ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

PHILIPPE BOUGEROL

Fonctions de concentration sur les espaces homogènes du groupe des déplacements de R^d

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 65, série *Mathématiques*, n° 15 (1977), p. 19-23

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1977__65_15_19_0>

FONCTIONS DE CONCENTRATION SUR LES ESPACES HOMOGENES DU GROUPE DES DEPLACEMENTS DE R^d

Philippe BOUGEROL

Université PARIS VII

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

1.

Soit G un groupe localement compact, H un sous-espace fermé de G. A toute probabilité μ sur G on peut associer la marche aléatoire de loi μ sur $H\backslash G$. C'est par définition la chaine de Markov d'espace d'états $H\backslash G$ et de noyau de transition P_μ défini par :

$$P_\mu(\pi(x),A) = (\varepsilon_{\pi(x)} * \mu)(A) = \mu(x^{-1}\pi^{-1}(A))$$

Si x est un élément de G, π la projection canonique de G sur $H\backslash G$ et A un borélien de $H\backslash G$. (Voir, par exemple, (5)).

De même que pour étudier la marche de loi μ sur G nous avons introduit dans (1), (2), la fonction F_μ définie sur $\mathbb{N}$ par

$$F_\mu(x) = \operatorname*{Sup}_{g,g' \in G} \mu^{*n}(g\,K\,g')$$

si K est un compact de G, il est naturel afin d'étudier la marche aléatoire sur $H\backslash G$, de considérer la fonction F_μ^H définie sur $\mathbb{N}$ par

$$F_\mu^H(n) = \operatorname*{Sup}_{g,g' \in G} P_\mu^n(\pi(g),\tilde{K}.g') = \operatorname*{Sup}_{g,g' \in G} \mu^{*n}(g\ \pi^{-1}(\tilde{K})g')$$

si $\tilde{K}$ est un compact de $H\backslash G$ fixé. Nous l'appelerons fonction de concentration de μ sur $H\backslash G$.

Le but de cette note est d'établir une majoration de F_μ^H quand n tend vers l'infini dans le cas où G est le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^d$ et H un sous groupe connexe. Ceci nous permettra de retrouver les résultats de L. Gallardo et V. Ries (3), (4), relatifs à la transience de ces espaces homogènes.

2.

On notera G_d le groupe $\mathbb{R}^d \times_\sigma SO(d)$ des déplacements de $\mathbb{R}^d$. Ce groupe étant connexe toute probabilité étalée (i.e. possédant une puissance non étrangère à une mesure de Haar) sur G_d est adaptée (i.e. son support engendre topologiquement G_d).

Lemme 1

Si μ est une probabilité sur G_d non étrangère à une mesure de Haar il existe un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^d$ et une constante a, strictement positive, tels que :

Pour tout entier n, pour tout t de V,

$$\sup_{g,g' \in G} \left| \int_{\mathbb{R}^d \times SO(d)} e^{i<t,x>} (\varepsilon_g * \mu^{*n} * \varepsilon_{g'}) (dx,dk) \right| \leq \exp - an \|t\|^2$$

Démonstration

Si $g = (y,u)$ et $g' = (y',u')$ où $y,y' \in \mathbb{R}^d$ et $u,u' \in SO(d)$ et si $\mu = \int_{SO(d)} \mu_k \, d\bar{\mu}(k) = \int_{SO(d)} (\nu_k \otimes \varepsilon_k) \, d\bar{\mu}(k)$

est une désintégration de μ de base $SO(d)$, $\bar{\mu}$ désignant la projection de μ sur $SO(d)$ et $\{\nu_k, k \in SO(d)\}$ des probabilités sur $\mathbb{R}^d$, on peut écrire

$$\left| \int_{G_d} e^{i<t,x>} (\varepsilon_g * \mu^{*n} * \varepsilon_{g'}) (dx,dk) \right| =$$

$$= \left| \int \exp i < t, y + ux_1 + u k_1 x_2 + \ldots + u k_1 \ldots k_{n-1} x_n + u k_1 \ldots k_n y' > \mu(dx_1,dk_1) \ldots \mu(dx_n,dk_n) \right|$$

$$= \left| \int \exp i < t, y + \ldots > \nu_{k_1}(dx_1) \ldots \nu_{k_n}(dx_n) \, \bar{\mu}(dk_1) \ldots \bar{\mu}(dk_n) \right|$$

$$= \left| \int e^{i<t,y>} \hat{\nu}_{k_1}(u^{-1}t) \ldots \hat{\nu}_{k_n}(k_{n-1}^{-1} \ldots k_1^{-1} u^{-1} x_n) \, e^{i<t,u_1 k_1 \ldots k_n y'>} \bar{\mu}(dk_1) \ldots \bar{\mu}(\right.$$

$$\leq \left\{ \int \sup_{u \in SO(d)} \left| \hat{\nu}_k(ut) \right| d\bar{\mu}(k) \right\}^n$$

où l'on a noté $\hat{\nu}_k$ la transformée de Fourier de ν_k. Il est alors facile d'obtenir le lemme (par exemple en utilisant la démonstration de la proposition 14 de (2)).

Lemme 2.

Soit μ une probabilité étalée sur G_d et $\mathbb{R}^d = H_1 \oplus H_2$ une décomposition orthogonale de $\mathbb{R}^d$ en deux sous-espaces vectoriels. Si H_1 est de dimension r, pour tout compact K de H_1 il existe une constante c, strictement positive, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sup_{g,g' \in G_d} \mu^{*n}(g \{ (K+H_2) \times SO(d) \} g') \leq c \, n^{-r/2}$$

Démonstration

Il est facile de vérifier qu'il suffit de montrer ce lemme lorsque μ est non étrangère à une mesure de Haar. Sous cette hypothèse, soit α réel assez petit pour que la boule B_α de centre 0 et de rayon α dans $\mathbb{R}^d$ soit contenue dans le voisinage V obtenu au lemme 1.

Si η désigne la projection de $G_d = (H_1 + H_2) \times SO(d)$ sur H_1 et si f est une fonction de H_1 dans $\mathbb{R}$, strictement positive, dont la transformée est nulle en dehors de l'ensemble $\{t \in \mathbb{R}^r , \|t\|_{\mathbb{R}^r} < \alpha\}$, on considère la fonction φ définie sur G_d égale à $f \circ \eta$.

Il est clair qu'il suffit de majorer $\sup\limits_{g,g' \in G} \int_{G_d} \varphi(h)\ (\varepsilon_g * \mu^{*n} * \varepsilon_{g'})(dh)$ pour obtenir le lemme. Si P est une probabilité sur G_d notons $\eta(P)$ l'image de P par η et $\hat{\eta}(P)$ la transformée de Fourier de $\eta(P)$. Pour tout t de $\mathbb{R}^r$ on a :

$$\hat{\eta}(\varepsilon_g * \mu^{*n} * \varepsilon_{g'})(t) = \int_{\mathbb{R}^r} \exp i<t,x_1>\ \eta(\varepsilon_g * \mu^{*n} * \varepsilon_{g'})(dx_1)$$

$$= \int_{G_d} \exp i<t,\eta(h)>\ (\varepsilon_g * \mu^{*n} * \varepsilon_{g'})(dh)$$

$$= \int_{G_d} \exp i<(t,0),(x_1,x_2)>\ (\varepsilon_g * \mu^{*n} * \varepsilon_{g'})(dx_1,dx_2,dk)$$

si on identifie G_d et $H_1 \times H_2 \times SO(d)$. Si $\|t\|_{\mathbb{R}^r}$ est inférieur à α on peut appliquer le lemme 1 pour obtenir :

$$\sup_{g,g' \in G_d} \left| \hat{\eta}(\varepsilon_g * \mu^{*n} * \varepsilon_{g'})(t) \right| \leq e p - na \|(t,0)\|^2_{\mathbb{R}^d} = \exp - an \|t\|^2_{\mathbb{R}^r}$$

D'après la formule de Plancherel on peut écrire :

$$\int_{G_d} \varphi(h)\ (\varepsilon_g * \mu^{*n} * \varepsilon_{g'})(dh) = \int_{H_1} f(x)\ \eta(\varepsilon_g * \mu^{*n} * \varepsilon_{g'})(dx)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^r} \int_{\mathbb{R}^r} \hat{f}(-x)\ \hat{\eta}(\varepsilon_g * \mu^{*n} * \varepsilon_{g'})(x)\, dx$$

Puisque $\operatorname{Supp} \hat{f} \subset B_\alpha$ l'inégalité précédente appliquée ici donne immédiatement le lemme.

3.

Nous pouvons maintenant montrer et énoncer notre résultat principal:

Théorème

Soit H un sous groupe fermé connexe du groupe G_d des déplacements de $\mathbb{R}^d$. Soit r la dimension du sous espace de $\mathbb{R}^d$ engendré par les directions asymptotiques de la projection de H sur $\mathbb{R}^d$. Si μ est une probabilité étalée sur G_d si π désigne la projection canonique de G sur $H\backslash G$, pour tout compact $\tilde{K}$ de $H\backslash G$ il existe une constante c, strictement positive, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sup_{g,g' \in G_d} P^n_\mu(\pi(g),\tilde{K}.g') = \sup_{g,g' \in G_d} \mu^{*n}(g\,\pi^{-1}(\tilde{K})g') \leq c\, n^{-d-r/2}$$

En particulier, si $d-r$ est supérieur ou égal à trois, la marche de loi μ sur $H\backslash G$ est transiente et son potentiel tend vers zéro à l'infini.

On retrouve donc en particulier le résultat de (3), (4).

<u>Démonstration</u> :

Rappelons d'abord les résultats de structure obtenus dans (4) ch. II. Si $H = RS$ est une décomposition de Lévy de H, R étant le radical de H et S un sous groupe semi simple, S est compact. De plus, il existe une décomposition orthogonale $\mathbb{R}^d = H_1 \oplus H_2$ telle que la dimension de H_2 est r et qu'il existe un compact C de H_1 tel que R est contenu dans $(C + H_1) \times SO(d)$.

Soit alors K un compact de G tel que $\pi(K)$ soit égal à $\tilde{K}$. Puisque $\pi^{-1}(\tilde{K}) = RSK \subset \{(C+H_2) \times SO(d)\}\, SK$ il est clair qu'il existe un compact de H_1 tel que

$$\pi^{-1}(K) \subset (C'+H_2) \times SO(d)$$

Le théorème est donc une conséquence immédiate du lemme 2. (La deuxième partie découlant de la première et de (5) puisque si $d-r \geq 3$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} P^n_\mu(\pi(g),$ converge uniformément en $g \in G$).

---

(1) P. Bougerol "Fonctions de concentration sur les extensions compactes de groupes abéliens" C.R.A.S. tome 283 Serie A p. 527.529 (1

(2) P. Bougerol "Fonctions de concentration sur certains groupes localement compacts" A paraître.

(3) L. Gallardo, V. Ries A paraître.

(4) L. Gallardo. Thèse de doctorat de Spécialité Université de Nancy 1 (1977)

(5) H. Hennion, B. Roynette. "Un théorème de dichotomie pour une marche aléatoire sur un espace homogène" A paraître.