

ANNALES SCIENTIFIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2  
*Série Mathématiques*

PAUL-JEAN CAHEN

**Polynômes et dérivées à valeurs entières**

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 54, série *Mathématiques*, n° 10 (1975), p. 25-43

[http://www.numdam.org/item?id=ASCFM\\_1975\\_\\_54\\_10\\_25\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1975__54_10_25_0)

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**POLYNOMES ET DERIVEES A VALEURS ENTIERES**

**par Paul-Jean CAHEN**  
**57, av. Bourguiba - CARTHAGE (Tunisie)**



POLYNOMES ET DERIVEES A VALEURS ENTIERES

$A$  est un anneau intègre de corps des fractions  $K$ . On dit qu'un polynôme  $f$ , à coefficients dans  $K$ , est à valeurs entières, si  $f(a)$  est dans  $A$  pour tout élément  $a$  de  $A$ . Ces polynômes forment un anneau que J.L. Chabert (5) (6) et moi (3) avons étudié. Par ailleurs D. Brizolis (2) s'est intéressé aux polynômes dont les dérivées successives sont à valeurs entières. Nous voulons donner ici une exposition originale de ces résultats.

On montre d'abord que si  $A$  est Noethérien on peut faire une étude locale. Si  $A$  est intégralement clos on peut donc se limiter au cas d'un anneau de valuation discrète ; au § 2 on montre que les anneaux de polynômes, dont un nombre fini de dérivées sont à valeurs entières, sont denses dans l'anneau des fonctions continues sur la complétion de  $A$ . Ensuite on étudie le spectre de ces anneaux de polynôme et au § 4 on décrit les inclusions entre les divers idéaux premiers du spectre. Au § 5 on généralise cette étude aux fractions rationnelles à valeurs entières, et au § 6 on envisage le cas où toutes les dérivées successives doivent être à valeurs entières ; ensuite on généralise un résultat de Straus (8) pour déduire la structure de  $A$ -module de cet anneau de polynôme (§ 7), on en déduit qu'il n'est pas Noethérien (§ 8). Dans un dernier paragraphe on étudie les polynômes à plusieurs variables qui sont à valeurs entières.

### § 1. Définitions, localisation

Soit  $A$  un anneau intègre,  $K$  son corps des fractions. On note  $A_S$  l'anneau des polynômes à valeurs entières :

$$A_S = \{ f \in K[X] \mid f(A) \subseteq A \}$$

On a les inclusions :

$$A[X] \subseteq A_S \subset K[X]$$

Par ailleurs, si  $f \in K[X]$  et  $f$  est de degré  $n$ , on définit les polynômes  $f, f^{[2]}, \dots, f^{[n]}$ , par :

$$f(X+Y) = f(X) + Yf'(X) + Y^2 f^{[2]}(X) + \dots + Y^n f^{[n]}(X).$$

Si  $K$  est de caractéristique 0, alors  $f^{[n]} = n! f^{(n)}$  est la  $n^{\text{ème}}$  itérée de la dérivée de  $f$ .

On peut toujours poser  $f^{(n)} = n!f^{[n]}$ , et donner comme définition :

**Définition 1.1**

$A_S(k)$  est l'anneau des polynômes à valeurs entières dont les k-premières dérivées sont à valeurs entières :

$$A_S(k) = \{ f \in K[X] \mid f(A), f'(A), \dots, f^{(k)}(A) \subseteq A \} .$$

C'est en effet un anneau car :

$$(f \cdot g)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)} \quad \begin{array}{l} \text{où } f = f^{(0)} \\ \text{et } f' = f^{(1)} \end{array}$$

Mais on trouvera avantageux de travailler aussi avec les «dérivées divisées»  $f^{[k]}$ .

**Définition 1.2**

$A_S[k]$  est l'anneau des polynômes :

$$A_S[k] = \{ f \in K[X] \mid f(A), f'(A), \dots, f^{[k]}(A) \subseteq A \}$$

C'est aussi un anneau car on établit sans peine les formules :

(1.a)  $(f + g)^{[k]} = f^{[k]} + g^{[k]}$

(1.b)  $(f \cdot g)^{[k]} = \sum_{i=0}^k f^{[i]} g^{[k-i]}$

Où bien sûr, on fait  $f^{[0]} = f$ ,  $f^{[1]} = f'$ .

La formule suivante pourra aussi nous être utile :

(1.c)  $[(X - a)^n]^{[k]} = \binom{n}{k} (X - a)^{n-k}$

On a les inclusions :

$$A[X] \subset \dots \subset A_S(k+1) \subset A_S(k) \dots \subset A_S \quad \begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array}$$

$$A_S[k+1] \subset A_S[k]$$

**Proposition 1.3**

On a  $A[X] = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_S[k]$

**Preuve :** Si  $f$  est de degré  $n$ , alors

$$f(X) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(0) \cdot X^k$$

Mais on pose :

**Définition 1.4**

$$A_S^\infty = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_S(k)$$

$A_S^\infty$  est distinct de  $A[X]$  en général :

**Exemple 1.5 :** Soit  $A$  un anneau de valuation discrète, on note  $\mathfrak{m}$  son idéal maximal,  $t$  une uniformisante,  $v$  la valuation, et on suppose que  $A/\mathfrak{m}$  est de caractéristique  $p > 0$  (ainsi  $v(p) > 0$ ).

On choisit des représentants  $a_0, a_1, \dots, a_{N-1}$  de  $A$  modulo  $\mathfrak{m}$ . Alors

$$f = 1/t \prod_{i=0}^{N-1} (X - a_i)^p$$

est dans  $A_S^\infty$  (car dans  $A_S$  et  $f' \in A[X]$ ) mais  $f \notin A_S[p]$ , donc a fortiori  $f \notin A[X]$ , car :

$$f^{[p]} = 1/t \prod_{i \neq 0}^{N-1} (X - a_i)^p + (X - a_0)/t g \quad \text{où } g \in A[X] \text{ donc } f^{[p]}(a_0) \notin A.$$

Ainsi l'inclusion  $A_S[k] \subset A_S(k)$  est stricte en général, comme d'ailleurs l'inclusion

$$A_S[k+1] \subset A_S[k]$$

**Exemple 1.6 :** Soit  $A$  un anneau de valuation discrète, avec les notations précédentes

$$f = 1/t \prod_{i=0}^{N-1} (X - a_i)^{k+1} \text{ est dans } A_S[k] \text{ mais n'est pas dans } A_S[k+1].$$

Après avoir introduit ces anneaux, on montre qu'on peut procéder à une étude locale.

On utilise la notation  $A_S$  pour désigner l'un quelconque des anneaux  $A_S(k)$ ,  $A_S[k]$  et  $A_S^\infty$

**Théorème 1.7**

Soit  $A$  un anneau intègre Noethérien et  $T$  une partie multiplicative de  $A$ , alors

$$(T^{-1}A)_{S'} = T^{-1}(A_{S'})$$

**Preuve :** Si  $f \in (T^{-1}A)_{S'}$ , alors  $f$  et ses dérivées (en nombre fini égal à son degré) sont à valeurs entières sur  $T^{-1}A$ , comme  $A$  est Noethérien, le  $A$ -module des valeurs prises, par  $f$  et ses «dérivées», est de type fini, il existe donc un dénominateur commun  $t \in T$  à ces valeurs prises, d'où  $tf \in A_{S'}$ . Réciproquement, si  $f \in T^{-1}(A_{S'})$ , alors  $f(A) \subseteq A \subseteq T^{-1}A$  donc

$f(T^{-1}A) \subseteq T^{-1}A$  [cf. (4) proposition 4] et il en va de même des «dérivées» de  $f$ .

Si maintenant  $A$  est un anneau de Krull Noethérien on rappelle :

**Proposition 1.8** : Si tout idéal premier de hauteur 1 de  $A$  a un corps résiduel infini alors  
 $A_S = A[X]$ .

[cf. (4)]. On a alors a fortiori  $A[X] = A_S$  et pour faire une étude locale de  $A$  il suffit de considérer les idéaux premiers de hauteur 1 de corps résiduel fini.

## §2. Théorèmes de densité

On suppose ici que  $A$  est un anneau de valuation discrète de corps résiduel fini. On note  $v$  la valuation,  $\mathfrak{m}$  l'idéal maximal de  $A$ ,  $\hat{A}$  la completion de  $A$  et  $\hat{K}, \hat{m}, \hat{v}$  les completions correspondantes. Un polynôme à coefficients dans  $K$  (ou même dans  $\hat{K}$ ) peut être considéré comme une fonction continue de  $\hat{A}$  dans  $\hat{K}$  et si  $f \in A_S$  alors  $f(\hat{A}) \subset \hat{A}$ ; on note  $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$  l'anneau des fonctions continues de  $\hat{A}$  dans  $\hat{A}$ . On note  $t$  une uniformisante.

**Proposition 2.1** : Pour la topologie de la convergence uniforme,  $A_S$  est dense dans  $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$ .

**Preuve** : Comme  $\hat{A}$  est complet et de corps résiduel fini,  $\hat{A}$  est compact et par généralisation du théorème de Stone-Weierstrass [(1) V § 5. Exercices]  $\hat{K}[X]$  est dense dans l'anneau des fonctions continues de  $\hat{A}$  dans  $\hat{K}$ .  $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$  est un ouvert dans cet anneau et bien sûr  $K[X]$  est dense dans  $\hat{K}[X]$ , donc

$$A_S = K[X] \cap \mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A}) \text{ est dense dans } \mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A}).$$

[cf. aussi (7)].

**Théorème 2.2** : Pour tout  $k$ ,  $A_{S[k]}$  est dense dans  $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$ .

**Preuve** : Il suffit de montrer que  $A_{S[k]}$  est dense dans  $A_{S[k-1]}$ . Si  $g \in A_{S[k-1]}$ , on note  $g^* = g^{[k]}$  et on approche  $g$  par  $g_1 = g - h g^*$  où  $h \in A_{S[k]}$ .

On choisit  $h$  tel que  $v[h^{[i]}(x)] \geq n$ ,  $n$  élevé,  $\forall x \in A$  et  $\forall i < k$  ainsi

$$g_1^{[j]}(x) = g^{[j]}(x) - \sum_{i=0}^j h^{[i]}(x) g^{*[j-i]}(x) \in A, \forall j < k \text{ donc } g_1 \in A_{S[k-1]}, \text{ et}$$

$$g_1^{[k]}(x) = g^{[k]}(x) - h^{[k]}(x) g^{*[0]}(x) - \sum_{i=0}^{k-1} h^{[i]}(x) g^{*[k-i]}(x) \text{ où } g^{*[0]} = g^{[k]} \text{ et}$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} h^{[i]}(x) g^{*[k-i]}(x) = b_x \in A, \forall x \in A$$

On choisit aussi  $h$  tel que  $h^{[k]}(x) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$ ,  $\forall x \in A$  (et ceci grâce au lemme suivant), ainsi

$$h^{[k]}(x) = (1+t)a_x \text{ où } a_x \in A \text{ et } g_1^{[k]}(x) = t a_x g^{[k]}(x) + b_x.$$

On itère le procédé, on fait  $g_2 = g_1 - h g_1^*$  (une fonction  $h$  où  $n$  est suffisamment élevé)  
 $\dots g_m = g_{m-1} - h g_{m-1}^*$  on arrive à  $g_m$  tel que  $g_m^{[k]}(x) = t^m c_x g^{[k]}(x) + d_x$  où  $c_x, d_x \in A$ ,  
 donc  $g_m^{[k]}(x) \in A_{S^{[k]}}$  pour  $m$  assez grand, et  $g_m$  est « proche de  $g$  » :  $v[g_m(x) - g(x)] \geq n$ ,  
 $\forall x \in A$ .

**Lemme 2.3 :** Pour tout entier  $n$  et tout entier  $k$  on trouve  $h$  dans  $A_{S^{[k]}}$  tel que

$$v[h^{[j]}(x)] \geq n, \quad \forall x \in A \text{ et } \forall j < k$$

$$\text{mais } h^{[k]}(x) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}, \quad \forall x \in A.$$

**Preuve :** Soient  $0 = a_0, a_1, \dots, a_m$  un système de représentants de  $A$  modulo  $\mathfrak{m}^n$ , et soit

$$f = \prod_{i=0}^m (X - a_i)^k$$

$$\text{On a } f^{[k]} = \prod_{j \neq i} (X - a_j)^k + \sum_{\alpha} g_{\alpha}$$

où chaque  $g_{\alpha}$  est de la forme :

$$g_{\alpha} = b_{\alpha} \prod_{j=0}^m (X - a_j)^{k_{j,\alpha}} \quad \begin{cases} b_{\alpha} \in A \\ \sum_j k_{j,\alpha} = mk \end{cases}$$

autrement dit,  $g_{\alpha}$  s'obtient à partir de  $\prod_{j \neq i} (X - a_j)^k$  en remplaçant certains facteurs  $(X - a_j)$  par  $(X - a_i)$  et en le faisant précéder d'un coefficient  $b_{\alpha}$ .

Si  $x \equiv a_i \pmod{\mathfrak{m}^n}$ , on a donc

$$v(g_{\alpha}(x)) > v \left[ \prod_{j \neq i} (x - a_j)^k \right]$$

De plus chaque terme  $(x - a_j)$  est distinct modulo  $\mathfrak{m}^n$  et différent de 0, pour tout  $x \equiv a_i$ , il y a une bijection  $\sigma_x$  des indices  $0, 1, \dots, i, \dots, m$  sur les indices  $1, 2, \dots, m$ , telle que :

$$x - a_j = a_{\sigma_x(j)} + r_{x,j} \quad \text{où } v(r_{x,j}) \geq n$$

donc finalement :

$$f^{[k]}(x) = \prod_{j \neq 0} a_j^k + r_x + \sum_{\alpha} g_{\alpha}(x)$$

où  $v(r_x)$  et  $v(g_{\alpha}(x)) > v \left[ \prod_{j \neq 0} a_j^k \right]$  et  $v \left[ \prod_{j \neq 0} a_j^k \right] = \beta$  ne dépend pas de  $x$ ,

autrement dit :  $f^{[k]}(x) / \prod_{j \neq 0} a_j^k \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$ ,  $\forall x$ .

$$\text{On fait } h = \prod_{i=0}^m (X - a_i)^k / \prod_{j \neq 0} a_j^k$$

$h$  répond au lemme. Si en effet  $j < k$ ,  $h^{[j]}$  est une somme de produits  $\prod_{i=0}^m (X - a_i)^{kj}$  qui se

déduisent à partir de  $\prod_j \neq i (X - a_j)^k$  en multipliant d'abord par  $(X - a_i)$ , puis en substituant certains facteurs  $(X - a_j)$  par  $(X - a_i)$ , ce faisant, la valuation du produit est supérieure à  $\beta$  d'au moins l'entier  $n$ .

**Corollaire 2.4 :**  $A_{S^{(k)}}$  est dense dans  $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$ .

### §3. Spectre premier

On veut déterminer le spectre de  $A_S$ . On traite le cas où  $A$  est un anneau de Krull Noethérien.

- Il y a d'abord les idéaux au-dessus de  $(0)$ , on les retrouve dans  $K \otimes_A A_S$ . mais

$A[X] \subseteq A_S \subset K[X]$  donc  $K \otimes_A A_S = K[X]$ ; cette fibre est bien connue !

- Il y a ensuite les idéaux premiers au-dessus d'un idéal  $\mathfrak{p}$  de corps résiduel infini ou de hauteur au moins 2. On les retrouve dans  $A_S \otimes A_{\mathfrak{p}}$ , c'est-à-dire  $(A_{\mathfrak{p}})_S$ . [théorème 1.7]. Mais  $A_{\mathfrak{p}}$  est un anneau de Krull dont tous les idéaux premiers de hauteur 1 sont de corps résiduels infinis, donc  $(A_{\mathfrak{p}})_S = A_{\mathfrak{p}}[X]$  [proposition 1.8]. Cette fibre aussi est bien connue.

- Enfin il y a les idéaux premiers au-dessus d'un idéal  $\mathfrak{p}$  de hauteur 1 et de corps résiduel fini.

On les retrouve dans  $(A_{\mathfrak{p}})_S$ . Dans ce cas  $A_{\mathfrak{p}}$  est un anneau de valuation discrète de corps résiduel fini. On peut donc exploiter les résultats du paragraphe précédent.

On suppose donc  $A$  local, on reprend les notations du § 2. On écarte  $A_{S^{\infty}}$  qui sera étudié au § 6. Alors  $A_S$  est dense dans  $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$ , on s'intéresse donc aux idéaux premiers de  $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$  au-dessus de  $\mathfrak{m}$ . Ce sont les idéaux premiers de  $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A}) \otimes \hat{A}_{\hat{\mathfrak{m}}}$  soit  $\mathcal{C}(\hat{A}, A_{\hat{\mathfrak{m}}})$  c'est-à-dire l'anneau des fonctions localement constantes de  $\hat{A}$  dans  $A_{\hat{\mathfrak{m}}}$ . Comme  $\hat{A}$  est compact, les idéaux premiers de cet anneau correspondent biunivoquement aux points de  $\hat{A}$ : à tout  $\alpha \in \hat{A}$ , correspond l'idéal des fonctions nulles en  $\alpha$  [(1) II § 4 Exercices].

Ainsi :

**Proposition 3.1 :** Les idéaux de  $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$  au-dessus de l'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $A$ , sont en bijection avec les points de  $\hat{A}$ ; à  $\alpha \in \hat{A}$  correspond  $\mathfrak{M}_{\alpha}$  :

$$\mathfrak{M}_{\alpha} = \{ f \in \mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A}) \mid f(\alpha) \in \hat{\mathfrak{m}} \}$$

Ces idéaux découpent dans  $A_S$  des idéaux premiers  $\mathfrak{m}_{\alpha}$ , comme  $A_S$  est dense dans  $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$ , ces idéaux sont distincts :

Si  $\alpha \neq \beta$ , on trouve  $f \in \mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$  tel que  $f(\alpha) \in \hat{\mathfrak{m}}$  mais  $f(\beta) \notin \hat{\mathfrak{m}}$ , donc  $g \in A_S$ , «proche de  $f$ » et tel que  $g(\alpha) \in \hat{\mathfrak{m}}$  mais  $g(\beta) \notin \hat{\mathfrak{m}}$ .

Réciproquement, tous les idéaux de  $A_S$ , au-dessus de  $\mathfrak{m}$ , se relèvent dans  $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$ .

Il suffit d'établir qu'ils sont tous maximaux, car alors les idéaux premiers  $A_S \otimes A/\mathfrak{m}$  sont tous maximaux et minimaux et se relèvent dans  $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A}) \otimes A/\mathfrak{m}$  [cf. (1) II § 2. proposition 16]

**Proposition 3.2 :** Tous les idéaux premiers de  $A_S$  au-dessus de  $\mathfrak{m}$  sont maximaux et de corps résiduel  $A/\mathfrak{m}$ .

**Preuve :** Si  $f \in A_{S(k)}$  on fait  $g = 1/t \prod_{i=0}^n (f - a_i)^{k+1}$  où  $a_0, a_1, \dots, a_n$  est un système de représentants modulo  $\mathfrak{m}$ . On voit que  $g \in A_{S(k)}$  [ou  $g \in A_{S[k]}$  si  $f \in A_{S[k]}$ ]. Si  $\tilde{\mathfrak{M}}$  est un idéal premier de  $A_S$  au-dessus de  $\mathfrak{m}$ , on a donc  $tg \in \tilde{\mathfrak{M}}$  et  $(f - a_i) \in \tilde{\mathfrak{M}}$  pour un indice  $i$ .

**Théorème 3.3 :** Les idéaux premiers de  $A_{S(k)}$  et  $A_{S[k]}$  sont en bijection avec les points de  $\hat{A}$  ; à  $\alpha \in \hat{A}$  correspond  $\mathfrak{M}_\alpha = \left\{ f \in A_S \mid f(\alpha) \in \hat{\mathfrak{m}} \right\}$

**Note :** Ce résultat est dû aussi en partie à J.L. Chabert (5) et D. Brizolis (2).

#### §4. Inclusions

Si  $A$  est un anneau de Krull Noethérien, les seules inclusions qui ne se ramènent pas à des inclusions entre idéaux premiers d'un anneau  $A_p[X]$  sont entre les idéaux premiers au-dessus de (0) et ceux au-dessus d'un idéal premier de hauteur 1 et de corps résiduel fini. On peut donc encore supposer  $A$  local, et on garde les notations précédentes. Mais avant d'étudier les inclusions il nous est utile de remarquer que  $A_{S(k)}$  et  $A_{S[k]}$  ne sont pas intégralement clos, à la différence de  $A_S$  dont tous les localisés sont des anneaux de valuation discrète de rang 1 ou 2 [cf. (3) (5) et (6)].

**Lemme 4.1 :** Si  $f \in A_S$  et  $k$  est un entier ( $0 < k < \infty$ ), on trouve un entier  $n$  tel que  $f^n \in A_{S[k]}$

**Preuve :** Pour calculer  $(f^n)^{[j]}$  on regarde le terme en  $Y^j$  de  $f^n(X+Y) = [f(X) + Yf'(X) + \dots + Y^m f^{[m]}(X)]^n$  (où  $m$  est le degré de  $f$ ) donc  $(f^n)^{[j]}$  est une somme de termes de la forme  $\binom{n}{h} \prod_{i=0}^j (f^{[i]})^{n_i} f^{n-j}$  où  $i \leq j$  et  $\sum i n_i = j$ . Les polynômes  $(f^{[i]})^{n_i}$  sont en nombre fini ( $i \leq k, n_i \leq k$ ) on trouve un minimum aux valuations de leurs valeurs. Il suffit que la valuation de  $\binom{n}{h}$  soit élevée pour que  $(f^n)^{[j]}$  soit à valeurs entières,  $\forall j \leq k$ . Si  $p$  est la caractéristique de  $A/\mathfrak{m}$ ,  $v(p) > 0$ , il suffit de faire  $n = p^s$  où  $s$  est suffisamment élevé, car  $h \leq m$ .

**Proposition 4.2 :** Pour tout  $\alpha$  de  $A$ , les anneaux  $(A_S)_{\mathfrak{m}_\alpha}$  ne sont pas intégralement clos.

**Preuve :** Soit  $a_0, a_1, \dots, a_n$  un système de représentants de  $A$  modulo  $\mathfrak{m}$  et  $f = 1/t \prod_{i=0}^n (X - a_i)$ .

On trouve  $n$  tel que  $f^n \in A_{S[k]} \subseteq A_{S(k)}$  et a fortiori dans un localisé (car  $f \in A_S$ ), par contre  $f$  n'est pas même dans  $(A_{S(1)})_{\mathfrak{m}_\alpha}$ . En effet  $f(\alpha) \in A$  et  $f'(\alpha) \notin A$ . Si on avait  $f \in (A_{S(1)})_{\mathfrak{m}_\alpha}$ , on aurait  $f = fg/g$  où  $fg \in A_{S(1)}$ ,  $g \in A_{S(1)}$  mais  $g(\alpha) \notin \mathfrak{m}$ , on devrait avoir  $(fg)'(\alpha) \in A$ , mais  $(fg)'(\alpha) = f(\alpha)g'(\alpha) + f'(\alpha)g(\alpha)$  or  $g'(\alpha) \in A$ , c'est donc impossible.

Les idéaux au-dessus de  $(0)$  de  $A_S$  sont ceux de  $K[X]$ , ils sont de la forme :

$$\tilde{f} = \left\{ hf \in A_S \mid h \in K[X] \right\}$$

où  $f$  est un polynôme irréductible de  $K[X]$  (défini à une constante multiplicative près).

**Théorème 4.3 :** Si  $\alpha \in \hat{A}$ , alors  $\tilde{f} \subset \mathfrak{m}_\alpha$  si et seulement si  $f(\alpha) = 0$ .

**Preuve :** Si d'abord  $f(\alpha) = 0$ , alors pour tout  $h$ ,  $hf(\alpha) = 0$  donc  $hf(\alpha) \in \hat{\mathfrak{m}}$  et  $hf \in \mathfrak{m}_\alpha$ . Ainsi  $\tilde{f} \subset \mathfrak{m}_\alpha$ .

Pour la réciproque, on considère d'abord le cas de  $A_S$ . Si  $f(\alpha) \neq 0$ , on peut supposer sans modifier  $\tilde{f}$ , mais en multipliant  $f$  par une constante, que  $f(\alpha) \in A$ ,  $f(\alpha) \notin \hat{\mathfrak{m}}$ . Peut-être que  $f$  n'est pas dans  $A_S$  mais  $t^d f \in A[X]$  pour  $d$  assez grand. Comme  $f$  est une fonction continue de  $\hat{A}$  dans  $\hat{K}$ ,  $v[f(x)] = 0$ ,  $\forall x \in \alpha + \hat{\mathfrak{m}}^r$  où  $\alpha + \hat{\mathfrak{m}}^r$  est une boule de centre  $\alpha$ , et où  $r$  est assez grand.

Soit  $g$  la fonction de  $\mathcal{C}(A, A)$ , définie par :  $g(x) = 1$  si  $x \in \alpha + \hat{\mathfrak{m}}^r$

$$g(x) = t^d \text{ si } x \notin \alpha + \hat{\mathfrak{m}}^r$$

Comme  $A_S$  est dense dans  $\mathcal{C}(A, A)$ , on trouve  $h \in A_S$ , tel que  $v(h(x) - g(x)) > d$ ,  $\forall x \in A$

ainsi :  $v(h(x)) = 0 \quad \forall x \in \alpha + \hat{\mathfrak{m}}^r$

et  $v(h(x)) = d \quad \forall x \notin \alpha + \hat{\mathfrak{m}}^r$

donc  $hf \in A_S$  mais  $h(\alpha)f(\alpha) \notin \hat{\mathfrak{m}}$ . Ainsi  $hf \in \tilde{f}$  mais  $hf \notin \mathfrak{m}_\alpha$ .

Pour traiter maintenant le cas de  $A_S$ , il suffit désormais de considérer  $(hf)^n$  où  $n$  est suffisamment élevé de façon à ce que  $(hf)^n \in A_S$ . [lemme 1].

## §5. Fractions rationnelles

On s'intéresse maintenant aux fractions rationnelles :

### Définition 5.1

Soit  $A$  un anneau intègre de corps des fractions  $K$ , l'anneau  $A_R$  des fractions rationnelles à valeurs entières est l'anneau :

$$A_R = \left\{ f \in K(X) \mid f(A) \subseteq A \right\}$$

Bien sûr  $A_R \subset K(X)$  et  $A_R \cap K[X] = A_S$ . Si  $K$  est de caractéristique 0, et si  $f$  est un polynôme,  $f^{(n)}$  est la  $n^{\text{ème}}$  itérée de la dérivée. On peut alors définir la dérivée d'une fraction  $f/g$  par  $f'g - fg' / g^2$  et les dérivées successives par itération.

**Définition 5.2 :**

L'anneau  $A_{R(k)}$  est l'anneau des fractions rationnelles :

$$A_{R(k)} = \left\{ f \in K(X) \mid f(A), f'(A), \dots, f^{(k)}(A) \right\} \subset A$$

$$\text{et } A_{R^\infty} = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_{R(k)}$$

On a bien sûr,  $A_{S(k)} = A_{R(k)} \cap K[X]$ ,  $A_{S^\infty} = A_{R^\infty} \cap K[X]$ , et  $A_{R(k+1)} \subset A_{R(k)}$

L'étude des fractions rationnelles se complique du fait qu'on ne peut plus localiser :

**Exemple 5.3 :** Toute fraction rationnelle à valeurs entières sur  $Z$  est en fait un polynôme :

$Z_R = Z_S$ , mais pour tout premier  $p$ ,  $\frac{1}{1+pX}$  est une fraction rationnelle à valeurs entières sur  $Z_p$ , donc  $\frac{1}{1+pX} \in (Z_p)_R$  mais  $\frac{1}{1+pX} \notin (Z_p)_p$

On a  $Z_R = Z_S$ , car si  $f/g \in Z_R$  et que  $f/g$  est sous une forme irréductible, on sait que si  $g$  n'est pas une constante,  $g$  a une racine dans au moins une completion  $\hat{Z}_p$  (un premier  $p$  au moins est décomposé dans le corps de décomposition de  $g$ ). Si  $\alpha$  dans  $Z$  est très proche de cette racine, et si  $v_p$  dénote la valuation  $p$ -adique, alors  $v_p(g(\alpha))$  devient très grand, mais comme  $f$  n'admet pas cette racine (car  $f/g$  est irréductible)  $v_p(f(\alpha))$  reste borné ; ainsi on peut faire  $v_p(g(\alpha)) > v_p(f(\alpha))$  pour  $\alpha \in Z$  donc  $f/g(\alpha) \notin Z_p$ , a fortiori  $f/g(\alpha) \notin Z$ .

Néanmoins, si on suppose que  $A$  est un anneau de valuation discrète de corps résiduel fini, on peut facilement déduire le spectre de  $A_{R(k)}$  ( $0 \leq k < \infty$ ) des paragraphes précédents.

En effet  $A_{S(k)} \subset A_{R(k)} \subset \mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$  donc  $A_{R(k)}$  est dense dans  $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$  et les idéaux  $\mathfrak{m}_\alpha$  de  $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$  découpent des idéaux distincts dans  $A_{R(k)}$ . Il est clair encore que si  $f \in A_{R(k)}$

alors  $1/t \prod_{i=0}^n (f - a_i)^{k+1} \in A_{R(k)}$ , donc que si  $\tilde{\mathfrak{M}}$  est un idéal premier de  $A_{R(k)}$  au-dessus de  $\mathfrak{m}$ ,  $\prod (f - a_i)^{k+1} \in t A_{R(k)} \subset \tilde{\mathfrak{M}}$ , ainsi l'un des  $f - a_i$  est dans  $\tilde{\mathfrak{M}}$  et  $\tilde{\mathfrak{M}}$  est de corps résiduel fini isomorphe à  $A/\mathfrak{m}$ . Comme pour  $A_{S(k)}$ , tout idéal premier de  $A_{R(k)}$  au-dessus de  $\mathfrak{m}$  se relève dans  $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$ . Avec les notations des paragraphes 3 et 4 :

**Théorème 5.4 :** Les idéaux premiers au-dessus de  $\mathfrak{m}$  de  $A_{R(k)}$  correspondent bijectivement aux points de  $\hat{A}$ , à  $\alpha \in \hat{A}$  correspond  $\mathfrak{m}_\alpha = \{ f \in A_{R(k)} \mid f(\alpha) \in \hat{\mathfrak{m}} \}$

Quant à la fibre au-dessus de (0), elle se déduit du lemme suivant :

**Lemme 5.5 :** On a  $A_{R(k)} \otimes_A K = T^{-1} K[X]$  où  $T$  est la partie multiplicative de  $K[X]$  formée des polynômes sans racine dans  $\hat{A}$ .

**Preuve :** Si  $f/g \in A_{R(k)}$  et que  $f/g$  est sous sa forme irréductible alors  $g$  n'a pas de racine dans  $\hat{A}$ .

Si non pour  $\alpha$  proche de cette racine,  $v(g(\alpha))$  devient grand tandis que  $v(f(\alpha))$  reste borné (car  $f$  n'a pas la même racine) [cf. Exemple 5.3], on aurait donc  $f(\alpha)/g(\alpha) \notin A$ . Ainsi

$f/g \in T^{-1} K[X]$ . Si réciproquement  $f/g \in T^{-1} K[X]$ , donc  $g$  n'a pas de racine dans  $\hat{A}$ , alors  $v(g(\alpha))$  reste borné quand  $\alpha$  décrit  $\hat{A}$  (donc a fortiori quand  $\alpha$  décrit  $A$ ), les dérivées successives  $(f/g)^{(j)}$  jusqu'à  $(f/g)^{(k)}$  peuvent toutes être mises sous la forme  $h_j/g^k$  où  $h_j$  est un polynôme, donc pour  $n$  assez grand,  $t^n(f/g) \in A_{R(k)}$ .

On a donc encore :

**Proposition 5.6 :** Les idéaux premiers au-dessus de (0) de  $A_{R(k)}$  sont en correspondance biunivoque avec les polynômes irréductibles de  $K[X]$  ayant au moins une racine dans  $\hat{A}$  (définis à une constante multiplicative près). Au polynôme  $f$  correspond l'idéal

$$\tilde{f} = \{ g \in A_{R(k)} \mid g = hf, h \in K(X) \}$$

et  $\tilde{f} \subset \mathfrak{m}_\alpha$  si et seulement si  $f(\alpha) = 0$ .

De tout ce qui précède on peut déduire facilement :

**Théorème 5.7 :** Les anneaux  $A_{S(k)}$ ,  $A_{S[k]}$ ,  $A_{R(k)}$  ne sont pas Noethériens.

**Preuve :** Tous ces anneaux ( $k \geq 0, k < \infty$ ) ont une infinité d'idéaux du type  $\mathfrak{m}_\alpha$ . Aucun de ceux-ci n'est de type fini : Si  $f_1, f_2, \dots, f_n$  engendraient  $\mathfrak{m}_\alpha$  on aurait

$$f_1(\alpha), f_2(\alpha), \dots, f_n(\alpha) \in \hat{\mathfrak{m}}, \text{ mais donc pour } \beta \text{ proche de } \alpha, f_1(\beta), \dots, f_n(\beta) \in \hat{\mathfrak{m}}$$

donc  $\mathfrak{m}_\alpha \subset \mathfrak{m}_\beta$ . Or tous les idéaux  $\mathfrak{m}_\alpha$  sont maximaux.

## §6. Dérivées à l'infini

On s'intéresse maintenant à la fibre au-dessus de  $\mathfrak{m}$  de  $A_{S^\infty}$  et de  $A_{R^\infty}$ . On suppose encore que  $A$  est de corps résiduel fini,  $p$  désigne la caractéristique de  $A/\mathfrak{m}$ ; si  $f \in A_{S^\infty}$  (resp.  $A_{R^\infty}$ )

alors  $1/t \prod_{i=0}^n (f - a_i)t^p \in A_{S^\infty}$  (resp.  $A_{R^\infty}$ ), donc, comme pour  $A_{S(k)}$  [proposition 3.2],

tous les idéaux de  $A_{S^\infty}$  (resp.  $A_{R^\infty}$ ) au-dessus de  $\mathfrak{m}$  sont maximaux, de corps résiduel  $A/\mathfrak{m}$  et se relèvent dans  $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$ . Ils sont donc encore de la forme  $\mathfrak{m}_\alpha$ , mais ne sont pas tous distincts.

**Théorème 6.1 :** Les idéaux de  $A_{S^\infty}$  et de  $A_{R^\infty}$  au-dessus de  $\mathfrak{m}$  sont tous maximaux, de corps résiduel  $A/\mathfrak{m}$ , et ils sont en nombre fini.

Ce théorème est dû essentiellement à D. Brizolis (2).

**Preuve :** Si  $\alpha, \beta \in \hat{A}$  et si  $f \in A_{R^\infty}$ , on a :

$$f(\beta) = f(\alpha) + (\beta - \alpha)f'(\alpha) + \dots + (\beta - \alpha)^n/n! f^{(n)}(\alpha) + \dots$$

De plus, on établit par induction,

$$v(n!) = v(p) \cdot \sum_{\gamma=1}^{\infty} \left[ n/p^\gamma \right]$$

où  $\left[ n/p^\gamma \right]$  désigne la partie entière de  $n/p^\gamma$ , donc bien sûr,  $v(n!) < n v(p)$ .

Si  $v(\beta - \alpha) \geq 2 v(p)$  alors

$$v\left[(\beta - \alpha)^n/n! f^{(n)}(\alpha)\right] > n v(p)$$

et la série  $\sum_{n=1}^{\infty} (\beta - \alpha)^n/n! f^{(n)}(\alpha)$  est convergente dans  $\hat{\mathfrak{m}}$  donc  $f(\alpha) \in \hat{\mathfrak{m}}$  si et

seulement si  $f(\beta) \in \hat{\mathfrak{m}}$ . Si donc  $\mathfrak{m}_\alpha$  et  $\mathfrak{m}_\beta$  sont les idéaux correspondants à  $\alpha$  et  $\beta$  dans

$\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$  alors  $\mathfrak{m}_\alpha \cap A_{R^\infty}$  et  $\mathfrak{m}_\beta \cap A_{R^\infty}$  sont confondus ;  $\mathfrak{m}_\alpha \cap A_{S^\infty}$  et  $\mathfrak{m}_\beta \cap A_{S^\infty}$

sont confondus a fortiori.

Une étude un peu plus fine établit :

$$v(n!) = v(p) \sum_{\gamma=1}^{\infty} \left[ n/p^\gamma \right] < v(p) n \sum_{\gamma=1}^{\infty} 1/p^\gamma = n v(p)/p-1$$

Si donc  $v(p) \leq p-1$ , et  $v(\beta - \alpha) \geq 1$ , on a  $f(\beta) \in \hat{\mathfrak{m}}$  si et seulement si  $f(\alpha) \in \hat{\mathfrak{m}}$ , dans le cas

où  $f$  est un polynôme (et que la série n'a qu'un nombre fini de termes non nuls.). On voit donc

que si  $v(p) \leq p-1$ , il y a au-dessus de  $\mathfrak{m}$  exactement autant d'idéaux premiers dans  $A_{S^\infty}$  que

d'éléments dans  $A/\mathfrak{m}$  ; autrement dit  $\mathfrak{m}_\alpha = \mathfrak{m}_\beta$  si et seulement si  $\beta \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{m}}$ . C'est le

résultat qu'établit D. Brizolis (2) dans le cas de  $\mathbb{Z}$ , montrant qu'il y a dans  $\mathbb{Z}_{S^\infty}$ , exactement

$p$  idéaux au-dessus d'un premier  $p$ .

Si par contre  $v(p) \geq p$ , on peut avoir  $\mathfrak{m}_\alpha \neq \mathfrak{m}_\beta$  même si  $\alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{m}}$ . Soit

en effet  $\alpha, a_1, \dots, a_n$  un système de représentants modulo  $\mathfrak{m}$  contenant  $\alpha$ , et  $f$  le polynôme

$f = 1/t p (X - \alpha)^p (X - a_1)^p \dots (X - a_n)^p$ . Alors  $f$  est dans  $A_S$  et même dans  $A_{S^\infty}$  car  $v(p) \geq p$  donc  $f' \in A[X]$ . De plus  $f(\alpha) = 0 \in \hat{m}$  mais  $f(\beta) \in \hat{m}$  si et seulement si (quand  $\beta \equiv \alpha \pmod{m}$ ) on a  $v(\beta - \alpha) \geq 2$ . On voit donc que, par exemple sur l'anneau des entiers de  $\mathbb{Q}(\sqrt[p]{p})$ , il y a maintenant  $p^2$  idéaux au-dessus de  $p$ .

### §7. Une base de $A_{S^\infty}$

On adapte ici un résultat de Strauss (8) au cas où  $A$  est un anneau de valuation discrète : On montre que  $A_{S^\infty}$  est un  $A$ -module libre dont on construit une base (comme le fait Strauss pour  $Z$ ). Ceci nous permettra de montrer que  $A_{S^\infty}$  n'est pas Noethérien.

S'agissant de  $A_{S^\infty}$  (dont la définition utilise les dérivées usuelles),  $A$  est de caractéristique 0, et si  $f \in A_{S^\infty}$  est de degré  $n$  :

$$f = \lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X(X-1) + \dots + \lambda_n X(X-1) \dots (X-n+1)$$

où  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  et comme en particulier  $f \in A_S$ , alors  $f(0), f(1), \dots, f(n) \in A$  donc  $v(\lambda_i) \geq -v(n!)$  pour  $i = 0, 1, \dots, n$ , ainsi les valuations des coefficients des polynômes de degré  $n$  de  $A_{S^\infty}$  sont minorées.

**Lemme 7.1 :** Soit  $f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$  une suite de polynômes de  $A_{S^\infty}$ , où  $f_n$  est de degré  $n$  et tel que, parmi les polynômes de degré  $n$  de  $A_{S^\infty}$ , son coefficient directeur a une valuation minimale. Alors cette suite forme une base du  $A$ -module  $A_{S^\infty}$ .

**Preuve :** Bien sûr toute combinaison linéaire, à coefficients dans  $A$ , des polynômes  $f_i$  est dans  $A_{S^\infty}$ . Si réciproquement  $g \in A_S$  et que  $g$  est de degré  $n$ , on peut toujours écrire (de façon unique) :

$$g = k_0 f_0 + k_1 f_1 + \dots + k_n f_n, \text{ où } k_i \in K, i \in \{0, 1, \dots, n\}$$

d'après le caractère minimal de la valuation du coefficient directeur de  $f_n$ , on a  $v(k_n) \geq 0$ , soit  $k_n \in A$  et donc  $g - k_n f_n \in A_{S^\infty}$ . A son tour,  $k_{n-1} \in A$  et ainsi de suite,  $k_i \in A, \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

**Lemme 7.2 :** Soit  $k$  un entier et  $n$  le degré d'un polynôme  $f$  de  $A[X]$  vérifiant  $f/t^k \in A_{S^\infty}$ .

Alors  $v([n/N]!) \geq k$ , où  $[n/N]$  désigne la partie entière de  $n/N$  et  $N$  le cardinal de  $A/m$ .

**Preuve :** Soit  $a_0, a_1, \dots, a_{N-1}$ , un système de représentants modulo  $m$  et  $f$  répondant aux conditions du lemme. Si  $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  on note  $m_j$  la multiplicité de la racine  $a_j$  de  $f$

modulo  $m$ , donc :

$$f = (X - a_j)^{m_j} g_j + t h_j \quad \text{où } g_j, h_j \in A[X] \text{ et } g_j(a_j) \not\equiv 0 \pmod{m}$$

Dérivant  $m_j$  fois, on a

$$f^{(m_j)} = (m_j)! g_j + (X - a_j) k_j + t m_j! l_j \quad \text{où } k_j \in A[X], l_j \in A[X] \quad (l_j = h_j^{(m_j)} / m_j!)$$

$$\text{et donc : } f^{(m_j)}(a_j) = (m_j)! g_j(a_j) + t m_j! l_j(a_j).$$

Si donc  $v(m_j!) = r_j$ , alors  $v[f^{(m_j)}(a_j)] = r_j$ , et comme  $f^{(m_j)}(a_j) / t^k \in A$ , on a  $r_j \geq k$ .

Ainsi  $m_j \geq m$  où  $m$  est le plus petit entier tel que  $v(m!) = k$ . Comme ceci est vrai pour tout  $j$

on a :

$$f = \prod_{j=0}^{N-1} (X - a_j)^m g + t h \quad \text{où } g, h \in A[X].$$

donc  $n = \deg(f) \geq mN$  et  $v([n/N]!) \geq k$ .

**Théorème 7.3 :** Si  $A$  est tel que  $v(p) \leq p-1$  (où  $p$  désigne la caractéristique de  $A/m$ ) alors une

base du  $A$ -module  $A_{S^\infty}$  est donnée par les polynômes  $f_0 = 1, f_1 = (X - a_0) \dots$

$$f_N = (X - a_0)(X - a_1) \dots (X - a_{N-1}), f_{N+1} = (X - a_0)^2 (X - a_1) \dots (X - a_{N-1}), \dots$$

$$f_{2N} = (X - a_0)^2 (X - a_1)^2 \dots (X - a_{N-1})^2 / t^{v(2!)}, \dots$$

$$f_{mN} = (X - a_0)^m (X - a_1)^m \dots (X - a_{N-1})^m / t^{v(m!)}$$

$$f_{mN+1} = (X - a_0)^{m+1} (X - a_1)^m \dots (X - a_{N-1})^m / t^{v(m!)}, \dots$$

**Preuve :** Soit  $g$  un polynôme de degré  $n$  dans  $A_{S^\infty}$ ,  $g = a_n X^n + \dots + a_0$ , on a un entier  $k$

tel que  $t^k g \in A[X]$ , bien sûr  $k \geq -v(a_n)$  et par ailleurs  $k \leq v([n/N]!)$ . Soit  $m = [n/N]$ ,

le coefficient directeur de  $f_n$  a pour valuation  $-v(m!)$  et donc  $-v(m!) \leq v(a_n)$ . Ainsi la suite

$f_0, f_1, \dots, f_n$  répond aux conditions du lemme 1 si  $f_n$  est dans  $A_{S^\infty}$ . Bien sûr il suffit d'établir

que  $f_{mN} \in A_{S^\infty}$  (car si  $k < N$ , alors  $f_{mN+k} = \prod_{j=0}^{k-1} (X - a_j) f_{mN}$ ). Comme  $v(p) \leq (p-1)$  et

$v(m!) < m v(p) / (p-1)$  alors  $v(m!) < m$  et  $f_{mN} \in A_S$ . Ensuite

$$f_{mN} = \sum_{i=0}^{N-1} m / t^{v(m!)} (X - a_i)^{m-1} \prod_{j \neq i} (X - a_j)^m \quad \text{donc}$$

$$f_{mN} = f_{(m-1)N} \sum_{i=0}^{N-1} (m / t^{v(m)}) \prod_{j \neq i} (X - a_j)$$

et comme  $m/v(m) \in A$  alors  $m/v(m) \sum_{i=0}^{N-1} (\prod_{j \neq i} (X - a_j)) \in A[X]$  et donc

$f_{mN} \in A_{S^\infty}$ , si, par induction, on suppose que  $f_{(m-1)N} \in A_{S^\infty}$ . On vérifie que  $f_0, f_N$  sont bien sûrs dans  $A_{S^\infty}$  (pour  $m=0, m=1$ ).

**Remarque :** En général  $A_{S^\infty}$ , et les  $A$ -modules  $A_{S(k)}$  ou  $A_{S[k]}$  sont des  $A$ -modules libres sur  $A$  quand  $A$  est un anneau de valuation discrète, avec des bases de polynômes de degré croissant (cf. lemme 1). Si  $A$  est un anneau de Krull Noethérien, on peut, grâce au théorème d'approximation, construire une suite de polynômes  $f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$  de  $K[X]$  telle que

$f_0, f_1, \dots, f_n, \dots \in A_S$  et que la valuation du coefficient directeur de  $f_n$  soit minimale (parmi les polynômes de degré  $n$ ), pour toute valuation essentielle de  $A$  dont le corps résiduel a un cardinal plus petit que  $n$  (en effet ces valuations sont en nombre fini). Si une valuation essentielle a un corps résiduel comportant plus de  $n$  éléments, et si  $g$  est dans  $A_S$  (a fortiori dans tout anneau  $A_{S'}$ ) et de degré inférieur ou égal à  $n$ , alors, pour cette valuation,  $v(g) \geq 0$ . Sinon on peut construire immédiatement à partir de  $g$ , un polynôme à coefficients dans le corps résiduel de cette valuation, de degré inférieur à  $n$ , mais partout nul, c'est-à-dire avec plus de  $n$  racines ! Tout polynôme de  $A_S$  peut donc s'écrire

$$g = \sum_{i=0}^n \alpha_i f_i \quad (\text{où } n \text{ est le degré de } g) \text{ et où } v(\alpha_i) \geq 0, \text{ si } v \text{ est une valuation de corps résiduel ayant moins de } i \text{ éléments, et } v(\alpha_i) \geq -v(f_i), \text{ si } v \text{ est une valuation de corps résiduel ayant plus de } i \text{ éléments.}$$

Ainsi on peut toujours décomposer  $A_S$  en tant que  $A$ -module, en somme d'idéaux fractionnaires de  $A$ . Si  $A$  est factoriel, comme cette décomposition est de la forme

$A_S = \bigoplus_{n \geq 0} I_n f_n$  où les idéaux  $I_n$  sont définis par des conditions :

$\alpha \in I_n$  si et seulement si  $v(\alpha) \geq -v(f_n)$

ne mettant donc en jeu qu'un nombre fini de valuations essentielles de  $A$ , on voit qu'alors

$A_S$  est libre avec une base de polynômes de degré croissant.

**Proposition 7.4 :** Si  $A$  est un anneau factoriel, les  $A$ -modules  $A_S$  sont tous libres avec une base de polynômes de degré croissant.

Ce résultat généralise un peu celui de J.L. Chabert [(6) IV proposition 4.2].

### §8. $A_{S^\infty}$ n'est pas Noethérien

Il résulte du fait qu'il y a une infinité d'idéaux premiers de  $A_{S^{(k)}}$  au-dessus de  $\mathfrak{m}$  que  $A_{S^{(k)}}$  n'est pas Noethérien [Théorème 5.7]. Mais pour  $A_{S^\infty}$  il faut changer d'argument ! On se sert de la base facilement établie dans le cas où  $v(p) \leq p - 1$ . On voit donc qu'en tout cas si  $A$  est l'anneau des entiers d'un corps de nombre, alors  $A_{S^\infty}$  n'est pas Noethérien car une infinité de premiers  $p$  ne sont pas ramifiés dans  $A$ .

**Proposition 8.1.** : Soit  $A$  un anneau de valuation discrète tel que  $v(p) \leq p - 1$ , alors  $A_{S^\infty}$  n'est pas Noethérien.

**Preuve :** On considère la base  $f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$  du théorème 7.3. Soit  $m$  un entier, on note  $-k = v(f_m)$ , on a alors  $v(f_s) \geq -k$ , si  $s \leq m$ . Soit  $n$  l'entier  $n = p^{k+1}N$ , on a alors  $v(f_i) \geq v(f_n) + k + 1$ , si  $i < n$ . On montre que  $f_n$  n'est pas dans l'idéal de  $A_{S^\infty}$  engendré par  $f_1, f_2, \dots, f_m$ . On aurait sinon :

$$f_n = \sum_{s=1}^m g_s f_s \quad \text{où } g_s \in A_{S^\infty}$$

$$\text{et } g_s = \sum_i \lambda_{i,s} f_i \quad \text{où } \lambda_{i,s} \in A.$$

Comme  $f_i$  est divisé par  $f_n$  dans  $K[X]$ , si  $i \geq n$ , on a

$$g_s = \sum_{i < n} \lambda_{i,s} f_i + f_n h_s \quad \text{où } h_s \in K[X].$$

$$\text{Et } f_n \left( 1 - \sum_{s=1}^m h_s f_s \right) = \sum_{s=1}^m \sum_{i < n} \lambda_{i,s} f_i f_s$$

$X$  divise  $f_s$  dans  $K[X]$ , on a donc finalement :

$$f_n(1 - Xh) = \sum_{s,i} \lambda_{i,s} f_i f_s \quad \text{où } h \in K[X], 1 \leq s \leq m \text{ et } i < n.$$

Mais alors on a, d'une part  $v(1 - Xh) \leq 0$  (le terme constant est 1), donc

$v[f_n(1 - Xh)] \leq v(f_n)$  ; d'autre part  $v(f_i f_s) \geq v(f_n) + k + 1 - k$ , donc

$v \left[ \sum \lambda_{i,s} f_i f_s \right] > v(f_n)$ . Une contradiction !

**Remarque :** On conjecture que  $A_{S^\infty}$  n'est jamais Noethérien dans le cas où  $A$  est un anneau de valuation discrète de corps résiduel fini. (si le corps résiduel est infini,  $A_{S^\infty} = A[X]$ ).

### § 9. Plusieurs variables

Très brièvement on veut maintenant indiquer que notre technique de détermination du spectre se généralise à plusieurs variables. On note  $A_S^m$  le sous-anneau de  $K[X_1, \dots, X_m]$  formé des polynômes  $f$  tels que  $f(A^m) \subset A$ . Si  $A$  est un anneau de valuation discrète de corps résiduel fini, l'ensemble produit  $\hat{A}^m$  est encore compact et  $A_S^m$  est dense dans l'anneau des fonctions continues  $\mathcal{C}(\hat{A}^m, \hat{A})$ . On en tire :

**Théorème 9.1 :** La fibre au-dessus de  $\mathfrak{m}$  de  $A_S^m$  est en bijection avec les points de  $A^m$ . A un point  $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  de  $\hat{A}^m$  correspond l'idéal  $\mathfrak{m}_{\underline{\alpha}} = \{f \in A_S^m \mid f(\underline{\alpha}) \in \hat{\mathfrak{m}}\}$ .  
L'idéal  $\mathfrak{m}_{\underline{\alpha}}$  est maximal et  $A_S^m / \mathfrak{m}_{\underline{\alpha}} \cong A / \mathfrak{m}$ .

Bien sûr la fibre au-dessus de  $(0)$  de  $A_S^m$  est celle de  $K[X_1, \dots, X_m]$ .

Si  $\mathfrak{p}$  est un idéal premier de  $K[X_1, \dots, X_m]$ , on établit d'après le théorème 4.3 :

**Proposition 9.2 :** L'idéal  $\mathfrak{p} \cap A_S^m$  de  $A_S^m$  est inclus dans  $\mathfrak{m}_{\underline{\alpha}}$  si et seulement si  $f(\underline{\alpha}) = 0$  pour tout  $f \in \mathfrak{p}$ .

Si  $\underline{\alpha} \in \hat{A}^m$  on note  $\mathfrak{p}_{\underline{\alpha}}$  l'idéal (premier) de  $K[X_1, \dots, X_m]$  formé des polynômes nuls en  $\underline{\alpha}$ . Bien sûr  $K[X_1, \dots, X_m] / \mathfrak{p}_{\underline{\alpha}} \cong K(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  donc si  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  est de degré de transcendance  $d$  sur  $K$ ,  $\mathfrak{p}_{\underline{\alpha}}$  est de hauteur  $m - d$  et  $\mathfrak{m}_{\underline{\alpha}}$  de hauteur  $m - d + 1$  dans  $A_S^m$  (On note que dans  $\mathfrak{m}_{\underline{\alpha}}$  est contenu un seul idéal de hauteur immédiatement inférieure).

Le spectre de  $A_S^m$  est bien loin de celui d'un anneau Noethérien !).

On peut aussi introduire l'anneau  $A_R^m$  des fractions rationnelles à valeurs entières dans  $K(X_1, \dots, X_m)$ . Bien sûr  $A_R^m$  est encore dense dans  $\mathcal{C}(\hat{A}^m, \hat{A})$  et cet anneau a la même fibre au-dessus de  $\mathfrak{m}$  que  $A_S^m$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- (1) BOURBAKI, N.            Algèbre commutative, Paris Hermann.
- (2) BRIZOLIS, D.            Ideals of Rings of Integer valued Polynomials  
Thèse, University of California, Los Angeles, 1973.
- (3) CAHEN, P.J.            Polynômes à valeurs entières.  
Thèse, Université de Paris XI, Orsay, 1973.
- (4) CAHEN, P.J.            Coefficients et valeurs d'un polynôme.  
et CHABERT, J.L.        Bull. Sci. Math. 95 (1971) pp. 295-304.
- (5) CHABERT, J.L.        Anneaux de polynômes à valeurs entières et anneaux de Fatou.  
Bull. Soc. Math. France 99 (1971) pp. 273-283.
- (6) CHABERT, J.L.        Anneaux de polynômes à valeurs entières et extensions de Fatou.  
Thèse, Université de Paris XI, Orsay, 1973.
- (7) MAHLER, K.            An interpolation series for continuous functions of a p-adic variable.  
J. für Reine and Angew. math. 199 (1958) pp. 23-34.
- (8) STRAUS, E.G.        On the Polynomials whose Derivatives have Integral Values  
at the Integers.  
Proc. A.M.S., 2 (1951) pp. 24-27.

(Manuscrit reçu en août 1974)