_s est de degré s et dont le coefficient directeur a une valuation minimale parmi les polynômes de degré s de A_{B*}. Alors la suite $(f_s)_{s \in \mathbb{N}}$ forme une base du A module A_{B*}.

BARSKY [2] a donné une caractérisation simple de l'appartenance d'un polynôme à l'anneau A_{B*} : la condition porte sur les valuations des coefficients :

Pour que le polynôme $f = \sum_{m=0}^{s} a_m Q_m$ de K [X] appartienne à $A_{B(n)}$, il faut et il suffit que :

$$v(a_m) - L(m,r) \geq 0, \forall m \geq r, \forall r \quad 0 \leq r \leq n$$

où $L(m, r) = \underset{0 \leq i_r < \dots < i_1 < m}{\mathrm{Max}} \{v(u_m - u_{i_1}) + v(u_{i_1} - u_{i_2}) + \dots + v(u_{i_{r-1}} - u_{i_r})\}$

Cette caractérisation permet de donner une base particulière de A_B*. On pose :

$$f_j^n = t^{\alpha_j^n} Q_j \quad \text{avec} \quad \alpha_j^n = \underset{0 \leq r \leq \inf(j,n)}{\mathrm{Max}} L(j,r)$$

$$f_j^\infty = t^{\alpha_j^\infty} Q_j \quad \text{avec} \quad \alpha_j^\infty = \underset{0 \leq r \leq j}{\mathrm{Max}} L(j,r) = \left[\frac{j}{q}\right]$$

Désignons par f_j^* cette suite de A_{B*}.

Puisque le coefficient directeur de f_j^* a une valuation minimale parmi les polynômes de degré j de A_{B*}, alors la suite $(f_j^*)_{j \in \mathbb{N}}$ est une base du A module A_{B*}.

Les A_{B*} ne sont pas noethériens.

Les anneaux $A_{S(n)}$ ne sont pas noethériens.

La démonstration de CAHEN repose essentiellement sur le fait que les idéaux du type $\mathfrak{m}_\alpha$ de $A_{S(n)}$ sont en bijection avec les points de $\hat{A}$. Mais pour $A_{B(n)}$, il faut changer d'argument ! En effet, les idéaux premiers de $A_{B(n)}$ au-dessus de $\mathfrak{m}$ sont en nombre fini, en bijection avec les éléments de $A/\mathfrak{m}$.

Pour tout polynôme $f(X) = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i$ de $\hat{K}[X]$, on appelle «valuation de f» et on note $\tilde{v}(f)$ le minimum des valuations des coefficients. Alors $\tilde{v}(f_j^*)$ n'est rien d'autre que la valuation du coefficient directeur de f_j^*.

On établit maintenant deux résultats de caractère technique

Proposition 15. *1) La suite des entiers $\tilde{v}(f_j^*)$ est décroissante.*

2) Quel que soit l'entier naturel r assez grand, il existe un indice n_r tel que pour tout $i < n_r$, $\tilde{v}(f_{n_r}^*) < \tilde{v}(f_i^*) - r$.

Le 1) résulte de l'inégalité :

$$\tilde{v}(f_j^*) \cdot \tilde{v}(X f_j^*) \quad (f_{j+1}^*)$$

pour établir 2) il faut faire plusieurs remarques.

On a :

$$\tilde{v}(Q_{q^r-1}) - \tilde{v}(Q_{q^r}) - \sum_{k=1}^{q^r-1} v_q(k) + \sum_{k=1}^{q^r} v_q(k) = r$$

d'où

$$\tilde{v}(f^{\infty}_{q^r-1}) - \tilde{v}(f^{\infty}_{q^r}) = \left[\frac{q^r-1}{q}\right] - \left[\frac{q^r}{q}\right] + r = r-1 .$$

On cherche un résultat du même genre avec les $f^n_{q^r}$.

On remarque pour cela que :

$$L(j,n) - L(j-1,n) + 1, \forall n \quad \mathbb{N}, \quad \forall j \quad n.$$

Cette relation est évidente si $L(j,n) = 0$.

Supposons donc $L(j,n) \quad 1$.

Pour calculer $L(j,n)$, on fait le choix de n entiers $i_1, i_2, \ldots, i_n$ tels que $i_1 + i_2 + \ldots + i_n \leq j$ et rendant maximal $v_q(i_1) + \ldots + v_q(i_n)$.

Le maximum est réalisé par un système $i_1, i_2, \ldots, i_n$ où (en renumérotant au besoin les indices) : $v_q(i_1) \geq 1$.

Puisque q divise i_1, on peut remplacer i_1 par $i'_1 = \dfrac{i_1}{q}$. On a alors :

$$i'_1 + i_2 + \ldots + i_n \leq j-1$$

et
$$v_q(i'_1) + v_q(i_2) + \ldots + v_q(i_n) = L(j,n) - 1$$

Donc
$$L(j-1,n) \geq L(j,n) - 1$$

Il s'ensuit que pour r assez grand, on a :

$$L(q^r,n) - L(q^r-1,n) \leq 1.$$

Et comme, d'autre part, pour j assez grand, $\alpha^n_j = L(j,n)$ on a :

$$\tilde{v}(f^{n}_{q^r-1}) - \tilde{v}(f^{n}_{q^r}) = L(q^r - 1, n) - L(q^r, n) + r \geq r-1$$

puisque la suite $v(f_j^*)$ est décroissante, il suffit, pour obtenir le résultat cherché de poser $n_r = q^{r+2}$.

Pour démontrer que les A_{B^*} ne sont pas noethériens, on établit un résultat plus général.

Proposition 16. *Soit R un sous-anneau de* $\mathscr{C}(\hat{A}, \hat{K})$ *qui est un A module libre possédant une base de polynômes* $f_o, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ *telle que :*

1) X divise f_1 *dans* $\hat{K}[X]$.

2) f_i *divise* f_{i+1} *dans* $\hat{K}[X]$.

3) pour tout entier naturel k, il existe un indice n_k *tel que*

$\tilde{v}(f_{n_k}) < \tilde{v}(f_i) - k$ *pour* $i < n_k$.

Alors R n'est pas noethérien.

Remarque. La base particulière (f_j^*) vérifie évidemment les trois hypothèses de cette proposition.

Démonstration :

Soit I_k l'idéal engendré par les polynômes f_j tels que $j \geq 1$ et $\tilde{v}(f_j) \quad -k$. La suite des idéaux I_k est croissante ; et tout f_n $(n \geq 1)$ appartient à l'un de ceux-ci. Montrons que cette suite n'est pas stationnaire. Plus précisément, montrons que $f_{n_k} \notin I_k \ \forall k$

si $f_{n_k} \in I_k$, alors

$$f_{n_k} = \sum_j g_j f_j \quad \text{où} \quad g_j \in R$$

(somme sur un nombre fini d'indices j tels que $\tilde{v}(f_j) \geq -k$).

On a : $$g_j = \sum_{i < n_k} a_{i,j} f_i + \sum_{i \geq n_k} a_{i,j} f_i \quad \text{où} \quad a_{i,j} \in A$$

puisque pour $i \geq n_k$, f_i est divisible par f_{n_k} dans $\hat{K}[X]$, on a :

$$g_j \; G_j + f_{n_k}\varphi_j \quad \text{où} \quad \varphi_j \quad \hat{K}[X]$$

et
$$G_j = \sum_{i < n_k} a_{i,j}\, f_i$$

On a :
$$\tilde{v}(G_j) \quad \inf_{i < n_k} \tilde{v}(f_i) > \tilde{v}(f_{n_k}) + k \qquad \text{(hypothèse 3)}$$

et
$$f_{n_k} = \sum_j G_j\, f_j + f_{n_k} \sum_j \varphi_j\, f_j$$

puisque j 1, f_j est divisible par X dans $\hat{K}[X]$

$$f_{n_k}(1 - X\varphi) = \sum_j G_j\, f_j \quad \text{où} \quad \varphi \quad \hat{K}[X] .$$

Mais alors, on a d'une part $\tilde{v}(1 - X\varphi)$ 0 (le terme constant est 1) donc

$$\tilde{v}(f_{n_k}(1 - X\varphi)) \leq \tilde{v}(f_{n_k})$$

D'autre part :
$$\tilde{v}(G_j\, f_j) > \tilde{v}(f_{n_k}) + k - k$$

donc $\tilde{v}(\sum_j G_j\, f_j)$ $\tilde{v}(f_{n_k})$. Une contradiction !

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. AMICE : Interpolation p-adique. Thèse Université de Paris (1964).

[2] D. BARSKY : Bull., Soc., Math. France 101 (1973) pp. 397-411.

[3] N. BOURBAKI : Algèbre commutative.Paris, Hermann.

[4] D. BRIZOLIS : Ideals of Rings of integer valued polynomials. Thèse - University of California - Los Angeles (1973).

[5] P.J. CAHEN : Polynômes et dérivées à valeurs entières, Ann. Sci., Université de Clermont (1975) pp. 27-43.

[6] P.J. CAHEN et J.L. CHABERT : Coefficients et valeurs d'un polynôme. Bull. Sci. Math., 95 (1971) pp. 295-304.

[7] J.L. CHABERT : Les idéaux premiers de l'anneau des polynômes à valeurs entières. Journal für die reine und angervandte Mathematik (1977) pp. 275-283.

[8] H. MATSUMARA : Commutative algebra. W.A. BENJAMIN. Inc New York (1970).