

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

J.-L. CHABERT

Polynômes à valeurs entières ainsi que leurs dérivées

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 68, série *Mathématiques*, n° 18 (1979), p. 47-64

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1979__68_18_47_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

POLYNOMES A VALEURS ENTIERES AINSI QUE LEURS DERIVEES

J.-L. CHABERT

Université de Toulouse le Mirail

§ 1. Introduction.

Etant donné un anneau intègre A de corps des fractions K , notons $A[X]_{\text{sub}}$ l'anneau des polynômes à valeurs entières sur A , $A[X]_{\text{sub}}^{(k)}$ l'anneau des polynômes à valeurs entières sur A ainsi que leurs k premières dérivées ($k \in \mathbb{N}$) et $A[X]_{\text{sub}}^{(\infty)}$ l'anneau des polynômes à valeurs entières sur A ainsi que toutes leurs dérivées, c'est-à-dire :

$$1.1. \quad A[X]_{\text{sub}} = \{P(X) \in K[X] \mid P(a) \in A \text{ pour tout } a \in A\}.$$

$$1.2. \quad A[X]_{\text{sub}}^{(k)} = \{P(X) \in K[X] \mid P^{(h)}(X) \in A[X]_{\text{sub}} \text{ pour } 0 \leq h \leq k\}.$$

$$1.3. \quad A[X]_{\text{sub}}^{(\infty)} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A[X]_{\text{sub}}^{(k)}.$$

On a alors les inclusions :

$$1.4. \quad A[X] \subset A[X]_{\text{sub}}^{(\infty)} \subset A[X]_{\text{sub}}^{(k)} \subset A[X]_{\text{sub}} \subset K[X].$$

Lorsque A est un anneau de valuation, on sait bien décrire le spectre de l'anneau $A[X]_{\text{sub}}$ (cf. [5]). Dans les Annales Scientifiques de l'Université de Clermont, P.-J. Cahen [2] a généralisé cette description à l'anneau $A[X]_{\text{sub}}^{(k)}$ où $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. En fait, tout idéal premier de $A[X]_{\text{sub}}^{(k)}$ est au-dessous d'un idéal premier de $A[X]_{\text{sub}}$.

Ici, nous voulons généraliser ces résultats au cas où A est un anneau intègre noethérien quelconque. Notre méthode consiste à utiliser la détermination dans ce cas général du spectre de $A[X]_{\text{sub}}$ en fonction de celui de A (cf. [4]) et le fait que, pour tout idéal maximal m de A et pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $A_m[X]_{\text{sub}}$ est entier sur $A_m[X]_{\text{sub}}^{(k)}$.

§ 2. Préliminaires.

2.1. Localisation. On vérifie sans peine que les formules suivantes sont vraies pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sachant qu'elles le sont pour $k = 0$ (cf. [3]) :

$$a) S^{-1}(A[X]_{\text{sub}}^{(k)}) \subset (S^{-1}A)[X]_{\text{sub}}^{(k)} \text{ pour toute partie multiplicative } S \text{ de } A$$

$$b) S^{-1}(A[X]_{\text{sub}}^{(k)}) = (S^{-1}A)[X]_{\text{sub}}^{(k)} \text{ lorsque l'anneau } A \text{ est noethérien}$$

$$c) A[X]_{\text{sub}}^{(k)} = \bigcap_{m \in \text{Max}(A)} A_m[X]_{\text{sub}}^{(k)}$$

$$d) A_p[X]_{\text{sub}}^{(k)} = A_p[X] \text{ pour tout idéal premier } p \text{ de } A \text{ tel que } A/p \text{ soit infini.}$$

Si l'anneau A est de cardinal fini, alors c'est un corps et tous les anneaux considérés sont égaux à $K[X]$, il n'y a plus de problème. On supposera A de *cardinal infini*. Soit p un idéal premier de A . Pour trouver les idéaux premiers de $A[X]_{\text{sub}}^{(k)}$ au-dessus de p , il peut être intéressant de localiser en p . Si le quotient A/p est infini, la localisation marche bien :

$$(A[X]_{\text{sub } p}^{(k)}) = A_p[X]_{\text{sub}}^{(k)} = A_p[X] \text{ compte tenu de 2.1.d) et donc :}$$

2.2. Les idéaux premiers de $A[X]_{\text{sub}}^{(k)}$ au-dessus d'un idéal premier p de A tel que A/p soit infini sont les intersections avec $A[X]_{\text{sub}}^{(k)}$ des idéaux premiers de $A_p[X]$ au-dessus de p et ceux-ci sont de la forme $pA_p[X]$ ou de la forme $(p, Q(X))A_p[X]$ où $Q(X) \in A_p[X]$ a une image dans $(A_p/pA_p)[X]$ irréductible.

En particulier, les idéaux premiers de $A[X]_{\text{sub}}^{(k)}$ au-dessus de l'idéal (0) de A sont l'idéal (0) et les idéaux de la forme :

$$P_Q^{(k)} = \{Q.R \in A[X]_{\text{sub}}^{(k)} \mid R \in K[X]\} \text{ où } Q(X) \text{ est un polynôme de } K[X]$$

irréductible défini à un facteur multiplicatif, élément de K^* , près. Ces idéaux $P_Q^{(k)}$ sont tous de hauteur 1 et le localisé de $A[X]_{\text{sub}}^{(k)}$ correspondant est l'anneau $K[X]_{(Q)}$ de valuation Q -adique de $K(X)$.

On s'intéressera donc au cas où A/p est fini et où donc, en particulier, p est maximal. Dans ce cas, il se peut que $(A[X]_{\text{sub } p}^{(k)})$ soit strictement inclus dans $A_p[X]_{\text{sub}}^{(k)}$ (cf. [3]). on supposera donc A *noethérien*. On pourra alors localiser grâce à 2.1.b) et supposer A *local*. Aussi, désormais :

2.3. Notations. On notera A un anneau intègre noethérien de corps des fractions K local d'idéal maximal m et de corps résiduel A/m de cardinal fini $q = p^f$.

On notera aussi \hat{A} le complété de A pour la topologie m -adique, A' la clôture intégrale de A et \bar{A} la fermeture intégrale de A dans une clôture algébrique de K .

§ 3. L'anneau $A[X]_{\text{sub}}$.

Il s'agit principalement de rappeler des résultats déjà connus :

3.1. Proposition. [4]. L'anneau $A[X]_{\text{sub}}$ s'injecte dans l'anneau $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$ des fonctions continues de \hat{A} dans \hat{A} : à tout polynôme P à valeurs entières sur A on peut associer l'application uniformément continue :

$$x \in \hat{A} \mapsto P(x) \in \hat{A}.$$

3.2. Proposition. [4]. Si l'anneau A est de dimension 1, les idéaux premiers de $A[X]_{\text{sub}}$ au-dessus de m sont tous de la forme :

$$m_x = \{ P(X) \in A[X]_{\text{sub}} \mid P(x) \in m\hat{A} \} \quad \text{où } x \text{ est un élément de } \hat{A}.$$

Ces idéaux sont tous maximaux de corps résiduel isomorphe à A/m .

3.3. Remarque. Nous avons vu dans [5] que, si les idéaux m_x et m_y sont égaux, alors les éléments x et y aussi lorsque A est un anneau de valuation discrète et nous nous demandions dans [4] s'il en était ainsi pour tout anneau A (vérifiant les hypothèses 2.3). En fait :

Lorsque l'anneau \hat{A} n'est pas intègre, dès que $x-y$ est diviseur de zéro dans \hat{A} , alors les idéaux m_x et m_y sont égaux.

En effet, soient x et y dans \hat{A} tels que $x-y$ soit un diviseur de zéro dans \hat{A} . Soient $P(X) \in A[X]_{\text{sub}}$ et $d \in A - \{0\}$ tels que $dP(X)$ appartienne à $A[X]$. En notant p_i les coefficients de P , on a :

$$d(P(x) - P(y)) = (x-y) \sum_{i \geq 1} (dp_i) (x^i - y^i) / (x-y) \quad \text{où } dp_i \in A$$

et $(x^i - y^i) / (x-y) \in \hat{A}$. Ainsi, $d(P(x) - P(y))$ est diviseur de zéro dans \hat{A} , or d n'étant pas diviseur de zéro dans A , n'est pas non plus diviseur de zéro dans \hat{A} ([1], III), par suite $P(x) - P(y)$ est diviseur de zéro dans \hat{A} , et en particulier appartient à $m\hat{A}$, d'où : $m_x = m_y$.

3.4. Proposition. [4]. Si l'anneau A est de dimension > 1 , alors l'anneau $A[X]_{\text{sub}}$ est contenu dans l'anneau $A[X]$.

3.5. Remarques. a) Lorsque l'anneau A est de dimension > 1 , les inclusions 1.4 montrent que, pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $A[X]_{\text{sub}}$ est entier sur $A[X]_{\text{sub}}^{(k)}$.

b) La proposition 3.4 est encore vraie lorsque A est un anneau intègre noethérien tel que tout idéal maximal de corps résiduel fini soit de hauteur > 1 .

3.6. Corollaire. [4]. Si l'anneau A est de dimension > 1 , les idéaux premiers de $A[X]_{\text{sub}}$ au-dessus de \mathfrak{m} sont soit de la forme $\mathfrak{m}_i[X] \cap A[X]_{\text{sub}}$ où \mathfrak{m}_i décrit l'ensemble fini des idéaux maximaux de A , soit de la forme $\bar{\mathfrak{m}}_x = \{P(X) \in A[X]_{\text{sub}} \mid P(x) \in \bar{\mathfrak{m}}\}$ où $\bar{\mathfrak{m}}$ est un idéal maximal de \bar{A} et où x appartient à \bar{A} .

Compte-tenu de la remarque 3.5.a) :

3.7. Corollaire. Si l'anneau A est de dimension > 1 , pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, les idéaux premiers de l'anneau $A[X]_{\text{sub}}^{(k)}$ au-dessus de \mathfrak{m} sont soit de la forme $\mathfrak{m}_i[X] \cap A[X]_{\text{sub}}^{(k)}$, soit de la forme $\bar{\mathfrak{m}}_x^{(k)} = \{P(X) \in A[X]_{\text{sub}}^{(k)} \mid P(x) \in \bar{\mathfrak{m}}\}$.

On pourra donc se restreindre au cas où A est de dimension 1.

§ 4. L'anneau $A[X]_{\text{sub}}^{(k)}$ où $k \in \mathbb{N}$.

On conserve les hypothèses et notations 2.3.

4.1. Proposition. *Si l'anneau A est de dimension 1, quels que soient le polynôme $P(X) \in A[X]_{\text{sub}}$ et l'entier $k \in \mathbb{N}$, il existe $s \in \mathbb{N} - \{0\}$ tel que $P(X)^s$ appartienne à $A[X]_{\text{sub}}^{(k)}$.*

Démonstration. Soient $P(X) \in A[X]_{\text{sub}}$ et $k \in \mathbb{N}$. Notons que si $P(X)$ appartient à $A[X]$, alors $P(X)$ appartient à $A[X]_{\text{sub}}^{(k)}$. Soit $d \in m - \{0\}$ tel que $dP(X)$ appartienne à $A[X]$. Puisque le radical de l'idéal dA est m et que la caractéristique p du corps résiduel A/m appartient à m , il existe un entier r tel que p^r appartienne à dA . Montrons que l'entier $s = p^{kr}$ convient, c'est-à-dire que le polynôme $Q(X) = P(X)^s$ appartient à $A[X]_{\text{sub}}^{(k)}$.

Pour $1 \leq h \leq k$, $Q^{(h)}(X)$ est de la forme :

$$\sum_{i=1}^h \sum_{a_1 + 2a_2 + \dots + ia_i = h} p^{kr} t_{a_0 a_1 \dots a_i} P(X)^{a_0} P'(X)^{a_1} \dots P^{(i)}(X)^{a_i}$$

où $t_{a_0 a_1 \dots a_i}$ appartient à \mathbb{N} . Comme $dP^{(i)}(X)$ appartient à $A[X]$ et $p^r/d \in A$, $p^r P^{(i)}(X)$ appartient à $A[X]$ et comme $P(X)$ appartient à $A[X]_{\text{sub}}$, finalement $Q^{(h)}(X)$ appartient à $A[X]_{\text{sub}}$.

4.2 Remarque. La proposition précédente est encore vraie lorsque A est un anneau intègre noethérien tel que tout idéal maximal de corps résiduel fini soit de hauteur 1.

En effet, soient $P(X) \in A[X]_{\text{sub}}$, $k \in \mathbb{N}$ et $d \in A - \{0\}$ tel que $dP(X)$ appartienne à $A[X]$. Pour tout idéal maximal m de A tel que A/m soit infini ou tel que d n'appartienne pas à m , $P(X)$ appartient à $A_m[X]$. Les idéaux maximaux m de A tels que A/m soit fini et que

d appartient à m sont en nombre fini ; à chacun on peut associer un entier $s_m > 0$ tel que $P(X)^{s_m}$ appartient à $A_m[X]_{\text{sub}}^{(k)}$; soit $s = \prod_m s_m$, alors pour tout idéal maximal m de A , $P(X)^s$ appartient à $A_m[X]_{\text{sub}}^{(k)}$, d'où $P(X)$ appartient à $A[X]_{\text{sub}}^{(k)}$ (d'après 2.1.c)).

4.3. Proposition. *L'anneau $A[X]_{\text{sub}}$ est entier sur l'anneau $A[X]_{\text{sub}}^{(k)}$ quel que soit l'entier k .*

Démonstration. Lorsque A est de dimension 1, cela résulte de la proposition 4.1 : tout $P(X) \in A[X]_{\text{sub}}$ est solution d'une équation de la forme $Y^s - Q(X) = 0$ où

$Q(X) \in A[X]_{\text{sub}}^{(k)}$. Lorsque A est de dimension strictement supérieure à 1, cela résulte de la proposition 3.4 : on a les inclusions : $A[X] \subset A[X]_{\text{sub}}^{(k)} \subset A[X]_{\text{sub}} \subset A'[X]$.

Par suite, les idéaux premiers de $A[X]_{\text{sub}}^{(k)}$ au-dessus de m sont les intersections avec $A[X]_{\text{sub}}^{(k)}$ des idéaux premiers de $A[X]_{\text{sub}}$ au-dessus de m . Ainsi de la proposition 3.2, résulte la :

4.4. Proposition. *Si l'anneau A est de dimension 1, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, les idéaux premiers de l'anneau $A[X]_{\text{sub}}^{(k)}$ au-dessus de m sont les idéaux maximaux*

$$m_x^{(k)} = \{P(X) \in A[X]_{\text{sub}}^{(k)} \mid P(x) \in m\hat{A}\} \quad \text{où } x \text{ est un élément quelconque de } \hat{A}$$

de corps résiduel isomorphe à A/m . En outre, l'application : $m_x \mapsto m_x^{(k)} = m_x \cap A[X]_{\text{sub}}^{(k)}$ est une bijection de l'ensemble des idéaux premiers de $A[X]_{\text{sub}}$ au-dessus de m sur l'ensemble des idéaux premiers de $A[X]_{\text{sub}}^{(k)}$ au-dessus de m .

En effet, si $P(X)$ appartient à m_x et n'appartient pas à m_y , d'après la proposition 4.1, il existe s tel que $P(X)^s$ appartienne à $m_x^{(k)}$, alors que $P(X)^s$ ne peut appartenir à $m_y^{(k)}$.

4.5. Remarque. La proposition précédente généralise un résultat de Cahen [2], on ne peut l'obtenir ici en généralisant la méthode. En effet, cette méthode utilise le fait que $A[X]_{\text{sub}}$ est dense dans l'anneau $\mathcal{O}(\hat{A}, \hat{A})$ muni de la topologie de la convergence uniforme lorsque l'anneau A est un anneau de valuation discrète de corps résiduel fini. Or l'anneau $A[X]_{\text{sub}}$ n'est pas dense dans l'anneau $\mathcal{O}(\hat{A}, \hat{A})$, en particulier lorsque A est de dimension strictement supérieure à 1, ou lorsque \hat{A} possède des diviseurs de zéro (car alors les idéaux m_x ne sont pas tous distincts lorsque x décrit \hat{A}). On ne sait pas si $A[X]_{\text{sub}}$ est dense dans $\mathcal{O}(\hat{A}, \hat{A})$ lorsque A est de dimension 1 et \hat{A} intègre.

4.6. Corollaire. Si l'anneau A est de dimension 1, le radical de l'idéal m $A[X]_{\text{sub}}^{(k)}$ est l'idéal $I^{(k)} = \{P(X) \in A[X]_{\text{sub}}^{(k)} \mid P(A) \in m\}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A[X]_{\text{sub}}^{(k)} / I^{(k)}$ est isomorphe à $A[X]_{\text{sub}} / I$.

Démonstration. Le radical de l'idéal m $A[X]_{\text{sub}}^{(k)}$ est l'intersection des idéaux premiers de $A[X]_{\text{sub}}^{(k)}$ contenant m , c'est-à-dire des $m_x^{(k)}$ où x décrit \hat{A} et, comme $A[X]_{\text{sub}}$ est contenu dans $\mathcal{O}(\hat{A}, \hat{A})$, c'est aussi l'intersection des $m_a^{(k)}$ où a décrit A , c'est donc $I^{(k)}$.

Soient $k \in \mathbb{N}$, $P(X) \in A[X]_{\text{sub}}$ et $r \in \mathbb{N}$ tel que P^{q^r} appartienne à $A[X]_{\text{sub}}^{(k)}$.

Posons $Q(X) = P(X) - P(X)^{q^r} = P(X)(1 - P(X)^{q^r-1})$. Puisque le groupe multiplicatif $A/m - \{0\}$ est d'ordre $q-1$, pour tout $a \in A$, $Q(a)$ appartient à m . Donc $A[X]_{\text{sub}} = A[X]_{\text{sub}}^{(k)} + I$. D'où l'isomorphisme qui met d'ailleurs en évidence la bijection entre les idéaux premiers au-dessus de m .

4.7. Remarque. Lorsque la caractéristique de K est $p \neq 0$, quel que soit $P(X) \in A[X]_{\text{sub}}$, $P(X)P$ appartient à $A[X]_{\text{sub}}^{(\infty)}$ et donc les résultats 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 et 4.6 sont valables pour $k = \infty$. On peut donc désormais supposer K de caractéristique 0.

§ 5. L'anneau $A[X]_{\text{sub}}^{(\infty)}$.

Conservons les hypothèses et notations 2.3 et supposons l'anneau A de dimension 1 et le corps K de caractéristique o .

5.1. Proposition. *Le radical de l'idéal m de $A[X]_{\text{sub}}^{(\infty)}$ est l'idéal*

$$I^{(\infty)} = \{P(X) \in A[X]_{\text{sub}}^{(\infty)} \mid P(A) \subset m\} = I^{(k)} \cap A[X]_{\text{sub}}^{(\infty)} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I^{(k)}.$$

Démonstration. Puisque $o \neq pA \subset m$ et que $\sqrt{pA} = m$, il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que

$$m^{pt} \subset pA. \text{ Soit } P \in I^{(\infty)}, \text{ posons } Q = \frac{1}{p} P^{pt}. \text{ On a } Q(A) \subset \frac{1}{p} m^{pt} \subset A, \text{ d'où}$$

$$Q \in A[X]_{\text{sub}} \text{ et en fait : } Q = t P^{pt-1} P' \in A[X]_{\text{sub}}, \dots, Q \in A[X]_{\text{sub}}^{(\infty)}.$$

Ainsi, $P^{pt} = pQ$ appartient à $pA[X]_{\text{sub}}^{(\infty)}$, et par suite à $m A[X]_{\text{sub}}^{(\infty)}$.

5.2. Proposition. *Les idéaux premiers de $A[X]_{\text{sub}}^{(\infty)}$ au-dessus de m sont les idéaux maximaux*

$$m_x^{(\infty)} = \{P(X) \in A[X]_{\text{sub}}^{(\infty)} \mid P(x) \in m\hat{\Lambda}\} \quad \text{où } x \text{ est un élément quelconque de } \hat{\Lambda},$$

ils sont de corps résiduel isomorphe à A/m .

Démonstration. Tout idéal premier M de $A[X]_{\text{sub}}^{(\infty)}$ au-dessus de m contient $m A[X]_{\text{sub}}^{(\infty)}$,

donc $I^{(\infty)}$ d'après la proposition précédente et par suite $M/I^{(\infty)}$ est un idéal premier de

l'anneau $A[X]_{\text{sub}}^{(\infty)}/I^{(\infty)}$; or, cet anneau s'injecte dans l'anneau $A[X]_{\text{sub}}/I$. Comme tout

idéal premier minimal du premier anneau est image réciproque d'un idéal premier minimal du deuxième, que tout idéal premier du deuxième est de la forme m_x/I , que son image

réciproque $m_x^{(\infty)}/I^{(\infty)}$ est un idéal maximal, on voit que l'on obtient ainsi tous les idéaux

premiers de $A[X]_{\text{sub}}^{(\infty)}/I^{(\infty)}$.

5.3. Proposition. *Les idéaux premiers de $A[X]_{\text{sub}}^{(\infty)}$ au-dessus de m sont en nombre fini.*

Démonstration. Si v_p désigne la valuation p -adique de \mathbb{Q} , il est facile de vérifier que $v_p(n!) < n/(p-1)$. Par suite, si $x-y$ appartient à l'idéal $p\hat{A}$, alors, pour tout $n \geq 1$, $(y-x)^n/n!$ appartient à l'idéal $p\hat{A}$. Ainsi, dès que $x-y$ appartient à $p\hat{A}$, pour tout polynôme $P(X) \in A[X]_{\text{sub}}^{(\infty)}$ de degré k , la différence :

$$P(x) - P(y) = (y-x)P'(x) + (y-x)^2/2! P''(x) + \dots + (y-x)^k/k! P^{(k)}(x)$$

appartient à $p\hat{A}$, donc à $m\hat{A}$, autrement dit $m_x^{(\infty)} = m_y^{(\infty)}$.

Comme il existe $r \in \mathbb{N} - \{0\}$ tel que m^r soit contenu dans $p\hat{A}$, le quotient $\hat{A}/p\hat{A}$ est fini et les idéaux $m_x^{(\infty)}$ sont en nombre fini.

5.4. Remarque. La proposition précédente montre que lorsque les idéaux m_x de $A[X]_{\text{sub}}$ sont en nombre infini (ce qui est le cas lorsque A est un anneau de valuation discrète de corps résiduel fini) l'isomorphisme entre $A[X]_{\text{sub}}^{(k)}/I^{(k)}$ et $A[X]_{\text{sub}}/I$ ne peut avoir lieu pour $k = \infty$.

§ 6. Polynômes à plusieurs variables (préliminaires).

Ce qui précède se généralise assez facilement aux polynômes à plusieurs variables aux difficultés de notations près.

6.1. Notations. Soit n un entier ≥ 1 supposé fixé. Le symbole \underline{X} désignera le n -uplet (X_1, \dots, X_n) . Pour tout anneau intègre A de corps des fractions K , on notera $A[\underline{X}]_{\text{sub}}$ l'anneau $A[X_1, \dots, X_n]_{\text{sub}} = \{P(X_1, \dots, X_n) \in K[X_1, \dots, X_n] \mid P(a_1, \dots, a_n) \in A \text{ pour tout } (a_1, \dots, a_n) \in A^n\}$. Pour tout n -uplet $\underline{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \bar{\mathbb{N}}^n$ (où $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$) notons $A[\underline{X}]_{\text{sub}}^{(\underline{k})}$ l'anneau :

$$\left\{ P(\underline{X}) \in K[\underline{X}] \mid \frac{\partial^{h_1 + \dots + h_n} P}{\partial X_1^{h_1} \dots \partial X_n^{h_n}}(\underline{X}) \in A[\underline{X}]_{\text{sub}} \text{ pour } 0 \leq h_1 \leq k_1, \dots, 0 \leq h_n \leq k_n \right\}$$

De façon analogue aux formules 2.1, on a :

6.2. Formules.

- $S^{-1}(A[\underline{X}]_{\text{sub}}^{(\underline{k})}) \subset (S^{-1}A)[\underline{X}]_{\text{sub}}^{(\underline{k})}$ pour toute partie multiplicative S de A .
- $S^{-1}(A[\underline{X}]_{\text{sub}}^{(\underline{k})}) = (S^{-1}A)[\underline{X}]_{\text{sub}}^{(\underline{k})}$ lorsque A est noethérien.
- $A[\underline{X}]_{\text{sub}}^{(\underline{k})} = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \text{Max}(A)} A_{\mathfrak{m}}[\underline{X}]_{\text{sub}}^{(\underline{k})}$
- $A_{\mathfrak{p}}[\underline{X}]_{\text{sub}}^{(\underline{k})} = A_{\mathfrak{p}}[\underline{X}]$ pour tout idéal premier \mathfrak{p} de A tel que A/\mathfrak{p} soit infini.

La formule a) se déduit par récurrence sur n de la formule 2.1.a). La formule b) résulte de ce qu'un sous-module d'un module de type fini sur un anneau noethérien est de type fini. La formule c) est immédiate compte-tenu de a). La formule d) se déduit de résultats généraux sur les polynômes à coefficients dans des modules (cf. [3]).

Comme dans le cas d'une variable, les idéaux premiers de $A[\underline{X}]_{\text{sub}}^{(k)}$ au-dessus d'un idéal premier \mathfrak{p} de A tel que A/\mathfrak{p} soit infini se déduisent de ceux de $A_{\mathfrak{p}}[\underline{X}]$ au-dessus de \mathfrak{p} (d'après 6.2.d)). On s'intéressera donc aux idéaux premiers au-dessus des idéaux maximaux de A de corps résiduel fini. Pour simplifier on supposera A noethérien et, compte-tenu de 6.2.b), on peut supposer A local.

Reprenons donc les hypothèses et notations 2.3.

6.3. Proposition. *Si A est de dimension strictement supérieure à 1, alors l'anneau $A[\underline{X}]_{\text{sub}}$ est inclus dans l'anneau $A'[\underline{X}]$ où A' désigne la clôture intégrale de A .*

Démonstration. Il suffit de reprendre la démonstration de la proposition pour une variable [4].

L'anneau A' est de Krull de dimension au moins égale à 2 et $A' = \bigcap_{\mathfrak{p}'} A'_{\mathfrak{p}'}$, où \mathfrak{p}' décrit

l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de A' . Comme \mathfrak{p}' n'est pas maximal, A'/\mathfrak{p}' est infini, de même A/\mathfrak{p} est infini où $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap A$ et $A_{\mathfrak{p}}[\underline{X}]_{\text{sub}} = A_{\mathfrak{p}}[\underline{X}]$, d'où :

$$A[\underline{X}]_{\text{sub}} \subset A_{\mathfrak{p}}[\underline{X}]_{\text{sub}} = A_{\mathfrak{p}}[\underline{X}] \subset A'_{\mathfrak{p}'}[\underline{X}] \text{ et } A[\underline{X}]_{\text{sub}} \subset \bigcap_{\mathfrak{p}'} A'_{\mathfrak{p}'}[\underline{X}] = A'[\underline{X}].$$

Par suite, $A'[\underline{X}]$ est entier sur $A[\underline{X}]_{\text{sub}}^{(k)}$ pour tout $\underline{k} \in \bar{\mathbb{N}}^n$ et les idéaux premiers de $A[\underline{X}]_{\text{sub}}^{(k)}$ se déduisent des idéaux premiers de $A'[\underline{X}]$. Nous pourrions donc nous restreindre au cas où A est de dimension 1.

§ 7. Polynômes à plusieurs variables et fonctions continues.

Conservons toujours les hypothèses et notations 2.3.

7.1. Proposition. *L'anneau $A[\underline{X}]_{\text{sub}}$ s'injecte dans l'anneau $\mathcal{C}(\hat{A}^n, \hat{A})$ des fonctions continues de \hat{A}^n dans \hat{A} .*

Démonstration. Adaptons la démonstration faite dans [4] dans le cas d'une variable. Pour tout élément non nul x de A , il existe un entier $r(x)$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\underline{a} \in \hat{A}$, $x \underline{a}$ appartient à $\hat{m}^{n+r(x)}$ implique \underline{a} appartient à \hat{m}^n (d'après le lemme d'Artin-Rees).

Soit $P(\underline{X}) = \sum p_{i_1 \dots i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$ un élément de $A[\underline{X}]_{\text{sub}}$ et soit $x \in A - \{0\}$

tel que $xP(\underline{X})$ appartienne à $A[\underline{X}]$. Soit $s \in \mathbb{N}$ et soient $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ et $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ des éléments de A^n tels que, quel que soit $i \in \{1, \dots, n\}$, $a_i - b_i$ appartienne à $\hat{m}^{s+r(x)}$.

On a : $x(P(\underline{a}) - P(\underline{b})) = x(P(a_1, a_2, \dots, a_n) - P(b_1, a_2, \dots, a_n)) - x(P(b_1, a_2, \dots, a_n) - P(b_1, b_2, \dots, a_n)) + \dots + x(P(b_1, \dots, b_{n-1}, a_2) - P(b_1, \dots, b_n))$.

Or, par exemple :

$$x(P(a_1, a_2, \dots, a_n) - P(b_1, a_2, \dots, a_n)) = x \sum_{i_1 \geq 1} p_{i_1 \dots i_n} (a_1^{i_1} - b_1^{i_1}) a_2^{i_2} \dots a_n^{i_n} =$$

$$(a_1 - b_1) \sum_{i_1 \geq 1} x p_{i_1 \dots i_n} \frac{a_1^{i_1} - b_1^{i_1}}{a_1 - b_1} a_2^{i_2} \dots a_n^{i_n}, \text{ ceci appartient à } (a_1 - b_1)A \text{ et,}$$

par suite à $\hat{m}^{s+r(x)}$. Donc : $x(P(\underline{a}) - P(\underline{b}))$ appartient à $\hat{m}^{s+r(x)}$ et par suite $P(\underline{a}) - P(\underline{b})$ appartient à \hat{m}^s .

Ainsi, P peut être considéré comme une application uniformément continue de A^n dans A , elle est prolongeable en une application uniformément continue :

$$\underline{a} \in \hat{A}^n \longmapsto P(\underline{a}) \in \hat{A}.$$

La proposition précédente montre que :

7.2. Pour tout $\underline{x} \in \hat{A}^n$, l'ensemble $m_{\underline{x}} = \{P(\underline{X}) \in A[\underline{X}]_{\text{sub}} \mid P(\underline{x}) \in m\hat{A}\}$ est un idéal, cet idéal est maximal de corps résiduel isomorphe à A/m .

Continuons l'analogie avec le cas d'une variable. Considérons l'idéal $I = \{P(\underline{X}) \in A[\underline{X}]_{\text{sub}} \mid P(A^n) \subset m\}$. On a $\mathcal{G}(\hat{A}^n, m\hat{A}) \cap A[\underline{X}]_{\text{sub}} = I$, donc $A[\underline{X}]_{\text{sub}}/I$ s'injecte dans l'anneau $\mathcal{G}(\hat{A}^n, \hat{A}) / \mathcal{G}(\hat{A}^n, m\hat{A})$ qui est isomorphe à $\mathcal{G}(\hat{A}^n, \hat{A}/m\hat{A})$. D'après Bourbaki ([1], II), les idéaux premiers de l'anneau $\mathcal{G}(\hat{A}^n, \hat{A}/m\hat{A})$ sont les idéaux maximaux $\{f \in \mathcal{G}(\hat{A}^n, \hat{A}) \mid f(\underline{x}) \in m\hat{A}\} / \mathcal{G}(\hat{A}^n, m\hat{A})$ où $\underline{x} \in \hat{A}^n$ car \hat{A}^n est compact et totalement discontinu, ces idéaux sont au-dessus des idéaux $m_{\underline{x}}/I$ de $A[\underline{X}]_{\text{sub}}/I$ qui eux aussi sont maximaux. Comme tout idéal premier minimal de $A[\underline{X}]_{\text{sub}}/I$ doit se relever en un idéal premier minimal de $\mathcal{G}(\hat{A}^n, \hat{A}/m\hat{A})$, on voit que :

7.3. Les idéaux premiers de $A[\underline{X}]_{\text{sub}}$ contenant l'idéal $I = \{P \in A[\underline{X}]_{\text{sub}} \mid P(A^n) \subset m\}$ sont les idéaux maximaux $m_{\underline{x}}$ où $\underline{x} \in \hat{A}^n$.

§ 8. Polynômes à plusieurs variables : cas de la dimension 1.

Conservons les hypothèses et notations 2.3 et ajoutons la condition : l'anneau A est de dimension 1.

Le radical de l'idéal $mA[\underline{X}]_{\text{sub}}$ de $A[\underline{X}]_{\text{sub}}$ est alors l'idéal

$$I = \{P \in A[\underline{X}]_{\text{sub}} \mid P(A^n) \subset m\}. \text{ D'où la :}$$

8.1. Proposition. Si la dimension de A est égale à 1, alors les idéaux premiers de $A[\underline{X}]_{\text{sub}}$ au-dessus de m sont les idéaux maximaux $m_{\underline{x}} = \{P \in A[\underline{X}]_{\text{sub}} \mid P(\underline{x}) \in m\hat{A}\}$ où $\underline{x} \in \hat{A}^n$.

Les propositions 4.1 et 4.3 se généralisent sans aucune difficulté au cas de plusieurs variables, par suite :

8.2. Proposition. Si A est de dimension 1, pour tout $\underline{k} \in \mathbb{N}^n$, les idéaux premiers de $A[\underline{X}]_{\text{sub}}^{(\underline{k})}$ au-dessus de m sont les idéaux maximaux

$$m_{\underline{x}}^{(\underline{k})} = \{P \in A[\underline{X}]_{\text{sub}}^{(\underline{k})} \mid P(\underline{x}) \in m\hat{A}\} \text{ où } \underline{x} \in \hat{A}^n.$$

L'application $m_{\underline{x}} \mapsto m_{\underline{x}}^{(\underline{k})}$ est une bijection de l'ensemble des idéaux premiers de $A[\underline{X}]_{\text{sub}}$ au-dessus de m sur l'ensemble des idéaux premiers de $A[\underline{X}]_{\text{sub}}^{(\underline{k})}$ au-dessus de m .

Le corollaire 4.6 se généralise en :

8.3 Pour tout $\underline{k} \in \mathbb{N}^n$, le radical de l'idéal $mA[\underline{X}]_{\text{sub}}^{(\underline{k})}$ est l'idéal

$$I^{(\underline{k})} = \{P \in A[\underline{X}]_{\text{sub}}^{(\underline{k})} \mid P(A^n) \subset m\} = I \cap A[\underline{X}]_{\text{sub}}^{(\underline{k})} \text{ et } A[\underline{X}]_{\text{sub}}^{(\underline{k})} / I^{(\underline{k})}$$

est isomorphe à $A[\underline{X}]_{\text{sub}} / I$.

Lorsque K est de caractéristique $p > 0$, ces résultats sont valables pour $\underline{k} \in \overline{\mathbb{N}}^n$. On supposera donc maintenant que K est de caractéristique 0.

Munissons $\bar{\mathbb{N}}^n$ de l'ordre suivant :

$\underline{h} = (h_1, \dots, h_n) \leq \underline{k} = (k_1, \dots, k_n)$ si $h_1 \leq k_1, \dots, h_n \leq k_n$. Alors, pour tout $\underline{k} \in \bar{\mathbb{N}}^n - \mathbb{N}^n$, on a :

$$A[\underline{X}]_{\text{sub}}^{(\underline{k})} = \bigcap_{\underline{h} < \underline{k}} A[\underline{X}]_{\text{sub}}^{(\underline{h})}.$$

Les propositions 5.1 et 5.2 se généralisent en :

8.4. Pour tout $\underline{k} \in \bar{\mathbb{N}}^n$, le radical de l'idéal $m A[\underline{X}]_{\text{sub}}^{(\underline{k})}$ est l'idéal

$I(\underline{k}) = \{P \in A[\underline{X}]_{\text{sub}}^{(\underline{k})} \mid P(A^n) \subset m\} = I \cap A[\underline{X}]_{\text{sub}}^{(\underline{k})}$ et les idéaux premiers de

$A[\underline{X}]_{\text{sub}}^{(\underline{k})}$ au-dessus de m sont de la forme :

$$m_{\underline{x}}^{(\underline{k})} = m_{\underline{x}} \cap A[\underline{X}]_{\text{sub}}^{(\underline{k})}.$$

La proposition 5.3 donne en particulier :

8.5. Les idéaux premiers de l'anneau $A[X_1, \dots, X_n]_{\text{sub}}^{(\infty, \dots, \infty)}$ au-dessus de m sont en nombre fini.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI, Algèbre commutative, Paris 1961.
- [2] P.-J. CAHEN, Polynômes et dérivées à valeurs entières, Ann. Sci. Uni. Clermont n° 54, Math. n° 10 (1975), 25-43.
- [3] P.-J. CAHEN et J.-L. CHABERT, Coefficients et valeurs d'un polynôme, Bull. Sc. Math., 2^e série, 95 (1971), 295-304.
- [4] J.-L. CHABERT, Les idéaux premiers de l'anneau des polynômes à valeurs entières, J. reine angew. Math. 293-294 (1977), 275-283.
- [5] J.-L. CHABERT, Anneaux de polynômes à valeurs entières et anneaux de Fatou, Bull. Soc. Math. France - 99 (1971), 273-283.