Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2
Série Mathématiques

Jean-Pierre Conze

Transformations cylindriques et mesures finies invariantes

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 67, série *Mathématiques*, n° 17 (1979), p. 25-31

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1979__67_17_25_0>

TRANSFORMATIONS CYLINDRIQUES ET MESURES FINIES INVARIANTES

Jean-Pierre CONZE

Université de Rennes

1.- Transformations cylindriques

Soient (X,a,μ) un espace probabilisé, $T : X \to X$ un automorphisme de cet espace, et G un groupe localement compact. Notons dg une mesure de Haar à gauche sur G, et $dm = d\mu \times dg$ la mesure produit sur $X \times G$.

Etant donnée une application mesurable ϕ de X dans G, on définit une transformation mesurable sur $X \times G$, préservant la mesure m, en posant :

$$T_\varphi(x,g) = (Tx, \phi(x)g) \;.$$

Une telle transformation est appelée "cylindrique", par analogie avec le cas où T est une rotation sur le cercle et où G est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$. Les propriétés ergodiques des transformations cylindriques apparaissent dans plusieurs situations. Mentionnons par exemple, en Probabilité dans l'étude des marches aléatoires, en théorie ergodique dans l'étude des produits gauches ou des extensions par des groupes compacts, en théorie des nombres dans l'estimation des sommes d'itérés sous l'action d'une rotation.

2.- Cocycles

Au lieu d'un automorphisme T unique, considérons un groupe Γ d'automorphismes de (X,a,μ). Notons γx l'image de $x \in X$ par un élément $\gamma \in \Gamma$. Généralisant la construction donnée en 1., on peut encore étendre l'action de Γ sur X en une action "cylindrique" sur $X \times G$.

Pour celà, donnons-nous une application ϕ de $\Gamma \times X$ dans dans G, et posons

$$\gamma_\phi(x,g) = (\gamma x, \phi(\gamma,x)g) \quad , \qquad \gamma \in \Gamma \,;\, x \in X \,,\, g \in G \,.$$

La condition pour que l'action de Γ ainsi définie soit un homomorphisme de groupe est que ϕ soit un <u>cocycle</u>, c'est-à-dire vérifie la relation :

$$\phi(\gamma'\gamma,x) = \phi(\gamma',\gamma x)\ \phi(\gamma,x) \qquad \gamma,\gamma' \in \Gamma \qquad x \in X$$

Ainsi tout cocycle ϕ de $\Gamma \times X$ dans G permet d'étendre l'action de Γ en une action que nous noterons $(\gamma_\phi, \gamma \in \Gamma)$ sur $X \times G$.

3.- Cobords

Soit ψ une application mesurable de X dans G. L'image par l'isomorphisme $(x,g) \to (x,\psi(x)g)$ d'une action cylindrique $(\gamma_\phi, \gamma \in \Gamma)$ définie par un cocycle ϕ est définie par le cocycle $\tilde{\phi}$, où $\tilde{\phi}(\gamma,x) = \psi(\gamma x)\ \phi(\gamma,x)\ \psi(x)^{-1}$ $,\gamma \in \Gamma \,,\, x \in X$ (*)

On dit qu'un cocycle ϕ sur $\Gamma \times X$ à valeurs dans G est un <u>cobord</u> s'il existe une application mesurable ψ de X dans G

telle que l'on ait :

$$\phi(\gamma,x) = \psi(\gamma x)\ \psi(x)^{-1}\ , \quad \gamma \in \Gamma \quad x \in X\ .$$

Deux cocycles ϕ et $\tilde{\phi}$ sont dits cohomologues, s'il existe une application ψ mesurable de X dans G , telle que (*) soit vérifiée.

Deux cocycles cohomologues définissent, d'après ce qui précède, essentiellement la même action. En particulier, si ϕ est lui-même un cobord (cohomologue à l'identité), l'action $(\gamma_\phi, \gamma \in \Gamma)$ est isomorphe au produit de l'action de Γ sur X par l'action triviale sur G .

Dans le cas où le groupe Γ est $\mathbb{Z}$, un cocycle $\phi(n,x)$ sur $\mathbb{Z} \times X$ est entièrement défini par la donnée de $\phi(x) = \phi(1,x)$. Si l'on note T l'automorphisme de (X,a,μ) engendrant l'action de $\mathbb{Z}$, on a :

$$\phi(n,x) = \begin{cases} \phi(T^{n-1}x)\ \phi(T^{n-2}x)\ldots\phi(x)\ , & n \geq 1 \\ e \ \text{(élément neutre de } G), & n = 0 \\ \phi(T^{-n}x)^{-1}\ldots\phi(T^{-1}x)^{-1}\ , & n \leq -1 \end{cases}$$

Les cobords sont alors les applications mesurables de X dans dans G de la forme $\phi(x) = \psi(Tx)\ \psi(x)^{-1}$, et deux applications ϕ et $\tilde{\phi}$ sont cohomologues, s'il existe ψ mesurable telle que :

$$\tilde{\phi}(x) = \psi(Tx)\ \phi(x)\ \phi(x)^{-1}$$

4.- Mesures finies invariantes pour une action cylindrique

Plusieurs auteurs ont étudié les propriétés ergodiques des cocycles et des actions cylindriques qui leur sont associées. Mentionnons en particulier les travaux récents de K.Schmidt et R.Zimmer.

Dans [1], R. Zimmer a caractérisé les cocycles vérifiant une condition de compacité, sous certaines hypothèses sur le groupe G. Nous nous proposons de traiter ici un problème analogue : la recherche de mesures finies invariantes par l'action associée à un cocycle.

La mesure produit m n'est finie que si G est compact. Il est clair que, si le cocycle ϕ est à valeurs dans un sous-groupe compact K de G, il existe une mesure finie sur $X \times G$ invariante par $(\gamma_\phi, \gamma \in \Gamma)$ se projettant sur μ : la mesure produit $d\mu \times dk$.
Si l'on peut modifier ϕ par un cobord pour se ramener à cette situation, c'est-à-dire si ϕ est cohomologue à un cocycle à valeurs dans un sous-groupe compact de G, alors l'action $(\gamma_\phi, \phi \in \Gamma)$ préserve encore une mesure finie se projettant sur μ. Celà résulte immédiatement des remarques sur l'isomorphisme associé à un cobord. Nous allons montrer la réciproque de ce résultat.

Les notations sont celles des n°s 1 et 2 .

5.- <u>Théorème</u>

Si l'action de Γ sur (X,a,μ) est ergodique, et s'il existe une mesure finie sur $X \times G$ invariante par $(\gamma_\phi, \gamma \in \Gamma)$, se projettant sur μ, le cocycle ϕ est cohomologue à une cocycle à valeurs dans un sous-groupe compact de G.

<u>Preuve</u> : Nous nous bornerons, pour simplifier, au cas où $\Gamma = \mathbb{Z}$, c'est-à-dire au cas des transformations cyclindriques envisagées au n°1.

Soit donc T un automorphisme ergodique de (X,a,μ). Soit ϕ une application mesurable de X dans G et λ une mesure finie sur $X \times G$, invariante par $T_\phi : (x,g) \to (Tx, \phi(x)g)$ et se projettant sur sur μ.

Par régularisation à l'aide de fonctions à support compact sur G, on peut se ramener au cas où λ est définie par une densité f (positive non identiquement nulle), par rapport à la mesure produit m, vérifiant :

$$\lim_{g \to \infty} f(x,g) = 0 \quad , \text{ pour presque tout } x \in X .$$

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $A(x) = \{g \in G : f(x,g) > \varepsilon\}$. Pour presque tout x, $A(x)$ est un compact de G, et, pour un choix convenable de ε, $A(x)$ est non vide, pour un ensemble de mesure positive de valeurs de x.

Considérons l'espace $K(G)$ des sous-ensembles compacts de G muni de sa distance naturelle. Cet espace est séparable. Toute fonction mesurable définie sur X à valeurs dans $K(G)$ invariante par T est constante en dehors d'un ensemble négligeable, d'après l'ergodicité de T.

L'application $x \to A(x)$ de X dans $K(G)$ est mesurable et, compte-tenu de l'invariance de f par T, vérifie la relation :

$$\phi(x)\, A(x) = A(Tx) ,$$

où à gauche figure l'image de l'ensemble $A(x)$ translaté par l'élément $\phi(x) \in G$.

Soit $B(x)$ l'ensemble $A(x)^{-1} A(x)$ formé des produits $h^{-1}g$, où h et g décrivent $A(x)$. L'application $x \to B(x)$ est encore mesurable de X dans $K(G)$, et, d'après la relation précédente, elle est invariante par T. Il existe donc un compact K_0 dans G tel que, pour presque tout x, on ait

$$A^{-1}(x)\, A(x) = K_0 .$$

Il est possible de choisir une fonction u de X dans G, mesurable, telle que, pour chaque x, $u(x) \in A(x)$.

Posons $D(x) = u(x)\ A(x)$, et, $\phi_1(x) = u(Tx)\ \phi(x)\ u(x)^{-1}$.

On a : $D(x) \subset K_0$ et $\phi_1(x)\ D(x) = D(Tx)$.

Sur l'espace des compacts $C \subset K_0$, définissons la relation d'équivalence : $C \sim C'$ s'il existe $h \in G$ tel que $hC = C'$. L'espace quotient par cette relation d'équivalence est encore métrisable et séparable. En notant $\tilde{C}$ la classe d'équivalence d'un compact C , on a la relation d'invariance : $\tilde{D}(Tx) = \tilde{D}(x)$.

On en déduit l'existence d'un compact fixe D_0 et d'une fonction mesurable h , tels que l'on ait, pour presque tout x :

$D(x) = h(x)\ D_0$.

Posons $\phi_2(x) = h(Tx)^{-1}\ \phi_1(x)\ h(x)$.

On a : $\phi_2(x) D_0 = D_0$.

Ceci implique que le groupe engendré par les valeurs de $\phi_2(x)$, quand x décrit X (en dehors d'un ensemble négligeable) est compact. Donc ϕ, qui est cohomologue à ϕ_2 , est cohomologue à une application à valeurs dans un sous-groupe compact de G .

Remarque : Une démonstration analogue montre que, si ϕ est un cocycle tel que, pour chaque x , les valeurs $(\phi(\gamma,x), \gamma \in \Gamma)$ restent dans un compact (dépendant de x), alors ϕ est cohomologue à un cocycle à valeurs dans un sous-groupe compact de G . Ceci étend des résultats de [1].

REFERENCE

[1] R.ZIMMER : Compactness conditions on cocycles of ergodic transformation groups - J. London Math. Soc. (2) 15(1977) 155-163.

Jean-Pierre CONZE

UER de Mathématiques et Informatique

Université de Rennes

Avenue du Général Leclerc

35040 RENNES Cédex