

ANNALES SCIENTIFIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2  
*Série Mathématiques*

LÉONARD GALLARDO

**Théorèmes limites pour les marches aléatoires sur le dual de  $SU(2)$**

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 67, série *Mathématiques*, n° 17 (1979), p. 63-68

[http://www.numdam.org/item?id=ASCFM\\_1979\\_\\_67\\_17\\_63\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1979__67_17_63_0)

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## THEOREMES LIMITES POUR LES MARCHES ALEATOIRES SUR LE DUAL DE SU(2)

Léonard GALLARDO

Université de Nancy

Résumé : En considérant  $\mathbb{N}$  comme le dual du groupe compact  $SU(2)$ , on peut définir une chaîne de Markov (cf [1],[4] ou [5]) dont on étudie ici deux aspects du comportement asymptotique : un théorème limite central et une loi des grands nombres.

Introduction : Ce travail a été fait en collaboration avec V. RIES et sera publié par ailleurs, aussi je m'attacherai dans cet exposé à expliquer les résultats de manière plutôt heuristique ; le lecteur pourra trouver le détail des démonstrations dans [2] ou [3].

### I.- Origine du problème (dualité entre $\mathbb{N}$ et $SU(2)$ )

Soit  $SU(2)$  le groupe de Lie compact constitué des matrices de la forme  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$  avec  $(a,b) \in \mathbb{C}^2$  et  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Soit  $x \in \mathbb{N}$  et  $\mathcal{E}_x$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  des polynômes de degré  $\leq x$  et soit enfin  $\pi_x$  l'application  $SU(2) \rightarrow \text{Aut } \mathcal{E}_x$  définie par :

$$[\pi_x(g).p](z) = (bz + \bar{a})^x p\left(\frac{az - \bar{b}}{bz + \bar{a}}\right) \quad (p \in \mathcal{E}_x, z \in \mathbb{C}).$$

$\pi_x$  est une représentation continue, irréductible, de dimension  $x+1$  de  $SU(2)$  dans  $\mathcal{E}_x$ . De plus (cf [6]) les  $\pi_x$  ( $x \in \mathbb{N}$ ) sont à équivalence près, les seules représentations unitaires irréductibles de  $SU(2)$ . Le caractère normalisé  $\chi_x$  associé à  $\pi_x$  est alors donné par la formule :

$$\chi_x(g) = \frac{1}{x+1} \text{Tr}(\pi_x(g)) = \frac{\sin[(x+1)\theta]}{(x+1) \sin \theta},$$

où  $e^{\pm i\theta}$  sont les valeurs propres de la matrice  $g \in SU(2)$ .

A partir des formules de Clebsch-Gordon :

$$\chi_x \chi_y = \frac{|x-y|+1}{(x+1)(y+1)} \chi_{|x-y|} + \frac{|x-y|+3}{(x+1)(y+1)} \chi_{|x-y|+2} + \dots + \frac{x+y+1}{(x+1)(y+1)} \chi_{x+y},$$

et compte tenu du fait que les coefficients  $\frac{|x-y|+2s+1}{(x+1)(y+1)}$  ( $0 \leq s \leq x \wedge y$ ) ci-dessus

sont  $> 0$  et de somme égale à 1, on peut définir une convolution  $*$  sur l'ensemble  $\mathcal{M}_1(\mathbb{N})$  des mesures de probabilité sur  $\mathbb{N}$  par :

$$\delta_x \times \delta_y = \sum_{s=0}^{x \wedge y} \frac{|x-y|+2s+1}{(x+1)(y+1)} \delta_{|x-y|+2s}$$

pour le produit de deux masses de Dirac puis par distributivité :

$$\mu \times \nu = \left( \sum_x a_x \delta_x \right) \times \left( \sum_y b_y \delta_y \right) = \sum_{x,y} a_x b_y \delta_x \times \delta_y .$$

La convolution  $\times$  est associative, commutative, d'élément neutre  $\delta_0$  et on peut alors considérer la chaîne de Markov  $S_n$  sur  $\mathbb{N}$  dont le noyau de transition est défini par :

$$P(x, A) = \delta_x \times \mu(A) \quad (x \in \mathbb{N}, A \subset \mathbb{N}) .$$

Par abus de langage on dira que  $S_n$  est une marche aléatoire de loi  $\mu$  sur  $\mathbb{N}$ .

A l'élément  $\mu = \sum_{x \in \mathbb{N}} a_x \delta_x \in \mathcal{M}_1(\mathbb{N})$  on associe la fonction  $\hat{\mu}$ , appelée

"transformée de Fourier" de  $\mu$ , définie sur  $[0, \pi]$  par :

$$\hat{\mu}(\theta) = \sum_{x \in \mathbb{N}} a_x \frac{\sin[(x+1)\theta]}{(x+1) \sin \theta} .$$

L'application  $\mu \mapsto \hat{\mu}$  vérifie l'importante relation suivante :

$$\forall \mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{N}), \widehat{\mu \times \nu} = \hat{\mu} \cdot \hat{\nu} .$$

Ainsi, pour la marche aléatoire de loi  $\mu$  partant de  $x_0$ , la transformée de Fourier de la loi de  $S_n$  est égale à  $\widehat{\delta_{x_0}} \cdot \hat{\mu}^n$ .

Cette transformation de Fourier permet d'étudier les principales propriétés des marches  $S_n$  et de leur noyau potentiel. Par exemple toutes les marches  $S_n$  sont transitoires (cf [1] pour tous les détails sur ce paragraphe).

## II.- Un théorème limite central

**Théorème** : Soit  $S_n$  une marche aléatoire de loi  $\mu$  apériodique avec moment d'ordre deux. Soit  $C = \frac{1}{6} [m_2 + 2m_1]$ , où  $m_i$  désigne le moment d'ordre  $i$  de la loi  $\mu$

Alors  $\frac{S_n}{\sqrt{2nC}}$  converge en loi lorsque  $n \rightarrow +\infty$  vers la densité limite

$$x \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (x > 0) .$$

La démonstration utilise les deux lemmes :

Lemme 1 : Si  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{N})$  est apériodique (ie  $\mu$  charge au moins un entier impair) et possède un moment d'ordre deux on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \hat{\mu} \left( \frac{\alpha}{\sqrt{2nC}} \right) \right]^n = e^{-\frac{1}{2} \alpha^2} .$$

Lemme 2 : Pour toute v. a.  $X \geq 0$  notons  $\varphi_X(\alpha) = E \left( \frac{\sin(\alpha X)}{\alpha X} \right)$  . Alors si  $X_n$  est une suite de v. a.  $\geq 0$  et  $X$  une v. a.  $\geq 0$  telles que  $\forall \alpha > 0$ ,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{X_n}(\alpha) = \varphi_X(\alpha)$ , on a la convergence en loi de  $X_n$  vers  $X$ .

On pose alors  $T_n = \frac{S_n + 1}{\sqrt{2nC}}$ . Grâce au lemme 1 on obtient la limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left( \frac{\sin \alpha T_n}{\alpha T_n} \right) = e^{-\frac{1}{2} \alpha^2} .$$

Ensuite un calcul simple donne :

$$\int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^2 e^{-\frac{1}{2} x^2} \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} dx = e^{-\frac{1}{2} \alpha^2} ,$$

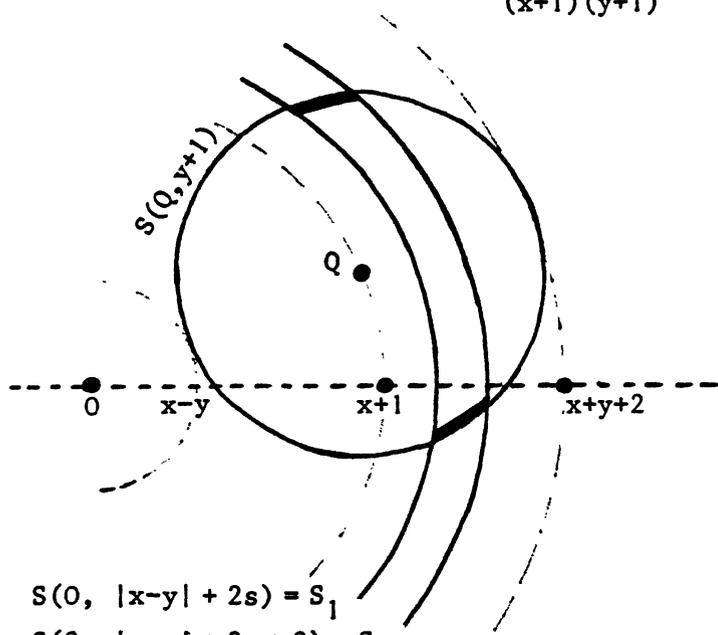
et le résultat déroule du lemme 2.

### III.- Une loi des grands nombres

Théorème : Si  $\mu$  possède un moment d'ordre 1,  $\frac{S_n}{n}$  converge presque sûrement vers zéro quand  $n \rightarrow +\infty$ .

La démonstration de ce résultat utilise de manière essentielle une interprétation "probabilistico-géométrique" de la convolution  $\ast$ .

1) Etude du coefficient  $\frac{|x-y| + 2s + 1}{(x+1)(y+1)}$  ( $0 \leq s \leq x \wedge y$ ,  $s$  entier)



$$S(0, |x-y| + 2s) = S_1$$

$$S(0, |x-y| + 2s + 2) = S_2$$

Notations :

- $S(0, r)$  désigne la sphère de  $\mathbb{R}^3$  de centre 0 et de rayon  $r$
- $Q$  est un point quelconque de la sphère  $S(0, x+1)$
- $S_1 = S(0, |x-y| + 2s)$
- $S_2 = S(0, |x-y| + 2s + 2)$

La figure ci-contre illustre le cas  $x \geq y$ . La partie en gras représente l'aire découpée par  $S_1$  et  $S_2$  sur  $S(Q, y+1)$ .

Un calcul de géométrie élémentaire montre que le rapport :

$$\frac{\text{Aire découpée par } S_1 \text{ et } S_2 \text{ sur } S(Q, y+1)}{\text{Aire totale de } S(Q, y+1)}$$

vaut précisément  $\frac{|x-y| + 2s + 1}{(x+1)(y+1)}$  . C'est donc la probabilité qu'un point aléatoire uniformément distribué sur  $S(Q, y+1)$  tombe dans le secteur découpé par  $S_1$  et  $S_2$  sur  $S(Q, y+1)$  .

Supposons  $\mu = \delta_y$  et soit  $S_n$  une marche de loi  $\mu$  . Si à l'instant  $n$  la marche se trouve en  $x$  (ie  $S_n = x$ ) , la position de la marche à l'instant suivant se décide de la manière suivante : On tire au hasard un point sur  $S(Q, y+1)$  . Si ce point tombe entre  $S(0, |x-y| + 2s)$  et  $S(0, |x-y| + 2s + 2)$  alors  $S_{n+1} = |x-y| + 2s$  .

2) Formalisation : Considérons les données suivantes,

- $X$  et  $Y$  sont des v. a. à valeurs dans  $\mathbb{N}$
- $Q_X$  est un point de  $S(0, X+1)$
- $V_X = \overrightarrow{OQ_X}$
- $W_Y^D$  est un vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^3$  de module  $Y+1$  , invariant par rotation et de direction aléatoire  $D$  .

Définition : Avec les données ci-dessus on définit la v. a.  $X \oplus^D Y = |X-Y| + 2S$  où  $S$  est l'entier de  $[0, X \wedge Y]$  tel que l'on ait

$$|X-Y| + 2S \leq |V_X + W_Y^D| < |X-Y| + 2S + 2 .$$

Remarquons que la "somme"  $X \oplus^D Y$  ne dépend que de  $X, Y$  et  $D$  (et non de  $Q_X$ ) . De plus pour pouvoir répéter l'opération  $\oplus$  , faisons la convention suivante : lorsque le symbole  $\oplus$  est utilisé plusieurs fois dans une somme (par exemple  $(X \oplus^{D_1} Y) \oplus^{D_2} Z$ ) les directions qui interviennent et les v. a. de la somme sont des v. a. indépendantes. En bref dans ce qui précède on a tout fait pour obtenir le résultat suivant :

Proposition : Si  $X$  et  $Y$  sont des v. a. indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et de lois respectives  $\mu$  et  $\nu$  , la v. a.  $X \oplus^D Y$  est de loi  $\mu \times \nu$  .

Pour alléger les notations on écrira  $X \oplus Y$  au lieu de  $X \oplus^D Y$  . De même  $X \oplus Y \oplus$

désignera  $(X \oplus^{D_1} Y) \oplus^{D_2} Z$  etc... Ainsi la marche aléatoire  $S_n$  de loi  $\mu$  partant de  $x_0$  pourra s'écrire  $S_n = x_0 \oplus X_1 \oplus \dots \oplus X_n (= S_{n-1} \oplus^{D_n} X_n)$  où les  $X_i$  sont des v. a. indépendantes et de même loi  $\mu$ .

Remarque : A ce stade on peut obtenir immédiatement le résultat du théorème en faisant l'hypothèse supplémentaire que  $\mu$  possède un moment d'ordre deux. En effet il est facile de voir qu'on peut appliquer le théorème ergodique sous additif à la suite  $S_n$  donc  $\frac{S_n}{n}$  converge presque sûrement vers une limite qui ne peut être que zéro d'après le théorème limite central.

3) Schéma de la démonstration du théorème : L'idée est d'utiliser un procédé de troncature : on pose  $\bar{X}_i = X_i \wedge i$ ,  $\bar{S}_1 = \bar{X}_1$  et en itérant  $\bar{S}_n = \bar{S}_{n-1} \oplus^{D_n} \bar{X}_n$  où la v. a.  $D_n$  est la même que dans  $S_n = S_{n-1} \oplus^{D_n} X_n$ . On montre alors que  $|S_n - \bar{S}_n|$  est presque sûrement majoré indépendamment de  $n$  (pour  $n$  assez grand). On montre ensuite que  $\frac{\bar{S}_n}{n} \xrightarrow{p.s.} 0$  en utilisant le fait que  $\bar{S}_n^2$  est une sous martingale grâce aux deux lemmes suivants :

Lemme 1 : Si  $X$  et  $Y$  sont des v. a. indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , on a  $E(X \oplus Y | X) > X$ .

Lemme 2 : Soient  $Y_1, \dots, Y_n$  des v. a. à valeurs dans  $\mathbb{N}$  dont les lois ont un moment d'ordre deux. Soit  $T_n = Y_1 \oplus \dots \oplus Y_n$  et soit  $C_i = E(Y_i^2) + 2E(Y_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Alors  $E((x \oplus T_n)^2) \leq x^2 + C_1 + \dots + C_n$ .

La fin de la démonstration est classique et basée sur l'inégalité de Kolmogorov-Doob.

Bibliographie :

- [1] P. EYMARD et B. ROYNETTE : Marches aléatoires sur le dual de  $SU(2)$ , L. N. n° 497, Séminaire Nancy Strasbourg (1975) p. 108-152.
- [2] L. GALLARDO : Sur deux classes de marches aléatoires. Thèse de 3° Cycle, Nancy (1977).
- [3] L. GALLARDO et V. RIES : La loi des grands nombres pour les marches aléatoires sur le dual de  $SU(2)$ , Studia Mathematica, Varsovie (à paraître).
- [4] Y. GUIVARC'H, M. KEAN et B. ROYNETTE : Marches aléatoires sur les groupes de Lie, L. N. n° 624, Springer Verlag.

- [5] B. ROYNETTE : Cours de l'école d'été de probabilités de Saint Flour (à paraître au L. N. Springer Verlag), (1977).
- [6] N. J. VILENKINE : Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes, Dunod, Paris (1969).

Léonard Gallardo

Université de Nancy I  
U.E.R. Sciences Mathématiques  
Case officielle 140  
54037 NANCY CEDEX