

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

BERNARD BRUNET

**Sur la classe des morphismes propres dans la catégorie
des espaces de convergence**

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 66, série *Mathématiques*, n° 16 (1978), p. 107-120

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1978__66_16_107_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR LA CLASSE DES MORPHISMES PROPRES
DANS LA CATEGORIE DES ESPACES DE CONVERGENCE**

Bernard BRUNET

Université de Clermont II

Dans ce qui suit, l'auteur développe les résultats énoncés dans sa note à l'Académie des Sciences, note présentée le 20 décembre 1976 par Monsieur André LICHNEROWICZ : généralisation à la catégorie des espaces de convergence séparés et à celle des espaces de convergence complètement réguliers des théorèmes d'extension propre d'une application continue de G.L. CAIN ([1] et [2]) et de G.T. WHYBURN ([10] et [11]) et étude de la classe des morphismes propres de la catégorie des espaces de convergence complètement réguliers.

Plan :

- I : Rappels sur la catégorie des espaces de convergence.
- II : Compactification d'un espace de convergence ; espaces de convergence complètement réguliers .
- III : Applications propres d'un espace de convergence dans un autre.
- IV : Sur la classe des morphismes propres dans la catégorie des espaces de convergence complètement réguliers.

Notations :

Nous désignerons :

- par $>$ la relation sur l'ensemble des filtres sur un ensemble X définie par $(\Phi > \Psi)$ si et seulement si Φ est plus fin que Ψ .
- pour tout point x d'un ensemble X , par \mathfrak{x} l'ultrafiltre trivial de base $\{x\}$.
- pour toute application f d'un ensemble X dans un ensemble X' , par $f_* \Phi$ le filtre image directe par f d'un filtre Φ sur X et par $f^* \Phi'$ le filtre, éventuellement impropre, image réciproque par f d'un filtre Φ' sur X' .

I - RAPPELS SUR LA CATEGORIE DES ESPACES DE CONVERGENCE :

1) On appellera *espace de convergence* tout couple formé d'un ensemble X et d'une relation q entre l'ensemble $\Phi_0(X)$ des filtres propres sur X et X satisfaisant aux deux conditions suivantes :

$$C_1) \quad \forall x \in X, \exists q \ x$$

$$C_2) \quad \forall x \in X, \forall \phi \in \Phi_0(X), \forall \psi \in \Phi_0(X), \phi \ q \ x \text{ et } \psi > \phi \Rightarrow \psi \ q \ x$$

et on dira qu'un filtre ϕ sur X converge pour q vers un point x de X ou que x est *valeur limite pour q* de ϕ (et on notera $x \in \lim_q \phi$) si et seulement si $\phi \ q \ x$.

Etant donné un espace topologique (X, T) , on appellera *structure de convergence associée à T* la structure de convergence, notée q_T , définie par $\phi \ q_T \ x$ si et seulement si ϕ converge pour T vers x .

On dira qu'un espace de convergence est *pseudotopologique* si et seulement si, pour tout filtre ϕ sur X et tout point x de X , ϕ converge pour q vers x si et seulement si tout ultrafiltre plus fin que ϕ converge pour q vers x .

Etant données deux structures de convergence q_1 et q_2 sur X , on dira que q_1 est *plus fine* que q_2 si et seulement si, pour tout filtre ϕ sur X , $\lim_{q_1} \phi$ est inclus dans $\lim_{q_2} \phi$.

Etant donné un ensemble $\{q_i; i \in I\}$ de structures de convergence sur X , on désignera par

$\sup_{i \in I} q_i$ la structure de convergence sur X définie par

$$\phi \left(\sup_{i \in I} q_i \right) x \Leftrightarrow \forall i \in I, \phi \ q_i \ x$$

et par $\inf_{i \in I} q_i$ la structure de convergence sur X définie par

$$\phi \left(\inf_{i \in I} q_i \right) x \Leftrightarrow \exists i \in I, \phi \ q_i \ x$$

Pour toute application f d'un ensemble X dans un ensemble X' et toute structure de convergence q' sur X' , on désignera par f^*q' la *structure de convergence induite* de q' par f , c'est-à-dire la structure de convergence sur X définie par :

$$\phi \ (f^*q') \ x \Leftrightarrow f_* \ \phi \ q' \ f(x)$$

(Dans le cas particulier où X est une partie de X' et f l'injection canonique de X dans X' , le couple (X, f^*q') sera appelé *sous-espace de convergence* de (X', q')).

Il est immédiat que, pour toute application f de X dans X' , toute application g de X' dans X'' et toute structure de convergence q'' sur X'' , $(g \circ f)^*q'' = f^*[g^*q'']$ et que, pour tout ensemble $\{q'_i; i \in I\}$ de structures de convergence sur X' ,

$$f^* \left(\sup_{i \in I} q'_i \right) = \sup_{i \in I} (f^* q'_i)$$

Etant donnés deux espaces de convergence (X, q) et (X', q') , on dira qu'une application f de X dans X' est une *application continue* de (X, q) dans (X', q') si et seulement si q est plus fine que f^*q' et on appellera *plongement* toute application injective f telle que $f^*q' = q$.

On désignera par Conv la catégorie dont les objets sont les espaces de convergence et les morphismes les applications continues, et par κ le foncteur inclusion de la catégorie Top dans Conv .

Etant données une application f de X' et une structure de convergence q sur X , on appellera *structure de convergence coïnduite* par f de q , la structure de convergence sur X' , notée $f_* q$, définie par : $\phi' (f_* q) x'$ si et seulement si $\phi' = \hat{x}'$ où s'il existe un filtre ϕ sur X et un point x de X tels que $\phi' = f_* \phi$, $x' = f(x)$ et $\phi q x$.

(Dans le cas particulier où X' est un quotient de X , $f_* q$ sera appelée structure de convergence quotient).
Notons que $f_* q$ est la plus fine des structures de convergence sur X' rendant f continue.

Etant donné un ensemble d'espaces de convergence $(X_\alpha, q_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$, on appellera *structure de convergence produit*, la moins fine des structures de convergence sur $\prod_\alpha X_\alpha$ rendant continues les applications projections pr_α , c'est-à-dire la structure $\sup_\alpha (pr_\alpha^* q_\alpha)$ et on appellera *structure de convergence somme* la plus fine des structures de convergence sur $\coprod_\alpha X_\alpha$ rendant continues les injections canoniques j_α , c'est-à-dire la structure $\inf_\alpha ((j_\alpha)_* q_\alpha)$.

PROPOSITION 1.1. *Tout sous-espace de convergence (resp. tout espace de convergence quotient) est un noyau (resp. un conoyau) dans Conv.*

2) Topologie associée à une structure de convergence.

Etant donné un espace de convergence (X, q) et un filtre ϕ sur X , on dira qu'un point x de X est *valeur d'adhérence pour q de ϕ* (et on notera $x \in adh_q \phi$) si et seulement si x est valeur limite pour q d'un filtre plus fin que ϕ (On conviendra que pour tout filtre impropre ϕ sur X , $adh_q \phi = \emptyset$).

Il est trivial que toute valeur limite est valeur d'adhérence, et que pour tout ultrafiltre ϕ sur X , $lim_q \phi = adh_q \phi$. Signalons d'autre part, que si f est un plongement de (X, q) dans (X', q') ,

$$adh_q \phi = f^{-1} [adh_{q'} f_* \phi] .$$

Pour toute partie A de X , on appellera *adhérence pour q de A* (et on notera $Adh_q A$) l'ensemble des valeurs d'adhérence pour q du filtre de base A .

Rappelons (cf. [3]) que l'opération adhérence est extensive, isotone, commute avec la réunion finie, mais non idempotente en général, et que, pour tout filtre ϕ sur X , $adh_q \phi$ est inclus dans

$$F \in \phi \quad Adh_q F .$$

Signalons d'autre part que, si A_1 est une partie de (X_1, q_1) et A_2 une partie de (X_2, q_2) ,

$$Adh_{q_1 \times q_2} (A_1 \times A_2) = (Adh_{q_1} A_1) \times (Adh_{q_2} A_2) .$$

Etant donné un espace de convergence (X, q) , on dira qu'une partie A de X est *fermée* si et seulement si l'une des deux assertions équivalentes suivantes est vérifiée :

F₁) A est égale à son adhérence pour q .

F₂) Pour tout filtre ϕ sur A et tout point x de X tel que x soit valeur limite pour q de $i_* \phi$

(i injection canonique de A dans X), x appartient à A .

et on dira qu'une partie 0 de X est *ouverte* si et seulement si l'une des deux assertions équivalentes suivantes est vérifiée :

0₁) le complémentaire de 0 est fermé

0₂) Pour tout point x de 0 et tout filtre \mathcal{F} sur X convergent pour q vers x , 0 appartient à \mathcal{F} .

Il convient de noter que :

- l'ensemble des parties fermées (resp. ouvertes) de (X, q) est l'ensemble des fermés (resp. ouverts) d'une topologie sur X que nous appellerons *topologie associée à q* et que nous noterons $\tau(q)$.

- pour toute topologie T sur X , $\tau(q_T) = T$.

- $\tau(q)$ est la plus fine des topologies T sur X telles que q soit plus fine que q_T .

- toute application continue de (X, q) dans (X', q') induit une application continue de l'espace topologique $(X, \tau(q))$ dans l'espace topologique $(X', \tau(q'))$.

Dans ce qui suit nous désignerons par τ le foncteur de Conv dans Top , défini pour tout espace de convergence (X, q) par $\tau(X, q) = (X, \tau(q))$ et, étant donnée une propriété topologique \mathcal{P} , on dira qu'un objet (un morphisme) de Conv possède la propriété $\tau \cdot \mathcal{P}$ si et seulement si son image par τ possède la propriété \mathcal{P} .

Comme pour tout espace de convergence (X, q) , tout espace topologique (X', T) et toute application f de X dans X' , f est un morphisme dans Conv de (X, q) dans (X', q_T) si et seulement si f est un morphisme dans Top de $(X, \tau(q))$ dans (X', T) , τ est adjoint à gauche du foncteur κ .

PROPOSITION 1.2. τ commute avec la somme et le quotient.

Etant donné un espace de convergence (X, q) et une partie A de X , on appellera *fermeture* pour q de A , l'adhérence pour la topologie $\tau(q)$ de A . Il est immédiat que, pour toute partie A de X , la fermeture pour q de A est le plus petit fermé de (X, q) contenant cette partie, et que l'adhérence de A est inclus dans sa fermeture.

PROPOSITION 1.3. Si q est une structure de convergence sur X telle que tout ultrafiltre plus fin que le filtre des voisinages pour $\tau(q)$ d'un point de X converge pour q vers ce point, alors, pour toute partie A de X , l'adhérence et la fermeture de cette partie sont égales.

Etant donné deux espaces de convergence (X, q) et (X', q') et une application f de X dans X' , on dira que f est une *application fermée* (resp. ouverte) de (X, q) dans (X', q') si et seulement si l'image par f de toute partie fermée (resp. ouverte) de (X, q) est une partie fermée (resp. ouverte) de (X', q') .

Il est immédiat que, pour tout espace de convergence (X, q) et toute partie A de X , l'injection canonique de A dans X est fermée (resp. ouverte) si et seulement si A est un fermé (resp. un ouvert) de (X, q) , et que, pour tout α , les injections canoniques de (X_α, q_α) dans l'espace de

convergence somme $(\prod_\alpha X_\alpha, \prod_\alpha q_\alpha)$ sont ouvertes et fermées.

PROPOSITION 1.4. Si (A, i) est une partie fermée d'un espace de convergence (X, q) , la topologie associée à i^*q est la topologie induite sur A par $\tau(q)$.

II - COMPACTIFICATION D'UN ESPACE DE CONVERGENCE ;
 ESPACES DE CONVERGENCE COMPLETEMENT REGULIERS.

On dira qu'un espace de convergence (X, q) est *séparé* si et seulement si tout filtre sur X admet au plus un point limite pour q .

Il est immédiat que tout sous-espace d'un espace de convergence séparé, tout produit d'espaces de convergence séparés, sont des espaces de convergence séparés. Remarquons d'autre part que, puisque dans un espace de convergence séparé, toute partie réduite à un point est fermée, l'espace topologique associé à un espace de convergence séparé est accessible.

Dans ce qui suit, nous désignerons par Conv_s la sous-catégorie de Conv dont les objets sont les espaces de convergence séparés.

PROPOSITION 2.1. (Théorème de prolongement des identités)

Si deux applications continues f et g d'un espace de convergence (X, q) dans un espace de convergence séparé (X', q') sont égales sur une partie A de X , elles sont égales sur la fermeture de A .

En effet $\{x \mid f(x) = g(x)\}$ est un fermé de (X, q) ([9]).

On dira qu'un espace de convergence séparé (X, q) est *régulier* si et seulement si, pour tout filtre Φ sur X convergeant pour q vers un point x de X , le filtre $\bar{\Phi}$ de base $\{\text{Adh}_q F; F \in \Phi\}$ converge pour q vers x .

Comme pour toute application continue f de (X, q) dans (X', q') et tout filtre Φ sur X , le filtre $f_* \bar{\Phi}$ est plus fin que le filtre $\overline{f_* \Phi}$, tout sous-espace, tout produit d'espaces de convergence réguliers sont des espaces de convergence réguliers.

On dira qu'un espace de convergence (X, q) est *quasi-compact* si et seulement si l'une des deux assertions suivantes est vérifiée :

K_0) Tout filtre sur X possède une valeur d'adhérence pour q .

K_m) Tout ultrafiltre sur X possède une valeur limite pour q .

Il est immédiat que tout sous-espace fermé d'un espace de convergence quasi-compact, tout produit d'espaces de convergence quasi-compacts sont des espaces de convergence quasi-compacts. D'autre part, comme q est plus fine que $q_{\tau(q)}$, l'espace topologique associé à un espace de convergence quasi-compact est quasi-compact.

On dira qu'un espace de convergence est *compact* si et seulement s'il est séparé et quasi-compact, et étant donné un espace de convergence séparé non compact (X, q) , on appellera *compactifié* de cet espace tout couple formé d'un espace de convergence (\hat{X}, \hat{q}) et d'une application i de X dans \hat{X} tels que :

- (\hat{X}, \hat{q}) soit compact
- i soit un plongement de (X, q) dans (\hat{X}, \hat{q})
- $i(X)$ soit τ -partout dense dans (\hat{X}, \hat{q}) .

PROPOSITION 2.2. Pour tout espace de convergence séparé non compact (X, q) il existe un espace de convergence compact (\hat{X}, \hat{q}) et un homéomorphisme i de X sur le complémentaire d'un point ω de \hat{X} . $(i, (\hat{X}, \hat{q}))$ sera appelé compactifié de (X, q) de point à l'infini ω .

En effet, si on pose $\hat{X} = X \cup \{\omega\}$ (ω étant un point n'appartenant pas à X)

et si on désigne par :

- i l'injection de X dans \hat{X}
- \hat{q} la relation entre l'ensemble $\Phi_0(\hat{X})$ des filtres sur \hat{X} et \hat{X} définie par :

$$\forall \hat{\phi} \in \hat{\Phi}_0(\hat{X}), \forall x \in X, \hat{\phi} \hat{q} i(x) \text{ si et seulement si il existe un filtre } \hat{\phi} \text{ sur } X \text{ tel que}$$

$$\hat{\phi} = i_* \hat{\phi} \quad \text{et} \quad \hat{\phi} \hat{q} x$$

$$\forall \hat{\phi} \in \hat{\Phi}_0(\hat{X}) \quad \hat{\phi} \hat{q} \omega \text{ si et seulement si } \text{adh}_{\hat{q}} i^* \hat{\phi} = \emptyset$$

$(i, (\hat{X}, \hat{q}))$ est un compactifié de (X, q) .

Signalons d'autre part que dans le cas particulier où q est la structure de convergence associée à une topologie localement compacte T sur X , \hat{q} est identique à la structure de convergence associée à la topologie du compactifié d'Alexandroff de point à l'infini ω de $(X, \tau(q))$.

On dira qu'un espace de convergence régulier (X, q) est *complètement régulier* si et seulement si l'une des deux assertions équivalentes ([7]) suivantes est vérifiée :

CR₁) (X, q) possède un compactifié régulier^(*).

CR₂) $(X, \tau(q))$ est un espace topologique complètement régulier et tout ultrafiltre sur X plus fin que le filtre des voisinages pour $\tau(q)$ d'un point x de X converge pour q vers ce point.

Notons (cf. [7]) que tout espace de convergence complètement régulier (X, q) possède une compactification régulière de Stone-Čech $(\beta_X, (\beta(X), \beta(q)))$ c'est-à-dire une compactification régulière telle que, pour tout espace de convergence compact régulier (X', q') et toute application continue f de (X, q) dans (X', q') il existe une application continue g de $(\beta(X), \beta(q))$ dans (X', q') telle que $f = g \circ \beta_X$.

Notons d'autre part que tout sous-espace fermé d'un espace de convergence complètement régulier, le produit de deux espaces de convergence complètement réguliers sont des espaces de convergence complètement réguliers.

Dans la suite, nous désignerons par Conv_{CR} la sous-catégorie de Conv dont les objets sont les espaces de convergence complètement réguliers.

(*) un espace de convergence compact n'est pas nécessairement régulier.

III - APPLICATIONS PROPRES D'UN ESPACE DE CONVERGENCE DANS UN AUTRE.

On dira qu'une application continue f d'un espace de convergence (X, q) dans un espace de convergence (X', q') est *propre* si et seulement si l'une des deux assertions équivalentes (v.f) suivantes est vérifiée :

P_m) Pour tout ultrafiltre ϕ sur X et toute valeur limite x' pour q' de $f_* \phi$, il existe une valeur limite x pour q de ϕ telle que $x' = f(x)$.

P_o) Pour tout filtre ϕ sur X et toute valeur d'adhérence x' pour q' de $f_* \phi$, il existe une valeur d'adhérence x pour q de ϕ telle que $x' = f(x)$.

De nombreux résultats concernant les applications propres d'un espace topologique dans un autre sont également valables pour les applications propres d'un espace de convergence dans un autre.

Signalons notamment que :

- tout homéomorphisme d'un espace de convergence dans un autre est propre
- la composée de deux applications propres est une application propre
- toute application continue d'un espace de convergence quasi-compact dans un espace de convergence séparé est propre
- pour tout espace de convergence quasi-compact (X, q) et tout espace de convergence (X', q') , l'application projection pr_2 est une application propre de $(X \times X', q \times q')$ dans (X', q')
- si f est une application propre de (X, q) dans (X', q') , f est fermée et l'image réciproque par f de toute partie quasi-compacte de (X', q') est une partie quasi-compacte de (X, q) (ce qui implique que f est une application τ -propre).

Au nombre des différences, il convient de noter qu'une application injective continue fermée d'un espace de convergence dans un autre n'est pas nécessairement propre, comme le prouve l'exemple suivant : soit (X, q) un espace pseudotopologique, q n'étant associée à aucune topologie sur X ; l'application identité sur X est une application injective continue fermée de (X, q) dans $(X, q_\tau(q))$, mais n'est pas une application propre puisque q est une pseudotopologie strictement plus fine que $q_\tau(q)$. Remarquons que cet exemple prouve également qu'une application τ -propre n'est pas nécessairement propre.

PROPOSITION 3.1. *Tout plongement fermé d'un espace de convergence dans un autre est propre.*

Soient f un plongement fermé de (X, q) dans (X', q') , ϕ un filtre sur X , x' une valeur d'adhérence pour q' de $f_* \phi$. Comme f est fermée, x' appartient à $f(X)$ et par suite, il existe un point x de X tel que $x' = f(x)$. Comme, puisque f est un plongement, $adh_{q'} \phi = f^{-1}[adh_{q'} f_* \phi]$, x appartient à $adh_q \phi$, d'où le résultat.

COROLLAIRE. *Si f est une application propre de (X, q) dans (X', q') , la restriction de f à toute partie fermée (A, i) de (X, q) est une application propre de $(A, i^* q)$ dans (X', q') .*

PROPOSITION 3.2. *Si f est une application propre d'un espace de convergence séparé (X, q) dans un espace de convergence séparé (X', q') , et, si $(i, (\hat{X}, \hat{q}))$ est un compactifié de (X, q) , (i, f) est un plongement fermé de (X, q) dans $(\hat{X} \times X', \hat{q} \times q')$.*

Posons $h = (i, f)$. Comme $h^*(\hat{q} \times q') = h^*(\sup [pr_1^* \hat{q}, pr_2^* q']) = \sup [h^*(pr_1^* \hat{q}), h^*(pr_2^* q')] = \sup (i^* \hat{q}, f^* q')$, et comme i est un plongement, il résulte de la continuité de f que $h^*(\hat{q} \times q') = q$ et par suite, que h est un plongement. D'autre part, comme f est propre et $(\hat{X} \times X', \hat{q} \times q')$ séparé, h est propre (v.f) et par suite fermée.

THEOREME 1 (Théorème d'extension propre d'une application continue)

Etant donnés deux espaces de convergence séparés (resp. complètement réguliers) (X, q) et (X', q') et une application continue f de (X, q) dans (X', q') , il existe un espace de convergence séparé (resp. complètement régulier) (\hat{X}, \hat{q}) , une application injective j de X dans \hat{X} et une application g de \hat{X} dans X' tels que :

- j soit un plongement de (X, q) dans (\hat{X}, \hat{q})
- $j(X)$ soit τ -partout dense dans (\hat{X}, \hat{q})
- g soit l'unique application propre de (\hat{X}, \hat{q}) dans (X', q') telle que $g \circ j = f$.

Le triplet $(j, (\hat{X}, \hat{q}), g)$ est appelé *extension propre de f* .

La démonstration ci-dessous est une généralisation de celle proposée dans [4].

Désignons par $(i, (\hat{X}, \hat{q}))$ un compactifié de (X, q) (compactifié d'Alexandroff si (X, q) et (X', q') sont seulement supposés séparés, compactifié de Stone-Čech s'ils sont complètement réguliers), par h l'application de X dans $\hat{X} \times X'$ définie par $h(x) = (i(x), f(x))$, par \hat{X} la fermeture pour $\hat{q} \times q'$ de l'image de h , par k l'injection canonique de X dans $(\hat{X} \times X')$, par \hat{q} la structure de convergence induite sur \hat{X} par $\hat{q} \times q'$, par j l'injection de X dans \hat{X} et posons $g = \text{pr}_2 \circ k$.

L₁) (\hat{X}, \hat{q}) est un espace de convergence séparé (resp. complètement régulier).

(\hat{X}, \hat{q}) et (X', q') étant séparés, (\hat{X}, \hat{q}) est séparé comme sous-espace de l'espace séparé $(\hat{X} \times X', \hat{q} \times q')$. Dans le cas où (X, q) et (X', q') sont supposés complètement réguliers, (\hat{X}, \hat{q}) est complètement régulier comme sous-espace fermé de l'espace complètement régulier $(\hat{X} \times X', \hat{q} \times q')$.

L₂) j est un plongement de (X, q) dans (\hat{X}, \hat{q}) .

Une démonstration analogue à celle proposée dans 3.2 prouve que h est un plongement de (X, q) dans $(\hat{X} \times X', \hat{q} \times q')$.

Comme $j^* \hat{q} = (k \circ j)^* (\hat{q} \times q') = h^* (\hat{q} \times q')$, on en déduit que $j^* \hat{q} = q$.

L₃) $j(X)$ est τ -partout dense dans (\hat{X}, \hat{q}) .

Comme k est un plongement fermé de (\hat{X}, \hat{q}) dans $(\hat{X} \times X', \hat{q} \times q')$,
 $\text{Adh}_{\tau}(\hat{q}) [j(X)] = \hat{X} \cap \text{Adh}_{\tau}(\hat{q} \times q') [(k \circ j) X] = \hat{X} \cap \text{Adh}_{\tau}(\hat{q} \times q') [h(X)]$,
d'où, puisque $\text{Adh}_{\tau}(\hat{q} \times q') [h(X)] = \hat{X}$, $\text{Adh}_{\tau}(\hat{q}) [j(X)] = \hat{X}$.

L₄) g est propre comme composée d'applications propres.

Enfin, d'après le théorème de prolongement des identités, g est la seule application (continue) de (\hat{X}, \hat{q}) dans (X', q') telle que $g \circ j = f$.

Dans le cas particulier où les espaces de convergence sont seulement supposés séparés, on peut généraliser de la façon suivante le résultat obtenu par G.T. Whyburn.

THEOREME 2.

Soient (X, q) et (X', q') deux espaces de convergence séparés, f une application continue de (X, q) dans (X', q') . Désignons par :

- Z la somme de X et de X' , i et i' les injections de X dans Z et de X' dans Z
- h l'application de Z dans X' définie par $h = (f, \text{Id}_{X'})$

- σ la relation entre l'ensemble $\Phi_0(Z)$ des filtres sur Z et Z définie par :

$$\forall \Psi \in \Phi_0(Z), \forall x \in X, \Psi \sigma i(x) \text{ si et seulement si il existe un filtre } \Phi \text{ sur } X$$

$$\text{tel que } \Phi q x \text{ et } \Psi = i_* \Phi$$

$$\forall \Psi \in \Phi_0(Z), \forall x' \in X', \Psi \sigma i'(x') \text{ si et seulement si } \text{adh}_q i^* \Psi = \emptyset \text{ et } h_* \Psi q' x'$$

- \tilde{X} la fermeture pour σ de l'image de i , k l'injection canonique de \tilde{X} dans Z , \tilde{q} la structure de convergence induite sur \tilde{X} par σ , j l'injection de X dans \tilde{X}

et posons $g = h \circ k$

1) $(j, (\tilde{X}, \tilde{q}), g)$ est une extension propre dans Conv_s de f .

2) Si q et q' sont les structures de convergence associées à deux topologies localement compactes T et T' sur X et X' , σ est identique à la structure de convergence associée à la topologie Θ définie sur Z par G.T. Whyburn, c'est-à-dire, la topologie dont les ouverts sont les parties \emptyset de Z satisfaisant aux deux conditions suivantes :

- i) $\emptyset \cap X$ est un ouvert de (X, T) et $\emptyset \cap X'$ un ouvert de (X', T')
- ii) Pour tout compact K' de (X', T') inclus dans $\emptyset \cap X'$, $\overline{K'} \cap (X \setminus \emptyset)$ est un compact de (X, T) .

Démonstration :

1) Comme (Z, σ) est un espace de convergence séparé (v.f), (\tilde{X}, \tilde{q}) est séparé.

L_1) j est un plongement de (X, q) dans (\tilde{X}, \tilde{q}) .

Il résulte immédiatement de la définition de σ que i est un plongement de (X, q) dans (Z, σ) . Par suite, comme $j^* \tilde{q} = i^* \sigma$, j est un plongement de (X, q) dans (\tilde{X}, \tilde{q}) .

L_2) $j(X)$ est τ -partout dense dans (\tilde{X}, \tilde{q}) .

Ce résultat se démontre de façon analogue à celui de L_3 du Théorème 1.

L_3) g est une application propre de (\tilde{X}, \tilde{q}) dans (X', q') .

Montrons pour cela que h est une application propre de (Z, σ) dans (X', q') .
 h est continue par définition de σ . Soit alors Ψ un ultrafiltre sur Z et soit x' un point de X' tel que $h_* \Psi q' x'$. Si $\lim_q i^* \Psi = \emptyset$, $y = i'(x')$ est valeur limite de Ψ pour σ et $h(y) = x'$. Si $\lim_q i^* \Psi \neq \emptyset$, il existe un point x de X tel que $i(x)$ soit valeur limite pour σ de Ψ ; f étant continue, on en déduit que $f_*(i^* \Psi)$ c'est-à-dire $h_* \Psi$ converge pour q' vers $f(x)$. Comme (X', q') est séparé, $x' = f(x) = h[i(x)]$. c.q.f.d.

2) L_1) La structure de convergence q_Θ associée à Θ est plus fine que σ .

Soit Ψ un filtre sur Z convergeant pour Θ vers un point z de Z .

- Si $z = i(x)$, comme i est une application ouverte de (X, T) dans (Z, Θ) , $i^* \Psi$ est plus fin que $V_T(x)$. Comme $\Psi = i_* (i^* \Psi)$, on en déduit que $\Psi \sigma z$.

- Si $z = i'(x')$, comme h est une application continue de (Z, Θ) dans (X', T') , $h_* \Psi$ converge pour q' vers $h(z) = x'$. Soit alors x un point quelconque de X . Comme (Z, Θ) est séparé, il existe un voisinage ouvert pour Θ de $i(x)$, V , et un voisinage ouvert pour Θ de z , W , tels que $V \cap W = \emptyset$. Comme $V \cap X$ est un voisinage

ouvert pour T de x et que $(V \cap X) \cap (W \cap X) = \emptyset$, x n'appartient pas à $\text{adh}_T i^* \Psi$, ce qui implique que $\Psi \sigma z$.

L₂) σ est plus fine que q_Θ .

Comme σ est plus fine que $q_\tau(\sigma)$, il suffit de montrer que $q_\tau(\sigma)$ est plus fine que q_Θ et pour cela que $\tau(\sigma)$ est plus fine que Θ .

Soient alors 0 un ouvert de (Z, Θ) , z un point de 0 et Ψ un filtre sur Z convergeant pour σ vers z . Montrons que 0 appartient à Ψ .

- Si $z = i(x)$, le résultat est immédiat.

- Supposons que $z = i'(x')$, auquel cas $\text{adh}_T i^* \Psi = \emptyset$ et $h_* \Psi$ converge pour T' vers x' .

i) Si Ψ n'induit pas un filtre sur X , X' appartient à Ψ et par suite

$i'_* (i')^* \Psi = \Psi$. Comme $0 \cap X'$ est un voisinage ouvert pour T' de x' ,

$0 \cap X'$ appartient à $h_* \Psi$. Il en résulte que 0 appartient à

$i'_* (h_* \Psi) = i'_* (h_* (i')^* \Psi)$, soit puisque $h \circ i' = \text{Id}_{X'}$, à Ψ .

ii) Supposons que Ψ induise un filtre sur X . Si 0 n'appartenait pas à Ψ , il existerait un filtre Ψ_1 sur Z plus fin que Ψ et contenant $Z \setminus 0$. D'après i) Ψ_1 induit nécessairement un filtre $i^* \Psi_1$ sur X . D'autre part, comme (X', T') est localement compact, il existe un voisinage compact K' de x' inclus dans $0 \cap X'$. Comme $h_* \Psi$ converge pour T' vers x' , K' appartient à $h_* \Psi$ et par suite,

$f^{-1}(K')$ appartient à $i^* \Psi$. $i^* \Psi_1$ étant plus fin que $i^* \Psi$, on déduit de ce qui

précède que $K = f^{-1}(K') \cap (X \setminus 0)$ appartient à $i^* \Psi_1$. K étant par définition

de Θ un compact de (X, T) , $\text{adh}_T i^* \Psi_1$ serait non vide, ce qui est impossible puisque $i^* \Psi_1$ est plus fin que $i^* \Psi$ et $\text{adh}_T i^* \Psi = \emptyset$. 0 appartient donc à Ψ .

IV - SUR LA CLASSE DES MORPHISMES PROPRES DE LA CATEGORIE Conv_{CR}

Notations : Reprenant les notations utilisées par G.E. Strecker ([8]), nous désignerons, pour toute classe α de \mathcal{E} -morphisms par :

- $\Lambda(\alpha)$ la classe des \mathcal{E} -morphisms f , tels que pour tout diagramme commutatif de \mathcal{E}

$$s \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \downarrow f \end{array} t \quad \text{où } g \in \alpha, \text{ il existe un } \mathcal{E}\text{-morphisme } d \text{ tel que } d \circ g = s \text{ et } f \circ d = t.$$

- $T(\alpha)$ la classe des \mathcal{E} -morphisms g , tels que pour tout diagramme commutatif de \mathcal{E} du type précédent où $f \in \alpha$, il existe un \mathcal{E} -morphisme d tel que $d \circ g = s$ et $f \circ d = t$.

- $D(\alpha)$ la classe des objets X de \mathcal{E} tels que tout \mathcal{E} -morphisme de source X appartienne à α .

- $\mathfrak{X}D(\alpha)$ la classe des \mathcal{E} -morphisms $f : X \rightarrow Y$, tels que, pour tout objet Z de $D(\alpha)$ et tout \mathcal{E} -morphisme $g : X \rightarrow Z$, il existe un \mathcal{E} -morphisme $h : Y \rightarrow Z$ tel que $h \circ f = g$.

et nous dirons que α est une classe parfaite de morphismes si et seulement si $\alpha = \Lambda[\text{Epi} \cap \mathfrak{X}D(\alpha)]$ (Epi désignant la classe des \mathcal{E} -épimorphismes). Nous nous proposons, dans ce qui suit, de montrer que la classe des morphismes propres de Conv_{CR} est parfaite.

PROPOSITION 3.1. *Tout plongement de Conv_s (tout plongement fermé de Conv_{CR}) est un noyau.*

Soit f un plongement (resp. un plongement fermé) d'un espace de convergence séparé (resp. complètement régulier) dans un espace de convergence séparé (resp. complètement régulier) (X, q) . Désignons par F l'image de f , et par $(p, (\hat{Y}, \hat{q}))$ la somme fibrée dans Conv , $(X, q) \amalg_F (X, q)$, c'est-à-dire l'espace de convergence ainsi déterminé :

- \hat{Y} étant la somme de X par lui-même et j_i ($i = 1, 2$) les injections de X dans \hat{Y} , (p, \hat{Y}) est le quotient de \hat{Y} par la relation d'équivalence \mathcal{R} définie par :

$$y_1 \mathcal{R} y_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = y_2 \\ -1 \text{ ou } -1 \\ j_1(y_1) = j_2(y_2) \in F \\ -1 \text{ ou } -1 \\ j_2(y_1) = j_1(y_2) \in F \end{cases}$$

- \hat{q} est la structure de convergence quotient sur \hat{Y} ($\hat{q} = p_* q_{\amalg}$, q_{\amalg} étant la structure de convergence somme sur Y).

1) Si on pose $u_1 = p \circ j_1$ et $u_2 = p \circ j_2$, u_1 et u_2 sont injectives et F est le noyau de (u_1, u_2) dans Conv .

2) (\hat{Y}, \hat{q}) est un espace de convergence séparé.

Soient \mathcal{F} un filtre sur \hat{Y} et soient \hat{y} et \hat{z} deux points de \hat{Y} tels que $\mathcal{F} \hat{q} \hat{y}$ et $\mathcal{F} \hat{q} \hat{z}$. Par définition de \hat{q} , il existe deux filtres ϕ et ψ sur Y et deux points y et z de Y tels que $p_* \phi = p_* \psi = \mathcal{F}$, $\hat{y} = p(y)$, $\hat{z} = p(z)$, $\phi q_{\amalg} y$ et $\psi q_{\amalg} z$.

1er cas : $(y, z) \in \text{Im } i_1 \times \text{Im } i_1$.

Par définition de q_{\amalg} , il existe deux filtres ϕ et ψ sur X et deux points a et b de X tels que

$\phi = (i_1)_* \varphi$, $\psi = (i_1)_* \psi$, $y = i_1(a)$, $z = i_1(b)$, $\varphi q a$ et $\psi q b$. Comme $(u_1)_* \varphi = (u_1)_* \psi = \mathcal{F}$ et comme u_1 est injective, $\varphi = \psi$. (X, q) étant séparé, on en déduit que $a = b$, ce qui entraîne $\tilde{y} = \tilde{z}$.

2ème cas : $(\tilde{y}, \tilde{z}) \in \text{Im } i_1 \times \text{Im } i_2$

Il existe deux filtres φ et ψ sur X et deux points a et b de X tels que $\phi = (i_1)_* \varphi$, $\psi = (i_2)_* \psi$, $y = i_1(a)$, $z = i_2(b)$, $\varphi q a$ et $\psi q b$. Comme il existe (v.f) un filtre sur X plus fin que φ et ψ et que (X, q) est séparé, $a = b$ d'où $\tilde{y} = \tilde{z}$.

3) (\tilde{Y}, \tilde{q}) est complètement régulier si f est un plongement fermé de Conv_{CR} .

- Comme la topologie $\tau(q_{\Pi})$ est la topologie somme $\tau(q) \amalg \tau(q)$ sur Y et comme, d'autre part, $\tau(\tilde{q})$ est la topologie quotient sur \tilde{Y} (cf. Prop. 1.2.), $(\tilde{Y}, \tau(\tilde{q}))$ est un espace topologique complètement régulier.
- Soit maintenant Ψ un ultrafiltre sur \tilde{Y} convergeant pour $\tau(\tilde{q})$ vers un point \tilde{y} . Comme Ψ est l'image par p d'un ultrafiltre Φ sur Y et comme p est fermée à fibres quasi-compactes, donc τ -propre, il existe un point y de Y tel que Φ converge pour $\tau(q_{\Pi})$ vers y et $\tilde{y} = p(y)$. Supposons que $y = j_1(x)$. Comme j_1 est ouverte, $\text{Im } j_1$ appartient à Φ et par suite Φ induit un filtre sur $\text{Im } j_1$, $j_1^* \Phi$. Comme $j_1^* \Phi$ converge pour $\tau(q)$ vers x , et comme (X, q) est complètement régulier, $j_1^* \Phi$ converge pour q vers y_1 , ce qui implique que Φ converge pour q_{Π} vers y et par suite que Ψ converge pour \tilde{q} vers \tilde{y} .
- Il résulte de ce qui précède que, pour toute partie de Y (resp. de \tilde{Y}) l'adhérence et la fermeture de cette partie sont égales. Comme les applications j_i ($i = 1, 2$) et p sont continues fermées, on en déduit que (Y, q) est régulier et par suite complètement régulier d'après a) et b).

COROLLAIRE :

Les plongements fermés de Conv_s et Conv_{CR} sont les monomorphismes stricts et les monomorphismes forts (i.e. les éléments de $\text{Mono} \cap \Lambda(\text{Epi})$) de ces catégories.

PROPOSITION 3.2.

Les épimorphismes de Conv_s et de Conv_{CR} sont les morphismes à image τ -partout dense.

Il résulte immédiatement du théorème de prolongement des identités que tout morphisme à image τ -partout dense de Conv_s ou de Conv_{CR} est un épimorphisme de cette catégorie.

Réciproquement, soit $f : X \rightarrow Y$ un épimorphisme de Conv_s (resp. Conv_{CR}). Comme la fermeture F de l'image de f est un fermé, il résulte de la Proposition 3.1., qu'il existe deux morphismes u_1 et u_2 de Conv_s (resp. Conv_{CR}) tels que F soit le noyau de u_1 et u_2 . On a alors, pour tout point x de X , $u_1[f(x)] = u_2[f(x)]$ d'où, puisque f est un épimorphisme, $u_1 = u_2$. Par suite $F = Y$, d'où le résultat.

THEOREME 3.

La classe des morphismes propres de Conv_{CR} est parfaite.

Nous désignerons dans ce qui suit par α cette classe de morphismes et nous poserons

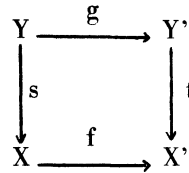
$$\gamma = \text{Epi} \cap \mathfrak{I} D(\alpha).$$

L₁) $D(\alpha)$ est la classe des espaces de convergence compacts réguliers.

Toute application continue d'un espace de convergence compact dans un espace de convergence séparé étant propre, tout espace de convergence compact régulier appartient à $D(\alpha)$. Réciproquement, soit (X, q) un élément de $D(\alpha)$: comme tout morphisme ponctuel de source (X, q) appartient à α , (X, q) est compact régulier.

L₂) α est inclus dans $\Lambda(\gamma)$.

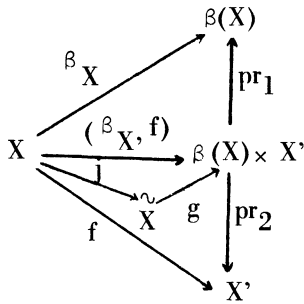
Soient $f \in \alpha$, $g \in \gamma$, s et t tels que le diagramme commute dans Conv_{CR} .



Comme g appartient à $\mathfrak{I} D(\alpha)$, il existe un morphisme v de Y' dans le compactifié de Stone-Čech de X , $\beta(X)$. Comme f est propre, (β_X, f) est un plongement fermé (Prop. 3.2) de X dans $\beta(X) \times X'$ et par suite un monomorphisme fort de Conv_{CR} ; il en résulte, puisque g est un épimorphisme, qu'il existe une application d de Y' dans $\beta(X) \times X'$ telle que $d \circ g = s$ et $(\beta_X, f) \circ d = (v, t)$. Comme cette dernière égalité implique $f \circ d = t$, f appartient à $\Lambda(\gamma)$.

L₃) $\Lambda(\gamma)$ est inclus dans α .

Soit $f : X \rightarrow X'$ un élément de $\Lambda(\gamma)$ et soit (j, \tilde{X}, g) une extension propre de (β_X, f) . Il



résulte de la définition du compactifié de Stone-Čech que β_X appartient à γ . Par suite j appartient également à γ . D'autre part, comme f appartient à $\Lambda(\gamma)$, j appartient à $\Lambda(\gamma)$. j est alors un homéomorphisme de X sur \tilde{X} et par suite un morphisme propre. Comme pr_2 est également un morphisme propre, comme projection parallèlement à un espace de convergence compact, on en déduit que $f = \text{pr}_2 \circ g \circ j$ est un morphisme propre.

THEOREME 4.

La classe α des morphismes propres de Conv_{CR} est fermée inférieurement, c'est-à-dire que $\alpha = \Lambda T(\alpha)$.

Montrons pour cela que $\gamma = T(\alpha)$, γ étant la classe de morphismes définie dans la démonstration du théorème 3. Comme $\alpha \subset \Lambda(\gamma)$ équivaut à $\gamma \subset T(\alpha)$, il suffit de montrer que tout morphisme $g : Y \rightarrow Y'$ de $T(\alpha)$ appartient à γ . Soient s un morphisme de Y dans un espace de convergence compact régulier K et f un morphisme de K dans un espace ponctuel. Comme f est propre, il existe un morphisme d tel que $d \circ g = s$, ce qui implique que g appartient à $\mathfrak{I} D(\alpha)$. D'autre part, d'après le théorème d'extension propre d'une application continue, il existe un triplet (j, \tilde{X}, h) tel que j soit un plongement fermé de Y dans \tilde{Y} et h un morphisme propre de \tilde{Y} dans Y' tel que $g = h \circ j$. Par suite, comme g appartient à $T(\alpha)$, il existe un morphisme d tel que $d \circ g = s$ et $h \circ d = \text{Id}_{X'}$; cette dernière égalité impliquant que h est surjective, $g = h \circ j$ est alors à image τ -partout dense, et par suite, un épimorphisme de Conv_{CR} , d'où le résultat.

Remarque :

Lorsque α est la classe des morphismes propres de Conv_s , des démonstrations analogues à celles de la partie 1) du théorème 3 et à celle du théorème 4 permettent de montrer que $[\text{Epi} \cap \mathfrak{K} D(\alpha)] = T(\alpha)$.

REFERENCES

- (1) G.L. CAIN : *Compactifications of Mappings* ; Proc. Amer. Math. Soc., 23, (1969), 298-303.
- (2) G.L. CAIN : *Extensions and Compactifications of Mappings* ; Math. Ann., 191, (1971), 333-336.
- (3) G. CHOQUET : *Convergences* ; Ann. Univ. Grenoble (N.S.), 23, (1947), 57-112.
- (4) F.A. DELAHAN et G.E. STRECKER : *A simplified approach to the compactification of mappings* ; Bull. of Amer. Math. Soc., 79 (1973), 1030-1032.
- (5) H.R. FISCHER : *Limesräume*, Math. Ann., 137 (1959), 269-303.
- (6) H. HERRLICH : *A Generalisation of Perfect Maps* ; General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra III (Proc. of the third Prague Topological Symposium, 1971), Academia Prague (1972), 187-191.
- (7) G.D. RIDCHARDSON et D.C. KENT : *Regular compactifications of convergence spaces* ; Proc. Amer. Math. Soc., 31, (1972), 571-573.
- (8) G.E. STRECKER : *On characterization of perfect morphisms and epireflective hulls* ; Lecture Notes in Mathematics ; Topo 72 ; General Topology and its applications ; 2^d Pittsburgh International Conference, Dec. 18-22, 1972, 468-500.
- (9) O. WYLER : *Filter space monads, Regularity, Completions* ; Lecture Notes in Mathematics, Topo 72 ; General Topology and its applications, 591-637.
- (10) G.T. WHYBURN : *A unified space for mappings*. Trans. Amer. Math. Soc., 74 (1953) 344-350.
- (11) G.T. WHYBURN : *Compactifications of mappings* ; Math. Ann. 166 (1966), 168-174.