Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2
Série Mathématiques

Laure Elie

Étude du renouvellement sur le groupe affine de la droite réelle

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 65, série *Mathématiques*, n° 15 (1977), p. 47-62

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1977__65_15_47_0>

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ETUDE DU RENOUVELLEMENT SUR LE GROUPE AFFINE DE LA DROITE REELLE

Laure ELIE

Université Paris VII

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

Le groupe affine connexe de la droite réelle est le groupe, que nous noterons G_1, des transformations réelles $x \to ax+b$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$. Ce groupe peut être représenté par le produit semi-direct $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$ muni du produit $(a,b)(a',b') = (aa',ab'+b)$. Le sous-groupe des translations de G_1 est alors isomorphe à $\mathbb{R}$ et le sous-groupe des homothéties à $\mathbb{R}^{+*}$. Nous désignerons par a et b les projections respectives de G_1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}$ et tout élément g de G_1 sera donc noté $(a(g),b(g))$. L'ensemble $\mathbb{R}$ pourra être muni d'une structure de G_1-espace par l'application qui à $(g,x) \in G_1\times\mathbb{R}$ associe $a(g)x+b(g)$.

Soit μ une mesure de probabilité sur G_1 que nous supposerons toujours adaptée. La marche aléatoire droite sur G_1 de loi μ est la chaîne de Markov canonique $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'espace d'états G_1 dont la probabilité de transition est égale à $P(g,.) = \varepsilon_g * \mu$. Comme G_1 est un groupe non unimodulaire, cette marche est transiente (4) et son noyau potentiel $U = \sum_{n\geq 0} \mu^{*n}$ est une mesure de Radon. Quant à la suite $(a(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$, c'est une marche aléatoire sur $\mathbb{R}^{+*}$ de loi $a(\mu)$, et nous serons amenés à distinguer le cas où cette marche est transiente de celui où elle est récurrente.

Comme la marche $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est transiente, l'ensemble $\{\varepsilon_g * U,\ g \in G_1\}$ est vaguement relativement compact et l'étude du renouvellement consiste en la détermination de <u>l'ensemble</u> I_μ des valeurs d'adhérence, pour la topologie de la convergence vague, de l'ensemble $\{\varepsilon_g * U,\ g \in G_1\}$ lorsque g tend vers δ le point à l'infini du groupe dans la compactification d'Alexandrov. Si le cardinal de I_μ est égal à 1, auquel cas l'ensemble I_μ est réduit à la mesure nulle (12), la marche de loi μ sera dite de type I ; si le cardinal de I_μ est strictement supérieur à 1, cette marche sera dite de type II.

Ce groupe affine G_1 est particulièrement intéressant car c'est l'exemple le plus simple de groupe portant une marche de type II telle que l'ensemble I_μ ait une infinité d'éléments. De plus, il permettait de prouver que les résultats obtenus sur les groupes abéliens ne se généralisaient pas, à savoir qu'un groupe LCD abélien porte une marche de type II si et seulement si il est extension d'un sous-groupe comapct par $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$.

A présent, nous savons déterminer les groupes G (LCD) extension de leur composante connexe par un groupe compact, qui portent des marches de type II (8), mais les idées fondamentales se trouvent dans l'étude du groupe affine.

Définition 1 :
Nous dirons qu'une mesure de problabilité μ sur G_1 admet un moment d'ordre β si et seulement si les fonctions $|\mathrm{Log}\, a|^\beta$ et $[\mathrm{Log}^+|b|]^\beta$ sont μ-intégrables.

Cette définition coïncide avec la notion de moment introduite par Y. Guivarc'h dans (11), car la fonction $\sup\{c|\mathrm{Log}\, a| \ , \mathrm{Log}[1+|b|]\}$ est une distance principale si le réel c est bien choisi. Nous pouvons remarquer que si μ admet un moment d'ordre β, il en est de même de la mesure $\hat{\mu}$, image de μ par l'application qui à g associe g^{-1}.
Le but de cet exposé est de prouver le théorème suivant :

Théorème 1 :
Soit μ une mesure de probabilité étalée sur G_1 (c'est à dire telle que la mesure de Radon $U = \sum_{n\geq 0} \mu^{*n}$ ne soit pas étrangère à une mesure de Haar sur G_1).
Si Log a n'est pas μ-intégrable, la marche aléatoire droite de loi μ est de type I.
Si Log a est μ-intégrable, il y a trois possibilités suivant le signe de

$$\alpha = \int \mathrm{Log}\, a(g)\, d\mu(g)$$

1) $\alpha < 0$; alors la marche de loi μ est de type I.
2) $\alpha > 0$; alors la marche de loi μ est de type II si et seulement si la mesure μ admet un moment d'ordre 1 .
3) $\alpha = 0$; alors si μ admet un moment d'ordre $2+\varepsilon$, où ε est un nombre arbitrairement petit, la marche de loi μ est de type II.

A - PERIODES DES MESURES LIMITES

Définition 2 :
Un élément h de G_1 sera dit période d'une mesure de Radon ν si $\varepsilon_h * \nu = \nu$.

Proposition 1 :
Soit μ une mesure de probabilité étalée sur G_1. Considérons un élément ν de I_μ et $(g_n)_{n\in N}$ une suite d'éléments de G_1 telle que $\varepsilon_{g_n} * U$ converge vaguement vers ν .

Alors, si $\overline{\lim_n}\, a(g_n) = \infty$ ou si $\overline{\lim_n}\, |b(g_n)| = \infty$, la mesure ν admet pour période tout élément du sous-groupe des translations de G_1.
Dans le cas contraire, il existe une sous-suite $(g'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a(g'_n)$ tende vers 0 dans $\mathbb{R}^{++}$ et $b(g'_n)$ vers un élément b de $\mathbb{R}$. Alors la mesure $\varepsilon_{(o,-b)} * \nu$ admet pour période tout élément du sous-groupe des homothéties de G_1.

La démonstration de cette proposition se base sur le lemme technique suivant :

<u>Lemme 1</u> :
Soit μ une mesure de probabilité étalée sur un groupe G(LCD) . De toute suite d'éléments de G tendant vers δ, on peut extraire une sous-suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout élément g de G et toute fonction f continue à support compact, la suite $\varepsilon_{g_n g} * U(f)$ converge et cette convergence est uniforme pour tout g appartenant à un compact de G .

La preuve de ce lemme repose de manière fondamentale sur l'étalement de μ bien que pour des raisons qui semblent purement techniques. Nous ne la donnerons pas ici [cf (8)] .

<u>Démonstration de la Proposition 1</u> :
1) On peut extraire de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(g'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obéissant aux conclusions du lemme 1 et telle que $a(g'_n) \to \infty$ (respectivement $|b(g'_n)| \to \infty$) si $\overline{\lim_n}\, a(g_n) = \infty$ (resp. $\overline{\lim_n}\, |b(g_n)| = \infty$).

- Supposons que $a(g'_n) \to \infty$ lorsque $n \to \infty$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, nous avons
$$(1,y)g'_n = g'_n\, h_n \quad \text{où} \quad h_n = (1, \frac{y}{a(g'_n)}) ,$$
et lorsque $n \to \infty$, la suite h_n converge vers l'élément neutre e de G_1 .
Comme pour tout $f \in C_K[G_1]$ (fonction continue à support compact), la suite $\varepsilon_{g'_n g} * U(f)$ converge uniformément pour g appartenant à un compact, la suite $\varepsilon_{g'_n h_n} * U(f)$ converge vers $\nu(f)$. Or, la suite $\varepsilon_{(1,y)g'_n} * U$ converge vaguement vers $\varepsilon_{(1,y)} * \nu$. Par suite, $\varepsilon_{(1,y)} * \nu(f) = \nu(f)$. D'où l'assertion.
- Supposons que $|b(g'_n)| \to \infty$ lorsque $n \to \infty$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, nous pouvons écrire si $|b(g'_n)|$ est suffisamment grand ,
$$\begin{aligned}(1,y)g'_n &= [a(g'_n),b(g'_n)+y] = [a(g'_n),b(g'_n)[1+ \frac{y}{b(g'_n)}]] \\ &= [1+ \frac{y}{b(g'_n)} , 0]\, [a(g'_n),b(g'_n)]\, [(1+ \frac{y}{b(g'_n)})^{-1},0] \\ &= k_n g'_n\, k_n^{-1}\end{aligned}$$

où la suite k_n converge vers e lorsque $n \to \infty$. Si $f \in C_K[G_1]$, la fonction $Uf(g) = \varepsilon_g * U(f)$ est uniformément continue à gauche (cf. Ch.5 Prop.2.1 de (12)). De ce fait, les suites $Uf(k_n g'_n k_n^{-1})$ et $Uf(g'_n k_n^{-1})$ ont même limite et il résulte encore du lemme 1 que la suite $Uf(g'_n k_n^{-1})$ converge vers $\nu(f)$. La mesure ν admet donc y pour période.

2) Supposons que ni $\overline{\lim_n}\, a(g_n) = \infty$, ni $\overline{\lim_n}\, |b(g_n)| = \infty$.
Nous pouvons alors extraire de cette suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(g'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obéissant aux conclusions du lemme 1 et telle que $a(g'_n)$ tende vers 0 dans $\mathbb{R}^{+*}$ et $b(g'_n)$ converge vers un élément b de $\mathbb{R}$. Considérons la suite $g''_n = (a(g'_n),0)$. Par uniforme continuité à gauche de la fonction Uf, si f appartient à $C_K[G_1]$, la suite $Uf[(1,b)g''_n]$ a même limite que la suite $Uf[g'_n]$. Par suite, $\varepsilon_{g''_n} * U$ converge vaguement vers $\varepsilon_{(0,-b)} * \nu$, mesure que nous noterons ν_1 . Il découle du lemme 1 que la suite $\varphi_n(.) = \varepsilon_{g''_n.} * U(f)$ converge vers une fonction continue bornée φ . Cette fonction est de plus μ-harmonique. En effet,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{g''_n g} * U(f) &= f(g''_n g) + \varepsilon_{g''_n g} * \mu * U(f)\\ &= f(g''_n g) + \int Uf(g''_n g\, t)\mu(dt) .\end{aligned}$$

Lorsque $n \to \infty$, le premier terme tend vers $\varphi(g)$ et le deuxième vers $\int\varphi(gt)\mu(dt)$ d'après le théorème de Lebesgue .
De plus

$$\begin{aligned}\varphi(g) &= \lim_n Uf(g''_n g) = \lim_n Uf[(0,a(g''_n)b(g))\, g''_n(a(g),0)]\\ &= \lim_n Uf[g''_n(a(g),0)] = \varphi[(a(g),0)]\end{aligned}$$

puisque $a(g''_n)b(g)$ tend vers 0 dans $\mathbb{R}$ et que Uf est uniformément continue à gauche. Par suite, la fonction φ_1 définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\varphi_1(a) = \varphi[(a,0)]$ est une fonction harmonique bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$ relativement à la mesure $a(\mu)$. Elle est donc constante d'après le théorème de Choquet-Deny.
Or, comme le groupe $\mathbb{R}^{+*}$ est abélien, nous avons

$$Uf[(x,0)\, g''_n] = Uf[x\, a(g'_n),0] = Uf[g''_n(x,0)] .$$

De ce fait, $\varepsilon_{(x,0)} * \nu_1[f] = \varphi(x,0) = \varphi(0,0) = \nu_1(f)$, et par suite, la mesure $\varepsilon_{(0,-b)} * \nu$ admet pour période tout élément du sous-groupe des translations de G_1 .

Proposition 2 :

Soit μ une mesure de probabilité sur G_1 et ν un élément de I_μ.
Si ν admet pour période tout élément du sous-groupe des translations de G_1, alors ν est une mesure de Haar à droite sur G_1.

Si ν admet pour période tout élément du sous-groupe des homothéties de G_1, alors ν s'écrit $\widehat{m_1 \otimes m}$ où m_1 est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et m une mesure sur $\mathbb{R}$ telle que $\hat{\mu} * m \leq m$ ($\mathbb{R}$ étant considéré comme un G_1-espace).

Démonstration :
Tout élément ν de I_μ est une mesure de Radon μ-excessive (c'est à dire telle que $\nu * \mu \leq \nu$). En effet, pour tout $f \in C_K^+[G]$, nous avons

$$\varepsilon_{g_n} * U(f) = f(g_n) + \varepsilon_{g_n} * U * \mu(f) , \qquad (*)$$

et d'après le lemme de Fatou, nous obtenons $\nu * \mu(f) \leq \nu(f)$.
Si nous supposons de plus que la marche projection $[a(X_n)]_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ de loi $a(\mu)$ est transiente, tout élément de I_μ est μ-invariant. En effet, dans ce cas, l'ensemble $\{\varepsilon_g * U * \varepsilon_{g'}, (g,g')\in G_1\times G_1\}$ est vaguement relativement compact car, pour tout compact K de G_1 ,

$$\varepsilon_g * U * \varepsilon_{g'}[K] \leq \varepsilon_{a(g)} * a(U) * \varepsilon_{a(g')}[a(K)] \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^{+*}} \varepsilon_x * \sum_{n\geq 0} a(\mu)^{*n}[a(K)].$$

Le théorème de Lebesgue appliqué à $(*)$ permet alors de montrer que $\nu * \mu = \nu$.
Lorsque la marche $[a(X_n)]_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ est récurrente, on peut montrer par contre que l'ensemble $\{\varepsilon_g * U * \varepsilon_{g'},(g,g')\in G_1\times G_1\}$, n'est pas vaguement relativement compact (cf. (3)).

- Supposons que ν est un élément de I_μ admettant pour périodes les translations de G_1. Alors, nous avons

$$\forall f_1 \in C_K(\mathbb{R}^{+*}) , \forall f_2 \in C_K(\mathbb{R}) , \forall y \in \mathbb{R}$$
$$\nu[f_1\times f_2] = \varepsilon_{(0,y)} * \nu[f_1\times f_2] = \nu[f_1\times\tau_y f_2]$$

où $\tau_y f_2$ désigne la translatée de f_2 par y .
Par suite, si la fonction f_1 est fixée, nous obtenons une mesure sur $\mathbb{R}$ invariante par translation. En conséquence, si m_2 désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, il existe pour tout $f_1 \in C_K[\mathbb{R}^{+*}]$ un réel positif $\lambda(f_1)$ tel que

$$\nu[f_1\times f_2] = \lambda[f_1]\, m_2[f_2].$$

L'application de $C_K[\mathbb{R}^{+*}]$ dans $\mathbb{R}$ qui à f_1 associe $\lambda(f_1)$ est en fait une mesure de Radon et il est facile de voir que $\lambda * a(\mu) \leq \lambda$[resp. $\lambda * a(\mu) = \lambda$] si $\nu * \mu \leq \nu$ (resp. $\nu * \mu = \nu$) .
Si la marche $a(X_n)$ de loi $a(\mu)$ est transiente, la mesure λ est donc $a(\mu)$-invariante. Comme de plus l'ensemble $\{\varepsilon_x * \lambda, x \in \mathbb{R}^{+*}\}$ est vaguement relativement compact, la mesure λ est une mesure de Haar sur $\mathbb{R}^{+*}$ (cf. ch.5, Cor.1-4 de (12)). De ce fait, la mesure ν est une mesure de Haar à droite sur G_1.
Si la marche $a(X_n)$ est récurrente, nous savons seulement que λ est $a(\mu)$-excessive ; mais comme la récurrence de $a(X_n)$ entraîne que les seules mesures

$a(\mu)$-excessives sont les mesures de Haar sur $\mathbb{R}^{+*}$, il est aisé de conclure.

• Supposons que ν est un élément de I_μ admettant pour périodes les homothéties de G_1. Alors, nous obtenons

$$\forall f_1 \in C_K(\mathbb{R}^{+*}) \ , \ \forall f_2 \in C_K(\mathbb{R}) \ , \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$$
$$\hat{\nu}[f_1 \times f_2] = \hat{\nu} * \varepsilon_{(x,0)}[f_1 \times f_2] = \hat{\nu}[\tau_x f_1 \times f_2]$$

où $\tau_x f_1$ désigne la translatée de f_1 par x.

En raisonnant comme précédemment, nous en déduisons qu'il existe une mesure de Radon m sur $\mathbb{R}$ telle que si m_1 désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{+*}$,

$$\hat{\nu} = m_1 \otimes m \ .$$

Il découle de plus de l'excessivité de ν que $\hat{\mu} * m \leq m$.

En effet,

$$\forall f_1 \in C_K(\mathbb{R}^{+*}) \ , \ \forall f_2 \in C_K(\mathbb{R})$$
$$\begin{aligned} \hat{\nu}[f_1 \times f_2] &= m_1(f_1) m(f_2) \geq \hat{\mu} * \hat{\nu}[f_1 \times f_2] \\ &\geq \int f_1(ax) f_2(ay+b) \, d\hat{\mu}(a,b) \, dm_1(x) \, dm(y) \\ &\geq m_1(f_1) \int f_2(ay+b) \, d\hat{\mu}(a,b) \, d\mu(y) \\ &\geq m_1(f_1) \, \hat{\mu} * m(f_2) \ . \end{aligned}$$

Si la marche $a(X_n)$ est transiente, la mesure $\hat{\mu} * m$ est en fait égale à m, et de plus, la mesure m est de masse finie car pour tout compact K de $\mathbb{R}^{+*}$,

$$\widehat{m_1 \otimes m}[K \times \mathbb{R}] = m_1(K) \, m(\mathbb{R}) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^{+*}} \varepsilon_x * a(U)[K] \ .$$

Corollaire 1 :

Soit μ une mesure de probabilité étalée sur G_1. Si g tend vers δ dans G_1 de manière à ce que $a(g)$ ou $|b(g)|$ tende vers l'infini, alors $\varepsilon_g * U$ converge vaguement vers la mesure nulle.

Démonstration :

Elle est immédiate à partir des propositions 1 et 2 , si on remarque que pour tout élément ν de I_μ, l'ensemble $\{\varepsilon_g * \nu, g \in G_1\}$ doit être vaguement relativement compact, propriété non vérifiée pour une mesure de Haar à droite non nulle sur un groupe non unimodulaire.

Il va donc s'agir dorénavant d'étudier les valeurs d'adhérence de $\{\varepsilon_{(x,0)} * U, x \in \mathbb{R}^{+*}\}$ lorsque x tend vers 0.

Proposition 3 :

Soit μ une mesure de probabilité étalée sur G_1. L'ensemble de mesures $\{\varepsilon_{(x,0)} * U, \ x \in \mathbb{R}^{+*}\}$ admet au plus une valeur d'adhérence vague lorsque x tend vers 0 dans $\mathbb{R}^{+*}$.

<u>Démonstration</u> :

Elle est peu différente de la démonstration du théorème du renouvellement dans le cas abélien car la commutativité du sous-groupe $\{(x,0), x \in \mathbb{R}^{++}\}$ va intervenir de manière fondamentale.

Remarquons tout d'abord que pour tout $f \in C_K[G]$,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ \text{ou } x \to \infty}} [Uf[(x,0)g] - Uf[(x,0)]] = 0 \qquad (**)$$

uniformément pour g appartenant à un compact de G_1 .

En effet, de toute suite de $\mathbb{R}^{++}$ tendant vers 0, nous pouvons extraire une sous-suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\varepsilon_{(x_n,o)g} * U$ converge vaguement pour tout $g \in G_1$ et nous savons (cf. Proposition 1) que la fonction $\varphi(g) = \lim_n Uf[(x_n,o)g]$ est μ-harmonique constante.

Il en résulte que $\lim_{x\to o} Uf[(x,o)g] - Uf[(x,o)] = 0$.

Lorsque $x \to \infty$, il découle du corollaire 1 que $\lim_{x\to\infty} Uf[(x,0)g] = 0$ pour tout $g \in G$. La convergence uniforme de $(**)$ est alors assurée par le lemme 1.

Supposons donc que l'ensemble $\{\varepsilon(x,0) * U, x \in \mathbb{R}^{++}\}$ ait au moins deux valeurs d'adhérence lorsque $x \to 0$. Il existe alors une fonction $f \in C_K^+[G_1]$ telle que la fonction $Uf[(x,0)]$ ait au moins deux valeurs d'adhérence lorsque $x \to 0$.

Soit $\ell \geq 0$ la plus petite de ces deux valeurs. Notons K le support de f.

Fixons $\varepsilon > 0$ et considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{++}$ construite par récurrence de la façon suivante :

$x_o = 1$ et pour tout $n > 0$

$$Uf[(x_n,0)] < \ell + 2^{-n-1}\varepsilon \qquad Uf[(\tfrac{1}{x_n}, 0)] < 2^{-n-1}\varepsilon$$

$$|Uf[(x_n,0)g] - Uf[(x_n,0)]| < 2^{-n-1}\varepsilon \quad \text{pour tout } g \in \bigcup_{i=o}^{n-1}(\tfrac{1}{x_i}, 0)K$$

$$|Uf[(\tfrac{1}{x_n},0)g] - Uf[(\tfrac{1}{x_n},0)]| < 2^{-n-1}\varepsilon \quad \text{pour tout } g \in \bigcup_{i=o}^{n-1}(x_i,0)K .$$

La relation $(**)$ permet d'assurer l'existence d'une telle suite.

Soit $h_n = f + \tau_{(x_1,o)}f + \ldots + \tau_{(x_n,o)}f$, où $\tau_g f$ désigne la translatée à gauche de f par g $[\tau_g f(g') = f(gg'), \forall g' \in G_1]$.

Le support de h_n est contenu dans $\bigcup_{i=o}^{n}(\frac{1}{x_i},0)K$.

Nous allons majorer Gh_n sur le support de h_n et le principe du maximum nous donnera une majoration sur G_1 entier.

Soit donc $g \in \bigcup_{i=o}^{n}(\frac{1}{x_i},0)K$. Il existe p tel que $g \in (\frac{1}{x_p},0)K$.

Nous avons 1°) $Uf[(x_p,0)g] \leq \|Uf\| = \sup_{g'\in G_1} Uf(g')$.

2°) pour $i \in 1,\ldots,n-p$

$$|Uf[(x_{p+i},0)g]| \le |Uf[(x_{p+i},0)]| + |Uf[(x_{p+i},0)g] - Uf[(x_{p+i},0)]|$$
$$\le \ell + 2^{-(p+i)-1}\varepsilon + 2^{-(p+i)-1}\varepsilon = \ell + 2^{-(p+i)}\varepsilon$$

3°) pour $i \in \{1,\dots,p\}$

$$Uf[(x_{p-i},0)g] = Uf[(\tfrac{1}{x_p},0)g']$$

où $g' = (x_p,0)(x_{p-i},0)g = (x_{p-i},0)(x_p,0)g$
par commutativité du sous-groupe $\{(x,0), x \in \mathbb{R}^{+*}\}$. Par suite
$g' \in (x_{p-i},0)K \subset \bigcup_{j=0}^{p-1} (x_j,0)K$ et nous avons

$$|Uf[(x_{p-i},0)g]| \le |Uf[(\tfrac{1}{x_p},0)]| + |Uf[(\tfrac{1}{x_p},0)g'] - Uf[(\tfrac{1}{x_p},0)]|$$
$$\le 2^{-p-1}\varepsilon + 2^{-p-1}\varepsilon = 2^{-p}\varepsilon .$$

Nous en déduisons que

$$Uh_n(g) \le \|Uf\| + n\ell + \varepsilon$$

et cette inégalité est vraie partout.
En particulier nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$Uf[(x,0)] + Uf[(x_1,0)(x,0)] + \dots + Uf[(x_n,0)(x,0)] \le \|Uf\| + n\ell + \varepsilon$$

et grâce à la commutativité de $\{(x,0), x \in \mathbb{R}^{+*}\}$, il en découle que

$$(n+1) \overline{\lim_{x\to 0}}\, Uf[(x,0)] \le \|Uf\| + n\ell + \varepsilon.$$

En faisant tendre n vers l'infini, nous obtenons $\overline{\lim_{x\to 0}}\ Uf[(x,0)] \le \ell$,
ce qui est contradictoire avec la définition de ℓ .

Proposition 4 :

Soit μ une mesure de probabilité étalée sur G_1 . Si l'unique valeur d'adhérence de l'ensemble $\{\varepsilon_{(x,o)} * U, x \in \mathbb{R}^{+*}\}$ est non nulle (ou, ce qui est équivalent, si la marche de loi μ est de type II), il existe une mesure positive m s $\mathbb{R}$ telle que $\hat{\mu}*m = m$ et c'est de plus la seule mesure à une constante multiplicative près telle que $\hat{\mu} * m \le m$.

Démonstration :

Comme l'unique valeur d'adhérence de $\{\varepsilon_{(x,o)} * U, x \in \mathbb{R}^{+*}\}$ est du type $\widehat{m_1 \otimes m}$, où m est une mesure telle que $\hat{\mu} * m \le m$, il existe si $I_\mu \ne \{0\}$ une telle mesure m non nulle . Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire gauche de loi $\hat{\mu}$; alors $(b(S_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est la chaîne induite sur $\mathbb{R}$ de loi $\hat{\mu}$, c'est à dire la chaîne de Markov d'espace d'états $\mathbb{R}$ et de probabilité de transition $\pi(x,.) = \hat{\mu} * \varepsilon_x$, $x \in \mathbb{R}$. Nous allons montrer que cette chaîne $b(S_n)$ est récurrente Harris sur un ensemble absorbant m-plein.

Soit K un compact de $\mathbb{R}$ tel que m(K) soit > 0. Pour tout compact K_1 de $\mathbb{R}^{+*}$, nous avons, si $y \in \mathbb{R}$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^{+*}} \hat{U} * \varepsilon_{(x,y)}[K_1 \times K] = \sup_{x \in \mathbb{R}^{+*}} \hat{U} * \varepsilon_{(1,y)} [xK_1 \times K] \leq \hat{U} * \varepsilon_{(1,y)} [\mathbb{R}^{+*} \times K] \quad .$$

Or, lorsque $x \to \infty$, $\hat{U} * \varepsilon_{(x,y)}[K_1 \times K] = \varepsilon_{(1/x,-y/x)} * U[(K_1 \times K)^{-1}]$ converge vers $m_1(K_1)m(K)$. Par suite, pour tout compact K_1 de $\mathbb{R}^{++}$, nous obtenons

$$m_1(K_1)m(K) \leq \hat{U} * \varepsilon_y(K) \qquad \text{(Produit au sens de } G_1\text{-espace)}$$

et nous en déduisons en faisant croître K_1 vers $\mathbb{R}^{+*}$ que $\hat{U} * \varepsilon_y(K)$ est infini pour tout $y \in \mathbb{R}$. La chaîne induite $b(S_n)$ est donc m-irréductible et récurrente Harris sur un ensemble absorbant F m-plein (cf. Ch.3 de (12)). Il en résulte que la mesure m est $\hat{\mu}$-invariante et que c'est l'unique mesure (à une constante multiplicative près) portée par F telle que $\hat{\mu} * m \leq m$. Mais, il découle de plus de la m-irréductibilité de $b(S_n)$ que c'est l'unique mesure portée par $\mathbb{R}$ ayant cette propriété.

Corollaire 2 :

Soit μ une loi de probabilité étalée sur G_1 . Tout élément de I_μ est μ-invariant.

B) Cas où la marche projection sur $\mathbb{R}^{++}$ est transiente :

Théorème 2 :

Soit μ une mesure de probabilité étalée sur G_1 telle que la marche sur $\mathbb{R}^{+*}$ de loi $a(\mu)$ soit transiente.

Alors, si μ n'admet pas de moment d'ordre 1, la marche droite de loi μ sur G_1 est de type I.

Supposons que μ admette un moment d'ordre 1. Alors, si α est < 0, la marche de loi μ est de type I ; si α est > 0, la marche de loi μ est de type II. Dans ce cas, il existe une probabilité m sur $\mathbb{R}$ unique telle que $\hat{\mu} * m = m$ et l'ensemble des valeurs d'adhérences non nulles de $\{\varepsilon_g * U, g \in G_1\}$ est la famille de mesures distinctes $\{1/\alpha\ \varepsilon_{(1,y)} * \widehat{m_1 \otimes m}, y \in \mathbb{R}\}$ où m_1 désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Plus précisément, lorsque g tend vers δ de manière à ce que a(g) tende vers ∞ ou que $|b(g)|$ tende vers ∞, alors $\varepsilon_g * U$ converge vaguement vers 0. Par contre, si a(g) tend vers 0 et si b(g) reste fixé en $y \in \mathbb{R}$, alors $\varepsilon_g * U$ converge vaguement vers $\frac{1}{\alpha}\, \varepsilon_{(1,y)} * \widehat{m_1 \otimes m}$.

<u>Remarque</u> :

La connaissance du renouvellement pour la marche transiente sur $\mathbb{R}^{+*}$ de loi $a(\mu)$ va nous apporter certains renseignements. En particulier si Log a n'est pas μ-intégrable, ou si Log a est μ-intégrable avec $\alpha < 0$, nous savons (cf. Ch.5 Th.3.9 de (12)) que $\varepsilon_x * a(U)$ converge vaguement vers 0 lorsque $x \to 0$. Par suite, $\varepsilon_g * U$ converge vaguement vers 0 lorsque $a(g) \to 0$. Il découle alors du corollaire 1 que dans ce cas la marche droite de loi μ est de type I.

Il va donc s'agir d'étudier le cas où Log a est μ-intégrable avec $\alpha > 0$ (le cas $\alpha = 0$ ne pouvant se produire vu la transience de la marche de loi $a(\mu)$ (cf. Ch.3 ex.4.16 de (12)) et de montrer qu'alors l'unique valeur d'adhérence de l'ensemble $\{\varepsilon_{(x,o)} * U,\ x \in \mathbb{R}^{+*}\}$ est non nulle si et seulement si $\text{Log}^+ b$ est μ-intégrable. Il revient en fait, vu que Log a est μ (et $\hat{\mu}$) intégrable, au même d'étudier la $\hat{\mu}$-intégrabilité de $\text{Log}^+ b$.

<u>Lemme 2</u> :

Soit μ une mesure de probabilité sur G_1 . Nous supposons que Log a est μ-intégrable et que $\alpha = \int \text{Log}\, a(g)\, d\mu(g)$ est > 0. Il existe une mesure de probabilité m sur $\mathbb{R}$ telle que $\hat{\mu} * m = m$ si et seulement si $\text{Log}^+ b$ est μ-intégrable et cette mesure de probabilité est alors unique.

<u>Démonstration</u> :

Si $(X'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la marche aléatoire droite de loi $\hat{\mu}$ sur G_1, alors X'_n peut s'écrire $X'_o\, Y_1 \ldots Y_n$ où les variables $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendantes et de loi $\hat{\mu}$. Par suite

$$a(X'_n) = a(X'_o)\, a(Y_1) \ldots a(Y_n)$$

et
$$b(X'_n) = b(X'_o) + \sum_{k=1}^{n} a(X'_{k-1})\, b(Y_k) \ .$$

D'après la loi des grands nombres, nous obtenons

$$\lim_n a(X'_n)^{1/n} = e^{\int \text{Log}\, a(g) d\hat{\mu}(g)} = e^{-\alpha} \qquad P_e \text{ p.s.}$$

et $a(X'_n)$ tend P_e p.s. vers 0, puisque α est > 0.

De plus, la série de terme général $a(X'_{n-1}) b(Y_n)$ est convergente P_e p.s. si et seulement si $\text{Log}^+ b(g)$ est $\hat{\mu}$-intégrable. En effet, on peut vérifier que

$$\overline{\lim}\ b(Y_n)^{1/n} = \begin{cases} 1 & \text{si } \int \text{Log}^+ b(g) d\hat{\mu}(g) < \infty \\ +\infty & \text{sinon .} \end{cases} \qquad P_e \text{ p.s.}$$

Et de ce fait :

$$\overline{\lim}\ a(X'_{n-1})^{1/n} b(Y_n)^{1/n} = \begin{cases} e^{-\alpha} < 1 & \text{si } \int \text{Log}^+ b(g) d\hat{\mu}(g) < 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \qquad P_e \text{ p.s.}$$

En conséquence la suite $b(X'_n)$ converge P_e p.s. vers une variable Z si et seulement si $\int \mathrm{Log}^+ b(g)d\hat{\mu}(g) < \infty$. Soit m la loi de Z. Alors, de l'égalité $b(X'_n) = Y_1 . b(Y_2.....Y_n)$ (produit au sens de G_1-espace), nous déduisons que $\hat{\mu} * m = m$.

Supposons réciproquement qu'il existe sur G_1 une mesure de probabilité m' telle que $\hat{\mu} * m' = m'$. Alors si $\varphi \in C_K[\mathbb{R}]$, la fonction f définie pour tout $g \in G_1$ par $f(g) = \varepsilon_g * m'(\varphi)$ est $\hat{\mu}$-harmonique bornée. De ce fait, la suite

$$f(X'_n) = \varepsilon_{X'_n} * m'(\varphi) = \int \varphi[a(X'_n)y + b(X'_n)]\, m'[dy]$$

converge P_e p.s. Comme la fonction φ est uniformément continue et la mesure m' bornée, nous déduisons de la convergence de $a(X'_n)$ vers 0 que $\varphi[b(X'_n)]$ converge P_e p.s. lorsque $n \to \infty$. Cette convergence ayant lieu pour tout $\varphi \in C_K(\mathbb{R})$, il en résulte que $b(X'_n)$ converge P_e p.s. vers une variable Z de loi m. Par conséquence $\mathrm{Log}^+ b$ est $\hat{\mu}$-intégrable et il découle de l'harmonicité de f que

$$f(e) = E_e[f(X_n)] = E_e[\varphi(Z)]$$

et par suite $m'[\varphi] = m[\varphi]$. D'où l'unicité.

<u>Démonstration du Théorème 2</u> :

Nous savons que lorsque $x \to 0$, $\varepsilon_{(x,o)} * U$ converge vers $\widehat{m_1 \otimes m}$ où m est une mesure (éventuellement nulle) telle que $\hat{\mu} * m = m$. Comme la marche sur $\mathbb{R}^{+*}$ de loi $a(\mu)$ est transiente, la mesure m est bornée. Il résulte alors du lemme 2 que si Log a est μ-intégrable avec $\alpha > 0$ et si $\mathrm{Log}^+ b$ ne l'est pas, il n'existe pas de mesure m non nulle du type ci-dessus et que par suite la marche de loi μ est de type I.

Supposons maintenant que Log a et $\mathrm{Log}^+ b$ sont μ-intégrables (μ a un moment d'ordre 1) et que α est > 0. Il existe alors une unique probabilité m sur G_1 telle que $\hat{\mu} * m = m$ et $\varepsilon_{(x,o)} * U$ converge lorsque $x \to 0$ vers une mesure $\lambda\widehat{m_1 \otimes m}$ où λ est un nombre réel positif ou nul à déterminer. Nous pouvons remarquer que si nous connaissions la limite P_e p.s. lorsque $n \to \infty$ de $\varepsilon_{X'_n} * U$ où X'_n est la marche de loi $\hat{\mu}$, nous connaîtrions, puisque $a(X'_n) \to 0$ et $b(X'_n)$ converge P_e p.s., la valeur de λ . En fait, nous allons considérer sur G_1 le processus relativisé (2) associé à la mesure μ-invariante $\widehat{m_1 \otimes m}$:

Soit r une fonction de référence sur G_1 (i.e. une fonction continue strictement positive sur G_1 et telle que le potentiel Ur soit une fonction continue finie) qui soit $\widehat{m_1 \otimes m}$ intégrable. Alors il existe sur l'espace canonique $W = G^N$ des coordonnées $\tilde{X}_n$, $n \geq 0$ une unique probabilité $\pi^{\widehat{m_1 \otimes m},r}$ telle que

$$\pi^{\widehat{m_1 \otimes m},r}[\tilde{X}_o \in A_o, \tilde{X}_1 \in A_1, \ldots, \tilde{X}_n \in A_n] = \langle \lambda, I_{A_n} P \ldots I_{A_1} P(I_{A_o} r) \rangle$$

pour tout entier $n \geq 0$ et tout borélien $A_1, \ldots, A_n$ de G_1 ; et nous avons le théorème de convergence suivant (cf. Th.12.2 de (2)) : la suite $\dfrac{\varepsilon_{\tilde{X}_n} * U}{\varepsilon_{\tilde{X}_n} * U(r)}$ converge $\pi^{\widehat{m_1 \otimes m},r}$ p.s. vers une variable aléatoire T à valeurs dans l'espace des mesures de Radon sur G_1 , et telle que $\pi^{\widehat{m_1 \otimes m},r}$ p.s. , $T(r) = 1$.

Nous allons choisir une fonction de référence r, $\widehat{m_1 \otimes m}$-intégrable, pour laquelle nous connaissons le comportement asymptotique de la fonction potentiel Ur et qui nous permette de déterminer $\pi^{\widehat{m_1 \otimes m},r}$. Il existe sur $\mathbb{R}^{+*}$ une fonction de référence r_1 relativement à $a(\mu)$ telle que $m_1(r_1) = 1$ et telle que sous les hypothèses faites sur μ, $\varepsilon_x * a(U)(r_1)$ converge lorsque $x \to 0$ vers $\dfrac{m_1(r_1)}{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$ (cf. Ch.5 Prop.3.3 de (12)).
La fonction $r = r_1 \circ a$ est alors une fonction de référence sur G_1 relativement à μ telle que $\widehat{m_1 \otimes m}(r) = 1$.

Vu le choix de r, la variable $\tilde{X}_o^{-1}\tilde{X}_n$ est, $\pi^{\widehat{m_1 \otimes m},r}$ p.s., pour tout n, le produit de n variables indépendantes de loi $\hat{\mu}$. En effet

$$\pi^{\widehat{m_1 \otimes m},r}[\tilde{X}_1^{-1}\tilde{X}_o \in A_1, \ldots, \tilde{X}_n^{-1}\tilde{X}_{n-1} \in A_n]$$
$$= \int \widehat{m_1 \otimes m}[dg_o] \int 1_{A_n}[g_o^{-1} g_1] \varepsilon_{g_o} * \mu[dg_1] \ldots \int 1_{A_1}(g_{n-1} g_n) \varepsilon_{g_{n-1}} * \mu[dg_n] r(g_n)$$
$$= \int_{G_1} \ldots \int_{G_1} r[g_o g_1 \ldots g_n] 1_{A_n}[g_1] \ldots 1_{A_1}[g_n] \widehat{m_1 \otimes m}(dg_o) \mu(dg_1) \ldots \mu(dg_n)$$
$$= \int_{G_1} \ldots \int_{G_1} r_1[a_o a_1 \ldots a_n] 1_{A_n}(a_1, b_1) \ldots 1_{A_1}(a_n, b_n) m_1[da_o] \mu[da_1, db_1] \ldots \mu[da_n, d$$
$$= m_1(r_1) \mu(A_n) \ldots \mu(A_1)$$

puisque m_1 est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{+*}$; et $\tilde{X}_n^{-1}\tilde{X}_o$ est donc le produit de n variables indépendantes de loi μ . Par suite

$$a(\tilde{X}_o^{-1}\tilde{X}_n) \to e^{-\alpha} \qquad \pi^{\widehat{m_1 \otimes m},r} \text{ p.s.}$$

et $\quad b(\tilde{X}_o^{-1}\tilde{X}_n) \to Z'$, variable aléatoire qui a pour loi la probabilité m.

Il en résulte que $\varepsilon_{\tilde{X}_n} * U$ converge vaguement $\pi^{\widehat{m_1 \otimes m},r}$ p.s. vers $\lambda\, \varepsilon_{\tilde{X}_o . Z'} * \widehat{m_1 \otimes m}$.

Comme $\varepsilon_{\tilde{X}_n} * U(r) = \varepsilon_{a(\tilde{X}_n)} * a(U)(r_1)$ converge vers $\dfrac{1}{\alpha}$, la variable T vaut, $\pi^{\widehat{m_1 \otimes m},r}$ p.s., $\dfrac{\lambda}{\alpha} \varepsilon_{\tilde{X}_o . Z'} * \widehat{m_1 \otimes m}$ et puisque $T(r) = 1$ p.s., le réel λ vaut α.

Nous avons montré que lorsque g tend vers δ de manière à ce que $a(g)$ tend vers 0 et $b(g)$ reste fixé en $y \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_g * U$ converge vaguement vers $\frac{1}{\alpha} \varepsilon_{(1,y)} * \widehat{m_1 \otimes m}$. Comme m est de masse finie, il est facile de vérifier que ces mesures $\varepsilon_{(1,y)} * \widehat{m_1 \otimes m}$, $y \in \mathbb{R}$ sont toutes distinctes.

Remarque :

Il est possible en étudiant le processus relativisé associé à la mesure de Haar à droite sur G_1 de déterminer sous les hypothèses ci-dessus l'ensemble des fonctions $\hat{\mu}$-harmoniques bornées et de retrouver le résultat de (9), à savoir toute fonction f $\hat{\mu}$-harmonique bornée sur G_1 s'écrit

$$f(g) = \int \psi(g.x)\, m[dx] \quad \text{où } \psi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}, m_2) .$$

C - CAS OU LA MARCHE PROJECTION SUR $\mathbb{R}^{++}$ EST RECURRENTE

Théorème 3 :

Soit μ une mesure de probabilité étalée sur G_1 telle que la marche sur $\mathbb{R}^{++}$ de loi $a(\mu)$ soit récurrente.

Si μ admet un moment d'ordre $2+\varepsilon$, où ε est un réel arbitrairement petit, la marche de loi μ est de type II. Il existe alors une mesure m de masse infinie sur $\mathbb{R}$ telle que $\hat{\mu} * m = m$ et telle que l'ensemble des valeurs d'adhérence non nulles de $\{\varepsilon_g * U, g \in G_1\}$ soit la famille de mesures $\{\varepsilon_{(1,y)} * \widehat{m_1 \otimes m}, y \in \mathbb{R}\}$; m est, à une constante multiplicative près, l'unique mesure sur $\mathbb{R}$ telle que $\hat{\mu} * m \leq m$.

Les directions où les valeurs d'adhérence sont non nulles sont identiques à celles obtenues dans le théorème 2 .

Nous allons donner une idée de la démonstration. Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une marche droite de loi μ telle que la marche projection $(a(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ soit récurrente, alors le temps d'entrée T de $a(X_n)$ dans $]1,\infty[$ est p.s. fini. Nous voulons étudier le comportement asymptotique lorsque $a(g) \to 0$ de $\varepsilon_g * U$ et le lemme suivant va nous prouver qu'il est lié à celui de la probabilité de transition $P_T[g,.]$ (sachant que $P_T(g,A) = P_g[X_T \in A]$ si $g \in G_1$ et A est un borélien de G_1).

<u>Lemme 3</u> :

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire de loi μ étalée sur G_1 telle que la marche $a(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^{++}$ soit récurrente, et T le temps d'entrée dans $]1,\infty[$ de la marche $a(X_n)$. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de G_1 tendant vers δ lorsque $n \to \infty$.

Alors, la suite $\varepsilon_{g_n} * U$ converge vaguement vers 0 lorsque $n \to \infty$ si et seulement si, pour tout $h \in G_1$, la suite $P_T(hg_n,.)$ converge vaguement vers 0.

<u>Démonstration du lemme</u> :

Soit f un élément de $C_K^+(G_1)$ dont le support est inclus dans $]1,\infty[\times \mathbb{R}$. D'après la propriété de Markov-forte, nous avons, pour tout $g \in G_1$,

$$P_T Uf(g) = \sum_{n\geq 0} E_g[f(X_{T+n})] = E_g\left[\sum_{n\geq 0} f(X_n)\right] = Uf(g) .$$

Nous en déduisons que si $Uf[g_n]$ tend vers 0, alors $P_T f(g_n)$, qui est inférieur ou égal à $P_T Uf(g_n)$, tend aussi vers 0 lorsque $n \to \infty$. Comme pour tout $g \in G_1$, $P_T(g,.)$ a son support dans $]1,\infty[\times \mathbb{R}$, la convergence vague vers 0 de $\varepsilon_{hg_n} * U$, où h est un élément quelconque de G_1, entraîne celle de $P_T(hg_n,.)$.

Nous savons (Corollaire 1) que si g tend vers δ de manière à ce que $a(g)$ ne tende pas vers 0, alors $\varepsilon_g * U$ converge vaguement vers 0. Par suite pour tout élément f de $C_K^+[G_1]$ et pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{++}$, il existe un compact K_ε de G_1 tel que

$$\forall y \in K_\varepsilon^c \cap]1,+\infty[\times \mathbb{R} ,\ Uf(y) < \varepsilon .$$

Si nous supposons comme ci-dessus que f a son support dans $]1,\infty[\times \mathbb{R}$, nous obtenons, pour tout $g \in G_1$,

$$\begin{aligned} Uf(g) = P_T Uf(g) &= \int 1_{]1,\infty[\times\mathbb{R}}(y)\, P_T[g,dy]\, Uf(y) \\ &\leq \varepsilon + \int 1_{K_\varepsilon}(y)\, P_T[g,dy]\, Uf(y) . \end{aligned}$$

Si la suite $P_T(g_n,.)$ converge vaguement vers 0, le deuxième terme de l'inégalité ci-dessus tend vers 0 et $Uf(g_n)$ tend vers 0. Pour tout élément f de $C_K^+[G_1]$, il existe un élément h de G_1 telle que la fonction $\tau_h f$ ait son support dans $]1,\infty[\times \mathbb{R}$ $(\tau_h f(g) = f(hg))$. Alors $Uf(g_n)$ est égal à $U\tau_h f[h^{-1}g_n]$ et si la suite $P_T(h^{-1}g_n,.)$ converge vaguement vers 0, $Uf(g_n)$ tend vers 0. D'où le résultat.

<u>Démonstration du Théorème 3</u> :

Considérons si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la marche de loi μ la suite de temps d'arrêt suivante :

$$\tau_o = 0,\ldots,\tau_k = \inf\{n > \tau_{k-1} \ , \ a(X_n) > a(X_{\tau_{k-1}})\}$$

Il découle de la relation $\tau_k = \tau_{k-1}+\tau_1\circ\theta_{\tau_{k-1}}$ que la suite X_{τ_k} est une marche aléatoire de loi $\rho_\mu = P_{\tau_1}(e,.) = P_T(e,.)$.

Quitte à remplacer μ par $\sum\limits_{n\geq o} \frac{\mu^{*n}}{2^n}$, ce qui ne change pas le comportement asymptotique de $\varepsilon_g * U$, lorsque $g \to \delta$, nous pouvons supposer que la mesure ρ_μ est étalée et adaptée. La marche $a(X_{\tau_k})$ est transiente par construction, et de ce fait nous savons que X_{τ_k} est de type II si et seulement si ρ_μ a un moment d'ordre 1 (puisqu'alors nécessairement $\int \mathrm{Log}\ a(g)\rho_\mu[dg]$ est > 0).

Si nous remarquons que le temps d'entrée dans $]1,\infty[$ de la marche $a(X_{\tau_k})$ partant d'un élément g tel que $a(g) < 1$ est T, nous voyons que pour tout g tel que $a(g) < 1$, les probabilités d'atteinte $P_T[g,A]$ des boréliens A de $]1,\infty[\times \mathbb{R}$ sont les mêmes pour les marches de loi μ et de loi ρ_μ . Il découle alors du lemme 3 que les comportements asymptotiques des noyaux potentiels associés à μ et ρ_μ sont du même type lorsque g tend vers δ de manière à ce que $a(g) \to 0$. Plus précisément, la marche de loi μ est de type II si et seulement si ρ_μ a un moment d'ordre 1.

Dans ce cas alors, il existe d'après la Proposition 4 une unique mesure m (à une constante multiplicative près) telle que $\hat{\mu} * m \leq m$ et cette mesure m est même invariante.

Si m était de masse finie, il existerait une fonction $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R},m_2)$ telle que la fonction f définie sur G_1 par $f(g) = \varepsilon_g * m(\varphi)$ soit $\hat{\mu}$-harmonique bornée non constante, ce qui est impossible dans le cas présent (cf. (9)). La mesure m est donc de masse infinie et le comportement asymptotique du noyau potentiel est alors du même type que celui obtenu dans le cas où la marche de loi $a(\mu)$ est transiente.

Il est alors possible de conclure à l'aide du lemme suivant dont nous ne donnerons pas la démonstration .

<u>Lemme 4</u> :

Soit μ une mesure de probabilité sur G_1 étalée et telle que la marche de loi $a(\mu)$ soit récurrente. Alors si μ admet un moment d'ordre $2+\varepsilon$, pour un réel ε arbitrairement petit, ρ_μ admet un moment d'ordre 1 .

BIBLIOGRAPHIE

1 . R. AZENCOTT Espaces de Poisson des groupes localement compacts Lecture Notes n°148 (1970)

2 . R. AZENCOTT et P. CARTIER Martin Boundaries of Random Walks on locally Compact groups . Proceeding of the 6^{th} Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability III (p.87-129).

3 . P. BOUGEROL et L. ELIE Une propriété de compacité du noyau potentiel (A paraître)

4 . A. BRUNEL, P. CREPEL, Y. GUIVARC'H, M. KEANE Marches aléatoires récurrentes sur les groupes localement compacts. C.R.A.S. 275 (1972).

5 . A. BRUNEL et D. REVUZ Sur la théorie du renouvellement pour les groupes non abéliens. Israël J. Math. 20 n°1 (1975, p.46).

6 . L. ELIE Etude du renouvellement pour certains groupes résolubles C.R.A.S. 280 (1975,p. 1149).

7 . L. ELIE Etude du renouvellement sur les groupes moyennables C.R.A.S. 284 (1977, p.555).

8 . L. ELIE Etude du renouvellement sur les groupes G (LCD) tels que G/G_0 soit compact. (A paraître).

9 . L. ELIE et A. RAUGI Fonctions harmoniques sur certains groupes résolubles C.R.A.S. 280 (1975,p.377)

10. A.K. GRINCEVICIUS Soviet Math. Dokl. 15 n°6 (1974, p.1512)

11. Y. GUIVARC'H Une loi des grands nombres pour les groupes de Lie (A paraître)

12. D. REVUZ Markov Chains . North-Holland, Mathematical Library Vol. 11 (1975).

13. C. SUNYAC'H Sur la théorie du renouvellement pour les groupes unimodulaires . C.R.A.S. 284 (1977,p.547)