

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

RENÉ DUJOLS

Le résultat de Karp-Myhill dans (1) est, en un sens, le meilleur possible

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 60, série *Mathématiques*, n° 13 (1976), p. 77-80

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1976__60_13_77_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE RESULTAT DE KARP-MYHILL DANS ⁽¹⁾ EST, EN UN SENS, LE MEILLEUR POSSIBLE

René DUJOLS

Université de CLERMONT-FD, France

§ 1. PRELIMINAIRES. Pour les définitions et notations récursives (non données ici) nous nous référons à l'ouvrage de H. Rogers jr. cité en ⁽²⁾. \leq_i désignera la i -réductibilité, \equiv_i l'équivalence récursive, \simeq l'isomorphisme (récursif), δ_a le domaine de a , ρ_a l'image de a .

On rappelle : $A \simeq A'$ via $f \Leftrightarrow f(A) = A'$

$A \leq_i A'$ via $a \Leftrightarrow a^{-1}(A') = A$

N est l'ensemble des entiers naturels, on pose $\bar{A} = N - A$ et $aN + i = \{ax + i / x \in N\}$.

Un isomorphisme est une permutation récursive de N , un isomorphisme partiel est une fonction (partielle) récursive.

§ 2. INTRODUCTION. Le théorème de l'appendice de ⁽¹⁾, dû à Karp et Myhill peut être réécrit sous la forme un peu plus générale suivante :

THEOREME 1. (Karp-Myhill) - Pour tout couple (a_1, a_2) d'isomorphismes partiels tels qu'il existe des recouvrements en parties disjointes (A_1, A_2) de $\delta_{a_1} \cup a_2$ et (B_1, B_2) de

$\rho_{a_1} \cup a_2$ vérifiant $\forall j \in \{1,2\} A_j \leq_i B_j$ via a_j on peut trouver uniformément un isomorphisme partiel θ tel que pour tous recouvrements en parties disjointes (A_1, A_2) et (B_1, B_2) dans la situation ci-dessus on a : $\forall j \in \{1,2\} A_j \leq_i B_j$ via θ .

Nous montrons ici

1) Le théorème n'est plus valide si on supprime l'hypothèse de recouvrement pour l'un des couples ;

2) Le théorème n'est plus valide si l'on considère des triplets et par suites des n -uples avec $n \geq 3$.

Pour établir ces deux points nous construisons deux contre-exemples sous des conditions aussi fortes que possible, i.e. nous construisons deux contre-exemples avec des isomorphismes.

§ 3. PROPOSITION 2. Il existe des isomorphismes f_1, f_2 et des ensembles A_1, A_2, B_1, B_2 vérifiant :

- 1) $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset$ et $A_1 \cup A_2 = N$
- 2) $\forall i \in \{1,2\} \quad A_i \simeq B_i$ via f_i
- 3) Pour aucun isomorphisme h on a : $\forall i \in \{1,2\} \quad A_i \simeq B_i$ via h .

DEMONSTRATION : Soit f_1, f_2 des isomorphismes vérifiant $f_1(2N) = 4N + 1$,
 $f_1(4N + 1) = 4N + 3, f_2(2N) = 4N$ et $f_2(4N + 3) = 4N + 2$.

Soit h_1, h_2, \dots une énumération de tous les isomorphismes h vérifiant : $h(2N) \cap (4N)$ est infini.

On construit par récurrence une suite infinie a_0, a_1, \dots

Etape 0. $a_0 = 0$.

Soit $U_n = h_n^{-1}(h_n(2N) \cap 4N)$

Etape $n + 1$: $a_{n+1} = \mu \times [x \in U_{n+1} \cdot \{0, \dots, a_n + 2\}]$

Soit $A_1 = \{a_0, \dots, a_n, \dots\} \cup (4N + 3), \quad A_2 = N - A_1,$

$B_1 = f_1(A_1), \quad B_2 = f_2(A_2).$

On a $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ et $A_1 \cup A_2 = N$ et $A_2 \cap 2N$ est infini.

$B_1 \subset (4N + 1) \cup (4N + 3)$ et $B_2 \subset 4N \cup (4N + 2)$ donc $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Supposons que h est un isomorphisme tel que $\forall i \in \{1,2\} \quad h(A_i) = B_i$.

On a $f_2(A_2 \cap N) \subset h(2N) \cap (4N)$, donc il existe $k \in N$ tel que $h_k = h$.

Par suite $h(a_k) = h_k(a_k)$ et $h(a_k) \in 4N$ ce qui contredit $h(A_1) = B_1$. Ce qui achève la démonstration de la proposition.

COROLLAIRE 2. Il existe \aleph_0 couples d'isomorphismes (f_1, f_2) tels que pour chaque couple (f_1, f_2) il existe 2^{\aleph_0} couples d'ensembles (A_1, A_2) et (B_1, B_2) satisfaisant aux conditions i), ii) et iii) de la proposition 1.

§ 4. PROPOSITION 3. Il existe des partitions $(A_1, A_2, A_3), (B_1, B_2, B_3)$ de N tel que

- i) $\forall i \in \{1,2,3\} \quad A_i \simeq B_i$
- ii) Pour aucun isomorphisme h on a : $\forall i \in \{1,2,3\} \quad A_i \simeq B_i$ via h .

DEMONSTRATION. Soit f_1, f_2, f_3 les isomorphismes définis par

$$f_1(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \notin 4N+3 \\ x-3 & \text{si } x \in 4N+3 \end{cases}$$

$$f_2(x) = x$$

$$f_3(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \notin 4N \\ x+3 & \text{si } x \in 4N \end{cases}$$

On dira : $f \neq h$ un peu partout si $\{x/f(x) \neq h(x) \text{ est infini}\}$.

Soit k_0, k_1, \dots une énumération de tous les isomorphismes k vérifiant $k \neq f_1$ un peu partout.

Soit l_0, l_1, \dots une énumération de tous les isomorphismes l vérifiant $l \neq f_3$ un peu partout.

Par récurrence, nous construisons trois chaînes croissantes d'ensembles finis .

$$X_0 \subset X_1 \dots, Y_0 \subset Y_1 \dots, Z_0 \subset Z_1 \dots \text{ telles que pour tout } n$$

$$U_n = X_n \cup Y_n \cup Z_n = f_1(X_n) \cup f_2(Y_n) \cup f_3(Z_n).$$

Etape 0 : $X_0 = Y_0 = Z_0 = \emptyset$.

Etape $2s+1$: Il existe $a \notin U_{2s}$ tel que $k_s(a) \neq f_1(a)$.

$$\text{On pose } X_{2s+1} = X_{2s} \cup \{a\}$$

$$Z_{2s+1} = \begin{cases} Z_{2s} \cup \{a+1\} & \text{si } a \notin 4N+3 \\ Z_{2s} \cup \{a-3\} & \text{si } a \in 4N+3 \end{cases}$$

$$\text{Soit } u = \text{Max } \{4i+3/4i \leq a \leq 4i+3 \text{ ou } 4i \leq k_s(a) \leq 4i+3\}$$

$$Y_{2s+1} = \{0, \dots, u\} - (X_{2s+1} \cup Z_{2s+1}).$$

Etape $2s+2$: Il existe $c \notin U_{2s+1}$ tel que $l_s(c) \neq f_3(c)$

$$\text{On pose : } Z_{2s+2} = Z_{2s+1} \cup \{c\}$$

$$X_{2s+2} = \begin{cases} X_{2s+1} \cup \{c-1\} & \text{si } c \notin 4N \\ X_{2s+1} \cup \{c+3\} & \text{si } c \in 4N \end{cases}$$

$$\text{Soit } v = \text{Max } \{4i+3/4i \leq c \leq 4i+3 \text{ ou } 4i \leq l_s(c) \leq 4i+3\}$$

$$Y_{2s+2} = \{0, \dots, v\} - (X_{2s+2} \cup Z_{2s+2})$$

$$\text{Soit } A_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n, \quad A_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n, \quad A_3 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n.$$

$$B_1 = f_1(A_1), \quad B_2 = f_2(A_2), \quad B_3 = f_3(A_3).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n est un segment initial de \mathbb{N} .

(A_1, A_2, A_3) est une partition de N .

Par récurrence sur n on vérifie :

- i) Les ensembles $f_1(X_n), f_2(Y_n), f_3(Z_n)$ sont disjoints deux à deux.
- ii) $U_n = f_1(X_n) \cup f_2(Y_n) \cup f_3(Z_n)$.

Par suite (B_1, B_2, B_3) est une partition de N .

Supposons que h est un isomorphisme vérifiant

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} \quad h(A_i) = B_i.$$

1) Si $h \neq f_1$ un peu partout, $h = k_s$ pour un entier s . A l'étape $2s + 1$, la récurrence introduit un élément a vérifiant :

$$a \in A_1 \text{ et } k_s(a) \notin B_1. \text{ Ce qui contredit } h(A_1) = B_1.$$

2) Sinon $h \neq f_3$ un peu partout, car $f_1 \neq f_3$ un peu partout. Alors $h = l_s$ pour un $s \in N$.

A l'étape $2s + 2$, la récurrence introduit un élément c vérifiant :

$$c \in A_3 \text{ et } l_s(c) \notin B_3. \text{ Ce qui contredit } h(A_3) = B_3.$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition.

La proposition précédente se généralise clairement au cas des n -uples avec $n \geq 3$.

COROLLAIRE 4. Il existe \aleph_0 n -uples d'isomorphismes (f_1, \dots, f_n) tel que pour chaque n -uple (f_1, \dots, f_n) il existe 2^{\aleph_0} partitions (A_1, \dots, A_n) et (B_1, \dots, B_n) de N vérifiant

- i) $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad A_i \simeq B_i$
- ii) Pour aucun isomorphisme h on a : $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad A_i \simeq B_i$ via h .

BIBLIOGRAPHIE

- (1) J.C.E. DEKKER et J. MYHILL, Recursive Equivalence Types, University of California publications in mathematics, n.s., 3, 1960, p. 67-213.
- (2) H. ROGERS Jr., Theory of Recursive functions and Effective Computability, Mc Graw-Hill Book Company, 1967.