Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2
Série Mathématiques

Lucien Chevalier

Démonstration « atomique » des inégalités de Burkholder-Davis-Gundy

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 67, série *Mathématiques*, nº 17 (1979), p. 19-24
<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1979__67_17_19_0>

DEMONSTRATION "ATOMIQUE" DES INEGALITES DE BURKHOLDER-DAVIS-GUNDY

Lucien CHEVALIER

Université de Grenoble

On désigne par $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé complet, et par $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ une famille croissante et continue à droite de sous tribus de $\mathcal{F}$. On suppose que $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles négligeables de $\mathcal{F}$, et que $\mathcal{F} = \mathrm{Sup}(\mathcal{F}_t)$. Par "martingale", on entend "martingale locale cadlag".

Pour tout $p > 0$, on désigne par $\mathcal{H}^p$ (resp. H^p) l'espace des martingales X telles que $\|X\|_{\mathcal{H}^p} = \|X^*_\infty\|_{L^p} < +\infty$ (resp. $\|X\|_{H^p} = \|[X,X]^{1/2}_\infty\|_{L^p} < +\infty$). On se propose ici de montrer, sous certaines conditions, l'équivalence des normes ainsi définies (ou des métriques qui en tiennent lieu si $p < 1$).

Pour simplifier, on se bornera à donner la demonstration dans le cas de martingales continues; elle est basée en partie sur la particularité qu'ont ces martingales d'admettre des "décompositions atomiques" (prop. 2 et 3), qui donnent immédiatement les inégalités visées pour $0 < p \leq 1$; enfin, un lemme (" $H_{p/2} \subset \mathcal{H}_{p/2}$ implique $H_p = \mathcal{H}_p$ ") donne les inégalités pour tout $p > 0$.

Dans un deuxième paragraphe, on indique brièvement d'autres résultats que les décompositions atomiques permettent d'obtenir.

L'idée des décompositions atomiques provient de [1].

I. Démonstration des inégalités dans le cas continu.

Définition 1. Soit $p > 0$; une martingale continue a est un p-atome de 1ère catégorie s'il existe un temps d'arrêt T tel que

(i) $a_t = 0$ si $t \leq T$;

(ii) $\| a^*_\infty \|_\infty \leq P(T < \infty)^{-1/p}$

Définition 2. La définition d'un p-atome de 2ème catégorie s'obtient en remplaçant dans la déf.1 a^*_∞ par $[a,a]^{1/2}_\infty$.

Un des avantages des atomes est la

Proposition 1. Pour $0 < p \leq 2$, tout atome de toute catégorie a une "norme" $\leq \sqrt{2}$ dans $\mathcal{H}^p$ et H^p.

Démonstration : Il est trivial qu'un atome de 1ère (resp. 2ème) catégorie est dans la boule unité de $\mathcal{H}^p$ (resp. H^p); il reste donc à estimer, par exemple, $E(a^{*p})$, où a est un atome de 2ème catégorie. Soit T un temps d'arrêt associé à a; on a :

$E(a^{*p}) = E(a^{*p}\chi_{\{T<\infty\}}) \quad E^{p/2}(a^{*2})\,(p(T<\infty))^{1-p/2}$ d'où,

comme $E(a^{*2}_\infty) \leq 2E(a^2_\infty) = 2E([a,a]_\infty)$, $E(a^{*p}_\infty) \leq 2^{p/2} E^{p/2}([a,a]_\infty)(p(T<\infty))^{1-\frac{p}{2}}$

$\leq 2^{p/2}(((p(T<\infty))^{-1/p})^2)^{p/2}(p(T<\infty))^{p/2}\,(p(T<\infty))^{1-p/2} = 2^{p/2}$.

On en déduit assez facilement que, si (a^n) est une suite d'atomes (de 1ère catégorie par exemple), et (λ_n) une suite de $l^p(\mathbb{Z})$, alors la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n a^n$ converge vers un élément de $\mathcal{H}^p$, pour la topologie de $\mathcal{H}^p$. On n'aura pas besoin de cerésultat ici; en revanche, on utilisera les réciproques suivantes :

Proposition 2 : Pour toute martingale (continue) X telle que $\|X\|_{\mathcal{H}^p} < +\infty$, il existe une suite (a^n) d'atomes de 1ère catégorie et une suite (λ_n) de scalaires telles que :

(i) la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n a^n$ converge vers X dans $\mathcal{H}^p$;

(ii) pour tout t, la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n a^n_t$ converge p.s. vers X_t;

(iii) $\|(\lambda_n)\|_{l^p(\mathbb{Z})} \leq c_p \|X\|_{\mathcal{H}^p}$, où c_p ne dépend que de p.

Proposition 3. Pour toute martingale (continue) X telle que $\|X\|_{H^p} < +\infty$, il existe une suite (b^n) d'atomes et une suite (μ_n) de scalaires telles que :

(i) la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} \mu_n b^n$ converge vers X dans H^p;

(ii) pour tout t, la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} \mu_n b^n_t$ converge p.s. vers X_t;

(iii) $\|(\mu_n)\|_{l^p(\mathbb{Z})} \leq D_p \|X\|_{H^p}$, où D_p ne dépend que de p.

Les démonstrations sont voisines; bornons-nous à établir la prop.3 :

Soit $X \in H^p$; posons, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$T_n = \operatorname{Inf}\{t,\ [X,X]_\infty^{1/2} > 2^n\};$$
$$\mu_n = 2^{n+1}\ P(T_n < \infty)^{1/p}$$
$$b^n = (\mu_n)^{-1}(X^{T_{n+1}} - X^{T_n}) \text{ si } \mu_n \neq 0$$
$$= 0 \text{ si } \mu_n = 0.$$

Il est clair que les b^n sont des atomes associés aux temps d'arrêt T_n; montrons que les assertions (i) et (ii) sont vérifiées : soient P et Q deux entiers ≥ 0; on a

$$X - \sum_{-P}^{Q} \mu_n b^n = (X - X^{T_{Q+1}}) + X^{T_{-P}}.$$

Puisque $[X,X]_\infty < \infty$ p.s., on a $\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$ p.s.; donc, pour tout t, $X_t - X_t^{T_{Q+1}}$ tend vers 0 p.s. quand Q tend vers $+\infty$, d'où une moitié de (i); d'autre part, $[X - X^{T_{Q+1}}, X - X^{T_{Q+1}}]_\infty^{p/2} = ([X,X]_\infty - [X,X]_{T_{Q+1}})^{p/2}$ tend p.s. vers 0 quand Q tend vers $+\infty$, en restant $\leq [X,X]_\infty^{p/2}$, d'où une moitié de (i). Enfin, on observe que, pour tout t, on a $[X^{T_{-P}}, X^{T_{-P}}]_t \leq 2^{-P}$, ce qui permet de compléter facilement la preuve de (i) et (ii). D'autre part,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\mu_n|^p = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{(n+1)p}\ P(T_n < \infty)$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{(n+1)p}\ P([X,X]_\infty^{1/2} > 2^n)$$
$$= 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} (2^p)^n\ P([X,X]_\infty^{p/2} > (2^p)^n)$$
$$\leq (D_p)^p\ E([X;X]_\infty^{p/2}).$$

<u>Corollaire</u> 1 : <u>Pour</u> <u>tout</u> $p \leq 1$, $H^p \subset \mathcal{H}^p$.

En effet, soit $X \in H^p$; on lui applique la prop.3; d'après (ii) on a, avec des notations évidentes:

$$(X_\infty^*)^p \leq \sum_{n\in Z} |\mu_n|^p (b_\infty^{n*})^p$$. En prenant les espérances et en appliquant successivement la prop.1 et la prop.3(iii on obtient $\|X\|_{\mathcal{H}^p} \leq \sqrt{2}\, D_p \|X\|_{H^p}$.

On pourrait procéder de la même manière, la prop. 2 remplaçant la prop. 3, pour obtenir l'inégalité en sens inverse (pour $p \leq 2$); comme on n'obtiendrait pas ainsi les inégalités pour tout $p > 0$, on préfère utiliser le

Lemme : *Soit $p > 0$; s'il existe $A_{p/2} > 0$ tel que $\|X\|_{\mathcal{H}^{p/2}} \leq A_{p/2} \|X\|_{H^{p/2}}$ pour toute martingale (continue) X, alors il existe A_p et $B_p > 0$ tels que $B_p \|X\|_{H^p} \leq \|X\|_{\mathcal{H}^p} \leq A_p \|X\|_{H^p}$ pour toute martingale (continue) X.*

De ce résultat et du cor.1 découlent immédiatement les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy pour tout $p > 0$.

Démonstration du lemme :

Grâce à un argument d'arrêt, on peut se limiter aux martingales de $\mathcal{H}^p \cap H^p$. Soit X une telle martingale; la martingale $Y = X^2 - [X,X]$ vérifie l'inégalité :

(A) $\|Y\|_{H^{p/2}} \leq 2 \|X\|_{\mathcal{H}^p} \|X\|_{H^p}$; en effet, pour tout $t \geq 0$, $[Y,Y]_t = 4\int_0^t X_s^2 \, d[X,X]_s \leq 4 X_t^{*2} d[X,X]_t$; en élevant les deux membres à la puissance $p/4$, en les intégrant et en appliquant l'inégalité de Schwartz au second, on obtient l'inégalité (A).

Pour établir l'existence de A_p, on écrit, pour tout $t \geq 0$, $|X_t|^p = (X_t^2)^{p/2} \leq 2^{p/2}([X,X]_t^{p/2} + |Y_t|^{p/2})$, et par suite : $(X_\infty^*)^p \leq 2^{p/2}([X,X]_\infty^{p/2} + (Y_\infty^*)^{p/2})$; en prenant les espérances, en utilisant successivement l'hypothèse et l'inégalité (A), (et la finitude de toute les "normes"), on arrive à l'inégalité

$$\|X\|_{\mathcal{H}^p}^p - 2^{p/2}(\|X\|_{H^p}^p + (A_{p/2})^{p/2} 4^{p/4} \|X\|_{\mathcal{H}^p}^{p/2} \|X\|_{H^p}^{p/2}) \leq 0.$$

En considérant le premier membre comme un trinôme du second degré par rapport à $\|X\|_{\mathcal{H}^p}^{p/2}$, on obtient finalement

$\|X\|_{\mathcal{H}^p} \leq 2^{4/p} (4 A_{p/2} + \sqrt{2}) \|X\|_{H^p}$. La preuve de l'existence de B_p est similaire.

II. Autres exemples d'applications des décompositions atomiques

- Espaces H^p et $\mathcal{H}^p$ de martingales régulières.

On désigne par H^p_g l'espace des martingales X telles que $\|X\|_{H^p_g} < +\infty$, où cette quantité désigne la borne inférieure des nombres $(E(A^p))^{1/p}$, A parcourant l'ensemble des processus prévisibles qui sont $\geq [X,X]^{1/2}$. On définit de la même manière l'espace $\mathcal{H}^p_g$.

En adaptant convenablement les méthodes du § I, on peut montrer que les espaces H^p_g et $\mathcal{H}^p_g$ sont isomorphes (résultat dû, je crois, à P.A. MEYER).

- Espace H^p construit avec le processus prévisible ,

Certains des résultats de M. PRATELLI (Cf. [2]) peuvent s'obtenir par des décompositions atomiques, avec parfois un gain en généralité.

- Dual de H^p, pour $p \leq 1$.

Considérons ici le cas des martingales dyadiques, et appelons bmo_p l'espace des martingales Y fermées dans L^2 telles qu'il existe C vérifiant $\|Y_\infty - Y_T\|_\infty \leq C\ p(T<\infty)^{1/p}$ pour tout temps d'arrêt T, normé comme on l'imagine. En généralisant les méthodes de [I] , on voit que le dual de H^p est isomorphe à bmo_p, espace qui a une signification géométrique simple : il est isomorphe au sous-espace de L^2 des fonctions f telles qu'il existe C vérifiant, pour tout intervalle dyadique I, $\int_I \left|f - \frac{1}{|I|}\int f\right| \leq C\ |I|^{1/p}$, équipé de la "norme" $\|f\| = \mathrm{Inf}\{C\ldots\}$. Ce dernier espace est lui-même isomorphe, si $p < 1$, à la classe de Lipschitz $\mathrm{Lip}(\frac{1}{p} - 1)$. On retrouve ainsi une partie des résultats de C. HERZ (Cf [III]).

Références :

[I] A. BERNARD et B. MAISONNEUVE : "Decomposition atomique de martingales de la classe H^1", Séminaire de Probabilités XI, Lecture notes 581, Springer Verlag (1977).

[II] M. PRATELLI "Sur certains espaces de martingales localement de carré intégrable". Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes 511, Springer Verlag (1976).

[III] C. HERZ "H^p-Spaces of martingales, $0 < p \leq 1$". Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.28, 189-205 (1974).

Lucien CHEVALIER
Institut Fourier
Mathématiques Pures
B.P. 116
38402 SAINT MARTIN D'HERES

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-