Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2
Série Mathématiques

J.-C. Lablanquie

Propriétés de consistance et forcing

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 68, série *Mathématiques*, n° 18 (1979), p. 37-45

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1979__68_18_37_0>

Ann. Sci. Univ. Clermont II, Sér. Math., Fasc. 18, 1979, pp. 37 - 45

PROPRIETES DE CONSISTANCE ET FORCING

J.-C. LABLANQUIE

Université de Clermont II

De nombreux auteurs ont déjà remarqué les analogies existant entre : méthode de Henkin, propriétés de consistance, modèles booléens et forcing. Dans cet esprit, Barwise a démontré le théorème de compacité en utilisant le forcing ; Keisler [2] a donné un traitement général du forcing qui lui permet de donner une nouvelle démonstration du théorème d'omission des types et de retrouver le forcing de Cohen. Ressayre [3] a étudié les modèles booléens et signalé l'étroit rapport les liant aux propriétés de consistance. Stern a obtenu par forcing des théorèmes d'interpolation pour des langages à plusieurs types d'objets ([4] et [5]) et sa méthode est très proche, elle aussi, des propriétés de consistance.

Dans ce papier, nous nous proposons d'étudier les rapports existant entre propriétés de forcing ([1]) et propriétés de consistance [2]. De manière précise, nous montrerons que les propriétés de consistance sont en fait des propriétés de forcing particulières et le théorème d'existence de modèle de Keisler [1] apparaît alors comme un corollaire du théorème d'existence de modèles génériques. Nous savons, d'autre part, (cf. [1]) que la notion de propriété de consistance permet de démontrer le théorème de complétude et divers théorèmes d'interpolation et d'omission de types aussi bien dans $L_{\omega_1 \omega}$ que dans L. De plus, dans L, elle permet de retrouver le théorème de compacité.

Le forcing apparaît donc comme une généralisation de la méthode d'adjonction de constantes de Henkin utilisable dans un très grand nombre de situations en théorie des modèles.

I - Préliminaires et rappels.

Soit L un langage du 1er ordre avec égalité qui se compose d'une infinité dénombrable de variables $v_0, v_1, \ldots$, des connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, des quantificateurs $\exists$ et $\forall$, du symbole d'égalité $=$, et d'un ensemble fini ou dénombrable de symboles fonctionnels et prédicatifs (les constantes sont considérées comme des symboles fonctionnels d'arité nulle).

La logique infinitaire $L_{\omega_1\omega}$ s'obtient à partir de L en permettant les conjonctions et disjonctions dénombrables, donc si Φ est un ensemble fini ou dénombrable de formules de $L_{\omega_1\omega}$, $\wedge\Phi$ et $\vee\Phi$ sont des formules de $L_{\omega_1\omega}$.

Considérons maintenant un ensemble dénombrable C de constantes non dans L et soit K le langage obtenu à partir de L par adjonction des constantes de C. Nous noterons $K_{\omega_1\omega}$ la logique infinitaire associée à K en permettant les conjonctions et disjonctions dénombrables.

Si φ est une formule de $K_{\omega_1\omega}$, nous définirons l'ensemble sub(φ) des sous-formules de φ de la manière habituelle.

Etant donnée une formule φ de $K_{\omega_1\omega}$, la formule $\varphi\neg$ est définie de la manière suivante :

si φ est atomique, $\varphi\neg$ est la formule $\neg\varphi$;

$(\neg\varphi)\neg$ est la formule φ ;

$\left(\bigwedge_{\varphi\in\Phi}\right)\neg$ est la formule $\bigvee_{\varphi\in\Phi}\neg\varphi$;

$\left(\bigvee_{\varphi\in\Phi}\varphi\right)\neg$ est la formule $\bigwedge_{\varphi\in\Phi}\neg\varphi$;

$(\forall x\varphi)\neg$ est la formule $\exists x\neg\varphi$;

$(\exists x\varphi)\neg$ est la formule $\forall x\neg\varphi$.

Si M est une L-structure et si R est un symbole non logique de L, nous noterons R^M l'interprétation de R dans M. Les K-structures seront de la forme $(M, a_c)_{c\in C}$ où M est une L-structure et a_c est l'interprétation de la constante c. Nous dirons que $(M, a_c)_{c\in C}$ est un *modèle canonique* pour K si et seulement si $M = \{a_c : c\in C\}$.

Un *fragment* de $K_{\omega_1\omega}$ est un ensemble K_A de formules de $K_{\omega_1\omega}$ tel que :

(1) Toute formule de K appartient à K_A ;

(2) K_A est clos pour $\neg$, $\exists$, $\vee$ et les conjonctions et disjonctions finies ;

(3) K_A est clos pour les sous-formules ;

(4) Si $\varphi(x)\in K_A$ et si τ est un terme, alors $\varphi(\tau)\in K_A$.

(5) Si $\varphi\in K_A$, alors $\varphi\neg\in K_A$.

Nous allons maintenant définir les notions de propriété de forcing, partie générique, modèle générique. Pour ce faire, nous suivrons à quelques détails près H.J. Keisler [2]. La différence provient essentiellement du fait que les connecteurs $\wedge$, $\bigwedge$ et le quantificateur $\forall$ sont des symboles primitifs.

Définition 1. Une propriété de forcing pour K est un triplet $\mathcal{P} = \langle P, \leq, f\rangle$ tel que :

(i) $\langle P, \leq\rangle$ est une structure ordonnée ;

(ii) f est une fonction qui à tout $p\in P$, associe un ensemble f(p) d'énoncés atomiques de K ;

(iii) Si $p\leq q$, alors $f(p)\subset f(q)$;

(iv) Si σ et τ sont des termes sans variables de K et si $p\in P$:

(a) Si $(\sigma = \tau) \in f(p)$, il existe $q \geq p$ tel que $(\tau = \sigma) \in f(q)$;

(b) Si $(\sigma = \tau) \in f(p)$ et si $\varphi(\sigma) \in f(p)$, alors il existe $q \geq p$ tel que $\varphi(\tau) \in f(q)$;

(c) Il existe $c \in C$ et $q \geq p$ tels que $(c = \sigma) \in f(q)$.

Les éléments de P sont appelés les conditions de $\mathcal{P}$.

Définition 2. Soient $\mathcal{P}$ une propriété de forcing pour K et K_A un fragment de $K_{\omega_1\omega}$, nous définissons alors pour tout $p \in P$ et tout énoncé $\varphi \in K_A$ *la relation* $p \Vdash \varphi$ *(p force φ)* de la manière suivante :

Si φ est un énoncé atomique, $p \Vdash \varphi$ si et seulement si $\varphi \in f(p)$; $p \Vdash \neg\varphi$ si et seulement si il n'existe pas de condition $q \geq p$ telle que $q \Vdash \varphi$; $p \Vdash \bigvee\Phi$ si et seulement si il existe $\varphi \in \Phi$ tel que $p \Vdash \varphi$; $p \Vdash \bigwedge\Phi$ si et seulement si pour tout $q \geq p$ et tout $\varphi \in \Phi$, il existe $r \geq q$ tel que $r \Vdash \varphi$;

$p \Vdash \exists x\, \varphi(x)$ si et seulement si il existe $c \in C$ tel que $p \Vdash \varphi(c)$;

$p \Vdash \forall x\, \varphi(x)$ si et seulement si pour tout $q \geq p$ et tout $c \in C$, il existe $r \geq q$ tel que $r \Vdash \varphi(c)$.

Nous dirons que p force faiblement φ et nous noterons $p \Vdash^* \varphi$ si et seulement si $p \Vdash \neg\neg\varphi$

Lemme 1.1. Soient $\mathcal{P}$ une propriété de forcing et K_A un fragment de $K_{\omega_1\omega}$ alors :

(i) Si $p \leq q$ et si $p \Vdash \varphi$, alors $q \Vdash \varphi$

(ii) Nous ne pouvons avoir simultanément $p \Vdash \varphi$ et $p \Vdash \neg\varphi$

(iii) Si $p \Vdash \varphi$ alors $p \Vdash^* \varphi$;

(iv) $p \Vdash^* \neg\varphi$ si et seulement si $p \Vdash \neg\varphi$;

(v) $p \Vdash^* \bigwedge\Phi$ si et seulement si $p \Vdash \bigwedge\Phi$;

(vi) $p \Vdash^* \forall x\,\varphi(x)$ si et seulement si $p \Vdash \forall x\, \varphi(x)$;

(vii) $p \Vdash \bigwedge\Phi$ si et seulement si $p \Vdash^* \varphi$ pour tout $\varphi \in \Phi$;

(viii) $p \Vdash \forall x\, \varphi(x)$ si et seulement si $p \Vdash^* \varphi(c)$ pour tout $\varphi \in \Phi$.

Définition 3. Soient $\mathcal{P}$ une propriété de forcing et K_A un fragment de $K_{\omega_1\omega}$; une partie G de P est *générique* (pour K_A) si et seulement si :

(i) Soient p et q deux conditions, si $p \in G$ et $q \leq p$, alors $q \in G$;

(ii) si $p \in G$ et $q \in G$, alors il existe $r \in G$ tel que : $p \leq r$ et $q \leq r$;

(iii) pour tout énoncé φ de K_A il existe $p \in G$ tel que : $p \Vdash \varphi$ ou $p \Vdash \neg\varphi$.

Un ensemble générique G *engendre* $(M,a_c)_{c \in C}$ si et seulement si $(M, a_c)_{c \in C}$ est un modèle canonique pour K et tout énoncé φ de K_A qui est forcé par un élément p de G est valide dans $(M,a_c)_{c \in C}$. $(M,a_c)_{c \in C}$ *est un modèle générique pour une condition $p \in P$* si et seulement si $(M,a_c)_{c \in C}$ est engendré par un ensemble générique contenant p.

Nous dirons qu'une L-structure M est un *modèle générique* si et seulement si il existe une assignation $\{a_c : c \in C\}$ dans M tel que $(M,a_c)_{c \in C}$ soit un modèle générique pour une condition de P.

Théorème 1.2. (Keisler [2]). Si $\mathcal{P}$ est une propriété de forcing et si K_A est un fragment *dénombrable* de $K_{\omega_1\omega}$, alors pour tout $p \in P$, il existe un modèle générique pour p.

Corollaire 1.3. (Keisler [2]). Soient $\mathcal{P}$ une propriété de forcing, K_A un fragment dénombrable de $K_{\omega_1\omega}$ et $p \in P$. Alors pour tout énoncé φ de K_A, $p \Vdash^* \varphi$ si et seulement si φ est valide dans tous les modèles génériques pour p.

Donc si $T_p = \{\varphi \in K_A \ / \ p \Vdash^* \varphi\}$ et si ψ est un énoncé de K_A tel que $T_p \models \psi$, nous avons alors : $\psi \in T_p$.

II - Propriétés de consistance et Forcing.

Dans ce paragraphe nous allons montrer que la notion de propriété de consistance, (Keisler [1]), n'est en fait qu'un cas particulier de la notion de propriété de Forcing et nous montrerons que le théorème d'existence de modèle (Keisler [1]) résulte directement du théorème d'existence de modèle générique.

La notion de propriété de consistance que nous allons donner est un peu plus générale que celle de Keisler [1].

Définition 1. Soit S un ensemble d'ensembles finis ou dénombrables d'énoncés de $K_{\omega_1\omega}$. Nous dirons que S est une *propriété de consistance* si et seulement si, pour tout $s \in S$, les conditions suivantes sont vérifiées :

(C_1) - Pour tout énoncé φ de $K_{\omega_1\omega}$, $\varphi \notin s$ ou $\neg\varphi \notin s$;

(C_2) - Si $\neg\varphi \in s$, alors il existe $s' \in S$ tel que $s \subseteq s'$ et $\varphi \neg \in s'$:

(C_3) - Si $\wedge\Phi \in s$, alors pour tout $\varphi \in \Phi$, il existe $s' \in S$ tel que $s \subset s'$ et $\varphi \in s'$;

(C_4) - Si $\vee\Phi \in s$, alors il existe $\varphi \in \Phi$ et $s' \in S$ tels que $s \subseteq s'$ et $\varphi \subset s'$;

(C_5) - Si $\forall x\, \varphi(x) \in s'$, alors pour tout $c \in C$, il existe $s' \in S$ tel que $s \subseteq s'$ et $\varphi(c) \in s'$;

(C_6) - Si $\exists x\, \varphi(x) \in s'$, alors il existe $c \in C$ et $s' \in S$ tels que $s \subseteq s'$ et $\varphi(c) \in s'$;

(C_7) - Soient σ, τ des termes sans variables de K, alors :

(a) Si $(\sigma = \tau) \in s$, il existe $s' \in S$ tel que $s \subseteq s'$ et $(\tau = \sigma) \in s'$;

(b) si $(\sigma = \tau) \in s$, si $\varphi(\sigma) \in s$ et si $\varphi(\sigma)$ est atomique, il existe $s' \in S$ tel que $s \subseteq s'$ et $\varphi(\tau) \in s'$;

(c) il existe $c \in C$ et $s' \in S$ tel que $s \subset s'$ et $(c = \sigma) \in s'$.

Théorème 2.1. Soit S une propriété de consistance ; nous désignons par f l'application de S dans l'ensemble des ensembles d'énoncés atomiques de K qui à tout $s \in S$ associe f(s) l'ensemble des énoncés atomiques de s. Alors :

(i) $\mathcal{S} = \langle S, \subset, f \rangle$ est une propriété de forcing.

(ii) Pour tout $s \in S$ et tout $\varphi \in s$, nous avons : $s \Vdash^* \varphi$.

Preuve : (i) Trivial.

(ii) On raisonne par récurrence sur le rang de φ noté $rg(\varphi)$, où $rg(\varphi)$ est un ordinal défini par :

Si φ est atomique $rg(\varphi) = 0$, $rg(\neg\varphi) = rg(\varphi) + 1$; $rg(\wedge\Phi) = \bigcup_{\varphi\in\Phi} rg(\varphi) + 1$;

$rg(\vee\Phi) = \bigcup_{\varphi\in\Phi} rg(\varphi) + 1$; $rg(\exists x\, \varphi) = rg(\varphi) + 1$; $rg(\forall x\, \varphi) = rg(\varphi) + 1$.

Si $rg(\varphi) = 0$ et si $\varphi \in s$, alors $s \Vdash \varphi$ car $\varphi \in f(s)$ donc $s \Vdash^* \varphi$.

Supposons le résultat vrai pour tout $s \in S$ et tout énoncé de rang inférieur ou égal à α et soit φ

un énoncé de rang $\alpha+1$, appartenant à s.

Si φ est de la forme $\vee\Psi$; soit s' $\supset$ s, $\vee\Psi\in$ s', donc il existe s'' $\in$ S, s'' $\supset$ s' et $\psi\in\Psi$ tel que $\psi\in$ s'' ; alors s'' $\Vdash^{*}\psi$ car rg(ψ) $\leq\alpha$, donc il existe s''' $\supset$ s'' et s''' $\Vdash\psi$, d'où s''' $\Vdash\vee\Psi$. Par suite s $\Vdash^{*}\vee\Psi$.

Si φ est de la forme $\wedge\Psi$: soient s' $\supset$ s et $\psi\in\Psi$, $\wedge\Psi\in$ s', donc il existe s'' $\supset$ s' et $\psi\in$ s'' ; mais alors s'' $\Vdash^{*}\psi$ car rg(ψ) $\leq\alpha$; donc il existe s''' $\supset$ s'' tel que s''' $\Vdash\psi$. Par suite s $\Vdash\wedge\Psi$; donc s $\Vdash^{*}\wedge\Psi$.

Si φ est de la forme $\exists$ x ψ (x), la démonstration est semblable au cas où φ est de la forme $\vee\Psi$.

Si φ est de la forme $\forall$ x ψ (x), la démonstration est semblable au cas où φ est de la forme $\wedge\Psi$.

Si φ est de la forme $\neg\psi$; alors rg(ψ) $\leq\alpha$. On distingue alors plusieurs cas :

ou bien ψ est atomique, alors si s' $\supset$ s, $\neg\psi\in$ s', donc $\psi\notin$ s' et donc s' $\nVdash\psi$; donc s $\Vdash\neg\psi$ d'où s $\Vdash^{*}\neg\psi$

ou bien ψ est de la forme $\neg\theta$, alors si s' $\supset$ s, $\neg\neg\theta\in$ s', donc il existe s'' $\supset$ s' tel que $(\neg\theta)\ \neg\in$ s'', donc $\theta\in$ s'', par conséquent s'' $\Vdash^{*}\theta$ car rg(θ) $\leq\alpha$; donc s'' $\Vdash\neg\neg\theta$ i.e. s'' $\Vdash\varphi$. Par suite s $\Vdash^{*}\varphi$.

ou bien ψ est de la forme $\vee\Theta$; supposons que s $\nVdash\varphi$, alors s $\nVdash\neg\vee\Theta$, donc il existe s' $\supset$ s tel que s' $\Vdash\vee\Theta$ et par conséquent, il existe $\theta_0\in\Theta$ tel que s' $\Vdash\theta_0$; mais $\neg(\vee\Theta)\in$ s', donc il existe s'' $\supset$ s' tel que $(\vee\Theta)\ \neg\in$ s'', c'est-à-dire $(\bigwedge_{\theta\in\Theta}\neg\theta)\in$ s'' ; par suite, il existe s''' $\supset$ s'' tel que $\neg\theta_0\in$ s''', mais alors s''' $\Vdash^{*}\neg\theta_0$ soit encore s''' $\Vdash\neg\theta_0$ car rg($\neg\theta_0$) $\leq\alpha$; de plus s' $\Vdash\theta_0$ et s' $\subset$ s''', donc s''' $\Vdash\theta_0$. Contradiction. En conclusion s $\Vdash\varphi$, d'où s $\Vdash^{*}\varphi$.

ou bien ψ est de la forme $\wedge\Theta$; supposons que s $\nVdash\varphi$, alors s $\nVdash\neg\wedge\Theta$, donc il existe s' $\supset$ s tel que s' $\Vdash\wedge\Theta$; or $\neg\wedge\Theta\in$ s', par suite il existe s'' $\supset$ s' tel que $(\wedge\Theta)\ \neg\in$ s'' c'est-à-dire $(\bigvee_{\theta\in\Theta}\neg\theta)\in$ s'', donc il existe s''' $\supset$ s'' et $\theta_0\in\Theta$ tel que $\neg\theta_0\in$ s''' ; alors s''' $\Vdash^{*}\neg\theta_0$ car rg($\neg\theta_0$) $\leq\alpha$ d'où s''' $\Vdash\neg\theta_0$.

Mais s' $\Vdash\wedge\Theta$ et s''' $\supset$ s' et $\theta_0\in\Theta$, donc il existe $s^{(4)}\supset$ s''' tel que $s^{(4)}\Vdash\theta_0$. Or s''' $\Vdash\neg\theta_0$ et s''' $\subset s^{(4)}$, donc $s^{(4)}\Vdash\neg\theta_0$. Contradiction.

Ainsi s $\Vdash\varphi$, donc s $\Vdash^{*}\varphi$.

ou bien ψ est de la forme $\exists$ x θ(x) et alors le raisonnement est identique à celui du cas où ψ est de la forme $\vee\Theta$.

ou bien ψ est de la forme $\forall$ x θ(x) et le raisonnement est identique à celui du cas où ψ est de la forme $\wedge\Theta$.

Théorème d'existence de modèle 22. (Keisler). Si S est une propriété de consistance et si s $\in$ S, alors s a un modèle.

Preuve : Soient s $\in$ S et $\mathcal{S}$ = $\langle S,\subset,f\rangle$ la propriété de forcing associée à S. Appelons K_A

le plus petit fragment de $K_{\omega_1\omega}$ contenant s ; s étant dénombrable, K_A est dénombrable. Donc il existe un modèle générique $(M, a_c)_{c \in C}$ pour s ; alors pour tout énoncé φ de K_A, $(M, a_c)_{c \in C} \models \varphi$ si et seulement si φ est forcé par un élément de G où G est un ensemble générique contenant s et qui engendre $(M, a_c)_{c \in C}$. De plus, si $\varphi \in s$, $s \Vdash^{*} \varphi$ (théorème 2.1), donc $s \Vdash \neg\neg\varphi$ et, par conséquent $(M, a_c)_{c \in C} \models \neg - \varphi$, d'où $(M, a_c)_{c \in C}$ est un modèle de s.

La notion de propriété de consistance permet de démontrer le théorème de complétude pour $L_{\omega_1\omega}$ et divers théorèmes d'interpolation pour $L_{\omega_1\omega}$ (Keisler [1]).

On peut également l'utiliser pour démontrer la complétude de L et donc le théorème de compacité. Pour ce faire, étant donné un système d'axiomes pour L, il suffit de vérifier que S est une propriété de consistance où $S = \{\Sigma : \Sigma$ ensemble consistant d'énoncés de K et dans Σ n'occurrent qu'un nombre fini de constantes de C$\}$.
(Σ est inconsistant si et seulement si il existe une formule φ de K telle que $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$).
Les théorèmes d'interpolation de Craig et Lyndon dans L se démontrent de la même manière que les théorèmes d'interpolation correspondant de $L_{\omega_1\omega}$.

III - Propriété de consistance associée à une propriété de forcing.

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que l'on pouvait associer une propriété de forcing à toute propriété de consistance. Maintenant nous allons associer une propriété de consistance à toute propriété de forcing. Ensuite, nous montrerons que si $\mathbb{P}$ est une propriété de forcing, S la propriété de consistance associée à $\mathbb{P}$ et $\mathbb{S}$ la propriété de forcing associée à S, alors le forcing dans $\mathbb{P}$ est «essentiellement» le même que celui dans $\mathbb{S}$ et que, dans le cas où $\mathbb{P}$ est le forcing associé à une théorie T et à un ensemble Φ de formules, les propriétés de forcing $\mathbb{P}$ et $\mathbb{S}$ ont exactement les mêmes modèles génériques.

Dans ce qui suit, K_A est un fragment dénombrable fixé de $K_{\omega_1\omega}$.

Si $\mathbb{P} = \langle P, \leq, f \rangle$ est une propriété de forcing, pour tout $p \in P$, nous noterons s_p l'ensemble des énoncés de K_A forcés par p et nous appelerons $S(\mathbb{P})$ l'ensemble de tous les s_p, pour $p \in P$.

Lemme 3.1. $S(\mathbb{P})$ est une propriété de consistance.

Preuve. La vérification est immédiate.

Maintenant, considérons une propriété de forcing $\mathbb{P}$, la propriété de consistance associée : $S(\mathbb{P})$ et $\mathbb{S}$ la propriété de forcing associée à $S(\mathbb{P})$.

Théorème 3.2. Pour tout énoncé φ de K_A, nous avons :

$$p \Vdash \varphi \text{ dans } \mathbb{P} \text{ si et seulement si } s_p \Vdash \varphi \text{ dans } \mathbb{S}.$$

Preuve. On raisonne par récurrence sur la construction de φ.

- Si φ est atomique $s_p \Vdash \varphi$ si et seulement si $\varphi \in s_p$, donc $s_p \Vdash \varphi$ si et seulement si $p \Vdash \varphi$.

Si φ est de la forme $\neg\psi$. Supposons que $p \Vdash \varphi$ alors $\neg\psi \in s_p$

donc $s_p \Vdash^* \neg\psi$ (théorème 2.1) donc $s_p \Vdash \neg\psi$.

Réciproquement, si $s_p \Vdash \varphi$ alors, supposons que $p \nVdash \varphi$, il existe donc $q \geq p$, tel que $q \Vdash \psi$ mais alors $\psi \in s_q$ et $s_q \Vdash^* \psi$ (théorème 2.1) ; de plus $s_p \subset s_q$ car $p \leq q$ et $s_p \Vdash \neg\psi$ donc $s_q \Vdash \neg\psi$ et $s_q \Vdash^* \psi$, contradiction. Par suite $p \Vdash \varphi$.

- Si φ est de la forme $\vee\Psi$ et si $p \Vdash \vee\Psi$ alors il existe $\psi \in \Psi$ et $p \Vdash \psi$ donc $s_p \Vdash \psi$ par hypothèse de récurrence et $s_p \Vdash \vee\Psi$ i.e. $s_p \Vdash \varphi$. Réciproquement, si $s_p \Vdash \varphi$ il existe $\psi \in \Psi$ tel que $s_p \Vdash \psi$ et donc $p \Vdash \psi$ par hypothèse de récurrence, d'où $p \Vdash \vee\Psi$.

- Si φ est de la forme $\exists x\ \psi(x)$, le raisonnement est analogue.

- Si φ est de la forme $\wedge\Psi$. Supposons que $p \Vdash \varphi$ alors $\varphi \in s_p$ et $s_p \Vdash^* \varphi$ (Théorème 2.1) donc $s_p \Vdash^* \wedge\Psi$ et par suite $s_p \Vdash \wedge\Psi$ (Lemme 1.1) i.e. $s_p \Vdash \varphi$.

Réciproquement si $s_p \Vdash \varphi$, supposons que $p \nVdash \varphi$, alors il existe $q \geq p$ et $\psi \in \Psi$ tel que, pour tout $r \geq q$, $r \nVdash \psi$; donc $q \Vdash \neg\psi$ et $\neg\psi \in s_q$. Mais alors $s_q \Vdash^* \neg\psi$ (Théorème 2.1) et donc $s_q \Vdash \neg\psi$. En outre $s_p \subset s_q$ car $p \leq q$ et de plus $s_p \Vdash \wedge\psi$, donc il existe $s \in S(\mathcal{P})$ tel que $s \supset s_q$ et $s \Vdash \psi$. Etant donné que $s_q \Vdash \neg\psi$ et que $s_q \subset s$, $s \Vdash \neg\psi$ ce qui contredit $s \Vdash \psi$. Par suite $p \Vdash \varphi$.

- Si φ est de la forme $\forall x\ \psi(x)$ le raisonnement est analogue.

Considérons maintenant une théorie T dans le fragment K_A et un ensemble Φ de formules de L_A qui contient toutes les formules atomiques et qui est clos pour les sous-formules. Nous noterons $\mathcal{P}(T, \Phi)$ (cf. [2]) la propriété de forcing $\langle P, \leq, f \rangle$ où P est l'ensemble des parties finies de $\Phi(C)$ qui sont satisfaites par un modèle de T ($\Phi(C)$ désigne l'ensemble des énoncés de la forme $\varphi(c_1, \ldots, c_n)$ où $n \in \omega$, $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \Phi$ et $c_1, \ldots, c_n$ sont des éléments de C), $\leq$ est la relation d'inclusion $\subset$ et, pour tout $p \in P$, $f(p)$ est l'ensemble des énoncés atomiques de p.

Nous allons montrer que si $\mathcal{S}$ est la propriété de forcing associée à $S(\mathcal{P}(T,\Phi))$ alors $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}(T, \Phi)$ ont les mêmes modèles génériques.

Lemme 3.3. Soient p une condition de $\mathcal{P}(T, \Phi)$ et $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ des énoncés de $\Phi(C)$, alors :

(i) Si $T \cup p \models \varphi$, on a : $p \Vdash^* \varphi$;

(ii) Si $p \Vdash \varphi_i$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$, alors :

$p \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ est une condition de $\mathcal{P}(T, \Phi)$.

La démonstration de ce résultat est analogue à celle du lemme 2.5 de [2].

Théorème 3.4. Les propriétés de forcing $\mathcal{P}(T, \Phi)$ et $\mathcal{S}$ ont les mêmes modèles génériques.

Preuve. Tout d'abord, soit M un modèle générique pour $\mathcal{P}(T, \Phi)$, il existe donc une assignation $c \mapsto a_c$ de constantes dans M telle que $(M, a_c)_{c \in C}$ soit engendré par une partie générique G pour $\mathcal{P}(T, \Phi)$. Posons alors :

$$G' = \left\{ s \in S(\mathcal{P}(T, \Phi)) / \text{ il existe } p \in G \text{ tel que : } s \subseteq s_p \right\},$$

il est clair, en utilisant le théorème 3.2, que G' est une partie générique pour $\mathcal{S}$ qui engendre $(M, a_c)_{c \in C}$; donc M est un modèle générique pour $\mathcal{S}$.

Réciproquement, soit M un modèle générique pour $\mathcal{S}$, il existe une assignation $c \mapsto a_c$ de constantes dans M telle que $(M, a_c)_{c \in C}$ soit engendré par une partie générique H pour $\mathcal{S}$. Considérons une énumération sans répétitions : $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ de tous les énoncés de K_A. Par récurrence, nous allons construire pour tout entier n, $1 \leq n < \omega$, des conditions p_n de $\mathcal{P}(T, \Phi)$ satisfaisant à :

(i) $s_{p_n} \in H$;

(ii) $s_{p_n} \Vdash \varphi_n$ ou $s_{p_n} \Vdash \neg \varphi_n$;

(iii) si $\varphi \in p_n$ alors $s_{p_{n+1}} \Vdash \varphi$;

(iv) $s_{p_n} \subseteq s_{p_{n+1}}$.

Pour p_1 prenons une condition $p \in P$ telle que $s_p \in H$ et vérifiant : $s_p \Vdash \varphi_1$ ou $s_p \Vdash \neg \varphi_1$ (ceci est possible car H est générique pour $\mathcal{S}$). Supposons p_n construit, alors si $\varphi \in p_n$, nous avons $p_n \overset{*}{\Vdash} \varphi$ (Lemme 3.3), donc $s_{p_n} \overset{*}{\Vdash} \varphi$ (Théorème 3.2) mais H étant générique, il existe s H tel que $s_{p_n} \subseteq s$ et $s \Vdash \varphi$; de plus p_n est fini, par conséquent, H étant générique, on peut trouver $s' \in H$ tel que $s_{p_n} \subseteq s'$ et $s' \Vdash \varphi$ pour tout $\varphi \in p_n$ et vérifiant : $s' \Vdash \varphi_{n+1}$ ou $s' \Vdash \neg \varphi_{n+1}$. Prenons alors pour p_{n+1} une condition p telle que $s' = s_p$. Les p_n ainsi construits vérifient (i), (ii), (iii) et (iv), mais de plus il est facile de voir que si $\varphi \in p_1 \cup \dots \cup p_n$, alors $s_{p_{n+1}} \Vdash \varphi$. Posons alors $q_n = p_1 \cup \dots \cup p_n$ $(1 \leq n < \omega)$, d'après ce qui précède : $s_{p_{n+1}} \Vdash \varphi$ pour tout $\varphi \in q_n$ donc : $p_{n+1} \Vdash \varphi$ pour tout φ q_n (Théorème 3.2) ; par conséquent $p_{n+1} \cup q_n$ est une condition de $\mathcal{P}(T, \Phi)$ (Lemme 3.3), donc q_n aussi. Soit :

$$Q = \left\{ p \in P / \text{ il existe } n,\ 1 \leq n < \omega, \text{ tel que : } p \subset q_n \right\}.$$

Il reste à vérifier que Q est une partie générique pour $\mathcal{P}(T, \Phi)$ qui engendre $(M, a_c)_{c \in C}$. Il est clair que Q satisfait aux conditions (i) et (ii) de la définition de la partie générique car $q_n \subset q_{n+1}$. Si φ est un énoncé de K_A, alors il existe un entier n, $n \geq 1$, tel que $\varphi = \varphi_n$ donc $s_{p_n} \Vdash \varphi$ ou $s_{p_n} \Vdash \neg \varphi$, disons par exemple $s_{p_n} \Vdash \varphi$, alors $p_n \Vdash \varphi$ (théorème 3.2), et par conséquent $q_n \Vdash \varphi$ car $p_n \subseteq q_n$. Ainsi Q est générique pour $\mathcal{P}(T, \Phi)$.

De plus, Q engendre $(M, a_c)_{c \in C}$ car, par construction des p_n et q_n, pour tout énoncé φ de K_A, si $s_{p_n} \Vdash \varphi$ alors $q_n \Vdash \varphi$. Donc M est bien un modèle générique pour $\mathcal{P}(T, \Phi)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KEISLER, H.J., *Model Theory for Infinitary Logic.* (North-Holland, Amsterdam, 1971).

[2] KEISLER, H.J., *Forcing and the Omitting types theorem.* (Studies in Model Theory, pp. 96-133 MAA STUDIES IN MATH., Vol. 8, Buffalo, N.Y., 1973).

[3] RESSAYRE, J.P., *Boolean models and infinitary first-order languages,* Annals of Mathematical Logic, Vol. 6 (1974), pp. 41-92.

[4] STERN, J., *Forcing et théorie des modèles,* Thèse 3e cycle, Paris VII (1972).

[5] STERN, J., *A new look at the interpolation theorem ;* The Journal of Symbolic Logic ; Vol. 40, No 1 (1975), pp. 1-13.