ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

GABRIEL PICAVET

Autour des idéaux premiers de Goldman d'un anneau commutatif

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 57, série *Mathématiques*, n° 11 (1975), p. 73-90

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1975__57_11_73_0>

AUTOUR DES IDEAUX PREMIERS DE GOLDMAN D'UN ANNEAU COMMUTATIF

Gabriel PICAVET

Dans ce qui suit, les anneaux sont commutatifs et unitaires. Les homomorphismes d'anneaux conservent l'unité. Les notations ou notions, non précisées, sont celles de [1], [2], [5].

On dit qu'un idéal premier d'un anneau A est de Goldman (ou plus rapidement, est un G-idéal) s'il est le contracté dans A d'un idéal maximal de A [X] (cf. [8]). Un anneau intègre est dit de Goldman (ou G-anneau) si (0) est un G-idéal de cet anneau.

Enfin on désigne, dans la suite, par Gold(A) l'ensemble des G-idéaux d'un anneau A, et par Max(A) l'ensemble des idéaux maximaux de A.

La structure des G-anneaux noethériens est connue : un anneau noethérien intègre est un G-anneau si, et seulement si, il est semi-local et de dimension inférieure ou égale à 1. Par contre, dans le cas général, une conjecture raisonnable manque totalement, ainsi que le fait remarquer [8].

La suite du texte est consacrée à une étude des propriétés topologiques de Gold(A). Il est fait, plus spécialement, une étude des anneaux A tels que Gold(A) = Spec(A), ceci en vue de faire une approche du problème cité plus haut. La plupart des résultats obtenus sont de nature topologique.

Rappelons que la catégorie *Spectr* des espaces spectraux est la sous-catégorie des espaces topologiques suivante : les espaces spectraux sont les espaces topologiques vérifiant l'axiome T_0 de séparation, quasi-compacts, munis d'une base d'ouverts quasi-compacts et tels que tout fermé irréductible possède un point générique ; les applications spectrales sont les applications continues rétrocompactes (l'image réciproque de tout ouvert quasi-compact est un ouvert quasi-compact). Le foncteur Spec de la catégorie des anneaux commutatifs et unitaires dans la catégorie des espaces spectraux est inversible (voir [6] pour plus de détails). Signalons que les parties I, II, V contiennent les démonstrations d'une note proposée aux C. R. A. S. (Paris).

I - PROPRIETES TOPOLOGIQUES DE GOLD(A)

Sauf mention du contraire, les spectres des anneaux considérés sont munis de la topologie de Zariski.

On trouve dans [7], page 90, le résultat fondamental suivant :

Lemme 1 - Soit $f : A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux de type fini. Pour toute paire (P', a') où $P' \in \mathrm{Spec}(A')$ et $a' \in A' - P'$, notant par P l'idéal ${}^a f(P')$, il existe $a \in A\text{-}P$ tel que $V(P) \cap D(a) \subset {}^a f(V(P') \cap D(a'))$.

On a alors une première caractérisation d'un G-idéal :

Proposition 1 - Soit P un idéal premier d'un anneau A, chacune des trois conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que P soit un G-idéal :

a) $\{P\}$ est une partie localement fermée de Spec(A)

b) $V(P) - \{P\}$ est une partie fermée de Spec(A)

c) $V(P) - \{P\}$ est une partie proconstructible de Spec(A)

Preuve :

Soient P un G-idéal et P' l'idéal maximal de $A[X]$ au-dessus de P, il suffit d'appliquer le lemme 1 à la paire $(P', 1)$ pour obtenir a).

Si $\{P\}$ est localement fermée, on peut supposer que $\{P\} = V(P) \cap D(a)$ où $a \in A$. Soit alors l'adhérence de $V(P) - \{P\}$ qui n'est autre que $V(\cap Q)$ où $\cap Q$ désigne l'intersection des éléments de $V(P) - \{P\}$. Or P ne peut appartenir à $V(\cap Q)$, sinon $P = \cap Q$ entraîne $P = Q$ pour au moins un élément Q de $V(P) - \{P\}$. Il en résulte $V(P) - \{P\} = V(\cap Q)$ et b) est démontrée.

Il est clair que b) entraîne c).

Supposons $V(P) - \{P\}$ proconstructible et considérons g(P) le générisé de P (i.e. $\mathrm{Spec}(A_P)$). De la relation $g(P) \cap V(P) - \{P\} = \emptyset$ et du fait que $g(P) = \bigcap_{f \notin P} D(f)$ on déduit par compacité de la topologie constructible qu'il existe une partie finie $\{f_1, \dots, f_n\}$ de A - P telle que $D(f_1 \dots f_n) \cap V(P) - \{P\} = \emptyset$. On a ainsi prouvé a).

Supposons que $\{P\}$ soit une partie localement fermée. On sait que dans tout anneau de polynômes, le nilradical et le radical de Jacobson sont confondus. L'anneau $A[X]/P[X]$ étant isomorphe à $A/P[X]$, on en déduit que $P[X] = \cap M_i$ où M_i désigne un idéal maximal de $A[X]$. Par contraction dans A on obtient $P = \cap P_i$ où P_i est le contracté dans A de M_i.

Mais il existe un élément a de A tel que $\{P\} = V(P) \cap D(a)$: on en déduit que P est égal à l'un des P_i, c'est-à-dire P est un G-idéal.

Proposition 2 - Un idéal premier P d'un anneau A est un G-idéal si et seulement si V(P) est un fermé fortement irréductible de Spec(A).

Rappelons qu'un fermé F d'un espace topologique X est dit fortement irréductible si pour toute famille $\{F_i\}_{i \in I}$ de fermés de X, la relation $F = \overline{\cup F_i}$ entraîne $F = F_i$ pour au moins un fermé F_i.

Preuve :

Supposons que $V(P) - \{P\}$ soit fermé et que l'on ait $V(P) = \overline{\cup F_i}$ où $\{F_i\}_{i \in I}$ est une famille de fermés de Spec(A). Si tout fermé F_i vérifie $F_i < V(P)$, où $<$ désigne une inclusion stricte, on a aussi $F_i \subset V(P) - \{P\}$ pour tout i. On obtient alors la contradiction $\overline{\cup F_i} \subset V(P) - \{P\} < V(P)$. D'où V(P) est égal à l'un des F_i.

Supposons V(P) fortement irréductible et $P = \cap P_i$, où $\{P_i\}_{i \in I}$ est une famille d'idéaux premiers de A. La relation $V(\cap P_i) = \overline{\cup V(P_i)}$ entraîne $P = P_i$ pour au moins un i. D'autre part, il a été montré dans le cours de la preuve de la proposition 1 que tout idéal premier P est intersection de G-idéaux P_i. Il résulte de ce qui précède que P est un G-idéal.

Corollaire : Un idéal premier d'un anneau A est un G-idéal si, et seulement si, il n'est pas intersection d'idéaux premiers de A strictement plus grands que lui.
Il est bien connu (cf [8]) que l'égalité Max(A) = Gold(A) caractérise les anneaux de Jacobson.
D'autre part, les anneaux A de Jacobson peuvent être caractérisés par : Max(A) est très dense dans Spec(A) (cf [5] pages 62-67).
Dans cet ordre d'idées on a la proposition :

Proposition 3 - Pour tout anneau A, le sous-espace Gold(A) est très dense dans Spec(A) et est la plus petite partie très dense de Spec(A).

Preuve : On a déjà remarqué que tout idéal premier est intersection de G-idéaux. Il en résulte facilement que pour toute partie fermée F de Spec(A) on a : $F = \overline{F \cap \mathrm{Gold}(A)}$, ce qui est une des définitions possibles pour les sous-espaces très denses. Soit X une partie très dense de Spec(A) et soit P un G-idéal, puisque $\{P\}$ est localement fermée, on a $\{P\} \cap X \neq \emptyset$ et P appartient à X.

Remarques :
Pour tout anneau A, le générisé de Gold(A) est Spec(A) : tout idéal premier P de A est le contracté de l'idéal premier P[X] de A[X] et P[X] est contenu dans au moins un idéal maximal. De plus Gold(A) est quasi-compact : il est l'image du spectre maximal de A[X].

II - ANNEAUX DONT TOUT IDEAL PREMIER EST UN G-IDEAL

Proposition 1 - Toute partie X du spectre d'un anneau A qui est rétrocompacte et satisfait $\complement\,\mathrm{Gold}(A) \subset X$ est proconstructible.

Preuve : Soit P un élément de Spec(A) - X, puisqu'il appartient à Gold(A), on peut écrire $\{P\} = V(P) \cap D(a)$ où $a \in A$. Posons $C = X \cap D(a)$, alors C est quasi-compact, en effet, X est rétrocompact. Mais $C \cap V(P) = \emptyset$ montre que P n'appartient pas au générisé de C. Par suite, C étant quasi-compact, il existe un ouvert O quasi-compact tel que $C \subset O$ et $P \notin O$. On en déduit que $P \in D(a) \cap \complement O$ et que $D(a) \cap \complement O \subset \complement X$. Ceci prouve que X est proconstructible.

Proposition 2 - Soit A un anneau et X une partie de Spec(A), stable par spécialisation, vérifiant : toute partie de X rétrocompacte est proconstructible ; alors X est contenue dans Gold(A).

Preuve :

Soit P un élément de X, on va montrer que $V(P) - \{P\}$ est rétrocompact donc proconstructible.

Soient donc O un ouvert quasi-compact et $\{O_i\}_{i \in I}$ une famille d'ouverts de Spec(A) tels que $V(P) - \{P\} \cap O \subset \cup\ O_i$. On peut supposer que $P \in O$, sinon il est clair qu'on peut extraire de $\{O_i\}$ une famille finie recouvrant $O \cap V(P) - \{P\}$.

Si pour tout ouvert O_i l'ensemble $O \cap O_i \cap V(P) - \{P\}$ est vide, il en est de même pour $O \cap V(P) - \{P\}$. Dans ce cas, $\{P\} = V(P) \cap O$ montre que P est un G-idéal. Si par contre il existe un ouvert O_i tel que $O \cap O_i \cap V(P) - \{P\} \neq \emptyset$, alors $V(P) \cap O$ est contenu dans $\cup\ O_i$, et, puisque V(P) est rétrocompact, on peut extraire un recouvrement fini de $O \cap V(P) - \{P\}$.

Ces deux dernières propositions donnent le résultat principal du paragraphe.

Proposition 3 - Soit A un anneau, alors Gold(A) est égal à Spec(A) si et seulement si pour toute partie X de Spec(A) : X est proconstructible équivaut à X est rétrocompacte.

Preuve : Si Spec(A) = Gold(A), on applique la proposition 1 en notant qu'il est vrai, sans hypothèse, qu'une partie proconstructible est rétrocompacte.
Si toute partie rétrocompacte est proconstructible on applique la proposition 2.

Corollaire - Soit A un anneau dont le spectre est noethérien, alors Gold(A) est égal à Spec(A) si et seulement si Spec(A) est fini.

Preuve : Si Spec(A) est un espace noethérien, toute partie de Spec(A) est rétrocompacte et donc proconstructible si Spec(A) = Gold(A). Dans ce cas la topologie constructible sur Spec(A) est discrète et, comme elle est compacte, Spec(A) est un ensemble fini. Il est évident que si Spec(A) est fini, aucun élément de Spec(A) ne peut être l'intersection d'idéaux premiers strictement plus grands que lui.

Proposition 4 - Soit A un anneau, pour que Spec(A) = Gold(A) il est nécessaire et suffisant qu'aucune partie propre de Spec(A) ne soit très dense dans Spec(A).

Preuve : Si Spec(A) = Gold(A), la proposition 3 de I montre qu'une partie propre de Spec(A) ne peut être très dense dans Spec(A). Réciproquement, supposons que X $<$ Spec(A) entraîne X n'est pas très dense dans Spec(A). Soit P un élément de Spec(A), alors Spec(A) - $\{P\}$ n'est pas très dense dans Spec(A). Il existe donc une partie localement fermée Z, non vide, de Spec(A) telle que Z $\cap$ Spec(A) - $\{P\}$ soit vide. Ceci prouve que Spec(A) = Gold(A).

Remarques : Les anneaux A tels que Gold(A) = Spec(A) sont une généralisation des anneaux absolument plats : un anneau absolument plat peut être caractérisé par : A est réduit et tout point de Spec(A) est fermé. On peut à ce sujet se poser quelques questions.

1) Un anneau A, tel que Gold(A) = Spec(A), est-il de dimension de Krull finie ?

Ce n'est pas le cas, même si A est intègre. Soit en effet un anneau de valuation dont le spectre est constitué par une chaîne dénombrable d'idéaux premiers :

$$(0) = P_0 \subset P_1 \subset \ldots\ldots\ldots\ldots \subset P_n \subset \ldots\ldots\ldots$$

et d'un idéal maximal M = $\cup P_i$ et telle que P_i soit successeur immédiat de P_{i-1}.

Si P_i est un idéal premier non maximal, on a donc $V(P_i) - \{P_i\} = V(P_{i+1})$ et d'autre part, M est un point fermé. Donc pour un tel anneau Spec(A) = Gold(A).

2) Les anneaux dont tout idéal premier est un G-idéal ne peuvent être caractérisés par une propriété du premier ordre, comme c'est le cas pour les anneaux absolument plats. Considérons l'exemple suivant qui m'a été communiqué par M. Haddad. Soit A = $\mathbb{Z}_{(p)}$ le localisé de $\mathbb{Z}$ en un idéal premier non nul (p). L'ultraproduit B = $A^{\mathbb{N}}/_U$ où U est un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$ est un anneau intègre. L'anneau A satisfait Gold(A) = Spec(A), mais pour B on a la relation : $(0) = \bigcap_{\substack{P \in \mathrm{Spec}B \\ P \neq 0}} P$, ce qui montre que (0) n'appartient pas à Gold(B).

Pour prouver que (0) est dans B l'intersection des idéaux premiers non nuls, il suffira de montrer que, pour tout $b \in B - (0)$, il existe un idéal premier $P \neq 0$ de B tel que $b \notin P$. Soit v la valuation de A, on fait la remarque suivante : soient $x = \overline{(x_n)}$ et $y = \overline{(y_n)}$ des éléments de B, on a $y \in Bx$ si et seulement si $\{n \in \mathbb{N} / v(x_n) \leq v(y_n)\} \in U$. Si b est un élément non nul de B, il est facile de montrer qu'il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $b = \overline{(a_n)}$ et $v(a_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On construit alors une suite $\{x^{(k)}\} \subset A^{\mathbb{N}}$ en posant :

$$x_n^{(k)} = 1 \quad \text{si} \quad n < k \quad \text{et} \quad x_n^{(k)} = p^{(v(a_n)+1)(n-k)!} \quad \text{si } n \geq k.$$

On montre alors que la suite d'idéaux $Bx^{(k)}$ est croissante. La réunion P des idéaux de cette suite est un idéal P qui ne contient pas b, parce que l'ultrafiltre U est non trivial. De plus, P est un idéal premier. Soient en effet $x \notin P$ et $y \notin P$; pour tout entier $k \geq 0$, on a

$\{n \in \mathbb{N} / v(x_n) < v(x_n^{(k)})\} \in U$ et de même $\{n \in \mathbb{N} / v(y_n) < v(x_n^{(k)})\} \in U$.

Mais $v(x_n y_n) = v(x_n) + v(y_n)$ et de plus on a $2v(x_n^{(k+1)}) < v(x_n^{(k)})$ pour k fixé et n assez grand. Il en résulte que $\{n \in \mathbb{N} / v(x_n y_n) < v(x_n^{(k)})\} \in U$ et par suite $xy \notin P$, ce qui achève la preuve.

Cet exemple montre aussi qu'un anneau de Goldman ne peut être caractérisé par une propriété du premier ordre.

3) Soit un anneau A tel que Gold(A) = Spec(A) et soit X une partie totalement ordonnée de Spec(A). Alors X possède un plus petit élément : en effet $\bigcap_{P \in X} P$ est un idéal premier Q et puisque Spec(A) = Gold(A), Q est un élément de X. On a ainsi prouvé que Spec(A) est un ensemble partiellement bien ordonné, c'est-à-dire toute partie totalement ordonnée est bien ordonnée. En particulier, Spec(A) est un ensemble ordonné qui vérifie la condition minimale. On déduit de ces remarques la proposition suivante :

Proposition 5 - Un anneau de valuation vérifie Gold(A) = Spec(A) si et seulement si tout idéal premier P de A, non maximal, a un successeur immédiat.

Preuve : Supposons que tout idéal premier soit un G-idéal et soit P un idéal premier non maximal. L'ensemble $V(P) - \{P\}$, étant non vide, a un plus petit élément qui est successeur immédiat de P. D'autre part, si tout idéal premier P, non maximal, a un successeur immédiat, il est clair que $V(P) - \{P\}$ est un fermé.

III - LA TOPOLOGIE DE GOLDMAN SUR LE SPECTRE D'UN ANNEAU

Une façon d'exprimer qu'un idéal premier P d'un anneau A est un G-idéal est la suivante : si P est intersection d'une famille d'idéaux premiers, alors P est égal à au moins un des idéaux premiers de l'intersection.

Un procédé systématique pour étudier cette propriété semble être le suivant :

Définition : Soit X une partie du spectre d'un anneau A, on dira que l'élément P de Spec(A) est G-adhérent à X si P est une intersection d'éléments de X.

L'ensemble des éléments de Spec(A) qui sont G-adhérents à X sera noté par $\overline{X}^G$.

Il est facile de montrer que $P \in \overline{X}^G$ si et seulement si $P \in \overline{X \cap V(P)}$, ou encore $V(P) = \overline{X \cap V(P)}$.

L'opération $X \longrightarrow \overline{X}^G$ est une fermeture de Kuratowski, elle permet donc de définir sur Spec(A) une topologie dite topologie de Goldman ou G-topologie.

Toute partie de Spec(A), stable par générisation, est G-fermée. Si $\overline{X}^C$ désigne l'adhérence constructible d'une partie X de Spec(A), on a la suite d'inclusions :

$$X \subset \overline{X}^G \subset \overline{X}^C \subset \overline{X}$$

La G-topologie, étant plus fine que la topologie constructible, est donc séparée.

Enfin une base des ouverts de la G-topologie est fournie par les parties localement fermées de Spec(A). Pour démontrer ce dernier point, on peut déjà voir qu'une partie localement fermée est G-ouverte. De plus, soit 0 un G-ouvert et soit P un élément de 0 ; puisque $P \notin \complement\, 0$, il existe $a \in A$ tel que $P \in D(a)$ et satisfaisant $\complement\, 0 \cap V(P) \cap D(a) = \emptyset$. Il en résulte que $P \in V(P) \cap D(a) \subset 0$, ce qui termine la preuve.

Proposition 1 - Une partie X de Spec(A) est contenue dans Gold(A) si et seulement si tout élément de X est isolé pour la G-topologie. En particulier Spec(A) = Gold(A) si et seulement si la G-topologie sur Spec(A) est discrète.

Preuve : Soit P un élément de X, isolé pour la G-topologie, il existe deux ouverts 0 et U tels que $\{P\} = 0 \cap \complement\, U$, et P est donc un G-idéal.

Si P est un G-idéal, alors $\{P\}$ est une partie localement fermée. Il en résulte que P est G-isolé.

Proposition 2 - Une partie X de Spec(A) est G-fermée si et seulement si tout fermé irréductible du sous-espace X a un point générique.

Preuve :

Soit $F = \overline{F} \cap X$ un fermé irréductible d'une partie G-fermée X de Spec(A), alors $\overline{F}$ est irréductible dans Spec(A). Soit P le point générique de $\overline{F}$, c'est-à-dire $\overline{F} = V(P)$. Supposons que $P \notin F$, dans ce cas $P \notin \overline{X}^G$ et il existe un ouvert 0 contenant P et tel que $X \cap V(P) \cap 0 = \emptyset$; on en déduit que $F \cap 0 = \emptyset$, ou encore $P \notin \overline{F}$, ce qui est absurde. Ainsi $P \in F$ et F possède un point générique.

Réciproquement, soit X une partie de Spec(A) dont tout fermé irréductible possède un point générique. Posons $Y = X \cap V(P)$ pour $P \in \overline{X}^G$; de $V(P) = \overline{V(P) \cap X}$ on déduit que Y est une partie irréductible dans X. Elle a donc un point générique $Q \in Y$ tel que $Y = X \cap V(Q)$. La relation $X \cap V(P) = X \cap V(Q)$ entraîne $P = Q$, ainsi $P \in X$. Donc X est un G-fermé.

On sait, d'après [6], qu'une partie X de Spec(A) est proconstructible si et seulement si elle est sous-objet spectral de Spec(A).

Corollaire - Une partie X de Spec(A) est proconstructible si, et seulement si, elle est rétrocompacte et G-fermée.

Preuve : Il suffit de remarquer qu'une partie X est sous-objet spectral si et seulement si X est rétrocompacte et tout fermé irréductible de X a un point générique.

On obtient ici, par une autre voie, la proposition 3 de II. En effet si Spec(A) = Gold(A), alors toute partie de Spec(A) est G-fermée.

Proposition 3 - Soit A un anneau, la G-adhérence de Gold(A) est Spec(A) et toute partie de Spec(A) qui est G-dense contient Gold(A).

Preuve : Toute partie localement fermée de Spec(A) contient un G-idéal ([5], page 308). De plus un ouvert de la G-topologie est une réunion de parties localement fermées, d'où la première assertion. La deuxième est évidente, puisque tout élément de Gold(A) est isolé pour la G-topologie.

Remarque : La proposition précédente permet de voir que Gold(A) est l'image d'un spectre d'anneau si et seulement si Spec(A) = Gold(A).
En effet, s'il existe un homomorphisme d'anneaux $f : A \longrightarrow A'$ tel que ${}^a f(\mathrm{Spec}(A')) = \mathrm{Gold}(A)$, alors Gold(A) est proconstructible et la proposition précédente montre que l'adhérence constructible de Gold(A) est Spec(A).

Corollaire : Pour tout anneau A on a : $\mathrm{Card}(\mathrm{Spec}(A)) \leq 2^{2^{\mathrm{Card}(\mathrm{Gold}(A))}}$.

Preuve : Spec(A) est séparé pour la G-topologie et Gold(A) est G-dense dans Spec(A). On peut alors appliquer l'exercice de [2]page 157, n° 6.

Proposition 4 - La G-topologie sur Spec(A) est identique à la topologie constructible sur Spec(A) si et seulement si la topologie de Zariski sur Spec(A) est noethérienne.

Preuve : Si Spec(A) est un espace noethérien, tout ouvert est quasi-compact et, dans ce cas, les ouverts de la base de la G-topologie sont ind-constructibles. Les deux topologies sont donc identiques.

Réciproquement, supposons que la G-topologie et la topologie constructible soient identiques, un ouvert de Spec(A), étant G-fermé, est proconstructible donc quasi-compact.

Remarques :

* Ce dernier résultat permet de retrouver certaines propositions de [5], comme la suivante : soit A un anneau de spectre noethérien, une partie E de Spec(A) est ind-constructible si, et seulement si, pour tout $P \in E$, il existe un ouvert 0 de Spec(A) tel que $V(P) \cap 0 \subset E$ et $P \in 0$. En effet, l'ensemble des parties $V(P) \cap 0$, où 0 parcourt l'ensemble des ouverts contenant P, est un système fondamental de voisinages de P pour la G-topologie.

* Soit Jac(A) la G-adhérence du spectre maximal d'un anneau A. Un élément de Jac(A) est donc une intersection d'idéaux maximaux de A. On peut appeler Jac(A) le sous-espace de Jacobson de Spec(A) puisque c'est en fait un espace de Jacobson (cf [5]déjà cité). Le corollaire de la proposition 2 montre que Jac(A) est proconstructible si et seulement si Jac(A) est rétrocompact.

Comme application de la G-topologie on a la proposition suivante :

Proposition 5 - Les seuls épimorphismes de la catégorie *Spectr* sont les surjections.

Preuve : D'après [6], un épimorphisme de *Spectr* provient d'un homomorphisme d'anneaux $f : A \longrightarrow A'$. Posons $X = {}^a f(\mathrm{Spec}(A'))$ et supposons $X \neq \mathrm{Spec}(A)$. Il existe alors $P \in \mathrm{Spec}(A) - \overline{X}^G$, c'est-à-dire que pour un ouvert 0 contenant P on a $X \cap V(P) \cap 0$ vide. On peut supposer 0 de la forme D(g) où $g \in A$ et comme de plus $V(P) = \bigcap_{a \in P} V(a)$, on en déduit que $X \cap D(g) \cap V(a_1) \cap \ldots\ldots \cap V(a_n) = \emptyset$ pour une partie finie $\{a_1,\ldots, a_n\}$ de P ; en effet X est proconstructible. Il existe alors deux ouverts quasi-compacts 0_1 et 0_2 tels que $X \cap 0_1 = X \cap 0_2$ et satisfaisant $P \in 0_1 - 0_2$. Considérons $W = \{0, 1\}$ muni de la topologie définie par ses ouverts : $\emptyset$, $\{0\}$, $\{0, 1\}$. Alors W est un espace spectral et ses ouverts sont quasi-compacts. On définit deux applications φ_1 et φ_2 de Spec(A) dans W par $\varphi_i(O_i) = \{0\}$ et $\varphi_i(\complement O_i) = \{1\}$ pour $i = 1, 2$. Il est clair que φ_i est spectrale ; d'autre part $\varphi_1 \circ {}^a f = \varphi_2 \circ {}^a f$ et $\varphi_1(P) \neq \varphi_2(P)$ conduit à une contradiction. Il en résulte que $X = \text{Spec}(A)$.

IV - HOMOMORPHISMES D'ANNEAUX ET G-IDEAUX

L'application ${}^af$, associée à un homomorphisme d'anneaux f, est continue pour la G-topologie. Toutefois ${}^af$ n'est pas toujours fermée pour la G-topologie, contrairement à ce qui se passe pour la topologie constructible. Soit en effet $f : A \to T(A)$ l'épimorphisme canonique d'un anneau A dans son anneau absolument plat universel (cf [10]) et supposons A noethérien de spectre infini. L'application ${}^af$ n'est pas G-fermée. Supposons le contraire et soit X' une partie G-fermée de Spec(T(A)), puisque ${}^af$ est injective on a $X' = {}^af^{-1}({}^af(X'))$. La proposition 4 de III montre que ${}^af(X')$, étant G-fermé, est proconstructible ; il en est donc de même pour X'. Toujours d'après la proposition 4, on voit que Spec(T(A)) est noethérien et a donc un nombre fini de composantes irréductibles. En particulier Spec(T(A)) est fini, en contradiction avec la bijectivité de ${}^af$.

L'application ${}^af$ est cependant G-fermée pour les homomorphismes d'anneaux $f : A \to A'$ vérifiant : $\forall\, a' \in A'$, il existe $a \in A$ et un élément inversible $u \in A'$ tels que $a' = uf(a)$. Il suffit de voir que si $P \in \mathrm{Spec}(A)$ et si $P = f^{-1}(P')$ où P' est un idéal de A', alors P' est un idéal premier de A'. Les surjections et localisations en une partie multiplicative donnent donc des applications G-fermées.

Remarquons au passage que pour tout homomorphisme d'anneaux $f : A \to A'$ tel que ${}^af$ soit injectif on a ${}^af^{-1}(\mathrm{Gold}(A)) \subset \mathrm{Gold}(A')$. L'inclusion en sens contraire n'est pas vraie en général, ainsi que le montre l'exemple $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{(p)}$ où (p) est un idéal premier non nul de $\mathbb{Z}$.

On est ainsi conduit à la définition de [4] :

Définition - On dit qu'un homomorphisme d'anneaux $f : A \to A'$ est un G-morphisme si ${}^af(\mathrm{Gold}(A')) \subset \mathrm{Gold}(A)$.

Il est un cas évident où un homomorphisme d'anneaux f est un G-morphisme : lorsque ${}^af$ est ouverte pour la G-topologie ; en effet un G-idéal est isolé pour la G-topologie.

On a la remarque suivante, utile pour la suite : soit $\varphi : X \to Y$ une application continue d'espaces topologiques, l'application φ est ouverte si et seulement si pour toute partie Z de Y, on a : $\overline{\varphi^{-1}(Z)} = \varphi^{-1}(\overline{Z})$, ou encore $\varphi^{-1}(\overline{Z}) \subset \overline{\varphi^{-1}(Z)}$. Ce résultat se traduit de la façon suivante pour une application ${}^af$ associée à un homomorphisme d'anneaux $f : A \to A'$: l'application ${}^af$ est G-ouverte si et seulement si pour toute partie Z de Spec(A) et tout idéal premier P' de A' tel que ${}^af(P') = \bigcap_{Q \in Z} Q$ il existe une partie Z' de $\mathrm{Spec}(A')$ telle que $P' = \bigcap_{Q' \in Z'} Q'$ et satisfaisant ${}^af(Z') \subset Z$.

Proposition 1 - Soit $f : A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux, f est un G-morphisme dans chacun des cas suivants :

a) f est de type fini

b) ${}^af$ est fermée (i. e. satisfait le «Going Up») et pour tout $P \in \mathrm{Spec}(A)$, les éléments de la fibre ${}^af^{-1}(P)$ sont incomparables pour la relation d'inclusion (ce qui se produit lorsque ${}^af$ est injective).

c) ${}^af$ est ouverte et injective.

Preuve : Dans chacun des cas on va montrer que ${}^af$ est ouverte pour la G-topologie.

a) Ce cas résulte immédiatement du lemme de I qui affirme que ${}^af$ est G-ouverte.

b) Soient Z une partie de $\mathrm{Spec}(A)$ et $P' \in \mathrm{Spec}(A')$ tels que $P = {}^af(P') = \bigcap_{Q \in Z} Q$.

Puisque ${}^af$ est fermée, pour tout $Q \in Z$ il existe $Q' \in \mathrm{Spec}(A')$ satisfaisant $P' \subset Q'$ et ${}^af(Q') = Q$. Soit Z' l'ensemble des idéaux premiers Q' précédents, on voit déjà que ${}^af(Z') \subset Z$. Supposons maintenant que $P' \neq \bigcap_{Q' \in Z'} Q'$, il est clair que $f^{-1}(\bigcap Q')$ est égal à P. La partie multiplicative $f(A\text{-}P)$ de A' a une intersection vide avec l'idéal $\bigcap Q'$ de A', on en déduit qu'il existe un idéal premier M' disjoint de $f(A\text{-}P)$ et contenant $\bigcap Q'$. Comme $P' < \bigcap Q' \subset M'$ et de plus $P = {}^af(M')$, on a une contradiction avec l'incomparabilité des éléments de ${}^af^{-1}(P)$. Ce qui achève la preuve, compte tenu de la remarque ci-dessus.

c) Soit Z une partie de $\mathrm{Spec}(A)$ et P' un idéal premier de A' tels que ${}^af(P') = \bigcap_{Q \in Z} Q$, on peut écrire cette relation sous la forme équivalente :

$V({}^af(P')) = V(\bigcap Q) = \overline{Z}$. Mais puisque ${}^af$ est ouverte on a ${}^af^{-1}(\overline{Z}) = \overline{{}^af^{-1}(Z)}$.
D'autre part ${}^af^{-1}(V({}^af(P'))) = {}^af^{-1}(\overline{{}^af(V(P'))}) = \overline{{}^af^{-1}({}^af(V(P')))}$, cette dernière égalité provenant de ce que ${}^af$ est ouverte. Or ${}^af$ étant injective, on obtient ${}^af^{-1}({}^af(V(P'))) = V(P')$. Finalement on a prouvé que $V(P') = \overline{{}^af^{-1}(Z)}$, ou encore $P' = \bigcap_{Q' \in Z'} Q'$, avec $Z' = {}^af^{-1}(Z)$. Puisque ${}^af(Z') \subset Z$, on est dans les conditions d'application de la remarque et ${}^af$ est G-ouverte.

Remarque : Lorsque $f : A \to A'$ est de type fini, l'inclusion ${}^af(\mathrm{Gold}(A')) \subset \mathrm{Gold}(A)$ peut être précisée. Considérons l'homomorphisme canonique $f : A \to A[X]$ et soit $(\mathrm{Spec}(A))[X]$ l'image de Spec(A) par l'application $P \to P[X]$ de Spec(A) dans Spec(A[X]). On sait, d'après [4], page 3, th. 2, que $A/P[X]$ n'est jamais un G-anneau, cette remarque démontre une partie de l'égalité :

$$ {}^af^{-1}(\mathrm{Gold}(A)) \cap \complement\, (\mathrm{Spec}(A))[X] = \mathrm{Gold}(A[X]) $$

Soit maintenant $P' \in \mathrm{Spec}(A[X])$ tel que ${}^af(P') \in \mathrm{Gold}(A)$ et $P' \notin (\mathrm{Spec}(A))[X]$; si P' est une intersection d'idéaux premiers de A [X], soit $P' = \bigcap Q'_i$, le contracté P de P' est égal à l'un des ${}^af(Q'_i)$. On a alors une chaîne d'idéaux premiers $P[X] \subset P' \subset Q'_i$ de A[X] se contractant sur le même idéal premier P de A. Ce n'est possible que si $P' = P[X]$ ou si $P' = Q'_i$; puisque $P' \notin (\mathrm{Spec}(A))[X]$ on a ainsi prouvé que $P' = Q'_i$ et P' est un G-idéal de A[X].

Proposition 2 - Soit $f : A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux entier, alors f est un G-morphisme ; de façon plus précise : ${}^af^{-1}(\mathrm{Gold}(A)) = \mathrm{Gold}(A')$.

Preuve : Le fait que f est un G-morphisme est démontré dans [4], cependant on se propose d'en donner une autre preuve utilisant le fait que f est G-ouverte.
Soit $P' \in \mathrm{Spec}(A')$, un système fondamental de voisinages de P' pour la G-topologie est constitué par les ensembles $V(P') \cap D(a')$ où $a' \in A'\text{-}P'$. Considérons alors $V(P') \cap D(a')$ un tel voisinage, a' satisfait une équation de dépendance intégrale :
$a'^n + a_{n-1}a'^{n-1} + \dots + a_0 = 0$. Soit $P = {}^af(P')$, puisque $a' \notin P'$, il existe un indice i tel que $a_i \notin P$. Soit i le premier entier tel que $a_i \notin P$, il est clair que $a'^{n-i} + \dots + a_i \in P'$. Montrons que $V(P) \cap D(a_i) \subset {}^af(V(P') \cap D(a'))$; pour cela, soit $Q \in V(P) \cap D(a_i)$, il existe un idéal premier Q' de A' tel que $Q' \in V(P')$ et ${}^af(Q') = Q$. Mais $a' \notin Q'$, sinon du fait de l'inclusion $P' \subset Q'$ on aurait $a'^{n-i} + \dots + a_i \in Q'$ qui entraînerait $a_i \in Q$. On a ainsi prouvé que pour toute paire (P',a') où P' est un idéal premier de A' et $a' \in A' - P'$, notant $P = {}^af(P')$, il existe $a \in A - P$ tel que : $V(P) \cap D(a) \subset {}^af(V(P') \cap D(a'))$, ce qui montre que ${}^af$ est ouverte pour la G-topologie. Ainsi Gold(A') est contenu dans ${}^af^{-1}(\mathrm{Gold}(A))$. Pour achever de démontrer l'égalité, on peut déjà remarquer que $A \to A'$ se factorise en $A \to f(A) \to A'$; si P' est un idéal premier de A' tel que $P = {}^af(P') \in \mathrm{Gold}(A)$, l'application $\mathrm{Spec}(f(A)) \to \mathrm{Spec}(A)$

étant injective, on a fait plus haut la remarque que $f(A) \cap P'$ est un G-idéal.
On peut donc supposer que A est contenu dans A'. Dans cette hypothèse, on sait, d'après [9] page 30, qu'un idéal premier P' de A' est au-dessus d'un idéal premier P de A si et seulement si P' est maximal dans l'ensemble des idéaux de A' qui ont avec A-P une intersection vide. Or P étant un G-idéal, on a $\{P\} = V(P) \cap D(a)$ pour un élément $a \in A$; il s'ensuit que $a \notin P'$. Soit alors $Q' \in V(P') \cap D(a)$ et posons $Q = Q' \cap A$, il est clair que $Q = P$ et en particulier $Q' \cap A\text{-}P = \emptyset$. La maximalité de P' montre que $Q' = P'$. Ainsi $\{P'\} = V(P') \cap D(a)$ et P' est un G-idéal.

Remarque : Les résultats précédents semblent montrer qu'un G-morphisme f est tel que ${}^af$ est G-ouverte. Je ne sais pas si cela est vrai.

Proposition 3 - Soit $f : A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux, l'application ${}^af$ est surjective si et seulement si $\mathrm{Gold}(A) \subset {}^af(\mathrm{Gold}(A'))$.

Preuve : Supposons ${}^af$ surjective et soit $P \in \mathrm{Gold}(A)$, il existe un idéal premier P' de A' tel que ${}^af(P') = P$. La fibre ${}^af^{-1}({}^af(P'))$ est une partie localement fermée, elle contient donc un G-idéal P''. Ainsi $\mathrm{Gold}(A) \subset {}^af(\mathrm{Gold}(A'))$.
Réciproquement, si $\mathrm{Gold}(A) \subset {}^af(\mathrm{Gold}(A'))$, on a la suite d'inclusions :

$$\mathrm{Spec}(A) = \overline{\mathrm{Gold}(A)}^{C} \subset \overline{{}^af(\mathrm{Gold}(A'))}^{C} \subset {}^af(\mathrm{Spec}(A'))$$

qui montre que ${}^af$ est surjective.

V - UNE CLASSE D'ANNEAUX DONT TOUT IDEAL PREMIER EST DE GOLDMAN

Dans la classe des anneaux A satisfaisant Spec(A) = Gold(A), il en existe vérifiant : pour tout idéal premier P de A, le générisé g(P) = Spec(A_p) est un ouvert ; en effet, pour de tels anneaux, la relation $\{P\} = V(P) \cap g(P)$ et g(P) ouvert entraînent P est un G-idéal.

Définition - Un anneau dont le générisé de tout point de son spectre est un ouvert est dit un g-anneau.

Proposition 1 - Soit A un anneau, les conditions suivantes sont équivalentes :
a) A est un g-anneau
b) Pour tout P $\in$ Spec(A), le générisé de P est un ouvert D(I) où I est un idéal de type fini de A.
c) Pour tout P $\in$ Spec(A), il existe f $\in$ A-P tel que g(P) = D(f) (ou ce qui revient au même, $A_f \to A_P$ est un isomorphisme).
d) Toute intersection d'ouverts de Spec(A) est un ouvert.

Preuve : Les implications c) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a) et d) $\Rightarrow$ a) sont évidentes.
Montrons que a) $\Rightarrow$ c) si g(P) est un ouvert, comme il est égal à l'intersection des parties proconstructibles D(f) où f $\in$ A-P, la compacité de la topologie constructible permet d'extraire une famille finie $\{f_1, \dots, f_n\}$ de A-P telle que g(P) = $D(f_1 \dots\dots f_n)$.
Enfin a) $\Rightarrow$ d), il suffit pour cela de remarquer qu'une intersection d'ouverts est soit vide, soit stable par générisation, et, dans ce cas, contient le générisé de tout point lui appartenant.

Proposition 2 - Soit A un anneau, les conditions suivantes sont équivalentes :
a) A est un g-anneau
b) Pour toute famille $\{Q_i\}_{i \in I}$ d'idéaux premiers de A et tout idéal premier P de A, la relation $\cap Q_i \subset$ P entraîne l'existence d'un i tel que $Q_i \subset$ P.
c) Pour tout morphisme plat $\varphi : A \to A'$ d'anneaux, l'image ${}^a\varphi$(Spec(A')) est ouverte.
d) Pour tout P $\in$ Spec(A), l'homomorphisme A $\to A_P$ est de présentation finie.
Enfin, si A est intègre, les conditions précédentes sont équivalentes à la suivante :
e) Pour tout P $\in$ Spec(A), l'homomorphisme A $\to A_P$ est de type fini.

Preuve :
a) $\Rightarrow$ b) : Supposons que l'on ait $\cap Q_i \subset$ P, alors P $\in V(\cap Q_i)$ entraîne en vertu de la proposition 1 d) : P $\in \cup V(Q_i)$; ce qui démontre l'implication.

b) $\Rightarrow$ a) : En effet, tout fermé F de Spec(A) est égal à la réunion de ses composantes irréductibles. Il est alors facile de montrer la partie d) de la proposition 1.

a) $\Rightarrow$ c) : Un morphisme plat est générisant. D'autre part c) $\Rightarrow$ a) est évident.

d) $\Rightarrow$ a) : Un morphisme plat de présentation finie est ouvert.

a) $\Rightarrow$ d) : Puisque A_f est isomorphe à la fois à A_p et à $\dfrac{A[X]}{(fX-1)}$, on voit que la A-algèbre A_p est de présentation finie.

Il est clair que d) $\Rightarrow$ e) sans hypothèse. Si A est intègre, on a la proposition de [3] : Soit A $\to$ A' un épimorphisme plat injectif de type fini, alors A $\to$ A' est de présentation finie ; ainsi e) $\Rightarrow$ d).

Les g-anneaux sont «artiniens» en un sens qui va être précisé. Pour cela on introduit d'après [6], la O-topologie sur le Spectre d'un anneau. Soit A un anneau, la O-topologie a pour base d'ouverts les fermés V(I) où I est un idéal de type fini de A. Si on note par $\overline{X}^O$ la O-adhérence d'une partie X de Spec(A), on voit facilement que $\overline{X}^O$ est l'intersection des ouverts quasi-compacts de Spec(A), contenant X. La O-adhérence d'un point P de Spec(A) n'est autre que g(P). On a ainsi l'explication du nom de O-topologie : l'ordre induit par cette topologie est l'ordre <u>opposé</u> à celui induit par la topologie de Zariski. On sait que la O-topologie est une topologie d'espace spectral et que la topologie constructible associée est la même que la topologie constructible associée à celle de Zariski.

Lemme 1 - Soit A un anneau, la O-topologie sur Spec(A) est noethérienne si et seulement si pour toute partie X de Spec(A), on a $\overline{X}^O = D(I)$ où I est un idéal de type fini de A (On dira alors que $\overline{X}^O$ est de «type fini»).

Preuve : Tout ouvert pour la O-topologie est de la forme $\complement\, \overline{X}^O$. L'égalité $\overline{X}^O = D(I)$ montre alors que $\complement\, \overline{X}^O$ est un ouvert quasi-compact dans la O-topologie.

Réciproquement, si $\complement\, \overline{X}^O$ est quasi-compact pour la O-topologie, puisque $\complement\, \overline{X}^O$ est une réunion de fermés, soit $\complement\, \overline{X}^O = \bigcup V(I_i)$ où I_i est un idéal de type fini de A, on extrait un recouvrement fini : $\overline{X}^O = D(I_1) \cap \dots\dots \cap D(I_n) = D(I_1 \dots I_n)$ et on remarque que $I_1 \dots I_n$ est un idéal de type fini.

On a alors un «théorème de Cohen».

Proposition 3 - Soit A un anneau, la O-topologie sur Spec(A) est noethérienne si et seulement si pour tout idéal premier P de A, il existe un idéal de type fini I de A tel que $g(P) = D(I)$.

Preuve : Une implication est claire, compte tenu du lemme précédent, car g(P) est une O-adhérence. Pour l'autre implication, on utilise le lemme suivant :

Lemme 2 - Soit $\mathfrak{F}$ la famille des O-fermés de Spec(A), non vides et qui ne sont pas de type fini (i.e. non égaux à un ouvert D(I) quasi-compact) : si $\mathfrak{F}$ n'est pas vide, elle possède un élément minimal pour la relation d'inclusion qui est un fermé du type g(P) où P est un idéal premier de A.

Preuve : La famille $\mathfrak{F}$ est $\cap$-inductive : soit $\{B_i\}_{i \in I}$ une famille totalement ordonnée par inclusion, contenue dans $\mathfrak{F}$. Les O-fermés B_i sont proconstructibles, soit X l'intersection de la famille $\{B_i\}_{i \in I}$; si X est vide (resp. de type fini) on extrait une famille finie $\{B_1, ..., B_n\}$ telle que $B_1 \cap ... \cap B_n$ est vide (resp. est de type fini). Mais, puisque les O-fermés B_i sont totalement ordonnés, on a une contradiction. La famille $\mathfrak{F}$ étant $\cap$-inductive, si elle n'est pas vide, a un élément minimal B qui est un O-fermé non vide et qui n'est pas de type fini. Or B est un fermé irréductible pour la O-topologie : soient B' et B'' deux O-fermés tels que $B \subset B' \cup B''$; si l'on suppose $B \cap B' < B$ et $B \cap B'' < B$ on a deux possibilités :

- soit $B \cap B' = \emptyset$ ou $B \cap B'' = \emptyset$, auquel cas on a prouvé $B \subset B'$ ou $B \subset B''$
- soit $B \cap B'$ et $B \cap B''$ sont de type fini, mais alors B est de type fini, ce qui est absurde.

Mais, un fermé O-irréductible est du type g(P), où P est un idéal premier de A ; la preuve du lemme est ainsi achevée.

Proposition 4 - Soit A un anneau, alors A est un g-anneau si, et seulement, si la O-topologie sur Spec(A) est noethérienne.

Preuve : Immédiate, en utilisant les résultats précédents.

Remarque : Un g-anneau est semi-local, puisque ses O-composantes irréductibles sont en nombre fini. D'autre part, les composantes connexes d'un spectre de g-anneau, étant stables par générisation, sont ouvertes. Il en résulte que le spectre d'un g-anneau n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI N. - Algèbre commutative - Hermann.

[2] BOURBAKI N. - Topologie générale - Ch. I, Hermann.

[3] COX - Finiteness in flat modules and algebra - Journal of algebra - 32 - pages 44 à 50 - 1974.

[4] GUERINDON - Anneaux de Goldman - Séminaire Dubreuil-Pisot - 1969-1970 - Exposé n° 9 - Secrétariat Mathématique - Paris.

[5] GROTHENDIECK & DIEUDONNE - Eléments de géométrie algébrique - Ch. I - Springer Verlag - 1971.

[6] HOCHSTER M. - Prime ideal structure in commutative rings - Trans. Amer. Math. Soc. - 142 - 1969 - pages 43 à 60.

[7] IVERSEN B. - Generic local structures in commutative algebra - Springer Verlag - Lectures notes in Mathematics - n° 310 - 1970.

[8] KAPLANSKY I. - Commutative rings - Allyn and Bacon - 1970.

[9] NAGATA M. - Local rings - Wiley and Sons - 1960.

[10] OLIVIER - Anneaux absolument plats universels - Séminaire Samuel - Exposé n° 6 - Secrétariat Mathématique Paris - 1968.

Gabriel PICAVET
U.E.R. Sciences
Département de Mathématiques Pures
Domaine Scientifique des Cézeaux
63170 - AUBIERE

Manuscrit reçu le 10 mai 1975.