ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

LÉONARD GALLARDO

Théorèmes limites pour les marches aléatoires sur le dual de $SU(2)$

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 67, série *Mathématiques*, n° 17 (1979), p. 63-68

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1979__67_17_63_0>

THEOREMES LIMITES POUR LES MARCHES ALEATOIRES SUR LE DUAL DE SU(2)

Léonard GALLARDO

Université de Nancy

Résumé : En considérant $\mathbb{N}$ comme le dual du groupe compact SU(2) , on peut définir une chaine de Markov (cf [1],[4] ou [5]) dont on étudie ici deux aspects du comportement asymptotique : un théorème limite central et une loi des grands nombres.

Introduction : Ce travail a été fait en collaboration avec V. Ries et sera publié par ailleurs, aussi je m'attacherai dans cet exposé à expliquer les résultats de manière plutôt heuristique ; le lecteur pourra trouver le détail des démonstrations dans [2] ou [3].

I.- Origine du problème (dualité entre $\mathbb{N}$ et SU(2))

Soit SU(2) le groupe de Lie compact constitué des matrices de la forme $g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ avec $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Soit $x \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{E}_x$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des polynômes de degré $\leqslant x$ et soit enfin π_x l'application $SU(2) \to \mathrm{Aut}\, \mathcal{E}_x$ définie par :

$$[\pi_x(g).p](z) = (bz + \bar{a})^x \, p\left(\frac{az - \bar{b}}{bz + \bar{a}}\right) \qquad (p \in \mathcal{E}_x \, , \, z \in C) \, .$$

π_x est une représentation continue, irréductible, de dimension $x+1$ de SU(2) dans $\mathcal{E}_x$. De plus (cf [6]) les π_x $(x \in \mathbb{N})$ sont à équivalence près, les seules représentations unitaires irréductibles de SU(2) . Le caractère normalisé χ_x associé à π_x est alors donné par la formule :

$$\chi_x(g) = \frac{1}{x+1} \mathrm{Tr}(\pi_x(g)) = \frac{\sin[(x+1)\theta]}{(x+1)\sin\theta} \quad ,$$

où $e^{\pm i\theta}$ sont les valeurs propres de la matrice $g \in SU(2)$.
A partir des formules de Clebsch-Gordon :

$$\chi_x \chi_y = \frac{|x-y|+1}{(x+1)(y+1)} \chi_{|x-y|} + \frac{|x-y|+3}{(x+1)(y+1)} \chi_{|x-y|+2} + \ldots + \frac{x+y+1}{(x+1)(y+1)} \chi_{x+y} \quad ,$$

et compte tenu du fait que les coefficients $\dfrac{|x-y|+2s+1}{(x+1)(y+1}$ $(0 \leqslant s \leqslant x \wedge y)$ ci-dessus sont > 0 et de somme égale à 1 , on peut définir une convolution $\times$ sur l'ensemble $\mathcal{M}_1(\mathbb{N})$ des mesures de probabilité sur $\mathbb{N}$ par :

$$\delta_x * \delta_y = \sum_{s=0}^{x\wedge y} \frac{|x-y|+2s+1}{(x+1)(y+1)} \delta_{|x-y|+2s}$$

pour le produit de deux masses de Dirac puis par distributivité :

$$\mu * \nu = \left(\sum_x a_x \delta_x\right) * \left(\sum_y b_y \delta_y\right) = \sum_{x,y} a_x b_y \delta_x * \delta_y .$$

La convolution $*$ est associative, commutative, d'élément neutre δ_o et on peut alors considérer la chaine de Markov S_n sur $\mathbb{N}$ dont le noyau de transition est défini par :

$$P(x, A) = \delta_x * \mu(A) \qquad (x \in \mathbb{N} , A \subset \mathbb{N}) .$$

Par abus de langage on dira que S_n est une marche aléatoire de loi μ sur $\mathbb{N}$.

A l'élément $\mu = \sum_{x\in\mathbb{N}} a_x \delta_x \in \mathcal{M}_1(\mathbb{N})$ on associe la fonction $\hat{\mu}$, appelée "transformée de Fourier" de μ , définie sur $[0, \pi]$ par :

$$\hat{\mu}(\theta) = \sum_{x \in \mathbb{N}} a_x \frac{\sin[(x+1)\theta]}{(x+1) \sin \theta} .$$

L'application $\mu \mapsto \hat{\mu}$ vérifie l'importante relation suivante :

$$\forall \mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{N}) , \widehat{\mu * \nu} = \hat{\mu} . \hat{\nu} .$$

Ainsi, pour la marche aélatoire de loi μ partant de x_o , la transformée de Fourier de la loi de S_n est égale à $\hat{\delta}_{x_o} . \hat{\mu}^n$.

Cette transformation de Fourier permet d'étudier les principales propriétés des marches S_n et de leur noyau potentiel. Par exemple toutes les marches S_n sont transitoires (cf [1] pour tous les détails sur ce paragraphe).

II.- Un théorème limite central

Théorème : Soit S_n une marche aléatoire de loi μ apériodique avec moment d'ord deux. Soit $C = \frac{1}{6} [m_2 + 2m_1]$, où m_i désigne le moment d'ordre i de la loi μ Alors $\frac{S_n}{\sqrt{2nC}}$ converge en loi lorsque $n \to +\infty$ vers la densité limite $x \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2}$ $(x > 0)$.

La démonstration utilise les deux lemmes :

<u>Lemme 1</u> : Si $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{N})$ est apériodique (ie μ charge au moins un entier impair) et possède un moment d'ordre deux on a :

$$\lim_{n \to \infty} \left[\hat{\mu}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2nC}}\right)\right]^n = e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} .$$

<u>Lemme 2</u> : Pour toute v. a. $X \geqslant 0$ notons $\varphi_X(\alpha) = E\left(\frac{\sin(\alpha X)}{\alpha X}\right)$. Alors si X_n est une suite de v. a. $\geqslant 0$ et X une v. a. $\geqslant 0$ telles que $\forall \alpha > 0$, $\lim_{n \to \infty} \varphi_{X_n}(\alpha) = \varphi_X(\alpha)$, on a la convergence en loi de X_n vers X .

On pose alors $T_n = \frac{S_n + 1}{\sqrt{2nC}}$. Grâce au lemme 1 on obtient la limite : $\lim_{n \to \infty} E\left(\frac{\sin \alpha T_n}{\alpha T_n}\right) = e^{-\frac{1}{2}\alpha^2}$. Ensuite un calcul simple donne :

$$\int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}\, dx = e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} ,$$

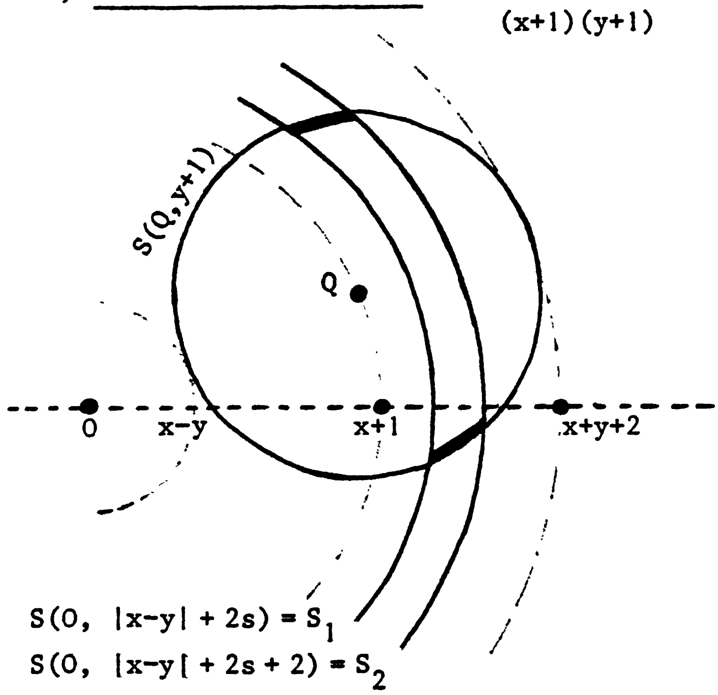
et le résultat déroule du lemme 2.

III.- <u>Une loi des grands nombres</u>

<u>Théorème</u> : Si μ possède un moment d'ordre 1, $\frac{S_n}{n}$ converge presque sûrement vers zéro quand $n \to +\infty$.

La démonstration de ce résultat utilise de manière essentielle une interprétation "probabilistico-géométrique" de la convolution $\times$.

1) <u>Etude du coefficient</u> $\frac{|x-y| + 2s + 1}{(x+1)(y+1)}$ $(0 \leqslant s \leqslant x \wedge y$, s entier)



Notations :

- $S(0,r)$ désigne la sphère de $\mathbb{R}^3$ de centre 0 et de rayon r
- Q est un point quelconque de la sphère $S(0,x+1)$
- $S_1 = S(0, |x-y| + 2s)$
- $S_2 = S(0, |x-y| + 2s+2)$

La figure ci-contre illustre le cas $x \geqslant y$. La partie en gras représente l'aire découpée par S_1 et S_2 sur $S(Q, y+1)$.

Un calcul de géométrie élémentaire montre que le rapport :

$$\frac{\text{Aire découpée par } S_1 \text{ et } S_2 \text{ sur } S(Q,\ y+1)}{\text{Aire totale de } S(Q,\ y+1)}$$

vaut précisément $\dfrac{|x-y| + 2s + 1}{(x+1)(y+1)}$. C'est donc la probabilité qu'un point aléatoire uniformément distribué sur $S(Q, y+1)$ tombe dans le secteur découpé par S_1 et S_2 sur $S(Q, y+1)$.

Supposons $\mu = \delta_y$ et soit S_n une marche de loi μ . Si à l'instant n la marche se trouve en x (ie $S_n = x$) , la position de la marche à l'instant suivant se décide de la manière suivante : On tire au hasard un point sur $S(Q, y+1)$. Si ce point tombe entre $S(0, |x-y| + 2s)$ et $S(0, |x-y| + 2s + 2)$ alors $S_{n+1} = |x-y| + 2s$.

2) <u>Formalisation</u> : Considérons les données suivantes,

- X et Y sont des v. a. à valeurs dans $\mathbb{N}$
- Q_X est un point de $S(0, X+1)$
- $V_X = \overrightarrow{OQ_X}$
- W_Y^D est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^3$ de module $Y+1$, invariant par rotation et de direction aléatoire D .

<u>Définition</u> : Avec les données ci-dessus on définit la v. a. $X \overset{D}{\oplus} Y = |X-Y| + 2S$ où S est l'entier de $[0, X \wedge Y]$ tel que l'on ait

$$|X-Y| + 2S \leqslant |V_X + W_Y^D| < |X-Y| + 2S + 2 \quad .$$

Remarquons que la "somme" $X \overset{D}{\oplus} Y$ ne dépend que de X, Y et D (et non de Q_X) . De plus pour pouvoir répéter l'opération $\oplus$, faisons la convention suivante : lorsque le symbole $\oplus$ est utilisé plusieurs fois dans une somme (par exemple $(X \overset{D_1}{\oplus} Y) \overset{D_2}{\oplus} Z)$ les directions qui interviennent et les v. a. de la somme sont des v. a. indépendantes. En bref dans ce qui précède on a tout fait pour obtenir le résultat suivant :

<u>Proposition</u> : Si X et Y sont des v. a. indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de lois respectives μ et ν , la v. a. $X \overset{D}{\oplus} Y$ est de loi $\mu \times \nu$.

Pour alléger les notations on écrira $X \oplus Y$ au lieu de $X \overset{D}{\oplus} Y$. De même $X \oplus Y \oplus$

désignera $(X \overset{D_1}{\oplus} Y) \overset{D_2}{\oplus} Z$ etc... Ainsi la marche aléatoire S_n de loi μ partant de x_o pourra s'écrire $S_n = x_o \oplus X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$ $(= S_{n-1} \overset{D_n}{\oplus} X_n)$ où les X_i sont des v. a. indépendantes et de même loi μ .

Remarque : A ce stade on peut obtenir immédiatement le résultat du théorème en faisant l'hypothèse supplémentaire que μ possède un moment d'ordre deux. En effet il est facile de voir qu'on peut appliquer le théorème ergodique sous additif à la suite S_n donc $\frac{S_n}{n}$ converge presque sûrement vers une limite qui ne peut être que zéro d'après le théorème limite central.

3) Schéma de la démonstration du théorème : L'idée est d'utiliser un procédé de troncature : on pose $\overline{X_i} = X_i \wedge i$, $\overline{S_1} = \overline{X_1}$ et en itérant $\overline{S_n} = \overline{S_{n-1}} \overset{D_n}{\oplus} \overline{X_n}$ où la v. a. D_n est la même que dans $S_n = S_{n-1} \overset{D_n}{\oplus} X_n$. On montre alors que $|S_n - \overline{S_n}|$ est presque sûrement majoré indépendamment de n (pour n assez grand) . On montre ensuite que $\frac{\overline{S_n}}{n} \xrightarrow{p.s.} 0$ en utilisant le fait que $\overline{S_n}^2$ est une sous martingale grâce aux deux lemmes suivants :

Lemme 1 : Si X et Y sont des v. a. indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $E(X \oplus Y \mid X) > X$.

Lemme 2 : Soient $Y_1 , \ldots , Y_n$ des v. a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont les lois ont un moment d'ordre deux. Soit $T_n = Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_n$ et soit $C_i = E(Y_i^2) + 2E(Y_i)$ $(i = 1 , \ldots , n)$. Alors $E((x \oplus T_n)^2) \leqslant x^2 + C_1 + \ldots + C_n$.

La fin de la démonstration est classique et basée sur l'inégalité de Kolmogorov-Doob.

Bibliographie :

[1] P. EYMARD et B. ROYNETTE : Marches aléatoires sur le dual de SU(2), L. N. n° 497, Séminaire Nancy Strasbourg (1975) p. 108-152.

[2] L. GALLARDO : Sur deux classes de marches aléatoires. Thèse de 3° Cycle, Nancy (1977).

[3] L. GALLARDO et V. RIES : La loi des grands nombres pour les marches aléatoires sur le dual de SU(2) , Studia Mathematica, Varsovie (à paraître).

[4] Y. GUIVARC'H, M. KEAN et B. ROYNETTE : Marches aléatoires sur les groupes de Lie, L. N. n° 624, Springer Verlag.

[5] B. ROYNETTE : Cours de l'école d'été de probabilités de Saint Flour (à paraître au L. N. Springer Verlag), (1977).

[6] N. J. VILENKINE : Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes, Dunod, Paris (1969).

Léonard Gallardo

Université de Nancy I
U.E.R. Sciences Mathématiques
Case officielle 140

54037 NANCY CEDEX