ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

ALAN J. GOLD

Sur les arbres logiques de M. Krasner

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 57, série *Mathématiques*, n° 11 (1975), p. 17-72

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1975__57_11_17_0>

Sur les Arbres Logiques de M. Krasner

par Alan J. Gold

Department of Mathematics

University of Windsor

Windsor, Ontario, Canada

Nota

Les résultats présentés ici sont ceux de la Thèse de Troisième Cycle de l'auteur, presenté à l'Université de Clermont sous la direction de MM. les professeurs Guillaume et Krasner, et avec la soutien d'une Bourse de Coopération Technique et d'une bourse du Conseil des Arts du Canada. La rédaction de cet article a été soutenu par le Conseil National des Recherches du Canada.

SUR LES ARBRES LOGIQUES DE M. KRASNER

par Alan J. Gold

Dans [1] et [2] , Marc Krasner a esquissé un système formel de prédicats à une seule variable libre, dont le prédicat primitif est celui de la theorie des ensembles, -∈- . Quoique ce systeme soit traduisible dans les formules standardes du calcul des prédicats avec -∈- , pour des raisons techniques il est plus commode de le laisser dans la forme où Krasner l'a conçu, celle des arbres finis, décorés des symboles.

Ici on se bornera d'achever l'esquisse de Krasner dans un sous-systeme. On travail tout d'abord vis-à-vis d'un modèle du système, puis on se lance dans la théorie formelle, en quelque sorte axiomatique. Finalement, on démontre quelques rapports entre la théorie de Krasner et la théorie classique de Zermelo-Fraenkel, voyant qu'il y a champs commun entre les deux, mais qu'aucun n'est sous-système de l'autre.

§1. Construction du système et définitions diverses.

Un arbre est une collection finie de segments de droites, appeles segments, qui coincident au plus dans leurs points terminaux, appelés noeuds, de telle manière que deux noeuds quelconques sont joints par une suite unique de segments.

Un arbre enraciné est un arbre dont un seul noeud est distingué comme racine de l'arbre, et marqué d'une étoile, * . Graphiquement, un arbre enraciné a la racine vers le haut du dessin, d'où les segments découlent vers le bas, comme dans la figure suivante.

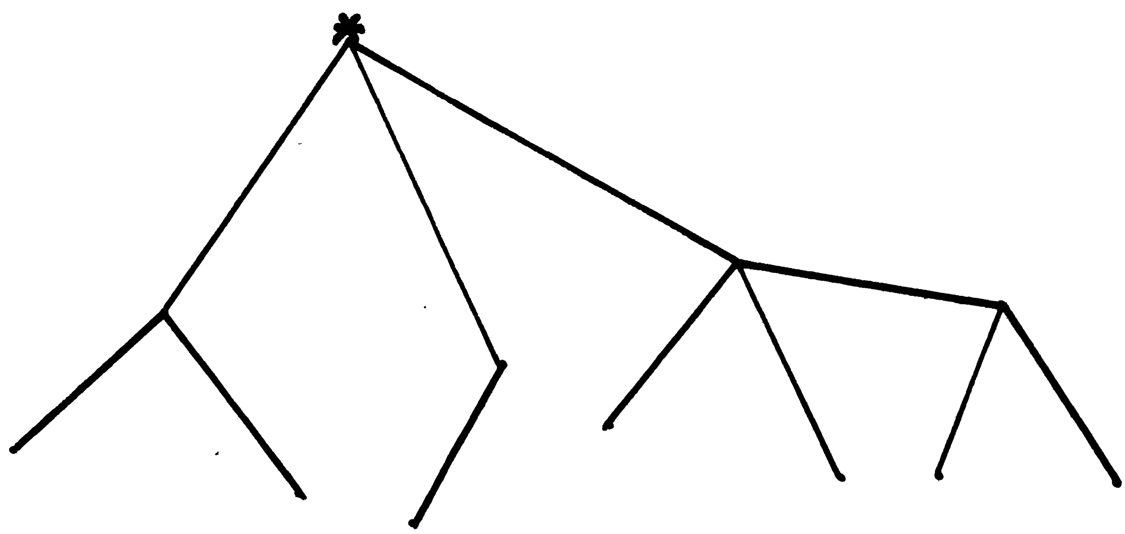


FIGURE 1

La hauteur, h(n) , d'un noeud n d'un arbre enraciné est le nombre de segments qui le séparent de la racine. La hauteur h(A) d'un arbre A est le maximum des hauteurs h(n) des noeuds n de l'arbre A . Il est techniquement utile d'introduire un unique arbre de hauteur zéro, que représente l'étoile seule, * . Une extremité d'un arbre est un noeud qu'aucun segment ne joint à un noeud de hauteur plus élevée.

Finalement, un arbre de Krasner (ou K-arbre) est un arbre enraciné dont les segments sont colorés ou bien noir (lignes solides), ou bien gris (lignes pointillées), de telle manière que si n_1 et n_2 sont deux noeuds de **A** joints par un segment gris, et tels que $h(n_2) = h(n_1) + 1$, alors:

i) n_1 n'est pas la racine de A,

ii) n_2 n'est pas une extremité de A ,

iii) le segment qui sépare n_1 du noeud correspondent de hauteur $h(n_1) - 1$ est noir,

iv) tous les segments qui separent n_2 des noeuds de hauteur $h(n_2) + 1$ sont noirs, et

v) tous les segments qui separent n_1 des noeuds de hauteur $h(n_2) = h(n_1) + 1$ sont gris.

Par exemple,

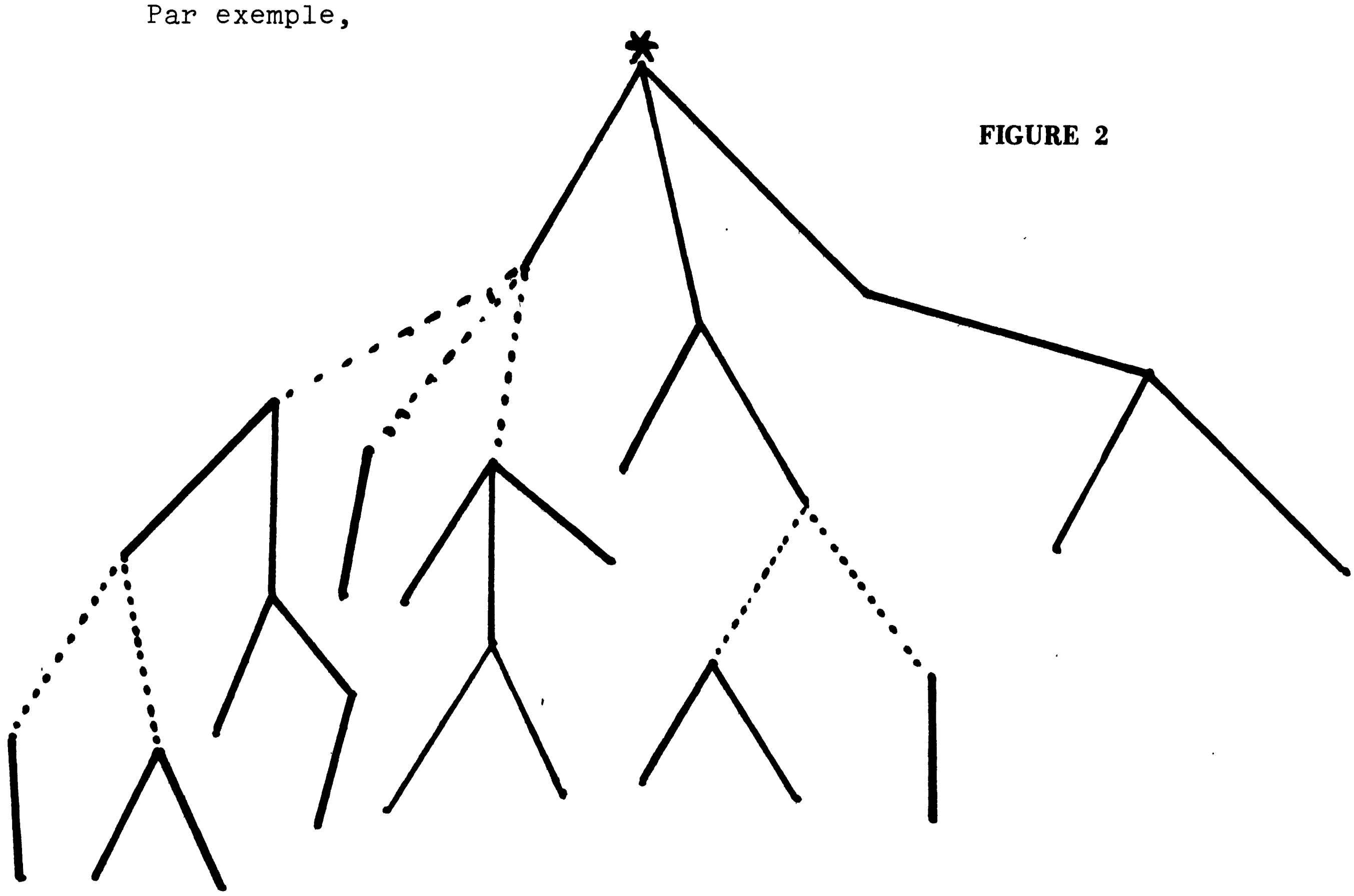


FIGURE 2

est un arbre de Krasner. La K-hauteur Kh(n) d'un noeud n d'un K-arbre A est le nombre de segments noirs qui séparent le noeud n de la racine de A . La K-hauteur Kh(A) d'un K-arbre A est le maximum des K-Hauteurs Kh(n) des noeuds n de A . Donc Kh(n) $\leqslant$ h(n) , et Kh(A) $\leqslant$ h(A); l'arbre ci-dessus est de hauteur cinq, mais de K-hauteur quatre. Aussi, * est un K-arbre de K-hauteur zéro.

Les symboles à placer sur les K-arbres peuvent se classer comme suit:

i) la symbole de la racine, *

ii) les autres symboles nodales, ○ (rond) et + (croix)

iii) les symboles segmentielles, $\in$ (epsilon) et $\not\in$ (non-epsilon).

On appelle arbre de Krasner décoré tout arbre de Krasner où les symboles ci-dessus sont placées de telle manière que:

i) la racine porte * et aucune autre symbole,

ii) les noeuds qui termine chaque segment gris portent exactement + ,

iii) les noeuds qui restent portent ou bien ○ ou bien + , et rien d'autre,

iv) chaque segment noir porte ou bien $\in$ ou bien $\not\in$, et

v) les segments gris ne portent aucune symbole.

Quand il n'y a aucune risque d'équivoque, nous appellerons les arbres de Krasner decorés simplement des arbres. On en verra des diagrammes dans la section suivante.

Un dendrite est un arbre (de Krasner décoré) dont la racine est le noeud terminal d'un unique segment. Si le segment dont un noeud est la racine porte $\in$, et si l'autre noeud de ce segment porte O , on l'appelle un (O,$\in$)-dendrite, et semblablement pour les autres cas. Par les dendrites d'un arbre, nous entendons les partis de l'arbre composes de l'un des segments dont un noeud est la racine, et le reste de l'arbre réuni avec l'autre noeud de ce segment.

Les sous-arbres (immediats) d'un arbre A sont les arbres formés des dendrites de A en enlevant leurs racines, les segments dont le noeud inférieur était la racine, les segments gris (s'il y en a) entre les noeuds de K-hauteur un, les noeuds inférieurs de ces segments gris, et tous les symboles sur tout le précédent. De plus, nous remplaçons les symboles O et + sur les noeuds de K-hauteur un qui restent par * . Donc un (O,$\in$)-dendrite a un sous-arbre unique, mais un (+,$\notin$)-dendrite peut en avoir plusieurs. Nous parlons de (O,$\in$)-sous-arbres, etc., selon les dendrites dont ils sont les sous-arbres.

Nous ne tenons pas compte des permutations de dendrites; c'est-a-dire, par exemple, les deux diagrammes qui suivent représentent le même arbre:

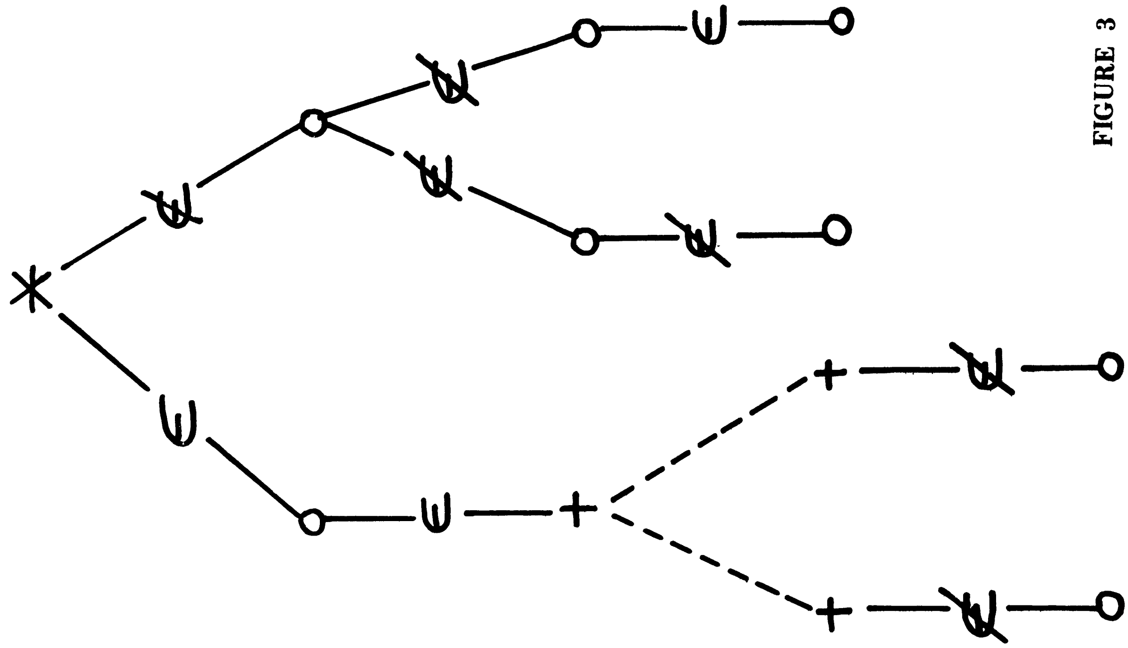


FIGURE 3

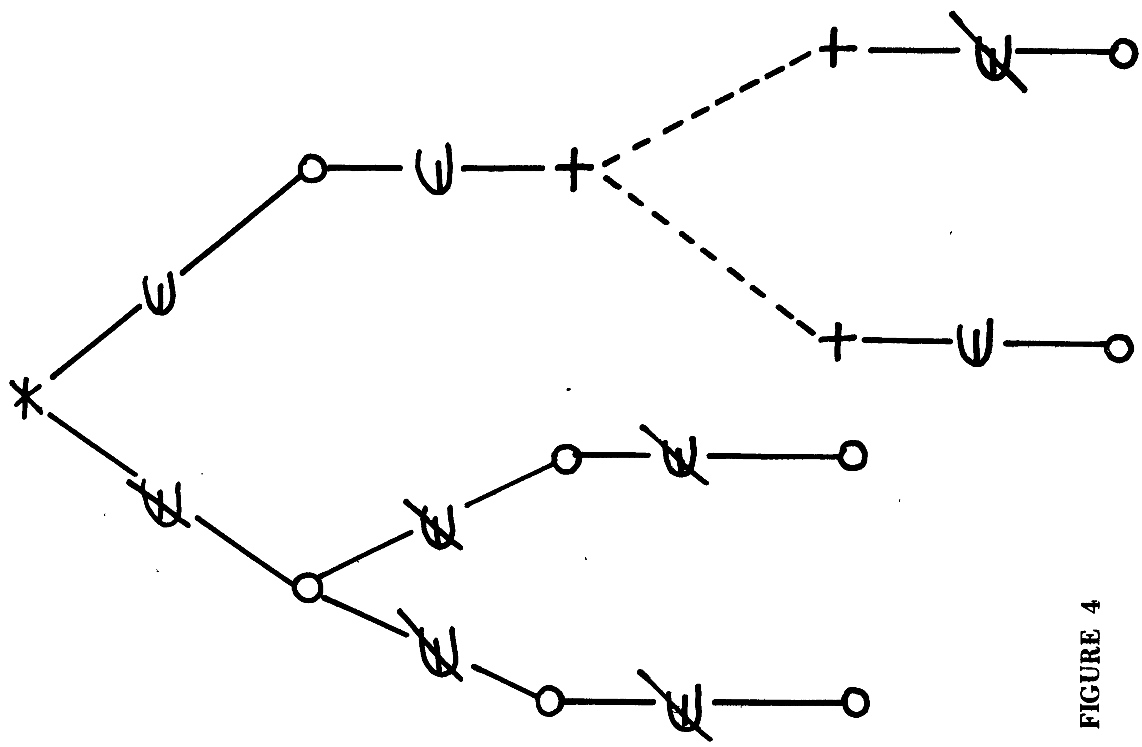


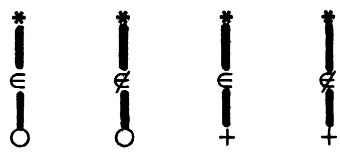
FIGURE 4

§2. Modèle-théorique.

Chaque K-arbre décoré représente un prédicat à une seule variable libre. Les seuls prédicats primitifs sont $-\in-$ et $-\notin-$, où $\in$ est la relation élément-ensemble, et $\notin$ est sa négation. Les exemples suivants donnent de façon récurrent la traduction d'un arbre quelconque dans les formules standards.

i) * , le seul arbre de hauteur zéro, représente un prédicat universel, tel $x = x$.

ii) Les dendrites de hauteur un,



se traduisent respectivement

$$\forall y \; y \in x$$

$$\forall y \; y \notin x$$

$$\exists y \; y \in x$$

$$\exists y \; y \notin x \quad .$$

Donc le deuxieme caractérise l'ensemble vide, et le premier l'univers.

iii) La traduction d'un arbre est la conjonction des traductions de ses dendrites. Donc

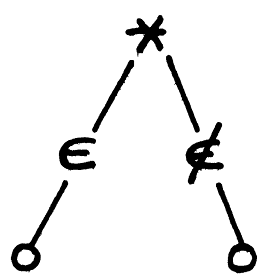


FIGURE 5

est traduit

$$\forall y \; y \in x \;\&\; \forall y \; y \notin x \; .$$

iv) Si A est un $(O,\in)$-dendrite (respectivement $(O,\notin)$-dendrite) et la traduction de son sous-arbre est $B(x)$, alors

$A(x)$, la traduction de A , est

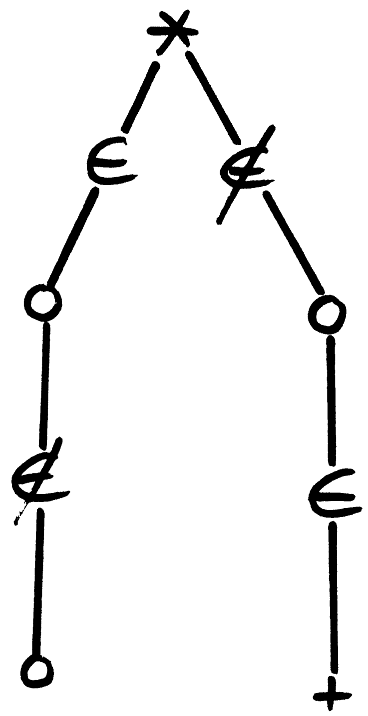
$$\forall y\ (B(y) \supset y \in x)$$

(respectivement

$$\forall y\ (B(y) \supset y \notin x)\ ).$$

Par exemple, si A est

FIGURE 6



alors $A(x)$ est

$$\forall y\ (\forall z\ z \notin y \supset y \in x)\ \&\ \forall y\ (\exists z\ z \in y \supset y \notin x)\ .$$

Notons que les variables quantifiées changent à chaque hauteur, et que ce prédicat caractérise l'ensemble $\{\emptyset\}$.

v) Si A est un $(+,\in)$-dendrite (respectivement $(+,\notin)$-dendrite) et les traductions de ses n sous-arbres sont respectivements $B_1(x), B_2(x), \ldots, B_n(x)$, alors la traduction $A(x)$ de A est

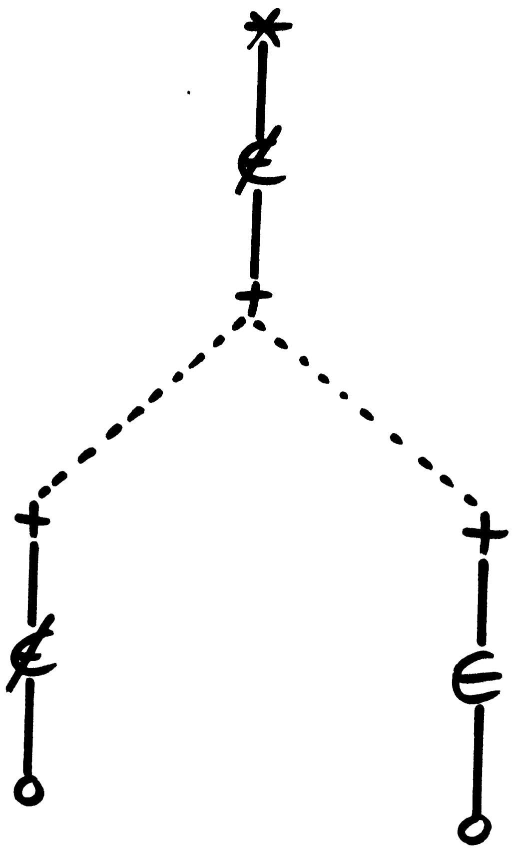
$$\exists y \ (B_1(y) \vee B_2(y) \vee \ldots \vee B_n(y)) \ \& \ y \in x$$

(respectivement

$$\exists y \ (B_1(y) \vee B_2(y) \vee \ldots \vee B_n(y)) \ \& \ y \notin x \ ).$$

Donc si A est

FIGURE 7



alors $A(x)$ est

$$\exists y \ ((\forall z \ z \notin y \vee \forall z \ z \in y) \ \& \ y \notin x) \ ,$$

un predicat que satisfait tout ensemble auquel n'appartient à la fois l'ensemble vide et l'univers.

Dans un modèle de la théorie, on suppose que la domaine des variables soit au moins denombrablement infinie, et que la fonction logique $\ell_{\in} : D\times D \to \{T,F\}$ associee avec $\in$ a la propriété que pour tout α , β dans la domaine D , si α et β sont distincts, il existe au moins un membre γ de D (pas nécessairement distinct de α ou β) tel que $\ell_{\in}(\gamma,\alpha) \neq \ell_{\in}(\gamma,\beta)$. Il y a deux conditions en plus pour que $(D,\ell_{\in})$ soit appelé un modèle de la théorie, qui seront données des que nous aurons les définitions nécessaires.

Soit $f : D \to \{T,F\}$ n'importe quelle fonction sur une domaine infinie D , et soit $\ell_{\in}$ une fonction satisfaisante à la condition ci-dessus. Alors, s'il existe un membre α de D tel que pour tout membrè β de D , $\ell_{\in}(\beta,\alpha) = f(\alpha)$, cet α est uniquement déterminé par f . Nous appelons f , ou f_{α} , la fonction caractéristique de α . Evidemment, chaque membre α de D détermine uniquement sa fonction caractéristique, et des membres α , β distincts déterminent des fonctions f_{α} , f_{β} distinctes.

Soit maintenant A un arbre quelconque. Dans la suite, nous noterons ses dendrites et sous-arbres selon la table suivante:

Genre de Dendrite	Dendrites	Sous-arbres respectifs
$(O,\in)$	$B_1, B_2, \ldots, B_n$	$C_1, C_2, \ldots, C_n$
$(O,\notin)$	$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$	$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$
$(+,\in)$	$D_1, D_2, \ldots, D_r$	$E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1p_1}$; $E_{21}, E_{22}, \ldots, E_{2p_2}$; $\ldots\ldots\ldots\ldots$ $E_{r1}, E_{r2}, \ldots, E_{rp_r}$
$(+,\notin)$	$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_q$	$\eta_{11}, \eta_{12}, \ldots, \eta_{1s_1}$; $\eta_{21}, \eta_{22}, \ldots, \eta_{2s_2}$; $\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\eta_{q1}, \eta_{q2}, \ldots, \eta_{qs_q}$

Alors la traduction $A(x)$ de A est

$$\mathop{\&}_{i=1}^{n} \forall y \ (C_i(y) \supset y \in x)$$

$$\& \mathop{\&}_{j=1}^{m} \forall y \ (\gamma_j(y) \supset y \notin x)$$

$$\& \mathop{\&}_{k=1}^{r} \exists y \left[(\bigvee_{n_k=1}^{p_k} E_{kn_k}(y)) \ \& \ y \in x \right]$$

$$\& \mathop{\&}_{h=1}^{q} \exists y \left[(\bigvee_{g_h=1}^{s_h} \eta_{hg_h}(y)) \ \& \ y \notin x \right] .$$

Pour D et $\ell_\in$ fixés, satisfaisants aux conditions sur un modèle déjà énoncées, et pour l'arbre A donné ci-dessus, supposons qu'il existe au moins un objet α de D tel que $A(\alpha)$ ait la valeur $\top$. Alors la fonction f_α satisfait à la condition suivante:

$$\mathop{\&}_{i=1}^{n} (\forall\beta \in D)\ (C_i(\beta) = \mathsf{T} \supset f_\alpha(\beta) = \mathsf{T})$$

$$\& \mathop{\&}_{j=1}^{m} (\forall\beta \in D)\ (\gamma_j(\beta) = \mathsf{T} \supset f_\alpha(\beta) = \mathsf{F})$$

$$\& \mathop{\&}_{k=1}^{r} (\exists\beta \in D)\ (\bigvee_{n_k=1}^{p_k} E_{kn_k}(\beta) = \mathsf{T})\ \&\ f_\alpha(\beta) = \mathsf{T}$$

$$\& \mathop{\&}_{h=1}^{q} (\exists\beta \in D)\ (\bigvee_{g_h=1}^{s_h} \eta_{hg_h}(\beta) = \mathsf{T})\ \&\ f_\alpha(\beta) = \mathsf{F}\ .$$

Nous dirons que l'arbre A est non-contradictoire s'il existe une fonction $f_A : D \to \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}$ satisfaisante à la condition ci-dessus. S'il n'y a pas de telle fonction, nous dirons que A est contradictoire. Si A est non-contradictoire, et la fonction f_A est uniquement donnée par la condition, nous dirons que A est correct. Une fonction f_A qui satisfait à la condition sera appelée convenable pour A .

Nous posons dès lors, comme condition sur une modèle $(D,\ell_\in)$ de la théorie, la suivante, appelée Condition Existentielle:

> Si A est un arbre non-contradictoire, alors il existe au moins un membre α de la domaine D tel que $A(\alpha)$ ait la valeur T .

La réciproque de cette condition est une conséquence immédiate de la définition de la non-contradiction.

Nous dirons qu'un arbre A est finiment prolongeable s'il existe un nombre fini seulement de fonctions f_A convenables pour A . S'il en existe un nombre infini, nous dirons que A est infiniment prolongeable. La condition finale sur une modèle est la Condition de la Prolongeabilité Infinie:

> Si un arbre A est infiniment prolongeable, alors il existe un nombre au moins dénombrablement infini de membres α de D tels que $A(\alpha)$ a la valeur **T** .

Maintenant nous donnons des définitions qui seront nécessaires dans la suite. Soit P et Q deux arbres quelconques. Nous appellerons l'accolement de P et Q , et noterons $\mathsf{A}(P,Q)$, l'arbre formé en unissant les racines de P et de Q , pour former un seul arbre. Donc les dendrites de $\mathsf{A}(P,Q)$ sont les dendrites de P et de Q , et $\mathsf{A}(P,Q)(x)$ est $P(x)\ \&\ Q(x)$. Notons que l'accolement est commutatif et associatif, et que tout arbre peut être considéré comme l'accolement de ses dendrites.

Soit B un $(O,\in)$- arbre quelconque, à sous-arbre C . Alors nous appellerons la négation de B , et noterons $\neg B$, le $(+,\notin)$-dendrite à un seul sous-arbre C . Puisque

$$(\neg B)(x) \sim \neg(B(x)) ,$$

nous écrivons $\neg B(x)$ sans ambiguité. Si B est un $(O,\notin)$-dendrite à sous-arbre C , alors $\neg B$ est le $(+,\in)$-dendrite à un seul sous-arbre C . Si D est un $(+,\in)$-dendrite aux sous-arbres $E_1,E_2,\ldots,E_n$, alors $\neg D$ est l'arbre aux n $(O,\notin)$-dendrites dont les sous-arbres sont $E_1,E_2,\ldots,E_n$. La négation d'un $(+,\notin)$-dendrite est semblable. Donc pour un dendrite quelconque B , et un objet quelconque α de D , $B(\alpha)$ a la valeur **T** si et seulement si $\neg B(\alpha)$ a la valeur **F** .

Soit A un arbre quelconque. Si A n'est pas $*$, nous appelons la collection (finie) des négations de ses dendrites le complément de A, et nous la notons $\mathsf{K}(A)$; Nous definnissons $\mathsf{K}(*) = \emptyset$, l'ensemble vide. Notons que $\mathsf{K}(A)$ est constuctible à partir de A dans un nombre fini d'étapes, et que pour un arbre A quelconque et un objet quelconque α de D, $A(\alpha)$ a la valeur T si et seulement si pour tout T de $\mathsf{K}(A)$, $T(\alpha)$ a la valeur F.

Soit maintenant A un arbre sans $(+,\in)$-dendrites ni $(+,\notin)$-dendrites, appele un O-arbre. Nous définissons l'incomplétant de A, noté $\mathsf{INC}(A)$, comme suit: Si A est $*$, alors $\mathsf{INC}(A)$ est $\{*\}$, la collection d'arbres qui consiste de $*$ seul. Si A n'est pas $*$, pour chaque $(O,\in)$-sous-arbre C_i ou $(O,\notin)$-sous-arbre γ_j de A, soit $\mathsf{K}(C_i) = \{T_{i1}, T_{i2}, \dots, T_{ip_i}\}$ et $\mathsf{K}(\gamma_j) = \{T_{(n+j)1}, T_{(n+j)2}, \dots, T_{(n+j)p_{n+j}}\}$ les compléments de C_i et de γ_j respectivement. L'incomplétant $\mathsf{INC}(A)$ de A est donc

$$\left\{ \mathop{\mathsf{A}}_{i=1}^{m+n} (T_{ik_i}) \mid 1 \leqslant k_i \leqslant p_i ;\ 1 \leqslant i \leqslant m+n \right\} ,$$

la collection des accolements d'un unique arbre de chacun des compléments des sous-arbres de A.

Nous dirons que deux arbres A et B sont équivalents, et nous écrirons $A \sim B$, si tout accolement de B avec un arbre de $\mathsf{K}(A)$ est contradictoire et tout accolement de A avec un arbre de $\mathsf{K}(B)$ est contradictoire. Par la Condition Existentielle, il est facile à voir que ceci est une relation d'équivalence, et que $A \sim B$ si et seulement si $A(x) \sim B(x)$.

§3. Algorithmes de decision par rapport au modèle I.

Supposons que nous sommes donné un modèle $(D, \ell_{\in})$ de la théorie satisfaisant aux conditions posées dans § 2 . Nous démontrerons des algorithmes pour décider de la non-contradiction et de la correction des arbres, en commençant par un cas restreint.

Soit A un arbre dont les noeuds de K-hauteur un ne portent que O ; on l'appelle un O-arbre. Prenons les $(O, \in)$- et $(O, \notin)$-dendrites et sous-arbres comme dans la table P. 8 . Alors $A(x)$ est

$$\mathop{\&}_{i=1}^{n} \forall y\, (C_i(y) \supset y \in x) \ \& \mathop{\&}_{j=1}^{m} \forall y\, (\gamma_j(y) \supset y \notin x) .$$

Comme nous avons défini, A est non-contradictoire s'il existe une fonction $f_A : D \to \{T, F\}$ telle que

$$\mathop{\&}_{i=1}^{n} (\forall \beta \in D)\, (C_i(\beta) = T \supset f_A(\beta) = T)$$

$$\& \mathop{\&}_{j=1}^{m} (\forall \beta \in D)\, (\gamma_j(\beta) = T \supset f_A(\beta) = F) .$$

Une telle fonction existe si et seulement si pour tout i et j ,

$$(\forall \beta \in D)\, \neg(C_i(\beta)\ \&\ \gamma_j(\beta)) ;$$

c'est-à-dire, si et seulement s'il n'existe aucun β dans D tel que pour tout i et j

$$A(C_i, \gamma_j)(\beta) = T .$$

Par la Condition Existentielle, ceci équivaut à la contradiction de chaque $A(C_i,\gamma_j)$. Alors A est non-contradictoire si et seulement si chaque accolement de l'un de ses $(O,\in)$-sous-arbres avec l'un de ses $(O,\notin)$-sous-arbres est contradictoire.

Puisque la K-hauteur des sous-arbres est strictement inférieure à la K-hauteur de A , cet algorithme est récurrent sur la K-hauteur des arbres. Puisque rien n'oblige les sous-arbres d'un $\mathfrak{a}$-arbre d'être eux-mêmes des $\mathfrak{a}$-arbres, il faudra attendre le cas general avant que cet algorithme soit complètement donné. Évidemment dans chaque domaine non-vide $*$ est non-contradictoire.

Supposons maintenant que le $\mathfrak{a}$-arbre A ci-dessus est non-contradictoire, c'est-à-dire, qu'il existe une fonction f_A convenable pour A . Évidemment cette fonction est uniquement déterminée par la condition sur f_A si et seulement si, pour tout objet β de la domaine D , ou bien il y a un i tel que $C_i(\beta)$ a la valeur T , ou bien il y a un j tel que $\gamma_j(\beta)$ a la valeur T . (Puisque A est non-contradictoire, nous ne pouvons avoir les deux à la fois.) Symboliquement, A est correct si et seulement s'il n'y a aucun membre β de D tel que

$$\mathop{\&}_{i=1}^{n} \neg C_i(\beta) \;\&\; \mathop{\&}_{j=1}^{m} \neg\gamma_j(\beta)$$

a la valeur T .

Pour chaque $(O,\in)$-sous-arbre C_i de A , soit $K(C_i) = \{T_{i1},T_{i2},\ldots,T_{ip_i}\}$ le complément de C_i , et pour chaque $(O,\notin)$-sous-arbre γ_j de A , soit $K(\gamma_j) = \{T_{(n+j)1},T_{(n+j)2},\ldots,T_{(n+j)p_{n+j}}\}$ le complément de γ_j .

Donc pour chaque i

$$\neg C_i(y) \sim \bigvee_{k_i=1}^{p_i} T_{ik_i}(y)$$

et pour chaque j

$$\neg \gamma_j(y) \sim \bigvee_{k_{n+j}=1}^{p_{n+j}} T_{(n+j)k_{n+j}}(y) \ .$$

Alors A est correct si et seulement s'il n'y a aucun objet β de D tel que

$$\mathop{\&}_{i=1}^{m+n} \bigvee_{k_i=1}^{p_i} T_{ik_i}(\beta)$$

a la valeur T . Mais

$$\mathop{\&}_{i=1}^{m+n}\left(\bigvee_{k_i=1}^{p_i} T_{ik_i}(\beta)\right)$$

$$\sim \bigvee_{k_1=1}^{p_1} \bigvee_{k_2=1}^{p_2} \cdots \bigvee_{k_{m+n}=1}^{p_{m+n}} \left(\mathop{\&}_{i=1}^{m+n} T_{ik_i}(\beta)\right)$$

$$\sim \bigvee_{k_1=1}^{p_1} \bigvee_{k_2=1}^{p_2} \cdots \bigvee_{k_{m+n}=1}^{p_{m+n}} \left(\mathop{\mathsf{A}}_{i=1}^{m+n} (T_{ik_i})(\beta)\right) \ .$$

Donc A est correct si et seulement s'il n'y a aucun objet β dans D tel que pour tout arbre Q de $\mathsf{INC}(A)$, $Q(\beta)$ a la valeur T , c'est-à-dire, par la Condition Existentielle, si et seulement si chaque arbre de $\mathsf{INC}(A)$ est contradictoire.

Puisque chaque arbre de $\mathsf{INC}(A)$ est de K-hauteur strictement inférieure à la K-hauteur de A , ce critère est récurrent sur la K-hauteur des arbres. Comme pour la non-contradiction, il faudra considérer le cas général avant d'avoir un algorithme de décision pour la correction. Notons que * n'est pas correct, puisque $\mathrm{INC}\ (*) = \{*\}$.

Maintenant soit A un O-arbre non-contradictoire, avec les $(O,\in)$-dendrites et $(O,\mathcal{G})$-dendrites comme a P. 8 . Nous rappelons que A est finiment prolongeable si et seulement s'il existe un nombre fini seulement de fonctions convenables pour A . Or pour tout β de D tel que $C_i(\beta)$ ou $\gamma_j(\beta)$ ait la valeur T pour quelque i ou j , $f_A(\beta)$ est déterminée par la condition sur f_A pour être convenable. Donc le nombre de fonctions convenables pour A est déterminé par le nombre d'objets β de D tels que, pour quelque arbre Q de $\mathrm{INC}\ (A)$, $Q(\beta)$ a la valeur T . Puisque $\mathrm{INC}(A)$ est une collection finie d'arbres, A sera finiment prolongeable si et seulement si, pour chaque arbre Q de $\mathrm{INC}(A)$, il n'y a qu'un nombre fini de membres β de D tels que $Q(\beta)$ a la valeur T , c'est-à-dire, si et seulement si chaque arbre de $\mathrm{INC}(A)$ est finiment prolongeable. Encore, ce critère est récurrent sur la K-hauteur des arbres. L'arbre * de K-hauteur zéro est infiniment prolongeable, puisque D est infinie.

Maintenant soit A un Ω-arbre non-contradictoire et finiment prolongeable. Alors chaque arbre Q de $\mathrm{INC}(A)$ est finiment prolongeable aussi. Or chaque arbre Q de $\mathrm{INC}(A)$ est de K-hauteur strictement inférieure à celle de A . Supposons pour récurrence sur la K-hauteur, que pour chaque Q_i de $\mathrm{INC}(A)$, $1 \leqslant i \leqslant p$, il existe q_i membres distinctes χ_{ij_i} de D , $1 \leqslant j_i \leqslant q_i$, tels que $Q_i(\chi_{ij_i})$ a la valeur T . Supposons aussi que pour chaque χ_{ij_i} de D , nous avons construit un arbre T_{ij_i} correct tel que $T_{ij_i}(\chi_{ij_i})$ a la valeur T , et en plus, tel que $Kh(T_{ij_i}) \leqslant Kh(Q_i)$. Or il y a un nombre fini, au plus $q_1+q_2+\ldots+q_p$, d'arbres construits ainsi. Soit R l'ensemble de ces arbres T_{ij_i} et soit A un ensemble formé en choissisant un arbre dans chaque élément de $R/\sim$, la famille de classes d'équivalence sur R modulo $\sim$, où $\sim$ est la relation d'équivalence définie ci-dessus. Puisque R est fini, S est finiment constructible et unique jusqu'à l'équivalence $\sim$. Nous appelons S la domaine indéterminée de A , notée $\mathrm{DI}(A)$.

Soient T^*_k , $1 \leqslant k \leqslant r$, les arbres membres de S . Soient g_λ , $1 \leqslant \lambda \leqslant 2^n$ les fonctions de R dans $\{\in, \notin\}$ et pour chaque T^*_k et chaque g_λ , soit $V_{k\lambda}$ le $(\mathcal{O}, g_\lambda(T^*_k))$-dendrite à sous-arbre T^*_k . Soit A^*_λ l'arbre

$\bigwedge_{k=1}^{r}(A, V_{k\lambda})$. Il est presque immédiat que A^*_λ est correct, et que $A^*_{\lambda_1}$, $A^*_{\lambda_2}$ ne sont pas équivalents si λ_1 et λ_2 sont distincts; aussi, pour chaque λ , $A^*_\lambda(x) \supset A(x)$.

Soit α un objet de D tel que $A(\alpha)$ a la valeur T , et soit $f_\alpha : D \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ la fonction telle que pour tout γ dans D , $f_\alpha(\gamma) = \ell_\in(\gamma, \alpha)$. Alors il existe un λ , $1 \leqslant \lambda \leqslant 2^n$, tel que $f_{A^*} = f_\alpha$; ainsi chaque α tel que $A(\alpha)$ a la valeur T satisfait a l'un des arbres corrects A^*_λ . Par recurrence sur la K-hauteur de l'arbre, nous pouvons construire de tels arbres A^*_λ pour n'importe quel $\mathcal{O}$-arbre finiment prolongeable, et, dans la suite, des arbres finiment prolongeables quelconques. Nous appelons le prolongement (fini) de A , et notons $\mathrm{PRL}(A)$, la collection $\{A^*_\lambda \mid 1 \leqslant \lambda \leqslant 2^n\}$. $\mathrm{PRL}(A)$ est unique jusqu'à l'équivalence $\sim$. Le prolongement d'un arbre contradictoire est vide.

Quant à la prolongeabilité infinie, on commence par construire les prédicats définissant $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset , \{\emptyset\}\}$, et ainsi de suite, pour démontrer qu'on peut construire n'importe quel nombre fini d'arbres corrects et distincts modulo $\sim$, qui satisfont à $*$, l'arbre infiniment prolongeable de K-hauteur zéro. Par une récurrence semblable à celle de la prolongeabilité finie, on démontre que pour tout O-arbre infiniment prolongeable, on peut faire la même chose.

§4. Algorithmes de décision II.

Soit A un arbre quelconque, avec les dendrites et sous-arbres donnés P. 8 . Une fonction convenable pour A existe si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:

i) Pour tout i et j , il n'y a aucun objet α de D tel que $C_i(\alpha)$ et $\gamma_j(\alpha)$ ont à la fois la valeur **T** .

ii) Pour chaque k , $1 \leqslant k \leqslant r$, il existe au moins un objet α_k de D tel que 1^o: pour au moins un n_k , $1 \leqslant n_k \leqslant p_k$, $E_{kn_k}(\alpha_k)$ a la valeur **T** et 2^o: pour chaque j , $1 \leqslant j \leqslant m$, $\gamma_j(\alpha_k)$ a la valeur **F** .

iii) Pour chaque h , $1 \leqslant h \leqslant q$, il existe au moins un objet β_h de D tel que 1^o: pour au moins un g_h , $1 \leqslant g_h \leqslant s_h$, $\eta_{hg_h}(\beta_h)$ a la valeur **T** , et 2^o: pour tout i , $1 \leqslant i \leqslant n$, $C_i(\beta_h)$ a la valeur **F** .

iv) Il est possible de choisir les α_k de ii) distincts des β_h de iii) .

Tout ceci vient d'un examen de la condition sur la fonction f_A pour qu'elle soit convenable pour A .

La première condition a été considerée déjà. Elle revient, par la condition existentielle, à la condition que tout accolement d'un $(O,\in)$-sous-arbre de A avec un $(O,\notin)$-sous-arbre de A soit contradictoire.

Pour la deuxième condition, on note $A^{O,\notin}$ l'accolement $\overset{m}{\underset{j=1}{A}}(\beta_j)$, (où les β_j sont les $(O,\notin)$-dendrites de A). Alors la deuxième condition revient à la condition que pour tout k , $1 \leqslant k \leqslant r$, au moins un accolement d'un sous-arbre du $(+,\in)$-dendrite D_k avec un arbre de $\mathrm{INC}(A^{O,\notin})$ soit non-contradictoire.

Symmétriquement, la troisième condition revient à la condition que pour tout h , $1 \leqslant h \leqslant q$, au moins un accolement d'un sous-arbre du $(+,\notin)$-dendrite δ_h avec un arbre de $\mathrm{INC}(A^{O,\in})$ soit non-contradictoire (où $A^{O,\in}$ est l'accolement des $(O,\in)$-dendrites de A).

Supposons maintenant que les trois premières conditions soient satisfaites, et regardons la dernière. Pour un $(+,\in)$-dendrite D_h donné, la selection convenable de α_k est assurée s'il y a un objet α_k tel que, pour quelque n_k , $1 \leqslant n_k \leqslant p_k$, et pour quelque i , $1 \leqslant i \leqslant n$, $E_{kn_k}(\alpha_k)$ et $C_i(\alpha_k)$ ont à la fois la valeur $\top$, c'est-à-dire, par la Condition Existentielle, s'il y a un accolement non-contradictoire d'un sous-arbre de D_h avec un $(O,\in)$-sous-arbre de A , et il y a la même situation pour la choix d'un β_h , s'il y a un accolement non-contradictoire d'un sous-arbre de δ_h avec un $(O,\notin)$-sous-arbre de A .

De même façon, s'il y a un accolement non-contradictoire et infiniment prolongeable d'un sous-arbre de D_k (respectivement δ_h) avec un arbre de $\mathrm{INC}(A^{O,\notin})$ (respectivement de $\mathrm{INC}(A^{O,\in})$), un choix convenable de α_k (respectivement β_h) est toujours possible.

Donc il suffit de regarder les $(+,\in)$-dendrites $D_1,\ldots,D_\rho$, où $\rho \leqslant r$, tels que tout accolement d'un sous-arbre d'un D_k avec un $(O,\in)$-sous-arbre de A est contradictoire, et tels que tout accolement d'un sous-arbre de D_k avec un arbre de $\mathrm{INC}(A^{O,\notin})$ est finiment prolongeable, et de regarder les $(+,\notin)$-dendrites $\delta_1,\ldots,\delta_\chi$, où $\chi \leqslant q$, tels que tout accolement d'un sous-arbre d'un ϕ_h avec un $(O,\notin)$-sous-arbre de A est contradictoire, et tels que tout accolement d'un sous-arbre d'un δ_h avec un arbre de $\mathrm{INC}(A^{O,\in})$ est finiment prolongeable.

Or les α_k choisis par rapport aux $(+,\in)$-dendrites doivent satisfaire à l'accolement d'un sous-arbre de D_k avec un arbre de $\mathrm{INC}(A^{O,\notin})$. Puisque ceci est finiment prolongeable, nous pouvons en trouver le prolongement; c'est-à-dire, nous trouvons un ensemble fini d'arbres corrects et distincts modulo $\sim$, pour chaque k , $1 \leqslant k \leqslant \rho$ et pour chaque h , $1 \leqslant h \leqslant \chi$, dans lesquels il faut choisir les α_k et les β_h . Puisque ces ensembles sont finis, la décision sur la satisfaction de la quatrième condition est faite dans un nombre fini d'étapes.

Donc pour n'importe quel arbre A , cet algorithme décide dans un nombre fini de pas si A est contradictoire ou non, par récurrence sur la K-hauteur de A .

Quant à la correction dans le cas general, un arbre A non-contradictoire quelconque est correct si et seulement si:

i) A^{O} est finiment prolongeable (ou A^{O} est $\mathsf{A}(A^{O,\in}, A^{O,\notin})$), et

ii) La choix envisagée dans la condition iv) de non-contradiction est unique, et anéantit $\mathsf{DI}(A^{O})$.

Pour les autres questions, un arbre non-contradictoire quelconque A est finiment prolongeable si et seulement si A^{O} est finiment prolongeable, et pour déterminer $\mathsf{PRL}(A)$ dans un tel cas, il suffit de déterminer $\mathsf{PRL}(A^{O})$ puis d'en exclure les arbres qui n'ont pas d'accolement non-contradictoire avec A .

Remarquons que nous avons trouvé les critères ci-dessus sur l'hypothèse qu'il existe un modèle de la théorie, mais que les critères eux-mêmes sont formels, ne dépendant pas sur le modèle en question.

Finalement, nous donnons un critère de décision pour la relation $-\in-$. Soit D_0 , la domaine canonique, la famille de classes d'équivalences modulo $\sim$, et soit θ et ψ deux membres de D_0 . Soient A et B deux arbres membres de θ et ψ respectivement. Soit C_A le $(O,\in)$-dendrite à sous-arbre A . Alors $\ell_{\in_0}(\theta,\psi) = \mathsf{T}$ si et seulement si $\mathsf{A}(C_A, B)$ est non-contradictoire. Il est facile à voir que cette définition ne dépend pas de la choix de A et B , et donc la relation $\in_0$ est décidable dans la domaine D_0 .

5. Théorie formelle; consistence.

Nous sommes arrivés à la situation suivante; Sous l'hypothèse qu'il existe un modèle $(D, \ell_{\in})$ de la théorie, nous avons élaboré des critères formels, et construit un modèle canonique $(D_0, \ell_{\in_0})$, qui satisfera, sous l'hypothèse de l'existence d'un modèle, aux conditions posées sur les modèles. Donc pour démontrer la consistence de la théorie par rapport aux modèles, il suffit de démontrer que $(D_0, \ell_{\in_0})$ est bien un modèle.

Pour la théorie formelle, nous prenons les critères de non-contradiction, correction, équivalence, et prolongeabilité finie comme définitions récursives de ces propriétés. Nous voulons démontrer que $(D_0, \ell_{\in_0})$, donné dans la section précedente, est un modèle de cette théorie; c'est-à-dire, nous voulons démontrer que:

i) D_0 est au moins dénombrablement infinie. (Dans ce cas, D_0 ne peut pas être non-dénombrable.) Il suffira de montrer comment on peut construire, pour n'importe quel entier k, k arbres distincts modulo $\sim$ et corrects.

ii) La condition sur $\ell_{\in}$ soit satisfaite par $\ell_{\in_0}$; c'est-à-dire, utilisant la construction de la section précedente, que si A et B sont deux arbres corrects et distincts modulo $\sim$, alors il existe un arbre correct D, tel que ou bien $\mathsf{A}(C_D, A)$ est non-contradictoire et $\mathsf{A}(C_D, B)$ est contradictoire, ou bien inversement.

iii) La Condition Existentielle soit satisfaite; c'est-à-dire, si A est un arbre non-contradictoire, il existe au moins un arbre correct A^* tel que $\mathsf{A}(A, A^*)$ est non-contradictoire.

iv) La condition sur la prolongeabilité infinie soit satisfaite; c'est-à-dire, si A est un arbre infiniment prolongeable, alors on peut construire, pour n'importe quel entier k, k arbres corrects A_i^* tels que pour $i \neq j$, $A_i^* \not\sim A_j^*$, et que pour chaque i, $\mathsf{A}(A, A_i^*)$ est non-contradictoire.

Pour arriver à ce but, il faut passer par une série de lemmes interdépendents, démontrés par la récurrence sur la K-hauteur des arbres. Nous donnons les lemmes ici, indexés par la K-hauteur; apres la démonstration, nous pourrons omettre les indexes. La démonstration des lemmes pour l'arbre de K-hauteur zéro est immédiate, et on s'en passe. Nous donnerons la démonstration du lemme A_n complètement, pour donner une idée du genre; les autres démonstrations ne seront qu'esquissées.

Lemme A_n : Soit A un arbre contradictoire, et B un arbre quelconque, tels que $Kh(A)$ et $Kh(B)$ ne dépassent pas n. Alors $\mathsf{A}(A,B)$ est contradictoire.

Lemme B_n : Pour tout dendrite B, tel que $Kh(B) \leqslant n$, $\mathsf{A}(B, \neg B)$ est contradictoire.

Corollaire 1: Pour tout arbre A tel que $Kh(A) \leqslant n$, chaque accolement de A avec un arbre de $\mathsf{K}(A)$ est contradictoire.

Corollaire 2: Pour tout $\mathcal{O}$-arbre A tel que $Kh(A) \leqslant n+1$, chaque accolement d'un sous-arbre de A avec un arbre de $\mathsf{INC}(A)$ est contradictoire.

Lemme C_n : Soit A un arbre non-contradictoire, et soit B_n un dendrite, les deux de K-hauteur $\leqslant n$. Alors ou bien $\mathsf{A}(A,B)$ est non-contradictoire, ou bien $\mathsf{A}(A,\neg B)$ est non-contradictoire.

Corollaire 1 : Soit A un arbre non-contradictoire, et B un arbre quelconque, les deux de K-hauteur $\leqslant n$. Alors ou bien $\mathsf{A}(A,B)$ est non-contradictoire, ou bien il existe un arbre Q de $\mathsf{K}(B)$ tel que $\mathsf{K}(A,Q)$ est non-contradictoire.

Corollaire 2 : Soit A un arbre non-contradictoire de K-hauteur $\leqslant n$, et soit B un O-arbre de K-hauteur $\leqslant n+1$. Alors ou bien il y a un accolement non-contradictoire de A avec un sous-arbre de B, ou bien il y a un accolement non-contradictoire de A avec un arbre de $\mathsf{INC}(B)$.

Lemme D_n : La relation $\sim$ entre arbres de K-hauteur $\leqslant n$ est reflexive et transitive.

Lemme E_n : Soit A un arbre finiment prolongeable de K-hauteur $\leqslant n$. Alors chaque arbre A_i^* de $\mathsf{PRL}(A)$ est correct, pour $i \neq j$, on a $A_i^* \not\sim A_j^*$, et pour tout i, $\mathsf{A}(A_i^*,A)$ est non-contradictoire. De plus, pour tout arbre correct B de hauteur $\leqslant n$, la non-contradiction de $\mathsf{A}(A,B)$ implique l'existence d'un A_i^* dans $\mathsf{PRL}(A)$ tel que $A_i^* \sim B$.

Corollaire 1 : Un arbre A est correct si et seulement si $\mathsf{PRL}(A)$ n'a qu'un seul élément.

Corollaire 2 : Pour tout arbre correct A il existe un O-arbre correct A^* tel que $A \sim A^*$.

Lemme F_n : Soit A un arbre finiment prolongeable, et B un arbre quelconque, les deux de K-hauteur $\leqslant n$. Alors

$\mathbb{A}(A,B)$ est finiment prolongeable.

Lemme G_n : Soit A un arbre infiniment prolongeable, et soit B un dendrite, de K-hauteur $\leqslant n$. Alors ou bien $\mathbb{A}(A,B)$ est infiniment prolongeable, ou bien $\mathbb{A}(A,\neg B)$ est infiniment prolongeable.

Corollaire 1 : Soit A un arbre infiniment prolongeable, et B un arbre quelconque, les deux de K-hauteur $\leqslant n$. Alors ou bien $\mathbb{A}(A,B)$ est infiniment prolongeable, ou bien il y a un accolement infiniment prolongeable de A avec un arbre de $\mathbb{K}(B)$.

Corollaire 2 : Soit A un arbre infiniment prolongeable de K-hauteur $\leqslant n$, et soit B un $\mathcal{O}$-arbre de K-hauteur $\leqslant n+1$. Alors il y a un accolement infiniment prolongeable de A ou bien avec un sous-arbre de B ou bien avec un arbre de $\mathbb{INC}(B)$.

Lemme H_n: Soit A un arbre quelconque, et B un arbre correct, les deux de K-hauteur $\leqslant n$. Si $\mathbb{A}(A,B)$ est non-contradictoire, il est correct.

Lemme I_n: Soit A et B deux arbres corrects de hauteur $\leqslant n$. Alors $A \sim B$ si et seulement si $\mathbb{A}(A,B)$ est non-contradictoire.

Corollaire: Sous les conditions de Lemme H_n, $\mathbb{A}(A,B) \sim B$.

Lemme J_n : Soit A et B deux arbres corrects de K-hauteur $\leqslant n$, tels que $A \not\sim B$. Alors il existe un arbre Q de $\mathbb{K}(A)$ tel que $\mathbb{A}(Q,B)$ est non-contradictoire, et il existe un arbre R de $\mathbb{K}(B)$ tel que $\mathbb{A}(R,A)$ est non-contradictoire.

Lemme K_n : Soit A et B deux arbres corrects et équivalents, et C un arbre quelconque, tous de K-hauteur $\leqslant n$. Alors $\mathsf{A}(A,C)$ est non-contradictoire si et seulement si $\mathsf{A}(B,C)$ est non-contradictoire.

Dans les démonstrations suivantes, nous supposerons les Lemmes jusqu'a l'indexe n-1 .

Démonstration du Lemme A_n : Nous regardons les quatres conditions pour la non-contradiction.

S'il y a un accolement contradictoire d'un $(O,\in)$-sous arbre de A avec un $(O,\notin)$-sous-arbre de A , il sera ainsi dans $\mathsf{A}(A,B)$.

Supposons qu'il y a un $(+,\in)$-dendrite D_k de A tel que chaque accolement d'un sous-arbre de D_k avec un arbre de $\mathrm{INC}(A^{O,\notin})$ est contradictoire. Soit Q un arbre de $\mathrm{INC}(\mathsf{A}(A,B)^{O,\notin})$. Par la construction, alors, il y a un arbre R de $\mathrm{INC}(A^{O,\notin})$ et un arbre S de $\mathrm{INC}(B^{O,\notin})$ tels que Q est $\mathsf{A}(R,S)$. Pour un sous-arbre E de D_k donné, $\mathsf{A}(E,R)$ est contradictoire, et donc par Lemme A_{n-1} , $\mathsf{A}(E,Q)$ est contradictoire, et $\mathsf{A}(A,B)$ ne satisfait pas à la deuxième condition pour la non-contradiction .

Le cas où A ne satisfait pas à la troisième condition de la non-contradiction est pareil au cas précédent.

Supposons que $\mathsf{A}(A,B)$, et donc A , satisfait aux trois premières conditions de la non-contradiction, et que A ne satisfait pas à la quatrième. Soient $D_1,D_2,\ldots,D_r$ les $(+,\in)$-dendrites de A tels que chaque accolement d'un sous-arbre d'un D_k avec un $(O,\in)$-sous-arbre de A est contradictoire, et tels que chaque accolement d'un sous-arbre d'un D_k avec un arbre de $\mathrm{INC}(A^{O,\notin})$ est finiment prolongeable. Pour chaque k , $1 \leqslant k \leqslant r$, soit R_k la réunion des prolongements des accolements d'un sous-arbre de D_k avec un arbre de $\mathrm{INC}(A^{O,\notin})$. Par la lemme E_{n-1} , chaque arbre de R_k est correct, et distinct des autres modulo $\sim$; en faisant appel au Lemme D_{n-1}, on peut former D_k^* , l'ensemble composé d'un élément de chaque élément de $R_k/\sim$.

De même façon, où $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_q$ sont les $(+,\notin)$-dendrites de A tels que tout accolement d'un sous-arbre d'un δ_h avec un $(O,\notin)$-sous-arbre de A est contradictoire, et tels que tout accolement d'un sous-arbre d'un δ_h avec un arbre de $\mathrm{INC}(A^{O,\in})$ est finiment prolongeable, on construit les ensembles d'arbres corrects δ_h^* , $1 \leqslant h \leqslant q$. La supposition que A ne satisfait pas à la quatrième condition de la non-contradiction implique qu'il n'existe aucune manière de choisir un arbre Y_k dans chaque D_k^* et un arbre Y_h^* dans chaque δ_h^* telle que pour tout k et h , $Y_k \not\sim Y_h^*$.

Soient maintenant $D_1, \ldots, D_\rho$, où $\rho \leqslant r$, les $(+,\in)$-dendrites de A tels que, en plus, chaque accolement d'un sous-arbre d'un D_k avec un $(O,\in)$-sous-arbre de B est contradictoire. Puisque chaque accolement d'un sous-arbre d'un D_k avec un arbre de $\mathrm{INC}(A^{O,\notin})$ est finiment prolongeable, alors par Lemme F_{n-1} chaque accolement d'un sous-arbre d'un D_k avec un arbre de $\mathrm{INC}(A(A,B)^{O,\notin})$ est finiment prolongeable. Pour $1 \leqslant k \leqslant r$, soit R_k^* la réunion des prolongements des accolements d'un sous-arbre de D_k avec un arbre de $\mathrm{INC}(\mathcal{A}(A,B)^{O,\notin})$. Soit α_k l'ensemble d'un arbre de chaque élément de $R_k^*/\sim$. (Utilisation des lemmes D_{n-1} et E_{n-1} .) Soit P_k un arbre de α_k . Alors par Lemme D_{n-1} , P_k est un arbre correct de K-hauteur $\leqslant n-1$, tel que pour quelque sous-arbre E_{kn_k} de D_k , et quelque arbre Q de $\mathrm{INC}(\mathcal{A}(A,B)^{O,\notin})$, $\mathcal{A}(P_k,E_{kn_k},Q)$ est non-contradictoire. Or Q est l'accolement de l'arbre χ de $\mathrm{INC}(A^{O,\notin})$ et l'arbre ξ de $\mathrm{INC}(B^{O,\notin})$. Donc par Lemme A_{n-1} , $\mathcal{A}(P_k,E_{kn_k},\chi)$ est non-contradictoire, et par Lemme D_{n-1} , P_k est dans B_k^* , modulo $\sim$, et donc $\alpha_k \subset B_k^*$, modulo $\sim$.

Soient ensuite $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_\psi$, où $\psi \leqslant q$, les $(+,\notin)$-dendrites de A tels que, en plus, chaque accolement d'un sous-arbre d'un δ_h avec un $(O,\notin)$-sous-arbre de B est contradictoire. Par le Lemme F_{n-1} , chaque accolement d'un sous-arbre d'un δ_h avec un arbre de $\mathrm{INC}(\mathcal{A}(A,B)^{O,\in})$ est finiment prolongeable. Pour $1 \leqslant h \leqslant q$, soit S_h^* la réunion des prolongements des accolements d'un sous-arbre de δ_h avec un arbre de $\mathrm{INC}(\mathcal{A}(A,B)^{O,\in})$. Soit Θ_h l'ensemble composé d'un arbre de chaque élément de $S_h^*/\sim$. Comme ci-dessus, $\Theta_h \subset \delta_h^*$, modulo $\sim$.

Soient ensuite $D_{r+1},\ldots,D_\mu$, où $r \leqslant \mu$, les $(+,\in)$-dendrites de A tels que chaque accolement d'un sous-arbre d'un D_k avec un $(O,\in)$-sous-arbre de $\mathcal{A}(A,B)$ est contradictoire, tels que chaque accolement d'un sous-arbre d'un D_k avec un arbre de $\mathrm{INC}(\mathcal{A}(A,B)^{O,\notin})$ est finiment prolongeable, et tels que, pour tout k , $r+1 \leqslant k \leqslant \mu$, il y a un accolement infiniment prolongeable d'un sous-arbre de D_k avec un arbre de $\mathrm{INC}(A^{O,\notin})$. Pour $r+1 \leqslant k \leqslant \mu$, soit R_k^* la réunion des prolongements des accolements d'un sous-arbre de D_k avec un arbre de $\mathrm{INC}(\mathsf{A}(A,B)^{O,\notin})$, et soit α_k l'ensemble composé d'un arbre de chaque élément de $R_k^*/\sim$.

Soient $\delta_{q+1},\ldots,\delta_\nu$, où $q \leqslant \nu$, les $(+,\notin)$-dendrites de A tels que chaque accolement d'un sous-arbre d'un δ_h avec un $(O,\notin)$-sous-arbre de $\mathsf{A}(A,B)$ est contradictoire, tels que chaque accolement d'un sous-arbre d'un δ_h avec un arbre de $\mathrm{INC}(\mathsf{A}(A,B)^{O,\in})$ est finiment prolongeable, et tels que, pour tout h , $q+1 \leqslant h \leqslant \nu$, il y a un accolement infiniment prolongeable d'un sous-arbre de δ_h avec un arbre de $\mathrm{INC}(A^{O,\in})$. Pour $q+1 \leqslant h \leqslant \nu$, soit S_h^* la réunion des prolongements des accolements d'un sous-arbre de δ_h avec un arbre de $\mathrm{INC}(\mathsf{A}(A,B)^{O,\in})$. Soit α_h' l'ensemble composé d'un arbre de chaque élément de $S_h^*/\sim$.

Soient $G_1,G_2,\ldots,G_p$ les $(+,\in)$-dendrites de B tels que chaque accolement d'un sous-arbre d'un G_i avec un $(O,\in)$-sous-arbre de $\mathsf{A}(A,B)$ est contradictoire, et tels que chaque accolement d'un sous-arbre d'un G_i avec un arbre de $\mathrm{INC}(\mathsf{A}(A,B)^{O,\notin})$ est finiment prolongeable. Pour chaque i , $1 \leqslant i \leqslant p$, soit M_i la réunion des prolongements des accolements d'un sous-arbre de G_i avec un arbre de $\mathrm{INC}(\mathsf{A}(A,B)^{O,\notin})$. Soit G_i^* l'ensemble composé d'un arbre de chaque élément de $M_i/\sim$.

Soient $H_1,H_2,\ldots,H_t$ les $(+,\notin)$-dendrites de B tels que chaque accolement d'un sous-arbre d'un H_j avec un

$(O,\notin)$-sous-arbre de $\mathsf{A}(A,B)$ est contradictoire, et tels que chaque accolement d'un sous-arbre d'un H_j avec un arbre de $\mathrm{INC}(\mathsf{A}(A,B)^{O,\in})$ est finiment prolongeable. Soit N_j la réunion des prolongements des accolements d'un sous-arbre d'un H_j avec un arbre de $\mathrm{INC}(\mathsf{A}(A,B)^{O,\in})$. Soit H_j^* l'ensemble composé d'un arbre de chaque élément de $N_j/\sim$.

Supposons maintenant que $\mathsf{A}(A,B)$ satisfait à la quatrième condition de la non-contradiction, et trouvons une contradiction. Sous cette hypothèse, il existe au moins une manière de choisir un arbre Y_k de chaque α_k , $1 \leqslant k \leqslant \rho$, et $r+1 \leqslant k \leqslant \mu$, un arbre Y_i^* dans chaque G_i^* , $1 \leqslant i \leqslant p$, un arbre Y_h' dans chaque α_h' , $1 \leqslant h \leqslant \chi$ et $q+1 \leqslant h \leqslant \nu$, et un arbre Y_j'' dans chaque H_j^* , $1 \leqslant j \leqslant t$, telle que pour les ranges d'indexes donnés, $Y_k \not\sim Y_h'$, $Y_k \not\sim Y_j''$, $Y_i^* \not\sim Y_h'$, et $Y_i^* \not\sim Y_j''$.

Pour $\rho+1 \leqslant k \leqslant r$, soit γ_k un $(O,\in)$-sous-arbre de B et δ_k un sous-arbre de D_k tels que $\mathsf{A}(\gamma_k,\delta_k)$ est non-contradictoire. Puisque $\mathsf{A}(A,B)$ est non-contradictoire, chaque accolement d'un $(O,\notin)$-sous-arbre de $\mathsf{A}(A,B)$ avec γ_k est contradictoire. Donc par Lemme A_{n-1} chaque accolement de $\mathsf{A}(\gamma_k,\delta_k)$ avec un $(O,\notin)$-sous-arbre de $\mathsf{A}(A,B)$ est contradictoire. Donc par Lemme C_{n-1} , Corollaire 2 , il y a un arbre λ_k de $\mathrm{INC}(\mathsf{A}(A,B)^{O,\notin})$ tel que $\mathsf{A}(\gamma_k,\delta_k,\lambda_k)$ est non-contradictoire, et par Lemme F_{n-1} , $\mathsf{A}(\gamma_k,\delta_k,\lambda_k)$ est finiment prolongeable. Soit Y_k un arbre correct tel que $\mathsf{A}(Y_k,\gamma_k,\delta_k,\lambda_k)$ est non-contradictoire. Par Lemme E_{n-1}, $\mathrm{Kh}(Y_k) \leqslant n-1$. Par Lemme A_{n-1} , $\mathsf{A}(Y_k,\delta_k,\lambda_k)$ est non-contradictoire, et donc $Y_k \in \alpha_k$ (modulo $\sim$).

Supposons qu'il y a un h , $1 \leqslant h \leqslant \nu$, tel que $Y_k \in \alpha'_h$ modulo $\sim$. Alors il y a un sous-arbre χ_h de δ_h et un arbre τ_h de $\mathrm{Inc}(\mathcal{A}(A,B)^{O,\in})$ tels que $\mathcal{A}(Y_k,\chi_h,\tau_h)$ est non-contradictoire. Par Lemme H_{n-1} et Lemme I_{n-1} , Corollaire, $\mathcal{A}(Y_k,\gamma_k,\delta_k,\lambda_k)$ et $\mathcal{A}(Y_k,\chi_h,\tau_h)$ sont corrects et équivalents à Y_k . Par Lemme D_{n-1} $\mathcal{A}(Y_k,\gamma_k,\delta_k,\lambda_k) \sim \mathcal{A}(Y_k,\chi_h,\tau_h)$ et par Lemmes I_{n-1} et A_{n-1}, $\mathcal{A}(\gamma_k,\delta_h)$ est non-contradictoire, contraire aux Lemmes B_{n-1} et A_{n-1} . Donc pour $1 \leqslant h \leqslant \nu$, $Y_k \notin \alpha'_h$ (modulo $\sim$).

Supposons ensuite qu'il y a un j , $1 \leqslant j \leqslant t$, tel que $Y_k \in H^*_j$ (modulo $\sim$). Alors il y a un sous-arbre χ_j de H_j et un arbre τ_j de $\mathrm{Inc}(\mathcal{A}(A,B)^{O,\in})$ tel que $\mathcal{A}(Y_k,\chi_j,\tau_j)$ est non-contradictoire. Par Lemme H_{n-1} , $\mathcal{A}(Y_k,\gamma_k,\tau_j)$ est correct et équivalent à Y_k . Par Lemme D_{n-1} , $\mathcal{A}(Y_k,\chi_j,\tau_j) \sim \mathcal{A}(Y_k,\gamma_k,\delta_k,\lambda_k)$, et donc par Lemmes I_{n-1} et A_{n-1} , $\mathcal{A}(\gamma_k,\tau_j)$ est non-contradictoire, contraire au Lemme B_{n-1}. Donc pour $1 \leqslant j \leqslant t$, $Y_k \notin H^*_j$ (modulo $\sim$).

Pour $\chi+1 \leqslant h \leqslant q$, soit γ_h un $(O,\notin)$-sous-arbre de B et τ_h un sous-arbre de δ_h tels que $\mathcal{A}(\gamma'_h,\tau_h)$ est non-contradictoire. Puisque $\mathcal{A}(A,B)$ est non-contradictoire, chaque accolement de γ_h avec un $(O,\in)$-sous-arbre de $\mathcal{A}(A,B)$ est contradictoire. Par Lemme A_{n-1} , chaque accolement de $\mathcal{A}(\gamma_h,\delta_h)$ avec un $(O,\in)$-sous-arbre de $\mathcal{A}(A,B)$ est aussi contradictoire, et donc par Lemme C_{n-1} , Corollaire 2 , il existe un arbre λ_h de $\mathrm{Inc}(\mathcal{A}(A,B)^{O,\in})$ tel que $\mathcal{A}(\gamma_h,\tau_h,\lambda_h)$ est non-contradictoire, et par Lemme F_{n-1} , finiment prolongeable.

Soit Y_h un arbre correct tel que $\mathsf{A}(Y_h, \delta_h, \tau_h, \lambda_h)$ est non-contradictoire. Par Lemme E_n, $Kh(Y_h) \leqslant n-1$. Par Lemme A_{n-1} $\mathsf{A}(Y_h, \tau_h, \lambda_h)$ est non-contradictoire, et donc $Y_h \in \alpha'_h$ (modulo $\sim$). Par une méthode analogue à la précédente, on peut montrer que pour chaque k, $1 \leqslant k \leqslant \nu$, $Y_k \not\in \alpha_k$ (modulo $\sim$) et pour chaque i, $1 \leqslant i \leqslant p$, $Y_h \not\in G^*_i$ (modulo $\sim$).

Donc il existe au moins une manière de choisir un arbre Y_k dans chaque α_k, $1 \leqslant k \leqslant \mu$, un arbre Y^*_i dans chaque G^*_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, un arbre Y'_h dans chaque α'_h, $1 \leqslant h \leqslant \nu$, et un arbre Y''_j dans chaque H^*_j, $1 \leqslant j \leqslant t$, telle que pour les ranges d'indexes données, $Y_k \curlyvee Y'_h$, $Y_k \curlyvee Y''_j$, $Y^*_i \curlyvee Y'_h$ et $Y^*_i \curlyvee Y''_j$. Puisque pour $1 \leqslant k \leqslant r$, $\alpha_k \subseteq D^*_k$, modulo $\sim$, et pour $1 \leqslant h \leqslant q$, $\alpha'_h \subseteq \delta^*_h$, modulo $\sim$, il existe une manière de choisir un arbre Y_k dans chaque D^*_k, $1 \leqslant k \leqslant r$, et un arbre Y'_h dans chaque δ^*_h, $1 \leqslant h \leqslant q$, telle que pour les ranges de k et de h données, $Y_k \curlyvee Y'_h$. Mais ceci contredit le fait que A ne satisfait pas à la quatrième condition de la non-contradiction. Donc si A ne satisfait pas à cette quatrième condition, $\mathsf{A}(A,B)$ n'y satisfait pas non plus. Plus généralement, si A est contradictoire, $\mathsf{A}(A,B)$ l'est aussi.

Démonstration du Lemme B_n : Le cas où B est un $(+,\in)$-dendrite est général. On démontre que par le Lemme B_{n-1}, $\mathsf{A}(B,\neg B)$ ne satisfait pas à la deuxième condition de la non-contradiction.

Démonstration du Lemme C_n : Encore, il est général que B est un $(+,\in)$-dendrite. Dans les deux cas possible de la contradiction de $\mathsf{A}(A,B)$, la supposition que $\mathsf{A}(A,\neg B)$ est contradictoire entraine une contradiction. Pour la première corollaire, on utilise le lemme C_n et la récurrence sur le nombre de dendrites de A . Pour la deuxième corollaire, on utilise la première et la récurrence sur le nombre de sous-arbres de A .

Démonstration du Lemme D_n : La reflexivité est une conséquence du Lemme B_n , et la transitivité du Lemme C_n et Corollaire.

Démonstration du Lemme E_n : On vérifie que la construction donnée P. 16 est effective. Les Corollaires sont immédiats.

Démonstration du Lemme F_n : On applique le critère de prolongeabilité finie et Lemme F_{n-1} .

Démonstration du Lemme G_n et Corollaires: Si l'accolement de A avec le +-dendrite de B ou $\neg B$ est non-contradictoire, il est infiniment prolongeable par définition. Sinon, il est général de supposer que B est un $(+,\in)$-dendrite, et que $\mathbb{A}(A,B)$ est contradictoire. Puisque $\mathbb{A}(A,\neg B)$ est alors non-contradictoire, une considération en série des genres possibles de contradiction de $\mathbb{A}(A,B)$ avec les Lemmes G_{n-1} , Corollaires 1 et 2 , mène au résultat voulu. La démonstration de la première corollaire utilise le Lemme G_n et la récurrence sur les dendrites de A . La démonstration de la deuxième utilise la première et la récurrence sur les sous-arbres de A .

Démonstration du Lemme H_n : $\mathrm{DI}(\mathbb{A}(A,B)^{\circ}) \subseteq \mathrm{DI}(A^{\circ})$ (modulo $\sim$). Donc la choix des arbres correspondants aux +-dendrites de $\mathbb{A}(A,B)$ ce qui existe par la non-contradiction de $\mathbb{A}(A,B)$, est une sous-choix de la choix unique par rapport aux + -dendrites de A .

Démonstration du Lemme I_n : Le "seulement si" est immédiat d'après Lemme C_n , Corollaire 1 . Pour le "si", on suppose que pour quelque arbre Q de $\mathfrak{K}(B)$, $\mathfrak{A}(A,Q)$ est non-contradictoire, et donc qu'il y a un dendrite β de B tel que $\mathfrak{A}(A,\beta)$ et $\mathfrak{A}(A,\neg\beta)$ sont non-contradictoires. Le cas où β est un $(+,\in)$-dendrite est général; on montre que l'un de $\mathfrak{A}(A,\beta)$ et $\mathfrak{A}(A,\neg\beta)$ n'est pas correct, en ce qu'une choix convenable n'existe pas.

Démonstration du Lemme J_n : Par le Lemme H_n .

Démonstration du Lemme K_n : Par Lemmes D_n et I_n .

Dans la suite, nous utiliserons ces Lemmes sans restriction sur la K-hauteur des arbres, et nous les noterons sans indexes. Maintenant nous allons démontrer que $(D_0, \ell_{\in_0})$ satisfait formellement aux conditions sur un modèle de la théorie.

Rappellons la Condition sur la Prolongeabilité Infinie: Soit A un arbre infiniment prolongeable, et k un entier quelconque; Alors dans un nombre fini d'étapes k arbres corrects et non-équivalents peuvent être construits qui ont un accolement non-contradictoire avec A .

Démonstration: Par récurrence sur la K-hauteur de A . Pour l'unique arbre infiniment prolongeable de K-hauteur zéro, $*$, il suffit de démontrer que n'importe quel nombre k d'arbres corrects et non-équivalents peuvent être construits. Nous utiliserons la récurrence sur k .

Evidemment P_1 =  est un arbre correct. Soit P_{n+1} l'arbre avec un seul $(\circ,\in)$-dendrite, à sous-arbre P_n , et avec autant de $(\circ, \notin)$-dendrites qu'il y a d'arbres dans $\mathcal{K}(P_n)$, dont les sous-arbres respectifs sont les arbres de $\mathcal{K}(P_n)$, et que ceux-ci soient tous les dendrites de P_{n+1} . Puisque tout accolement d'un arbre de $\mathcal{K}(P_n)$ avec P_n est contradictoire, par Lemme B , alors P_{n+1} est non-contradictoire. Soit Q un arbre de $\mathrm{INC}(P_{n+1})$. Alors Q est l'accolement d'un arbre du complément de chaque sous-arbre de P_{n+1} . Par construction, puisque chaque dendrite de P_n est un $\circ$-dendrite, alors chaque arbre de $\mathcal{K}(P_n)$ est un dendrite; alors il y a un dendrite β de P_n tel que $\neg\beta$ et $\neg\neg\beta$ sont dendrites de Q . Mais $\mathsf{A}(\neg\beta, \beta)$ est contradictoire par Lemme B ; alors par Lemme A , Q est contradictoire, et P_{n+1} est correct.

Puisque $\mathsf{A}(*\ \overset{*}{\underset{\circ}{\notin}})$ est non-contradictoire, alors $\mathsf{A}(P_1,P_2)$ est contradictoire, et donc par Lemme I , $P_1 \not\sim P_2$. Supposons que pour $m < n$, $P_m \not\sim P_n$, c'est-à-dire, par Lemme I , que $\mathsf{A}(P_m,P_n)$ est contradictoire. Supposons ensuite que pour quelque $m < n+1$, $P_m \sim P_{n+1}$, c'est-à-dire, que $\mathsf{A}(P_m,P_{n+1})$ est non-contradictoire. Alors chaque accolement d'un $(\circ \notin)$-sous-arbre de P_m avec un $(\circ \notin)$-sous-arbre de P_{n+1} est contradictoire, c'est-à-dire, par la construction, chaque accolement de P_{m-1} avec un arbre de $\mathcal{K}(P_n)$ est contradictoire. Puisque P_{m-1} est non-contradictoire, alors $\mathsf{A}(P_{m-1},P_n)$ est non-contradictoire, contraire à l'hypothèse. Donc $P_m \not\sim P_{n+1}$, et, par récurrence, aucune paire d'arbres dans la suite $P_1,P_2,\ldots$ n'est équivalent. La suite d'arbres ainsi construite définit la suite d'ensembles $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\{\{\emptyset\}\}\}$,... N'importe quel nombre fini de ces arbres sont construit dans un nombre fini d'étapes.

Nous procédons ensuite au cas général de la récurrence, et supposons que pour chaque arbre infiniment prolongeable B de K-hauteur $< n$, et pour n'importe quel entier k , nous pouvons construire dans un nombre fini d'étapes k arbres corrects et non-équivalents dont l'accolement avec B est non-contradictoire. Soit maintenant A un arbre infiniment prolongeable de K-hauteur n . Alors A^{O} est infiniment prolongeable aussi, et donc il y a au moins un arbre infiniment prolongeable dans $\mathbf{INC}(A^{O})$.

Soient $A_1,A_2,\ldots,A_a$ les $(+,\in)$-dendrites de A tels que chaque accolement d'un A_i avec un $(O,\in)$-sous-arbre de A est contradictoire, et tels que chaque accolement d'un sous-arbre d'un A_i avec un arbre de $\mathbf{INC}(A^{O,\notin})$ est finiment prolongeable. Soient $A_{a+1},A_{a+2},\ldots,A_b$ les $(+,\in)$-dendrites de A tels que chaque accolement d'un sous-arbre d'un A_i avec un $(O,\in)$-sous-arbre de A est contradictoire, et tels que pour tout i , $a+1 \leqslant i \leqslant b$, il y a un accolement infiniment prolongeable d'un sous-arbre de A_i avec un arbre de $\mathbf{INC}(A^{O,\notin})$. Soient $A_{b+1},A_{b+2},\ldots,A_c$ les $(+,\notin)$-dendrites de A tels que chaque accolement d'un sous-arbre d'un A_i avec un $(O,\notin)$-sous-arbre de A est contradictoire, et tels que tout accolement d'un sous-arbre d'un A_i avec un arbre de $\mathbf{INC}(A^{O,\in})$ est finiment prolongeable. Soient $A_{c+1},A_{c+2},\ldots,A_d$ les $(+,\notin)$-dendrites de A tels que tout accolement d'un sous-arbre d'un A_i avec un $(O,\notin)$-sous-arbre de A est contradictoire, et tels que pour tout i, $c+1 \leq i \leq d$, il y a un accolement infiniment prolongeable d'un sous-arbre de A_i avec un arbre de $\mathrm{INC}(A^{O,\in})$. Pour $1 \leq i \leq a$, soit R_i la réunion des prolongements des accolements d'un sous-arbre de A_i avec un arbre de $\mathrm{INC}(A^{O,\notin})$. Pour $b+1 \leq i \leq c$, soit R_i la réunion des prolongements des accolements d'un sous-arbre de A_i avec un arbre de $\mathrm{INC}(A^{O,\in})$. Pour $1 \leq i \leq a$ et $b+1 \leq i \leq c$, soit A_i^* l'ensemble composé d'un arbre de chaque élément de $R_i/\sim$. Par Lemme D, chaque A_i^* est unique modulo $\sim$.

Puisque A est non-contradictoire, il existe au moins une manière de choisir un arbre Y_i dans chaque A_i^* telle que $1 \leq i \leq a$ et $b+1 \leq j \leq c$ implique que $Y_i \not\sim Y_j$. Fixons cette choix. En plus, par l'hypothèse de récurrence, il est possible de construire, pour chaque A_i, $a+1 \leq i \leq b$, au moins $c-b+1$ arbres corrects et non-équivalents qui ont un accolement non-contradictoire avec un sous-arbre de A_i et un arbre de $\mathrm{INC}(A^{O,\notin})$. Donc au moins un d'eux n'est équivalent à aucun des arbres Y_i, $b+1 \leq i \leq c$. Fixons un tel arbre Y_i pour chaque i, $a+1 \leq i \leq b$. Encore, par l'hypothèse de récurrence, on peut construire au moins $b+1$ arbres corrects et non-équivalents chacun des quels a un accolement non-contradictoire avec un sous-arbre de A_i et un arbre de $\mathrm{INC}(A^{O,\in})$. Donc au moins un d'entre eux n'est équivalent à aucun des arbres Y_i, $1 \leq i \leq b$. Fixons un tel arbre Y_i pour chaque i, $c+1 \leq i \leq d$.

Puisque $\mathrm{INC}(A^O)$ a au moins un arbre infiniment prolongeable, alors par l'hypothèse de récurrence on peut construire au moins $d+k$ arbres corrects et non-équivalents qui ont un accolement non-contradictoire avec un arbre de $\mathrm{INC}(A^O)$, et donc au moins k arbres tel qui ne sont équivalent à aucun arbre Y_i , $1 \leqslant i \leqslant d$. Fixons ces derniers arbres, et notons-les $Y_{d+1}, Y_{d+2}, \ldots, Y_{d+k}$.

Pour $1 \leqslant i \leqslant b$, soit B_i le $(O,\in)$-dendrite à sous-arbre Y_i . Pour $b+1 \leqslant i \leqslant d$, soit B_i le $(O,\notin)$-dendrite à sous-arbre Y_i . Pour $1 \leqslant j \leqslant k$, soit C_j le $(O,\in)$-dendrite à sous-arbre Y_{d+j} . Pour $1 \leqslant j \leqslant k$, nous définnissons l'arbre P_j comme l'accolement de A^O , des B_i , $1 \leqslant i \leqslant d$, de C_j , et des $(O,\notin)$-dendrites dont les sous-arbres respectifs sont les divers accolements d'un arbre de $\mathrm{INC}(A^O)$, d'un arbre de chaque $K(Y_i)$, $1 \leqslant i \leqslant d$, et d'un arbre de $K(Y_{d+j})$. Nous noterons ces derniers dendrites $D_1, D_2, \ldots, D_q$.

Puisque A est non-contradictoire, chaque accolement d'un $(O,\in)$-sous-arbre de A^O avec un $(O,\notin)$-sous-arbre de A^O est contradictoire. Pour $b+1 \leqslant i \leqslant d$, il y a un sous-arbre χ_i de A_i et un arbre δ_i de $\mathrm{INC}(A^{O,\in})$ tels que $\mathrm{A}(Y_i,\chi_i,\delta_i)$ est non-contradictoire. Par Lemmes H et I , Corollaire, il est correct et équivalent à Y_i . Si Y_i avait un accolement non-contradictoire avec un $(O,\in)$-sous-arbre α_i de A^O , alors $\mathrm{A}(Y_i,\alpha_i)$ serait aussi correct et équivalent à Y_i . Par Lemme D , $\mathrm{A}(Y_i,\alpha_i) \sim \mathrm{A}(Y_i,\chi_i,\delta_i)$, et donc par Lemmes I et A , $\mathrm{A}(\alpha_i,\delta_i)$ serait non-contradictoire, contraire au Lemme B , Corollaire 1 . Donc chaque accolement d'un $(O,\in)$-sous-arbre de A^O avec le sous-arbre d'un B_i , $b+1 \leqslant i \leqslant d$, est contradictoire. De la meme facon, chaque accolement d'un $(O,\notin)$-sous-arbre de A^O avec le sous-arbre d'un B_i , $1 \leqslant i \leqslant b$, est aussi contradictoire. Puisque par Lemme B , Corollaire 2 , chaque accolement d'un $(O,\in)$-sous-arbre de A^O avec un arbre de $\mathrm{INC}(A^O)$ est contradictoire, alors par Lemme A , chaque accolement d'un $(O,\in)$-sous-arbre de A^O avec le sous-arbre d'un D_i , $1 \leqslant i \leqslant q$, est contradictoire. Puisque chaque Y_{d+j} a un accolement non-contradictoire avec un arbre de $\mathrm{INC}(A^O)$, alors chaque accolement d'un $(O,\notin)$-sous-arbre de A^O avec le sous-arbre de C_j est contradictoire. Puisque pour $1 \leqslant i \leqslant b$ et $b+1 \leqslant j \leqslant d$, $Y_i \not\sim Y_j$, alors par Lemme I , chaque accolement du sous-arbre d'un B_i , $1 \leqslant i \leqslant b$ avec le sous-arbre d'un B_i , $b+1 \leqslant i \leqslant d$, est contradictoire. De la même façon, chaque accolement du sous-arbre de C_j avec le sous-arbre d'un B_i , $b+1 \leqslant i \leqslant d$, est contradictoire. Enfin, par Lemmes B , Corollaire 1 , et A , chaque accolement du sous-arbre d'un B_i , $1 \leqslant i \leqslant b$, avec le sous-arbre d'un D_i , $1 \leqslant i \leqslant q$, et chaque accolement du sous-arbre de C_j avec le sous-arbre d'un D_i , $1 \leqslant i \leqslant q$, sont contradictoires. Donc chaque P_j est non-contradictoire. De la même façon, on démontre que chaque arbre de $\mathrm{INC}(P_j)$ est contradictoire, et donc que P_j est correct. Il est immédiat par Lemme I , pour $j \neq k$, $P_j \not\sim P_k$, et par la construction de P_j que pour chaque P_j , $A(P_j,A)$ est non-contradictoire. La condition sur la prolongeabilité infinie est ainsi satisfaite dans $(D_0, \ell_{\in_0})$.

La condition existentielle est aussi satisfaite, d'après ceci et Lemme E .

Avant de démontrer que la condition sur $\ell_{\in}$ est satisfaite par $\ell_{\in_0}$, le Lemme suivant sera nécessaire:

Lemme L : Soit A , B et C trois arbres quelconques, et soit P_C le $(O,\in)$-dendrite dont le sous-arbre est C , P_B le $(O,\in)$-dendrite dont le sous-arbre est B . Alors

i) Si $B \sim C$, alors $P_B \sim P_C$, et

ii) Si $B \sim C$, alors $\mathsf{A}(A,B) \sim \mathsf{A}(A,C)$.

Demonstration: i) Supposons que $P_C \not\sim P_B$. Alors $\mathsf{A}(P_B, \neg P_C)$ est non-contradictoire. Puisque $\neg P_C$ est un $(+,\notin)$-dendrite, alors il y a un accolement du sous-arbre C de $\neg P_C$ avec un arbre de $\mathsf{INC}(P_B)$, c'est-à-dire, avec un arbre de $\mathsf{K}(B)$, et alors $B \not\sim C$.

ii) Supposons que $\mathsf{A}(A,B) \not\sim \mathsf{A}(A,C)$. Alors $\mathsf{A}(A,B)$ a un accolement non-contradictoire avec un arbre de $\mathsf{K}(\mathsf{A}(A,C))$, donc avec un arbre de $\mathsf{K}(C)$. Mais alors B a un accolement non-contradictoire avec un arbre de $\mathsf{K}(C)$, et $B \not\sim C$.

On démontre maintenant que la condition sur $\ell_{\in}$ est satisfaite par $\ell_{\in_0}$. Soit ψ et ϕ deux objets de D_0 , et supposons que pour tout objet θ de D_0 , $\theta \in \psi$ si et seulement si $\theta \in \phi$. Nous voulons démontrer que $\psi = \phi$. Par Lemme L , la choix d'arbres dans ψ , ϕ et θ n'a pas d'importance. Prenons donc un arbre A dans ψ et un arbre B dans ϕ . Par Lemme E , Corollaire 2 , nous pouvons les choisir des O-arbres. Supposons que $\psi \neq \phi$; c'est-à-dire que

$A \not\sim B$. Alors il existe un arbre Q de $\mathcal{K}(B)$, par exemple, tel que $\mathcal{A}(A,Q)$ est non-contradictoire. Puisque B est un O-arbre, Q est un $+$-dendrite à un seul sous-arbre R . Supposons que Q est un $(+,\notin)$-dendrite; le cas d'un $(+,\in)$-dendrite est symmétrique. Alors $\neg Q$ est un $(O,\in)$-dendrite de B . Puisque $\mathcal{A}(A,Q)$ est non-contradictoire, le sous-arbre R de Q a un accolement non-contradictoire avec un arbre de $\mathrm{INC}(A^{O,\in})$; appelons-le S . Or par la condition existentielle déjà vérifiée, il existe un arbre correct C tel que $\mathcal{A}(R,S,C)$ est non-contradictoire. Soit P_C le $(O,\in)$-dendrite à sous-arbre C . Puisque $\mathcal{A}(R,C)$ est non-contradictoire, alors par Lemmes A et L , C n'a pas d'accolement non-contradictoire avec aucun $(O,\notin)$-sous-arbre de B, et donc $\mathcal{A}(P_C,B)$ est non-contradictoire. Puisque $\mathcal{A}(C,S)$ est non-contradictoire, C n'a pas d'accolement non-contradictoire avec un $(O,\in)$-sous-arbre de A . Puisque A est un O-arbre correct, alors tout accolement de C avec un arbre de $\mathrm{INC}(A)$ est contradictoire. Donc par Lemme C , Corollaire 2 , il y a un accolement non-contradictoire de C avec un $(O,\notin)$-sous-arbre de A , et donc $\mathcal{A}(A,P_C)$ est contradictoire, ce qui démontre la théorème.

Ceci finit la démonstration que $(D_0,\ell_{\in_0})$ est un modèle de la théorie, ce qui implique la consistence relative de la théorie. Dans la suite nous établirons quelques résultats supplémentaires, et ensuite démontrerons que la théorie est un modèle de plusieurs des axiomes de Zermelo-Fraenkel, mais pas de toutes.

§ 7 : Résultats concernant l'équivalence.

Théorème 1 : (remplacement) Soit A et B deux arbres équivalents. Alors

i) Pour tout arbre C , $\mathsf{A}(A,C) \sim \mathsf{A}(B,C)$.

ii) A est non-contradictoire si et seulement si B est non-contradictoire.

iii) A est infiniment prolongeable si et seulement si B est infiniment prolongeable.

iv) A est correct si et seulement si B est correct.

v) Si A et B sont finiment prolongeables, alors $\mathsf{PRL}(A) = \mathsf{PRL}(B)$, modulo $\sim$.

vi) Soit C_A le $(O,\in)$-dendrite à sous-arbre A , et soit C_B le $(O,\in)$-dendrite à sous-arbre B . Alors $C_A \sim C_B$.

vii) Soit D_A le $(O,\notin)$-dendrite à sous-arbre A et soit D_B le $(O,\notin)$-dendrite à sous-arbre B . Alors $D_A \sim D_B$.

viii) Soit P_A le $(+,\in)$-dendrite à sous-arbres A , X_1 , X_2 ,..., X_n , et P_B le $(O,\in)$-dendrite à sous-arbres B , X_1 , X_2 ,..., X_n , ou $n \geqslant 0$. Alors $P_A \sim P_B$.

ix) Soit Q_A le $(+,\notin)$-dendrite à sous-arbres A , X_1 , X_2 ,..., X_n , et soit Q_B le $(+,\notin)$-dendrite à sous-arbres B , X_1 , X_2 ,..., X_n , ou $n \geqslant 0$. Alors $Q_A \sim Q_B$.

Démonstration: i) Déjà démontré en Lemme L .

ii) Supposons que A est non-contradictoire, et que B ne l'est pas. Alors il existe un arbre Q de $\mathsf{K}(B)$ tel que $\mathsf{A}(A,Q)$ est non-contradictoire, et donc $A \not\sim B$.

iii) Supposons que A est infiniment prolongeable. Alors ou bien $\mathbb{A}(A,B)$ est infiniment prolongeable, ou bien il y a un arbre Q de $\mathbb{K}(B)$ tel que $\mathbb{A}(A,Q)$ est infiniment prolongeable. Mais tout $\mathbb{A}(A,Q)$ tel est contradictoire, et donc a fortiori finiment prolongeable. Donc $\mathbb{A}(A,B)$ est infiniment prolongeable, et donc B l'est aussi.

iv) Supposons que A est correct. Alors A est non-contradictoire et finiment prolongeable. Donc par ii) et iii), B est non-contradictoire et finiment prolongeable. Soient C et D deux arbres corrects et non équivalents de $\mathrm{PRL}(B)$. Alors $\mathbb{A}(B,C)$ et $\mathbb{A}(B,D)$ sont non-contradictoires, et alors par i), $\mathbb{A}(A,C) \sim \mathbb{A}(B,C)$ et $\mathbb{A}(A,D) \sim \mathbb{A}(B,D)$. Alors par ii), $\mathbb{A}(A,C)$ et $\mathbb{A}(A,D)$ sont non-contradictoires. Puisque A, C et D sont corrects, alors $A \sim C$ et $A \sim D$, et donc $C \sim D$, contraire à l'hypothèse. Donc par Lemme E, Corollaire 1, B est correct.

v) Immédiat d'après i).

vi) Déjà démontré dans Lemme L.

vii) Pareil à la démonstration du Lemme L.

viii) Chaque accolement d'un X_i avec un arbre de $\mathrm{INC}(\neg P_B)$ est contradictoire. Puisque $A \sim B$, chaque accolement de A avec un arbre de $\mathbb{K}(B)$ est contradictoire, et donc aucun sous-arbre de P_A n'a un accolement non-contradictoire avec un arbre de $\mathrm{INC}(P_B^{\,O,\notin})$, et donc $\mathbb{A}(P_A,\neg P_B)$ est contradictoire. De la même manière, $\mathbb{A}(P_B,\neg P_A)$ est aussi contradictoire, et donc $P_A \sim P_B$.

ix) De la même manière que viii).

Théorème 2 : (Élimination) Soit A et B deux arbres quelconques. Soient C_A et C_B les $(O,\in)$-dendrites (resp. $(O,\notin)$- , $(+,\in)$- , $(+,\notin)$-dendrites) aux sous-arbres respectifs A et B . Si $C_A \sim C_B$, alors $A \sim B$.

Démonstration: Le cas d'un $(O,\in)$-dendrite est général. Il est évident que $\mathsf{A}(C_A, \neg C_B)$, s'il est contradictoire, ne satisfait pas à la troisième condition de la non-contradiction; c'est-à-dire, tout accolement de B avec un arbre de $\mathsf{K}(A)$ est contradictoire. De la même manière, tout accolement de A avec un arbre de $\mathsf{K}(B)$ est contradictoire, et donc $A \sim B$.

Théorème 3 : Soit A et B deux arbres tels que pour tout arbre C , $\mathsf{A}(A,C)$ est non-contradictoire si et seulement si $\mathsf{A}(B,C)$ est non-contradictoire. Alors $A \sim B$.

Démonstration: Supposons qu'il y a un arbre D de $\mathsf{K}(B)$ tel que $\mathsf{A}(A,D)$ est non-contradictoire. Alors par hypothèse $\mathsf{A}(B,D)$ est non-contradictoire, ce qui est impossible.

Corollaire: Tous les arbres contradictoires sont équivalents.

Théorème 4 : (Simplification) i) Soit P un O-dendrite dont le sous-arbre est contradictoire. Alors $P \sim *$.

ii) Soit P un +-dendrite dont les sous-arbres sont $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, où $n > 1$. Si Q_1 est contradictoire, alors $P \sim P^*$, où P^* est le +-dendrite du même genre dont les sous-arbres sont $Q_2, \ldots, Q_n$.

iii) Soit P un +-dendrite à un seul sous-arbre Q . Si Q est correct, alors P est équivalent au O-dendrite correspondant à sous-arbre Q .

iv) Soient A et B deux arbres équivalents. Alors $A \sim \mathbb{A}(A,B) \sim B$.

v) Soit A un $(O,\in)$-dendrite, et B un $(+,\in)$-dendrite tels qu'il y a un accolement non-contradictoire d'un sous-arbre de B avec le sous-arbre de A . Alors $\mathbb{A}(A,B) \sim A$.

Définition: Nous dirons qu'un arbre A est standardisé si i) A est un O-arbre, ii) tous les sous-arbres de A sont non-contradictoires, et iii) dans chaque sous-arbre C de A , la choix d'arbres par rapport à la quatrième condition de la non-contradiction n'est unique par rapport à aucun +-dendrite de C' .

Théorème 5 : (Standardisation.) Pour tout arbre correct A , il existe un arbre équivalent standardisé A^* .

Démonstration: Il existe un O-arbre équivalent par Lemme E , Corollaire 2 . Par Théorème 4 i) , on peut éliminer les O-dendrites dont les sous-arbres sont contradictoires. Prenons donc un sous-arbre C non-contradictoire, Soient $D_1, D_2, \ldots, D_n$ les $(+,\in)$-dendrites de C tels que tout accolement d'un sous-arbre d'un D_i avec un $(O,\in)$-sous-arbre de C est contradictoire, et tels que tout accolement d'un sous-arbre d'un D_i avec un arbre de $\mathrm{INC}(C^{O,\notin})$ est finiment prolongeable. Soient $D_{n+1}, D_{n+2}, \ldots, D_m$ les $(+,\notin)$-dendrites de C tels que tout accolement d'un D_i avec un $(O,\notin)$-sous-arbre de C est contradictoire, et tels que tout accolement d'un sous-arbre d'un D_i avec un arbre de $\mathrm{INC}(C^{O,\in})$ est finiment prolongeable. Pour chaque i , $1 \leq i \leq n$, soit B_i la réunion des prolongements des accolements d'un sous-arbre de D_i avec un arbre de $\mathrm{INC}(C^{O,\notin})$.

Pour chaque i , $n+1 \leqslant i \leqslant m$, soit B_i la réunion des prolongements des accolements d'un sous-arbre de D_i avec un arbre de $\mathrm{INC}(C^{O,\in})$. Pour chaque i , $1 \leqslant i \leqslant m$, soit D_i^* l'ensemble composé d'un arbre de chaque élément de $B_i/\sim$, Or par la non-contradiction de C , il existe au moins une manière de choisir un arbre Y_i dans chaque D_i^* telle que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $n+1 \leqslant j \leqslant m$ impliquent que $Y_i \not\sim Y_j$. Maintenant supposons que pour les dendrites $D_1, D_2, \dots, D_a$, où $a \leqslant n$, et pour les dendrites $D_{n+1}, D_{n+2}, \dots, D_b$, où $n+1 \leqslant b \leqslant m$, chaque choix telle des Y_i comporte toujours la choix du même arbre Y_i dans les D_i^* , $1 \leqslant i \leqslant a$ et $n+1 \leqslant i \leqslant b$. Pour $1 \leqslant i \leqslant a$, soit G_i le $(O,\in)$-dendrite à sous-arbre Y_i , et pour $n+1 \leqslant i \leqslant b$, soit G_i le $(O,\notin)$-dendrite à sous-arbre Y_i . Soit C^* l'arbre C , où les dendrites $D_1, D_2, \dots, D_a$ et $D_{n+1}, D_{n+2}, \dots, D_b$ sont remplacés par $G_1, G_2, \dots, G_a$ et $G_{n+1}, G_{n+2}, \dots, G_b$ respectivement. Il est évident que $C^* \sim C$. Si on répète ce procéssus pour tous les sous-arbres de A , l'arbre A^* ainsi construit sera un arbre standardisé et équivalent à A .

Dans la dernière section nous aurons besoin de cette forme standardisée à plusieurs endroits. Notons que cette forme est loin d'être unique.

§8: La construction des ensembles.

Dans cette section nous démontrerons que la théorie est un modèle de plusieurs des axiomes de Zermelo-Fraenkel, mais pas de toutes.

Théorème 6 (Paire non-ordonnée): Soient A et B deux arbres corrects. Alors il existe un arbre correct C tel que pour tout arbre correct D , $D \in C$ si et seulement si ou bien $D \in A$ ou bien $D \in B$.

Construction: Soit P_A et P_B les $(O,\in)$-dendrites aux sous-arbres respectifs A et B . Alors C ' est $\mathsf{A}(P_A,P_B)$. Soient $Q_1,\ldots,Q_n$ les arbres de $\mathsf{INC}(C^{O,\in})$. Alors $C^{O,\not\in}$ est l'accolement des $(O,\not\in)$-dendrites dont les sous-arbres sont $Q_1,\ldots,Q_n$.

Théorème 7 (Réunion): Soit A un arbre correct. Alors il existe un arbre correct B tel que pour tout arbre correct C , $C \in B$ si et seulement s'il existe un arbre correct D tel que $C \in D \in A$.

Construction: On peut supposer que A est standardisé. Soient $C_1,C_2,\ldots,C_n$ les $(O,\not\in)$-dendrites de A . Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, soit D_{ij_1} , $1 \leqslant j_i \leqslant m_i$, les $(O,\in)$-dendrites de C_i . Soit E_{ij_i} le sous-arbre de D_{ij_i} . Soient F_k , $1 \leqslant k \leqslant \prod_{i=1}^{n} m_i$, les $(O,\not\in)$-dendrites dont les sous-arbres respectifs sont $\mathsf{A}_{i=1}^{n}(E_{ij_i})$, $1 \leqslant j_1 \leqslant m_1$, $1 \leqslant j_2 \leqslant m_2$,..., $1 \leqslant j_n \leqslant m_n$. Alors les F_k sont les $(O,\not\in)$-dendrites de B , et les $(O,\in)$-dendrites de B sont ceux dont les sous-arbres sont les arbres de $\mathsf{INC}(\mathsf{A}_k(F_k))$.

Théorème 8 (Intersection): Soit A un arbre correct. alors il existe un arbre correct B tel que pour tout arbre correct C , $C \in B$ si et seulement si pour tout arbre correct D , $D \in A$ implique que $C \in D$.

Construction: On peut supposer que A est standardisé. Soient $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les $(O,\in)$-sous-arbres de A . Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, soient E_{ij_i} , $1 \leqslant j_i \leqslant m_i$, les $(O,\in)$-sous-arbres de C_i . Alors les $(O,\in)$-dendrites F_k de B sont les $\prod_{i=1}^{n} m_i$ dendrites dont les sous-arbres sont $\mathbf{A}_{i=1}^{n}(E_{ij_i})$, $1 \leqslant j_1 \leqslant m_1$, $1 \leqslant j_2 \leqslant m_2$,..., $1 \leqslant j_n \leqslant m_n$, et donc $B^{O,\in}$ est $\mathbf{A}_{k=1}^{q}(F_k)$, où $q = \prod_{i=1}^{n} m_i$. Les $(O,\notin)$-dendrites de B sont ceux dont les sous-arbres sont les arbres de $\mathbf{INC}(B^{O,\in})$.

Théorème 9 (Complément): Soit A un arbre correct. Alors il existe un arbre correct B tel que pour tout arbre correct C , $C \in B$ si et seulement si $C \notin A$.

Construction: Nous pouvons supposer que A est un O-arbre. Alors B est le O-arbre dont les $(O,\in)$-sous-arbres sont les $(O,\notin)$-sous-arbres de A , et inversement.

Définition: Soit A et B deux arbres corrects. On dira que A est un sous-ensemble de B , $A \subseteq B$, si et seulement si $\mathbf{A}(A^{O,\in}, B)$ est non-contradictoire. (On suppose que A est un O-arbre). Il est facile à vérifier que ceci correspond aux sous-ensembles dans le sens normal.

Théorème 10 (Ensemble des partis): Soit A un arbre correct. Alors il existe un arbre correct B tel que pour tout arbre correct C , $C \in B$ si et seulement si $C \subseteq A$.

Construction: On peut supposer que A est un O-arbre. Soit B_0 le $(O,\in)$-dendrite dont le sous-arbre est $A^{O,\notin}$. Soient $B_1,B_2,\ldots,B_n$ les $(O,\notin)$-dendrites dont les sous-arbres sont les arbres de $K(A^{O,\notin})$. Alors B est $\bigwedge_{i=0}^{n}(B_i)$.

Avant de démontrer la prochaine théorème, analogue de l'axiome de selection (Aussonderung), notons que si un prédicat à un seul variable libre $A(x)$ est construit à partir d'un ensemble de prédicats "atomiques" qui sont les traductions d'arbres de la théorie, utilisant les connecteurs de la logique propositionnelle, alors il existe un collection d'arbres $B_1,B_2,\ldots,B_n$ telle que $A(x) \sim B_1(x) \vee B_2(x) \vee \ldots \vee B_n(x)$.

Théorème 11: Soient $A_1,A_2,\ldots,A_n$ arbres quelconques. Alors il existe un arbre correct B tel que pour tout arbre correct C , $C \in B$ si et seulement s'il existe au moins un i , $1 \leqslant i \leqslant n$, tel que $\bigwedge(C,A_i)$ est non-contradictoire.

Construction: Soient $B_1,B_2,\ldots,B_n$ les $(O,\in)$-dendrites dont les sous-arbres sont $A_1,A_2,\ldots,A_n$. Alors $B^{O,\in}$ est $\bigwedge_{i=1}^{n}(B_i)$, et les $(O,\notin)$-dendrites de B sont ceux dont les sous-arbres sont les arbres de $\mathrm{INC}(B^{O,\in})$.

Définition: Nous dirons qu'un arbre correct A est finiment membré si tout $(O,\in)$-sous-arbre de A est finiment prolongeable, et dans le cas contraire nous dirons que A est infiniment membré.

Théorème 12: Soit A un arbre correct finiment membré. Alors il existe un nombre fini d'arbres corrects et non équivalents (modulo $\sim$) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tels que $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ dans le sens de Théorème 6 .

Ceci est une conséquence immédiate du Lemme E .

Thèoreme 13: Soit A un arbre correct infiniment membré. Alors pour tout entier k , il existe k arbres corrects et non équivalents $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tels que pour tout i , $1 \leqslant i \leqslant k$, $A_i \in A$.

Ceci est une conséquence de la condition sur la prolongeabilité infinie.

Théorème 14: Soit A un arbre correct. Alors ou bien A ou bien $\overline{A}$ (le complément de A dans le sens de la Théorème 9) est infiniment membré.

Théorème 15: Soit A un arbre correct infiniment membré. Alors il existe un arbre correct infiniment membré B tel que $B \in A$.

Théorème 16: Soit A un arbre correct tel que $A \in A$. Alors A est infiniment membré.

Définition: Nous dirons qu'un arbre correct A est disjoint si pour tout arbres corrects B et C , $B \in A$, $C \in A$ et $B \not\sim C$ impliquent que $B \cap C = \emptyset$.

Théorème 17: Soit A un arbre correct et disjoint. Alors A est finiment membré.

Théorème 18: (Choix finie) Soit A un arbre correct est disjoint, tel que $\emptyset \notin A$. Alors il existe au moins un arbre correct $B \subseteq \cup A$ avec les propriétés suivantes:

i) Pour tout arbres C et D corrects et non-équivalents, si $C \in B$ et $D \in B$, alors il existe deux arbres corrects et non équivalents P et Q tels que $C \in P \in A$ et $D \in Q \in A$.

ii) Pour tout arbre correct R , si $R \in A$ alors $R \cap B \neq \emptyset$.

Démonstration: Par Théorèmes 17 et 12 , il y a un nombre fini d'arbres corrects et non-equivalents $A_1, A_2, \ldots, A_n$, que nous pouvons supposer des O-arbres, et non équivalents à $\overset{*}{\underset{\circ}{\notin}}$, tels que $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Or chaque A_i a au moins un $(O,\in)$-sous-arbre non-contradictoire B_i , et donc nous pouvons construire un arbre correct C_i tel que $\mathsf{A}(B_i, C_i)$ est non-contradictoire, ou bien par Lemme E , ou bien par la condition sur la prolongeabilité infinie. Alors B est construit comme dans la démonstration de la Théorème 11 , avec les C_i comme les A_i de cette Théorème.

Théorème 19 (Fonction générale de choix): Il existe une fonction qui associe avec chaque arbre A correct et non équivalent à $\overset{*}{\underset{\circ}{\notin}}$, un arbre correct B tel que $B \in A$.

Démonstration: Puisque les arbres sont des structures finies, construits à partir d'une collection finie de symboles, la collection d'arbres est dénombrable, et donc peut être indexée sur les entiers. Fixons une telle suite d'arbres.

Soit A un arbre correct quelconque. Soit A' le premier O-arbre correct équivalent à A qui apparait dans la suite d'arbres. Puisque $A' \not\sim \begin{array}{c} * \\ | \\ \notin \\ | \\ \circ \end{array}$, A' a au moins un $(O,\in)$-sous-arbre non-contradictoire. Soit B le premier $(O,\in)$-sous-arbre de A' qui apparait dans la suite d'arbres. Puisque B est non-contradictoire, par la condition existentielle, il existe au moins un arbre correct C tel que $\mathsf{A}(B,C)$ est non-contradictoire. Soit C' le premier arbre correct tel que $\mathsf{A}(B,C')$ est non-contradictoire qui apparait dans la suite. Alors $C' \in A$, et l'arbre C' est uniquement déterminé de manière constructive par le processus ci-dessus.

Ces dernières théorèmes facilitent une comparaison entre la théorie de Krasner et la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel. D'abord il est clair que la théorie de Krasner est un modèle des axiomes de l'extensionalité, de la paire non-ordonnée, de la réunion, et de l'ensemble des partis. En ce qui concerne l'axiome de selection, la théorie de Krasner borne les prédicats de selection à ceux qui sont formulable dans le système. Puisque les prédicats qui mènent aux paradoxes, tel que $x \notin x$, ne le sont pas, l'existence de l'ensemble universel et d'autres "classes propres" n'est pas exclu. Par contre, beaucoup de prédicats utiles manquent. Dans ce cas l'axiome de l'infini, satisfait dans la théorie de Krasner, n'entraine pas l'existence de l'ensemble $N = \{\emptyset , \{\emptyset\} , \{\{\emptyset\}\} ,...\}$, à cause de la faiblesse de la Théorème 11 . Notons que Théorème 15 implique que N n'est pas définissable par un arbre. En ce qui concerne l'axiome de choix, il est satisfait dans un sens formel; c'est-à-dire, par les familles disjointes, parce que toute famille disjointe dans la théorie de Krasner est finie. Dans un sens plus large, on a une fonction générale de choix, en tant qu'algorithme, mais il est impossible (encore par Théorème 15) de formuler cette fonction par un arbre. Finalement, quoique Théorème 16 montre que l'axiome de régularité est satisfait pour les ensembles finis, la théorie de Krasner n'est pas un modèle de cet axiome.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Krasner, Théorie de la définition; Journal de Mathématiques Pures et Appliques, T. 36 (1957) P. 325-357 et T. 37 (1958) P. 55-101 .

[2] M. Krasner, Le Définitionnisme, Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Clermont, Fasc. 7 (1962) P. 55-81 .

[3] A. J. Gold, Sur les Arbres Logiques, Thèse de Troisième Cycle, Université de Clermont, Clermont-Ferrand, 1969 .