ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

J. DUCHON

Fonctions-spline et espérances conditionnelles de champs gaussiens

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 61, série *Mathématiques*, n° 14 (1976), p. 19-27

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1976__61_14_19_0>

FONCTIONS-SPLINE ET ESPERANCES CONDITIONNELLES DE CHAMPS GAUSSIENS

J. DUCHON, UNIVERSITE DE GRENOBLE

Introduction

Soit $(X_t, t \in T)$ une fonction aléatoire gaussienne centrée, $K(t, t') = \mathbb{E}(X_t X_{t'})$ son noyau de covariance, $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^T$ l'espace hilbertien autoreproduisant associé, et A fini $\subset$ T. Pour chaque $\omega \in \Omega$, l'ensemble $\{u \in \mathcal{H} : u(a) = X_a(\omega), a \in A\}$ est un sous-espace affine fermé de $\mathcal{H}$, qui a un élément unique de norme minimale, soit $(t \longmapsto X_t^A(\omega))$. Il est facile de voir qu'alors on a $X_t^A = \mathbb{E}(X_t \mid X_a, a \in A)$. En d'autres termes, on obtient l'espérance conditionnelle de X connaissant les X_a, (c'est à dire la meilleure approximation, au sens de la moyenne quadratique, de X par une fonction des X_a) en minimisant la norme dans $\mathcal{H}$.

Or, il existe des méthodes d'interpolation des fonctions dans lesquelles on choisit de minimiser non pas une norme, mais une semi-norme quadratique, par exemple $|v|_m = (\int |v^{(m)}|^2)^{1/2}$, sous des contraintes telles que : $v(a) = f(a)$ donnés pour $a \in A$ fini $\subset \mathbb{R}$. On obtient ainsi des fonctions-spline qui, dans ce cas particulier, sont de la forme
$\sum_{a \in A} \lambda_a (t-a)_+^{2m-1} + \nu(t)$ où ν est un polynôme de degré $\leq m-1$ et
$\sum_{a \in A} \lambda_a a^k = 0$ pour $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Voir par exemple le livre de P.J. LAURENT [6] et sa bibliographie.

Le but de cet article est de présenter des situations probabilistes dans lesquelles on obtient des sortes d'espérances conditionnelles comme fonctions-spline, c'est à dire en minimisant une semi-norme quadratique. Le formalisme englobe, d'un côté, les "fonctions aléatoires intrinsèques généralisées" de G. MATHERON [7], de l'autre des types récents de fonctions-spline à plusieurs variables [1], [2]. Le résultat généralise ceux de G.S. KIMELDORF et G. WAHBA [3], [4], [5].

Définissons d'abord précisément ces "sortes d'espérances conditionnelles" : soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions réelles P-négligeables sur Ω, $\mathcal{L}^p(\mathcal{A}) = \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ celui des fonctions réelles $\mathcal{A}$-mesurables sur Ω dont la puissance p-ième est P-intégrable ; soit d'autre part $\mathcal{B}$ une tribu sur Ω, non nécessairement contenue dans $\mathcal{A}$, et $\mathcal{L}^o(\mathcal{B})$ l'ensemble des fonctions réelles $\mathcal{B}$-mesurables sur Ω.

Définition

Posons pour toute $X \in \mathbb{R}^\Omega$:

$$\mathbb{E}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} X = \{Z \in \mathcal{L}^o(\mathcal{B}) : Z-X \in \mathcal{L}^1(\mathcal{A}) \text{ et } \int_B (Z-X)dP = 0 \ \forall B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{A}\}$$

Proposition

$\mathbb{E}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} X$ est non vide si et seulement si $X \in \mathcal{L}^1(\mathcal{A}) + \mathcal{L}^o(\mathcal{B})$. Si $Z \in \mathbb{E}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} X$, alors $\mathbb{E}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} X = Z + \mathcal{N} \cap \mathcal{L}^o(\mathcal{B})$. Si $\bar{Z} \in \mathcal{L}^o(\mathcal{B})$ avec $\bar{Z}-X \in \mathcal{L}^2(\mathcal{A})$ et $\int_\Omega |\bar{Z}-X|^2 dP = \inf_Z \{\int_\Omega |Z-X|^2 dP : Z \in \mathcal{L}^o(\mathcal{B})$, $Z-X \in \mathcal{L}^2(\mathcal{A})\}$, alors $\bar{Z} \in \mathbb{E}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} X$. Enfin, dans le cas où $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ et $X \in \mathcal{L}^1(\mathcal{A})$ on a $\mathbb{E}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} X = \mathbb{E}^{\mathcal{B}} X$, espérance conditionnelle usuelle.

Démonstration

Si $\mathbb{E}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} X$ est non vide, on a $X = Z - (Z-X) \in \mathcal{L}^o(\mathcal{B}) + \mathcal{L}^1(\mathcal{A})$. Réciproquement, si $X = X' + X''$ où $X' \in \mathcal{L}^1(\mathcal{A})$ et $X'' \in \mathcal{L}^o(\mathcal{B})$, l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}^{\mathcal{B} \cap \mathcal{A}} X'$ existe et contient $Z' \in \mathcal{L}^1(\mathcal{B} \cap \mathcal{A})$ qui vérifie $\int_B X' = \int_B Z' \ \forall B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$. Alors $Z' + X'' \in \mathbb{E}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} X$.

Soit $Z, Z' \in \mathbb{E}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} X$. On a $Z-Z' \in \mathcal{L}^o(\mathcal{B})$ et $Z-Z' = Z-X - (Z'-X) \in \mathcal{L}^1(\mathcal{A})$, donc $Z-Z' \in \mathcal{L}^1(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$, avec $\int_B (Z-Z')dP = 0$, $\forall B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$, donc $Z-Z'$ est P-négligeable.

Soit $\bar{Z} \in \mathcal{L}^o(\mathcal{B})$ telle que $\bar{Z} - X \in \mathcal{L}^2(\mathcal{A})$ et $\int_\Omega |\bar{Z}-X|^2 dP \leq \int_\Omega |Z-X|^2 dP$, $\forall Z \in \mathcal{L}^o(\mathcal{B})$ telle que $Z-X \in \mathcal{L}^2(\mathcal{A})$. Appliquant cette inégalité à $Z = \bar{Z} + t\, 1_B$, $B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$, et faisant tendre t vers 0, on obtient $\int_B (\bar{Z}-X)\, dP = \int_\Omega (\bar{Z}-X)\, 1_B\, dP = 0$, d'où $\bar{Z} \in \mathbb{E}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} X$. □

Soit E un espace localement convexe séparé, E' son dual, N un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, et $\mathcal{H}$ un sous-espace semi-hilbertien de E d'espace nul N, c'est à dire un sous-espace vectoriel de E, contenant N, muni d'une semi-norme $||.||$ (vérifiant $||u|| = 0 \iff u \in N$) telle que $\mathcal{H}/N$ avec la norme $u+N \longmapsto ||u||$ soit hilbertien et que l'injection $\mathcal{H}/N \hookrightarrow E/N$ soit continue. Supposons en outre que $\mathcal{H}$ soit dense dans E. Alors $||\xi||_* = \sup \{\xi(u) : ||u|| \leq 1\}$ définit une norme sur N^o, orthogonal de N dans E' ($N^o = \{\xi \in E' : \xi(\nu) = 0 \ \forall\, \nu \in N\}$).

Soit Ω un ensemble (sans structure pour l'instant) et X une application $(\omega, \xi) \to X_\xi(\omega)$ de $\Omega \times E'$ dans R, linéaire en ξ. Soit encore $\xi_1, \ldots, \xi_n \in E'$ avec la propriété suivante : si $\nu \in N$ et $\xi_1(\nu) = \ldots = \xi_n(\nu) = 0$, alors $\nu = 0$. (On peut dire que $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ contient un

Soit enfin $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \mathbb{R}^\Omega$.

$\mathcal{A}$ la tribu sur Ω engendrée par les X_ξ, $\xi \in N^o$, et par $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$; et $\mathcal{B}$ la tribu sur Ω engendrée par $X_{\xi_1} + \varepsilon_1, \ldots, X_{\xi_n} + \varepsilon_n$. On voit que (sauf si $N = \{0\}$) $\mathcal{B}$ n'est pas une sous-tribu de $\mathcal{A}$.

Soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ ayant les propriétés suivantes :

1°) Pour chaque $\xi \in N^o$, X_ξ est une v.a. gaussienne centrée de variance $\mathbb{E}\, |X_\xi|^2 = \int_\Omega |X_\xi(\omega)|^2\, dP(\omega) = ||\xi||_*^2$.

2°) $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sont des v.a. gaussiennes centrées de variances respectives $\mathbb{E}|\varepsilon_i|^2 = \beta_i \geq 0$, c'est à dire de loi $N(0, \sqrt{\beta_i})$, deux à deux indépendantes, chacune étant indépendante de chaque X_ξ, $\xi \in N^o$.

Remarque

Il est possible de construire Ω, X, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ et P à partir de la donnée de E, N, $\mathcal{H}$ et $\beta_1, \ldots, \beta_n$ (≥ 0), de la manière suivante :

on considère la probabilité cylindrique gaussienne canonique sur l'espace hilbertien $\mathcal{H}/N$, elle se transforme en une probabilité sur E'^{*}/N par l'injection $\mathcal{H}/N \hookrightarrow E'^{*}/N$, puis en une probabilité μ sur E'^{*} (muni de la tribu engendrée par N^{o}) ; on peut alors prendre $\Omega = E'^{*} \times \mathbb{R}^n$ et $P = \mu \otimes N(0, \sqrt{\beta_1}) \otimes \dots \otimes N(0, \sqrt{\beta_n})$. Ensuite, on posera $\omega = (e'^{*}, z_1, \dots, z_n)$ et $X_\xi(\omega) = e'^{*}(\xi)$, $\varepsilon_i(\omega) = z_i$.

Nous allons nous intéresser aux "espérances conditionnelles".
$\mathbb{E}_{\mathcal{A}}(X_\xi \mid X_{\xi_1} + \varepsilon_1, \dots, X_{\xi_n} + \varepsilon_n) = \mathbb{E}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} X_\xi$, c'est à dire à estimer X en fonction des données $X_{\xi_i} + \varepsilon_i$, les ε_i représentant des erreurs d'observation.

Théorème

Pour chaque $\omega \in \Omega$, il existe $Z(\omega)$ unique $\in \mathcal{H}$ tel que :

$$||Z(\omega)||^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i} |X_{\xi_i}(\omega) + \varepsilon_i(\omega) - \xi_i(Z(\omega))|^2$$

$$\leq ||u||^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i} |X_{\xi_i}(\omega) + \varepsilon_i(\omega) - \xi_i(u)|^2$$

$\forall u \in \mathcal{H}$ (*). Ensuite, $\xi(Z) \in \mathbb{E}_{\mathcal{A}}(X_\xi \mid X_{\xi_1} + \varepsilon_1, \dots, X_{\xi_n} + \varepsilon_n)$, $\forall \xi \in E'$.

Démonstration

Il résulte de la théorie des fonctions-spline [6] que :

1°) pour tout $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe $\sigma \in \mathcal{H}$ unique vérifiant
$$||\sigma||^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i} |z_i - \xi_i(\sigma)|^2 \leq ||u||^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i} |z_i - \xi_i(u)|^2$$
$\forall u \in \mathcal{H}$ (existence et unicité de la fonction spline) ;

2°) pour tout $\xi \in E'$, il existe $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n) \in \mathbb{R}^n$ unique tel que

(*) Comme les β_i peuvent être nuls, on convient ici que $\frac{1}{0} = \infty$ et $\infty . 0 = 0$.

$\xi - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i \in N^o$ et $||\xi - \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i \xi_i||_* + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \bar{\lambda}_i^2 \leq ||\xi - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i||_*^2$ $+ \sum_{i=1}^{n} \beta_i \lambda_i^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$ tel que $\xi - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i \in N^o$ (existence et unicité de fonctionnelle approximante optimale au sens de Sard) ; enfin,

3°) on a $\sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i z_i = \xi(\sigma)$, c'est à dire qu'on obtient la fonctionnelle approximante optimale en appliquant la fonctionnelle à approcher à la fonction-spline. La démonstration n'est faite dans [6] que pour des β_i tous nuls ou tous > 0, mais ce n'est nullement essentiel. D'autre part, il faudrait munir $\mathcal{H}$ d'une structure hilbertienne : on peut prendre par exemple la norme $|||u|||^2 = ||u||^2 + \sum_{i=1}^{n} |\xi_i(u)|^2$; et remarquer qu'alors $E' \subset \mathcal{H}'$ puisque $\mathcal{H}$ est dense dans E.

Le théorème se présente comme une interprétation probabiliste de cette propriété. On remarque d'abord que

$$||\xi - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i||_*^2 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \lambda_i^2 = \mathbb{E}\, |X_\xi - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (X_{\xi_i} + \varepsilon_i)|^2$$

de sorte que Z vérifie $\mathbb{E}\, |X_\xi - \xi(Z)|^2 \leq \mathbb{E}\, |X_\xi - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (X_{\xi_i} + \varepsilon_i)|^2$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$ tel que $\xi - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i \in N^o$, ou encore

$$\mathbb{E}\, [(X_\xi - \xi(Z)) \,.\, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (X_{\xi_i} + \varepsilon_i)] = 0 ,$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i \in N^o$. Comme $\xi(Z) = \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i (X_{\xi_i} + \varepsilon_i)$, $\xi(Z)$ est $\mathcal{B}$-mesurable. D'autre part, le vecteur

$$(X_\xi - \xi(Z), \sum \alpha_i (X_{\xi_i} + \varepsilon_i)) = \left(X_{\xi - \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i \xi_i} - \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i \varepsilon_i , X_{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i \right)$$

est gaussien centré, donc l'orthogonalité de ses composantes implique leur indépendance : $X_\xi - \xi(Z)$ est indépendant des $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (X_{\xi_i} + \varepsilon_i)$ où $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i \in N^o$, <u>qui engendrent la tribu $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ </u>. On a donc pour tout $B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$: $\mathbb{E}\, [(X_\xi - \xi(Z))\, 1_B] = E\, (X_\xi - \xi(Z))\, .\, P(B) = 0$, c'est-à-dire $\int_B (X_\xi - \xi(Z))\, dP = 0$, autrement dit

$$\xi(Z) \in \mathbb{E}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} X_\xi = \mathbb{E}_{\mathcal{A}} (X_\xi \mid X_{\xi_1} + \varepsilon_1, \ldots, X_{\xi_n} + \varepsilon_n) .$$

Remarque

On voit que grâce au fait que "tout est gaussien", Z est la meilleure estimation (au sens de la moyenne quadratique) de X non seulement parmi les fonctions linéaires des données, mais même parmi toutes les fonctions des données.

Exemple 1 : Fonctions-spline polynomiales et primitives du mouvement brownien

Les fonctions-spline polynomiales (sur [0, 1] par exemple) de degré 2m-1, relatives à un ensemble fini A de "noeuds" $\in$ [0, 1], sont par définition les fonctions de la forme $\sigma(t) = \sum_{a \in A} \lambda_a (t-a)_+^{2m-1} + \nu(t)$ où $\nu \in P_{m-1}$ et $\sum_{a\in A} \lambda_a\, a^k = 0$ (k = 0, 1, ..., m-1). Elles sont caractérisées par la propriété variationnelle suivante : $\int_0^1 |\sigma^{(m)}|^2 \leq \int_0^1 |f^{(m)}|^2$ si $f = \sigma$ sur A. L'espace semi-hilbertien $\mathcal{H}$ est ici l'espace de Sobolev $H^m(0, 1)$ muni de la semi-norme $|v|_m = (\int_0^1 |v^{(m)}|^2)^{1/2}$. Le modèle probabiliste correspondant peut être construit de la façon suivante : on considère la mesure de Wiener W du mouvement brownien, sur C[0, 1], on la transporte sur $C^{m-1}[0, 1]$ par l'application "primitive (m-1)-ième" T^{m-1} où $Tf(t) = \int_0^t f(s)\,ds$, enfin on la restreint à la tribu engendrée par les $\xi \in C^{m-1}[0, 1]'$ orthogonales à P_{m-1}. On peut alors poser $\Omega = C^{m-1}[0, 1]$ (ou $C^{m-1}[0, 1] \times R^A$ s'il est nécessaire d'introduire des "erreurs" ε_a, $a \in A$) et $X_\xi(\omega) = \xi(\omega)$ pour $\xi \in C^{m-1}[0, 1]'$, avec $P = W_0(T^{m-1})^{-1}$ (éventuellement composée avec une probabilité gaussienne sur R^A). Le fait que l'espace semi-hilbertien associé soit $H^m(0, 1)$ muni de la semi-norme $|.|_m$ se déduit facilement de ceci, qui est bien connu : l'espace hilbertien autoreproduisant associé au mouvement brownien est $\{u \in H^1(0, 1) : u(0) = 0\}$ muni de $|u|_1 = (\int_0^1 |u'|^2)^{1/2}$

Exemple 2 : fonctions-spline homogènes sur $\mathbb{R}^d$ et champs aléatoires intrinsèques

Appelons fonctions-spline homogènes de degré θ (réel > 0), d'espace nul N, relatives à un ensemble fini $A \subset \mathbb{R}^d$, les fonctions de la forme :

$$(*) \qquad \sigma(t) = \sum_{a\in A} \lambda_a K_\theta(t-a) + \nu(t)$$

où $\nu \in N$ et $\sum \lambda_a p(a) = 0 \ \forall p \in N$, et on a posé $K_\theta(t) = |t|^\theta$ si θ n'est pas un entier pair, $K_{2k}(t) = |t|^{2k} \operatorname{Log} |t|$ pour $t \neq 0$, $K_{2k}(0) = 0$. On peut montrer [2] que si $N = P_{m-1}$ où $m < \frac{\theta}{2}$, et si A contient un sous-ensemble P_{m-1}-unisolvent, il existe une fonction unique de la forme (*) prenant des valeurs imposées aux points de A. Il s'agit bien de fonctions-spline : si on pose

$$\tilde{H}^s(\mathbb{R}^d) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) : \hat{u} \in L^1_{loc} \text{ et } \int_{\mathbb{R}^d} |\tau|^{2s} |\hat{u}(\tau)|^2 d\tau < \infty\}$$

(c'est un espace de Hilbert pour la norme $||u||_{0,s} = (\int_{\mathbb{R}^d} |\tau|^{2s} |\hat{u}(\tau)|^2 d\tau)^{1/2}$ du moins si $s < \frac{d}{2}$), et

$$D^{-m} \tilde{H}^s = \{u \in \mathcal{D}'(R^d) : D^\alpha u \in \tilde{H}^s(\mathbb{R}^d) \ \forall |\alpha| = m\}$$

avec la semi-norme $||u||_{m,s} = (\int_{\mathbb{R}^d} |\tau|^{2s} |(D^m u)\hat{}(\tau)|^2 d\tau)^{1/2}$, alors la fonction σ ci-dessus a la propriété variationnelle suivante :

$||\sigma||_{m,s} \leq ||f||_{m,s}$ pour toute fonction f prenant les mêmes valeurs que σ sur A (avec $s = \frac{\theta+d}{2} - m$).

Le procédé d'interpolation par des fonctions de la forme (*) commute avec les translations, rotations et changements d'échelle, d'où le nom de fonctions-spline homogènes. (Cela peut se voir soit sur la semi-norme $||\cdot||_{m,s}$, qui est multipliée par $|\lambda|^c$ si un changement de variable $t \to \lambda t$ est effectué ; ou sur la forme explicite (*), compte tenu de $|\lambda t|^\theta = |\lambda|^\theta |t|^\theta$ et $|\lambda t|^{2k} \operatorname{Log} |\lambda t| = |\lambda|^{2k} |t|^{2k} \operatorname{Log} |t|$ + un polynôme de degré $2k \leq 2m-1$).

Plus généralement, on peut considérer, au lieu d'un ensemble A de points de $\mathbb{R}^d$, des distributions à support compact $\mu_1, \dots, \mu_n$, et étudier les fonctions (ou distributions) de la forme $\sigma = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i * K_\theta + \nu$ où $\nu \in P_{m-1}$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i \in P^o_{m-1}$. Dans ce cas, on peut avoir $\theta \geq 0$. Si les μ_i appartiennent à l'espace de Sobolev $H^{-\frac{\theta+d}{2}}(\mathbb{R}^d)$, σ appartient à $H^{\frac{\theta+d}{2}}_{loc}$, et si de plus $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ contient un sous-ensemble P_{m-1}-unisolvent, alors le système linéaire obtenu en écrivant $\mu_i(\sigma) = z_i$ donné $(i = 1, \ldots, n)$ détermine $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et ν, et on a encore la propriété variationnelle $||\sigma||_{m,s} \leq ||f||_{m,s}$ pour toute $f \leq H^{\frac{\theta+d}{2}}_{loc}$ telle que $\mu_i(f) = \mu_i(\sigma)$ $(i = 1, \ldots, n)$, avec $s = \frac{\theta+d}{2} - m$.

Les modèles probabilistes associés sont des "fonctions (ou distributions) aléatoires intrinsèques" : des applications $(\omega, \mu) \longmapsto X_\mu(\omega)$ de $\Omega \times E'$ dans $\mathbb{R}$, linéaires en μ, avec E = un espace de distributions sur $\mathbb{R}^d$ (ici $E = H^{\frac{\theta+d}{2}}_{loc}$, $E' = H^{-\frac{\theta+d}{2}}_{comp}$) telles que les X_μ, $\mu \in P^o_{m-1}$ soient des v.a. (gaussiennes) centrées, de covariance $E(X_\mu X_\nu) = \langle \mu * K_\theta, \nu \rangle$.

Références

[1] J. DUCHON : Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces. Revue Française d'Automatique, Informatique, Recherche Opérationnelle, Série rouge (Analyse numérique), 10-12 (1976.

[2] J. DUCHON : Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in Sobolev spaces. A paraître dans Mehrdimensionale konstruktive Funktionentheorie, Lecture Notes, Springer (1977).

[3] G.S. KIMELDORF et G. WAHBA : A correspondence between Bayesian estimation on stochastic processes and smoothing by splines. Ann. Math. Stat. 41 (1970), 495-502.

[4] G.S. KIMELDORF et G. WAHBA : Spline functions and stochastic processes, Sankhyā, 132-2 (1970), 173-180.

[5] G.S. KIMELDORF et G. WAHBA : Some results on Tchebycheffia spline functions. J. Math. Anal. Appl. 33-1 (1971), 82-95.

[6] P.J. LAURENT : Approximation et optimisation. Hermann (1972)

[7] G. MATHERON : The intrinsic random functions and their applications, Advances in Applied Probability (1973).