ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
*Série Mathématiques*

LABIB HADDAD

# Topologie générale et espaces d'ultrafiltres

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 54, série *Mathématiques*, n° 10 (1975), p. 1-23

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1975__54_10_1_0>

# TOPOLOGIE GENERALE ET ESPACES D'ULTRAFILTRES

par Labib HADDAD

127, avenue Philippe-Auguste - PARIS 11e

Etant donné un ensemble $E$, on désigne par $\Upsilon(E)$ l'espace de Stone des ultrafiltres sur $E$. C'est un espace compact et extrêmement discontinu qui peut être identifié au compactifié de Stone-Čech de l'espace *discret* $E$. Lorsque $E$ est muni d'une topologie, on désignera par $E^{\#}$ le sous-espace de $\Upsilon(E)$ formé des ultrafiltres qui convergent dans $E$. De même, on désignera par $E^{\flat}$ le sous-espace de $\Upsilon(E)$ formé des ultrafiltres dont tous les éléments ouverts ont un point adhérent commun dans $E$. On a évidemment $E^{\#} \subset E^{\flat}$ et ces deux espaces d'ultrafiltres sont extrêmement discontinus. Nous allons montrer que certaines propriétés de l'espace topologique $E$ ne dépendent pas tant de toute la richesse de sa structure topologique que des seules propriétés des espaces $E^{\#}$ et $E^{\flat}$.

Les espaces d'ultrafiltres $E^{\#}$ et $E^{\flat}$ reflètent certaines propriétés topologiques de l'espace $E$. Par le critère de compacité de Cartan, on sait déjà qu'un espace topologique $E$ est quasi compact si et seulement si $E^{\#} = \Upsilon(E)$ si et seulement si $E^{\#}$ est quasi compact. D'autre part, $E$ est quasi absolument fermé si et seulement si $E^{\flat} = \Upsilon(E)$ si et seulement si $E^{\flat}$ est absolument fermé (voir plus bas 8.1). Nous avons montré ailleurs que $E$ est faiblement régulier si et seulement si $E^{\#} = E^{\flat}$ (voir plus bas 2.2). Ainsi, *certaines propriétés topologiques semblent dépendre bien davantage de l'ensemble des ultrafiltres qui convergent que de la manière dont ils convergent.* La suite illustrera ce point de vue.

Ce texte est un développement de la note [5].

## 1. Préliminaires

Soit $E$ un ensemble et soit $\Upsilon(E)$ l'ensemble de tous les ultrafiltres sur $E$. Pour toute partie $A$ de $E$, on posera

$$\Upsilon(A) = \{\mathfrak{a} \mid A \in \mathfrak{a} \in \Upsilon(E)\}.$$

L'ensemble $\{\Upsilon(A) \mid A \subset E\}$ est une base d'ouverts pour une topologie canonique compácte sur $\Upsilon(E)$. Tout en supposant le lecteur familiarisé avec les propriétés de cet espace de Stone $\Upsilon(E)$, on fera les rappels suivants.

**1.1. Rappels.** - Pour toute partie $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$, on posera

$$\Upsilon\langle\mathcal{A}\rangle = \{\mathfrak{a} \mid \mathcal{A} \subset \mathfrak{a} \in \Upsilon(E)\}.$$

On a ainsi

$$\Upsilon\langle\mathcal{A}\rangle = \bigcap_{X \in \mathcal{A}} \Upsilon(X).$$

Si $A$ engendre un filtre $\mathfrak{a}$ sur $E$, alors $\Upsilon\langle\mathcal{A}\rangle = \Upsilon\langle\mathfrak{a}\rangle$ ; sinon, alors $\Upsilon\langle\mathcal{A}\rangle = \emptyset$

Soit $A$ une partie non vide de $\Upsilon(E)$. On considère le filtre $\mathfrak{a} = \bigcap_{\mathfrak{b} \in A} \mathfrak{b}$. L'adhérence de $A$ est alors égale à $\Upsilon\langle\mathfrak{a}\rangle$ . L'ensemble des parties fermées non vides de $\Upsilon(E)$ n'est autre que $\{\Upsilon\langle\mathfrak{a}\rangle \mid \mathfrak{a}$ est un filtre sur $E\}$.

Pour tout point $x$ de $E$, on désignera par $\tilde{x}$ l'ultrafiltre principal engendré par $\{x\}$ sur $E$. Pour toute partie $X$ de $E$, on posera

$$\tilde{X} = \{\tilde{x} \mid x \in X\} \quad .$$

L'adhérence de $\tilde{X}$ est alors égale à $\Upsilon(X)$. En particulier $\tilde{E}$ est partout dense dans $\Upsilon(E)$. La partie $\tilde{E}$ est aussi l'ensemble des points isolés de $\Upsilon(E)$.

L'ensemble des parties à la fois ouvertes et fermées de $\Upsilon(E)$ n'est autre que $\{\Upsilon(A) \mid A \subset E\}$ .

Soit $\tilde{E} \subset A \subset \Upsilon(E)$. Soit $X$ une partie ouverte du sous-espace $A$ et soit $\tilde{E} \cap X = \tilde{Y}$. Alors l'adhérence de $X$ dans le sous-espace $A$ est une partie ouverte de $A$ égale à $A \cap \Upsilon(Y)$. On a ainsi établi le résultat suivant.

**1.2. Lemme.** - *Soit $\tilde{E} \subset A \subset \Upsilon(E)$. Alors le sous-espace $A$ est extrêmement discontinu.*

**1.3. On se donne une fois pour toute un espace topologique E.**

Pour tout filtre $\mathfrak{a}$ sur $E$, on désignera par $\omega(\mathfrak{a})$ le filtre sur $E$ engendré par l'ensemble des ouverts qui appartiennent à $\mathfrak{a}$ . On a, par définition,

$$E^{\#} = \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \in \Upsilon(E) \text{ et } \mathfrak{a} \textit{ converge dans } E\}.$$

$$E^{\flat} = \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \in \Upsilon(E) \textit{ et } \omega(\mathfrak{a}) \textit{ possède un point adhérent dans } E\}.$$

On a alors $\tilde{E} \subset E^{\#} \subset E^{\flat} \subset \Upsilon(E)$. Ainsi les espaces $E^{\#}$ et $E^{\flat}$ sont complètement réguliers et extrêmement discontinus.

## 2. Régularité faible

Sur le modèle bourbakiste de «quasi compact», on utilisera le mot *quasi* pour indiquer qu'il s'agit d'espaces non nécessairement séparés.

Ainsi, par exemple, on dira que l'espace $E$ est *quasi régulier* lorsque l'ensemble des voisinages fermés d'un point quelconque de $E$ est un système fondamental de voisinages de ce point. De sorte qu'un espace *régulier* est un espace quasi régulier et séparé.

On sait que l'espace $E$ est quasi régulier si et seulement si, pour tout filtre $\mathfrak{a}$ sur $E$, tout point qui adhère à $\omega(\mathfrak{a})$ adhère également à $\mathfrak{a}$ . Cela nous a suggéré la généralisation suivante (voir [3]).

**2.1. Définition.** - On dira que l'espace $E$ est *faiblement régulier* lorsque tout filtre $\mathfrak{a}$ sur $E$, pour lequel $\omega(\mathfrak{a})$ possède un point adhérent, possède lui-même un point adhérent (mais non nécessairement le même).

On établit alors le résultat suivant [4, 2.2 proposition 25, p. 45].

**2.2. Proposition**

a) *Pour que l'espace $E$ soit faiblement régulier, il faut et il suffit que* $E^{\#} = E^{\flat}$ .

b) *Pour que l'espace $E$ soit régulier, il faut et il suffit qu'il soit faiblement régulier et séparé.*

Comme on le verra par la suite, la notion de régularité faible peut remplacer souvent la notion de régularité dans les espaces non séparés. Pour d'autres détails sur la régularité faible, voir [3] et [4].

## 3. Paracompacité

**3.1. Définition.** - On dira que l'espace $E$ est *faiblement paracompact* lorsque, pour tout recouvrement ouvert de $E$, il existe un recouvrement (quelconque) plus fin et localement fini.

On dira que l'espace $E$ est *quasi paracompact* lorsque, pour tout recouvrement ouvert de $E$, il existe un recouvrement ouvert plus fin et localement fini. Ainsi, un espace *paracompact* est un espace quasi paracompact et séparé.

Rappelons le résultat suivant [4, 2.3 théorème 2, p. 50].

3.2. **Proposition.** - *Pour que l'espace $E$ soit quasi paracompact, il faut et il suffit qu'il soit faiblement paracompact et faiblement régulier.*

Cela généralise le résultat connu suivant.

3.3. **Corollaire.** - *Pour que l'espace $E$ soit paracompact, il faut et il suffit qu'il soit faiblement paracompact et régulier.*

3.4. **Théorème.** - *Pour que l'espace $E$ soit faiblement paracompact, il faut et il suffit que l'espace $E^{\#}$ soit paracompact.*

Cela découle immédiatement de [4, 2.4 théorème 4, p. 53] et du lemme suivant.

3.5. **Lemme.** - *Soit $\widetilde{E} \subset A \subset \Upsilon(E)$. Alors les énoncés suivants sont équivalents.*

*a) Le sous-espace $A$ est paracompact.*

*b) Si l'ouvert $U$ de $\Upsilon(E)$ contient $A$, il existe une partition $\mathcal{P}$ de $E$ telle que*

$$A \subset \bigcup_{X \in \mathcal{P}} \Upsilon(X) \subset U.$$

**En effet** : a) $\Rightarrow$ b). Soit $A \subset U \subset \Upsilon(E)$. Si $U$ est un ouvert de $\Upsilon(E)$ alors l'ensemble $\mathcal{U} = \{A \cap \Upsilon(X) \mid \Upsilon(X) \subset U\}$ est un recouvrement à la fois ouvert et fermé du sous-espace $A$. Si $A$ est paracompact, il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de $A$, plus fin que $\mathcal{U}$ et localement fini. On considère $\mathcal{W} = \{\overline{V} \mid V \in \mathcal{V}\}$ où $\overline{V}$ est l'adhérence de $V$ dans $A$. L'ensemble $\mathcal{W}$ est aussi un recouvrement ouvert (car $A$ est extrêmement discontinu) et fermé de $A$, plus fin que $\mathcal{U}$ et localement fini. Pour toute partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{W}$, posons

$$X_{\mathcal{F}} = \left(\bigcap_{X \in \mathcal{F}} X\right) \cap \left[\bigcup_{Y \in \mathcal{W} - \mathcal{F}} Y.\right.$$

Comme $\mathfrak{W}$ est localement fini, l'ensemble

$$\mathscr{C} = \left\{ X_{\mathfrak{F}} \mid \mathfrak{F} \subset \mathfrak{W} \text{ et } X_{\mathfrak{F}} \neq \emptyset \right\}$$

est une partition ouverte de $A$ plus fine que le recouvrement $\mathfrak{W}$ . L'adhérence dans $\Upsilon\,(E)$ de chaque élément $C$ de $\mathscr{C}$ est de la forme $\Upsilon\,(X_C) \subset U$. L'ensemble $\mathfrak{P} = \left\{ X_C \mid C \in \mathscr{C} \right\}$ est une partition de $E$ et

$$A \subset \bigcup_{X \in \mathfrak{P}} \Upsilon\,(X) \subset U.$$

b) $\Rightarrow$ a). Soit $\mathfrak{U}$ un ensemble d'ouverts de $\Upsilon\,(E)$ qui recouvre $A$. Alors $U = \bigcup_{X \in \mathfrak{U}} X$ est un ouvert de $\Upsilon\,(E)$ et $A \subset U$. Soit donc $\mathfrak{P}$ une partition de $E$ telle que

$$A \subset \bigcup_{X \in \mathfrak{P}} \Upsilon\,(X) \subset U.$$

Comme $\Upsilon\,(X)$ est compact, pour tout $X \in \mathfrak{P}$ , il existe une partie finie $\mathfrak{U}_X$ de $\mathfrak{U}$ telle que $\Upsilon\,(X) \subset \bigcup_{Y \in \mathfrak{U}_X} Y$. Ainsi

$$\left\{ Y \cap \Upsilon\,(X) \mid Y \in \mathfrak{U}_X \text{ et } X \in \mathfrak{P} \right\}$$

est un recouvrement ouvert de $A$ plus fin que $\mathfrak{U}$ et localement fini dans $A$.

**c. q. f. d.**

3.6. **Corollaire.** - *Pour que l'espace E soit quasi paracompact, il faut et il suffit que l'espace* $E^{\#}$ *soit paracompact et que* $E^{\#} = E^{\flat}$.

3.7. **Corollaire.** - *Pour que l'espace E soit paracompact, il faut et il suffit qu'il soit régulier et que l'espace* $E^{\#}$ *soit paracompact.*

## 4. Espaces de Lindelöf

Rappelons que l'espace $E$ est un *espace de Lindelöf* lorsque tout recouvrement ouvert de $E$ contient un sous-recouvrement dénombrable.

4.1. **Théorème.** - *Pour que l'espace E soit un espace de Lindelöf, il faut et il suffit que l'espace* $E^{\#}$ *soit un espace de Lindelöf.*

Cela découle immédiatement de [4, 2.4 théorème 5, p. 55 et 2.4 lemme 19 c), p. 53] ainsi que du lemme suivant.

4.2. **Lemme.** - *Soit* $\widetilde{E} \subset A \subset \Upsilon(E)$. *Alors les énoncés suivants sont équivalents.*

*a) Le sous-espace* $A$ *est un espace de Lindelöf.*

*b) Si l'ouvert* $U$ *de* $\Upsilon(E)$ *contient* $A$, *il existe un recouvrement dénombrable* $\mathfrak{D}$ *de* $E$ *tel que*

$$A \subset \bigcup_{X \in \mathfrak{D}} \Upsilon(X) \subset U.$$

**En effet** : a) $\Rightarrow$ b). Soit $A \subset U \subset \Upsilon(E)$. Si $U$ est un ouvert de $\Upsilon(E)$ alors l'ensemble $\mathfrak{U} = \{\Upsilon(X) \mid \Upsilon(X) \subset U\}$ est un recouvrement ouvert de $A$. Si $A$ est un espace de Lindelöf, $\mathfrak{U}$ contient un sous-recouvrement dénombrable $\mathfrak{V}$. Ainsi $\mathfrak{D} = \{X \mid \Upsilon(X) \in \mathfrak{V}\}$ est un recouvrement dénombrable de $E$ tel que

$$A \subset \bigcup_{X \in \mathfrak{D}} \Upsilon(X) \subset U.$$

b) $\Rightarrow$ a). Soit $\mathfrak{U}$ un ensemble d'ouverts de $\Upsilon(E)$ qui recouvre $A$. Alors $U = \bigcup_{X \in \mathfrak{U}} X$ est un ouvert de $\Upsilon(E)$ et $A \subset U$. Soit donc $\mathfrak{D}$ un recouvrement dénombrable de $E$ tel que

$$A \subset \bigcup_{X \in \mathfrak{D}} \Upsilon(X) \subset U.$$

Comme $\Upsilon(X)$ est compact, pour tout $X \in \mathfrak{D}$, il existe une partie finie $\mathfrak{U}_X$ de $\mathfrak{U}$ telle que $\Upsilon(X) \subset \bigcup_{Y \in \mathfrak{U}_X} Y$. Ainsi $\mathfrak{V} = \bigcup_{X \in \mathfrak{D}} \mathfrak{U}_X$ est un recouvrement dénombrable de $E$ et $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}$.

c. q. f. d.

## 5. Compacité locale

5.1. **Lemme.** - *Soit* $\widetilde{E} \subset A \subset \Upsilon(E)$. *Pour que le sous-espace* $A$ *soit localement compact, il faut et il suffit que la partie* $A$ *soit ouverte dans* $\Upsilon(E)$.

**En effet** : Comme $\Upsilon(E)$ est compact, il est clair que le sous-espace $A$ est localement compact dès que $A$ est ouvert dans $\Upsilon(E)$. Réciproquement, si $A$ est localement compact, alors, pour tout $a \in A$, il existe un voisinage ouvert $U$ de $a$ dans $A$ dont l'adhérence $\overline{U}$ dans $A$ est compacte. Mais, puisque $\overline{U}$ est compact, il est fermé dans $\Upsilon(E)$ et $\overline{U} = \Upsilon(X)$. Donc $a \in \overline{U} = \Upsilon(X) \subset A$ et $A$ est ouvert dans $\Upsilon(E)$.

**c. q. f. d.**

Les résultats suivants découlent alors de [4, 2.2 proposition 26, p. 46] et du lemme précédent.

5.2. **Théorème.** - *Les énoncés suivants sont équivalents.*

*a) Tout point de E possède un voisinage V tel que tout ultrafiltre sur V converge dans E.*

*b) L'espace $E^{\#}$ est localement compact.*

5.3. **Corollaire.** - *Les énoncés suivants sont équivalents.*

*a) Tout point de E possède un voisinage quasi compact fermé.*

*b) L'espace $E^{\#}$ est localement compact et $E^{\#} = E^{\flat}$.*

5.4. **Corollaire.** - *Pour que l'espace E soit localement compact, il faut et il suffit qu'il soit régulier et que l'espace $E^{\#}$ soit localement compact.*

6. Normalité

On dira que l'espace $E$ est *quasi normal* lorsque, quelles que soient les parties fermées disjointes $A$ et $B$ de $E$, il existe des ouverts disjoints $U$ et $V$ tels que $A \subset U$ et $B \subset V$. De sorte qu'un espace *normal* est un espace quasi normal et séparé.

On aura besoin de la notion suivante pour étudier la normalité de certains sous-espaces de $\Upsilon(E)$.

6.1. **Filtres A-normaux.** - Soit $A$ une partie de $\Upsilon(E)$. On dira qu'un filtre $\mathfrak{a}$ sur $E$ est *A-normal* lorsque

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \in A} \mathfrak{b} ,$$

autrement dit, lorsque $\Upsilon\langle\mathfrak{a}\rangle$ est égal à l'adhérence de $A \cap \Upsilon\langle\mathfrak{a}\rangle$ dans $\Upsilon(E)$.

Si $B$ est une partie fermée non vide du sous-espace $A$, alors

$$\mathfrak{n}(B) = \bigcap_{\mathfrak{b} \in B} \mathfrak{b}$$

est un filtre $A$-normal sur $E$ et $A \cap \Upsilon\langle\mathfrak{n}(B)\rangle = B$. Ainsi l'application qui à $B$ fait correspondre

$\mathfrak{n}(B)$ est une bijection entre l'ensemble des parties fermées non vides du sous-espace $A$ et l'ensemble des filtres A-normaux sur $E$.

*En particulier, lorsque $\widetilde{E} \subset A$, tout filtre principal sur E est A-normal.*

On remarquera que la notion de filtre A-normal sur $E$ ne dépend directement que de l'ensemble $A$ et pas de la topologie de $E$. Cependant, dans le cas particulier où $A = E^{\#}$, la notion de filtre $E^{\#}$-normal dépend évidemment de la topologie de $E$ par l'intermédiaire de $E^{\#}$.

**6.2. Lemme.** - *Soit $\widetilde{E} \subset A \subset \Upsilon(E)$. Alors les énoncés suivants sont équivalents.*

*a) Le sous-espace $A$ est normal.*

*b) S'il n'existe pas d'ultrafiltre $\mathfrak{a} \in A$ plus fin que deux filtres A-normaux donnés $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$, alors il n'existe aucun filtre plus fin que $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$.*

En effet : a) $\Rightarrow$ b). Soient $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ des filtres A-normaux pour lesquels il n'existe aucun $\mathfrak{a} \in A$ tel que $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{a}$. Alors, dans le sous-espace $A$, les deux parties fermées $B = A \cap \Upsilon\langle\mathfrak{b}\rangle$ et $C = A \cap \Upsilon\langle\mathfrak{c}\rangle$ sont disjointes. Si $A$ est normal, il existe des ouverts disjoints $U$ et $V$ tels que $B \subset U$ et $C \subset V$. Si l'on passe aux adhérences dans $\Upsilon(E)$, on a $\overline{B} = \Upsilon\langle\mathfrak{b}\rangle \subset \overline{U}$ et $\overline{C} = \Upsilon\langle\mathfrak{c}\rangle \subset \overline{V}$. Comme $\widetilde{E} \subset A$, $\overline{U}$ et $\overline{V}$ sont disjoints. Donc il n'existe pas de filtre plus fin que $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$.

b) $\Rightarrow$ a). Soient $B$ et $C$ des parties fermées disjointes de $A$. Alors les filtres $\mathfrak{b} = \mathfrak{n}(B)$ et $\mathfrak{c} = \mathfrak{n}(C)$ sont A-normaux et il n'existe aucun $\mathfrak{a} \in A$ plus fin que $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$. Donc, en vertu de b), il n'existe pas de filtre plus fin que $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$. Ainsi il existe $X \in \mathfrak{b}$ et $Y \in \mathfrak{c}$ tel que $X \cap Y = \emptyset$. De sorte que $U = A \cap \Upsilon(X)$ et $V = A \cap \Upsilon(Y)$ sont des ouverts disjoints de $A$ tels que $B \subset U$ et $C \subset V$.

c. q. f. d.

**6.3. Lemme.** - *Soit $\mathfrak{a}$ un filtre $E^{\#}$-normal et soit F l'adhérence de $\mathfrak{a}$. Alors tout voisinage de F appartient à $\mathfrak{a}$.*

En effet : Soit $V$ un voisinage de $F$. Si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \in E^{\#}$ alors l'ultrafiltre $\mathfrak{b}$ converge vers un point de $F$, donc $V \in \mathfrak{b}$. Or $\mathfrak{a} = \bigcap_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \in E^{\#}} \mathfrak{b}$, donc $V \in \mathfrak{a}$.

c. q. f. d.

6.4. **Proposition.** - *Si le filtre $\mathfrak{a}$ est $E^{\#}$-normal, alors le filtre $\omega(\mathfrak{a})$ est aussi $E^{\#}$-normal.*

**En effet** : On suppose que le filtre $\mathfrak{a}$ est $E^{\#}$-normal et on pose $\mathfrak{b} = \bigcap_{\omega(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{c} \in E^{\#}} \mathfrak{c}$.

Il suffit de montrer que $\mathfrak{b} \subset \omega(\mathfrak{a})$. Soit donc $A$ une partie de $E$ telle que $A \notin \omega(\mathfrak{a})$. On pose $B = E - A$. Alors, pour tout $X \in \omega(\mathfrak{a})$, on a $B \cap X \neq \emptyset$ . Si $F$ est l'adhérence de $\mathfrak{a}$ , d'après le lemme précédent, on a $\overline{B} \cap F \neq \emptyset$. Ainsi le filtre engendré par $\omega(\mathfrak{a})$ et $B$ possède au moins un point adhérent. Il existe donc un ultrafiltre $\mathfrak{c} \in E^{\#}$ tel que $B \in \mathfrak{c}$ et $\omega(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{c}$ . Ainsi $A \notin \mathfrak{c}$ et $A \notin \mathfrak{b}$.

c. q. f. d.

6.5. **Théorème.** - *Si l'espace E est régulier (resp. quasi régulier) et si l'espace $E^{\#}$ est normal, alors E est normal (resp. quasi normal).*

**En effet** : Soient $B$ et $C$ des parties fermées disjointes, non vides, de $E$ et soient $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ les filtres des voisinages de $B$ et $C$ respectivement. D'après la proposition 6.4 et une remarque faite en 6.1, les filtres $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ sont $E^{\#}$-normaux. Si l'espace $E$ est quasi régulier, l'adhérence de $\mathfrak{b}$ est égale à $B$ et l'adhérence de $\mathfrak{c}$ est égale à $C$. Comme $B$ et $C$ sont disjoints, les filtres $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ n'ont aucun point adhérent commun, donc il n'existe aucun ultrafiltre $\mathfrak{a} \in E^{\#}$ plus fin que $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ . D'après le lemme 6.2, la réunion $\mathfrak{b} \cup \mathfrak{c}$ n'engendre pas un filtre. Il existe donc des ouverts disjoints $U \in \mathfrak{b}$ et $V \in \mathfrak{c}$ ; autrement dit $B \subset U$ et $C \subset V$. Donc l'espace $E$ est bien quasi normal.

c. q. f. d.

6.6. **Remarques.** - *Il serait intéressant de trouver, s'il en existe, un exemple où l'espace E est normal mais où l'espace $E^{\#}$ n'est pas normal.*

Le théorème 6.5 joint au corollaire 3.6 permet de voir que tout espace quasi paracompact et quasi régulier est aussi quasi normal.

## 7. Semi-compacité

On dira que l'espace $E$ est *quasi semi-compact* (en anglais on dit «countably compact») lorsque tout recouvrement ouvert *dénombrable* de $E$ contient un sous-recouvrement fini. De sorte qu'un espace *semi-compact* est un espace quasi semi-compact et séparé.

On dit que l'espace $E$ est *weierstrassien* (en anglais on dit «pseudocompact») lorsque toute fonction réelle continue sur $E$ est bornée.

On sait que *tout espace quasi semi-compact est weierstrassien.*

7.1. **Théorème.** - *Les énoncés suivants sont équivalents.*
*a) L'espace $E$ est quasi semi-compact.*
*b) L'espace $E^{\#}$ est semi-compact.*
*c) L'espace $E^{\#}$ est weierstrassien.*

En effet : a) $\Rightarrow$ b). Soit $(U_n)$ une suite croissante d'ouverts de $\Upsilon(E)$ telle que $E^{\#} \subset \bigcup U_n$. Pour tout $n$, soit $\mathcal{V}_n = \left\{X \mid \Upsilon(X) \subset U_n\right\}$ et $V_n = \bigcup_{X \in \mathcal{V}_n} \overset{\circ}{X}$. Alors $(V_n)$ est une suite croissante d'ouverts de $E$. D'après [4, 2.4 lemme 20, p. 53], on voit que la réunion des ouverts $V_n$ est égale à $E$. Si, donc, $E$ est quasi semi-compact, il existe un entier $m$ tel que $V_m = E$, donc $E^{\#} \subset U_m$ et $E^{\#}$ est bien semi-compact.

b) $\Rightarrow$ c) est immédiat.

c) $\Rightarrow$ a). Si l'espace $E$ n'est pas quasi semi-compact, il existe une suite strictement croissante $(U_n)$ d'ouverts de $E$ dont la réunion est égale à $E$. Pour tout $n > o$, soit $x_n \in U_n - U_{n-1}$. On pose $X = \left\{x_n \mid n > o\right\}$. Alors aucun ultrafiltre non principal $\mathfrak{a} \in \Upsilon(X)$ ne converge dans $E$, de sorte que $E^{\#} \cap \Upsilon(X) = \widetilde{X}$. Soit $f$ la fonction réelle définie sur $E^{\#}$ par $f(x) = o$, pour $x \in E^{\#} - \widetilde{X}$, et $f(\widetilde{x}_n) = n$, pour $n > o$. On vérifie que $f$ est une fonction continue. Comme $f$ n'est pas bornée, l'espace $E^{\#}$ n'est pas weierstrassien.

c. q. f. d.

7.2. **Contre-exemple.** - On va construire un ensemble $E$ et un sous-espace $A$ de $\Upsilon(E)$ tel que $\widetilde{E} \subset A \subset \Upsilon(E)$ où $A$ est weierstrassien sans être semi-compact.

On prend $E = \mathrm{N} \times \mathrm{N}$ où N désigne l'ensemble des entiers positifs et on pose $N_n = \{n\} \times \mathrm{N}$. Pour tout $n$, on choisit un ultrafiltre *non principal* $\mathfrak{a}_n \in \Upsilon(N_n)$. Soit $D = \left\{\mathfrak{a}_n \mid n \in \mathrm{N}\right\}$ et soit $\overline{D}$ l'adhérence de $D$ dans $\Upsilon(E)$. On prend $A = (\Upsilon(E) - \overline{D}) \cup D$, alors on a bien $\widetilde{E} \subset A \subset \Upsilon(E)$.

*Le sous-espace A n'est pas semi-compact* puisqu'il contient le sous-espace $D$ fermé discret infini.

*Par contre A est weierstrassien.* **En effet** : Soit $f$ une fonction réelle continue sur $A$. Pour voir que $f$ est bornée sur $A$, il suffit de montrer que $f$ est bornée sur $E$ car alors $f$ se prolonge en une fonction réelle continue $g$ sur tout $\Upsilon(E)$ et $g$ est bornée puisque $\Upsilon(E)$ est compact. Or $f$ est majorée sur $\widetilde{N}_n$, pour tout $n$, car sinon $f$ ne serait pas bornée sur le compact $\Upsilon(N_n) \subset A$. Soit donc $s_n$ la borne supérieure de $f$ sur $N_n$. Si la suite $(s_n)$ n'était pas majorée, il y aurait une suite $(x_m)$ de points de $E$ telle que la suite $f(\widetilde{x}_m)$ soit croissante et tende vers l'infini et telle que *dans chaque $N_n$ il y ait au plus un point de la suite.* Si donc $X = \{x_m \mid m \in \mathbb{N}\}$, on a $D \cap \Upsilon(X) = \emptyset$ donc aussi $\overline{D} \cap \Upsilon(X) = \emptyset$. Soit alors un ultrafiltre *non principal* $\mathfrak{a} \in \Upsilon(X)$. On aurait ainsi $\mathfrak{a} \in A$ et $f(\mathfrak{a})$ serait infini. Donc $f$ est majorée sur $E$. De même la fonction $-f$ est majorée sur $E$, donc $f$ est bornée.

c. q. f. d.

On remarquera en passant, qu'en vertu du théorème 7.1, *il n'existe aucune topologie sur E pour laquelle $A = E^{\#}$. Il serait intéressant de trouver une caractérisation, pour tout ensemble E, des parties de $\Upsilon(E)$ qui sont égales à $E^{\#}$ pour une topologie au moins sur E.*

Dans le contre-exemple précédent, pour montrer que $A$ est weierstrassien, on aurait pu aussi se servir du résultat suivant.

7.3. **Lemme.** - *Soit $\widetilde{E} \subset A \subset \Upsilon(E)$. Alors les énoncés suivants sont équivalents.*

*a) Le sous-espace A est weierstrassien.*

*b) L'adhérence de $(A - \widetilde{E})$ dans $\Upsilon(E)$ est égale à $\Upsilon(E) - \widetilde{E}$.*

**En effet** : Rappelons que toute fonction réelle bornée définie sur $E$ se prolonge de manière unique en une fonction réelle continue sur $\Upsilon(E)$. On peut alors vérifier que l'énoncé a) est équivalent à la *négation* de l'énoncé suivant :

c) Il existe une fonction réelle continue définie sur $A$ et une suite $(x_n)$ de points de $E$ telles que la suite $(f(\widetilde{x}_n))$ soit croissante et tende vers l'infini.

On voit ensuite facilement que l'énoncé b) est équivalent à la *négation* de l'énoncé suivant :

d) Il existe une partie dénombrable infinie $D$ de $E$ telle que $A \cap \Upsilon(D) = \widetilde{D}$.

Il suffit alors de montrer que c) $\Leftrightarrow$ d).

c) $\Rightarrow$ d). Soit $D$ l'ensemble des éléments de la suite $(x_n)$. S'il existait un ultrafiltre non principal $\mathfrak{a} \in A \cap \Upsilon(D)$, alors $f(\mathfrak{a})$ serait infini. Donc $A \cap \Upsilon(D) = \widetilde{D}$.

d) $\Rightarrow$ c). On range les éléments de $D$ en une suite $(x_n)$ et on définit une fonction réelle $f$ sur $A$ par $f(\widetilde{x}_n) = n$ et $f(a) = 0$, pour $a \in A - \widetilde{D}$. La fonction $f$ est continue.

c. q. f. d.

On peut alors donner une nouvelle démonstration du théorème 7.1 en se servant du lemme précédent et de [4, 2.2 proposition 20, p. 41].

## 8. Espaces absolument fermés

On dira que l'espace $E$ est *quasi absolument fermé* lorsque toute base de filtre sur $E$ formée d'ensembles ouverts de $E$ possède au moins un point adhérent. De sorte qu'un espace *absolument fermé* est un espace quasi absolument fermé et séparé.

Nous avons établi [4, 2.2 proposition 13, p. 40] le résultat suivant.

**8.1. Proposition.** - *Pour que l'espace E soit quasi absolument fermé, il faut et il suffit que* $E^{b} = \Upsilon(E)$.

Les espaces absolument fermés tirent leur nom de la propriété caractéristique suivante : pour que l'espace $E$ soit absolument fermé, il faut et il suffit qu'il soit séparé et que lorsque $E$ est un sous-espace d'un espace *séparé* $F$, alors $E$ soit fermé dans $F$.

Cette propriété se généralise comme suit au cas des espaces non nécessairement séparés.

8.2. **Proposition.** - *Les énoncés suivants sont équivalents.*

*a) L'espace E est quasi absolument fermé.*

*b) Lorsque*

(1) l'espace $E$ est un sous-espace d'un espace $F$ et que, pour tout couple $x$, $y$ de points de $F$ tels que $x \in F - E$ et $y \in E$, il existe des ouverts disjoints $U$ et $V$ de $F$ tels que $x \in U$ et $y \in V$, *alors E est fermé dans F.*

En effet : a) $\Rightarrow$ b). On suppose que $E$ est quasi absolument fermé et que l'espace $F$ satisfait à (1). Soit $x \in F - E$. Si tout voisinage ouvert de $x$ dans $F$ coupait $E$, la trace de ces voisinages sur $E$ serait une base de filtre sur $E$ formée d'ensembles ouverts de $E$ donc aurait un point adhérent $y \in E$, ce qui contredit (1). Donc $E$ est bien fermé dans $F$.

b) $\Rightarrow$ a). On suppose que $E$ satisfait à l'énoncé b). Soit $\mathfrak{B}$ une base de filtre sur $E$ formée d'ensembles ouverts de $E$. Si $\mathfrak{B}$ n'a pas de point adhérent, on prend un point $u \notin E$. On pose $F = E \cup \{u\}$ et on munit $F$ de la topologie dont l'ensemble des ouverts est engendré par $\mathcal{O} \cup \left\{B \cup \{u\} \mid B \in \mathfrak{B}\right\}$ où $\mathcal{O}$ est l'ensemble des ouverts de $E$. Alors $F$ satisfait bien à (1) mais $E$ n'est pas fermé dans $F$, ce qui est contradictoire. Donc $\mathfrak{B}$ possède un point adhérent.

c. q. f. d.

Rappelons qu'un espace est quasi compact si et seulement s'il est à la fois quasi absolument fermé et faiblement régulier. Cela peut se voir immédiatement en rapprochant le critère de compacité de Cartan et les propositions 8.1 et 2.2. a).

## 9. $G_\delta$-absolus

On dira que l'espace $F$ est une *extension* de l'espace $E$ lorsque $E$ est un sous-espace partout dense de $F$.

On dit que l'espace $E$ est *complet au sens de Čech* lorsque $E$ est complètement régulier et que c'est un $G_\delta$ dans toutes ses extensions complètement régulières (voir Čech [2]).

Dans ce qui suit, on étend cette notion au cas des espaces qui ne sont pas nécessairement complètement réguliers ni même séparés. Pour cela, on aura besoin de mettre en évidence certains types de séparation des extensions d'un espace topologique, analogues à la propriété (1) dans 8.2.

9.1. **Définition.** - Soit $F$ une extension de l'espace $E$.

On dira que $F$ est une extension de *type I* lorsque, pour tout couple $x$, $y$ de points distincts de $F$ tels que $x \in F - E$, il existe des ouverts disjoints $U$ et $V$ de $F$ tels que $x \in U$ et $y \in V$.

On dira que $F$ est une extension de *type II* lorsque, pour tout couple $x$, $y$ de points de $F$ tels que $x \in F - E$ et $y \in E$, il existe des ouverts disjoints $U$ et $V$ de $F$ tels que $x \in U$ et $y \in V$.

On dira que $F$ est une extension de *type III* lorsque, pour tout point $x \in F - E$, il existe un filtre sur $E$ qui converge vers $x$ dans $F$ et qui n'a pas de point adhérent dans $E$.

Evidemment, on a les implications suivantes
$F$ est séparé $\Rightarrow$ $F$ est de type I $\Rightarrow$ $F$ est de type II $\Rightarrow$ $F$ est de type III.
D'autre part, *lorsque l'espace E est séparé, toute extension de type I de E est séparée.*

9.2. **Proposition.** - *Les énoncés suivants sont équivalents.*
*a) L'espace E est quasi compact.*
*b) La seule extension de type III de E est E lui-même.*
*c) Toute extension de type III de E est une extension de type II de E.*

En effet : Les implications a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) sont immédiates.
c) $\Rightarrow$ a). On considère un point $u \notin E$, on pose $F = E \cup \{u\}$ et on munit $F$ de la topologie dont l'ensemble des ouverts est égal à $\mathcal{O} \cup \{F\}$ où $\mathcal{O}$ est l'ensemble des ouverts de $E$. Si $E$ n'est pas quasi compact, $F$ est une extension de type III de $E$ qui n'est pas une extension de type II.

c. q. f. d.

Le résultat suivant est un corollaire de la proposition 8.2.

9.3. **Proposition.** - *Pour que la seule extension de type II de l'espace E soit E lui-même, il faut et il suffit que E soit quasi absolument fermé.*

9.4. **Définition.** - On dira que l'espace $E$ est un $G_\delta$-*absolu* lorsque $E$ est un $G_\delta$ dans toutes ses extensions de type III.

On dira que l'espace $E$ est un $G_\delta$-*achevé* lorsque $E$ est un $G_\delta$ dans toutes ses extensions de type II.

Ainsi, tout espace quasi compact est un $G_\delta$-absolu (proposition 9.2). Tout espace quasi absolument fermé est un $G_\delta$-achevé (proposition 9.3). De plus, tout espace qui est un $G_\delta$-absolu est aussi un $G_\delta$-achevé mais la réciproque est fausse, comme on le verra plus bas en 9.14 b). Cependant, on a le résultat suivant.

9.5. **Proposition.** - *Dans la classe des espaces faiblement réguliers, tout $G_\delta$-achevé est un $G_\delta$-absolu.*

Cela découlera immédiatement des théorèmes 9.6 et 9.10 et de la proposition 2.2 a).

9.6. **Théorème.** - *Pour que l'espace E soit un $G_\delta$-absolu, il faut et il suffit que $E^{\#}$ soit un $G_\delta$ dans $\Upsilon(E)$.*

En effet : On considère l'ensemble $F = (\Upsilon(E) - E^{\#}) \cup \widetilde{E}$ que l'on munit de la topologie ayant pour base d'ouverts l'ensemble $\{F \cap \Upsilon(X) \mid X \in \mathcal{O}\}$ où $\mathcal{O}$ est l'ensemble des ouverts de $E$. Alors l'application $\varphi : E \to F$ définie par $\varphi(x) = \widetilde{x}$ est un homéomorphisme de $E$ sur le sous-espace $\widetilde{E}$ de $F$. De plus $F$ est une extension de type III de $\widetilde{E}$ car pour tout $\mathfrak{a} \in \Upsilon(E) - E^{\#}$, l'image de $\mathfrak{a}$ par $\varphi$ est un ultrafiltre sur $\widetilde{E}$ qui converge vers $\mathfrak{a}$ dans $F$ et qui n'a pas de point adhérent dans $\widetilde{E}$. Si l'espace $E$ est un $G_\delta$-absolu, il en est de même du sous-espace $\widetilde{E}$ de $F$ qui lui est homéomorphe. Donc $\widetilde{E}$ est un $G_\delta$ dans $F$. Il existe ainsi une suite $(U_n)$ d'ouverts de $F$ telle que $\widetilde{E} = \bigcap U_n$. Pour tout $n$, il existe un recouvrement ouvert $\mathfrak{R}_n$ de $E$ pour lequel $U_n = F \cap V_n$ où $V_n = \bigcup_{X \in \mathfrak{R}_n} \Upsilon(X)$. Il suffit alors de remarquer que $V_n$ est un ouvert de $\Upsilon(E)$ tel que $E^{\#} \subset V_n$ pour voir que $E^{\#} = \bigcap V_n$ est un $G_\delta$ dans $\Upsilon(E)$.

Réciproquement, soit $F$ une extension de type III de $E$. Si $E^{\#}$ est un $G_\delta$ dans $\Upsilon(E)$, il existe une suite $(U_n)$ d'ouverts de $\Upsilon(E)$ telle que $E^{\#} = \bigcap U_n$. Pour tout $n$, l'ensemble $A_n = \Upsilon(E) - U_n$ est un fermé de $\Upsilon(E)$. Il existe donc un filtre $\mathfrak{a}_n$ sur $E$ tel que $\Upsilon\langle\mathfrak{a}_n\rangle = A_n$. Soit $F_n$ l'adhérence du filtre $\mathfrak{a}_n$ *dans* $F$. Comme $E^{\#} \cap \Upsilon\langle\mathfrak{a}_n\rangle = \emptyset$, il n'existe aucun ultrafiltre convergent sur $E$ qui soit plus fin que $\mathfrak{a}_n$. Donc le fermé $F_n$ ne coupe pas $E$. Ainsi $V_n = F - F_n$ est un ouvert de $F$ qui contient $E$, de sorte que $V = \bigcap V_n$ est un $G_\delta$ de $F$ qui contient $E$. Or, si un ultrafiltre $\mathfrak{a}$ sur $E$ converge dans $F$ vers un point $x \in V_n$, alors $\mathfrak{a} \in U_n$. Donc, si un ultrafiltre $\mathfrak{a}$ sur $E$ converge dans $F$ vers un point $x \in V$, alors $\mathfrak{a} \in E^{\#}$ et, puisque $F$ est une extension de type III de $E$, alors $x \in E$. Donc $E = V$ est un $G_\delta$ dans $F$.

c. q. f. d.

9.7. **Rappels.** - a) Supposons que l'espace $E$ soit complètement régulier et soit $K$ son compactifié de Čech. Il existe alors une application continue canonique $f: \Upsilon(E) \to K$ telle que $E^{\#} = \overset{-1}{f}(E)$.

b) Pour qu'un espace soit complet au sens de Čech, il faut et il suffit qu'il soit un $G_\delta$ dans au moins un espace compact. Voir Čech [ 2 ].

9.8. **Corollaire.** - *Pour qu'un espace soit complet au sens de Čech, il faut et il suffit qu'il soit un $G_\delta$-absolu complètement régulier.*

**En effet** : Si l'espace est complet au sens de Čech, il est complètement régulier par définition et d'après le rappel 9.7 a), $E^{\#}$ est un $G_\delta$ dans $\Upsilon(E)$, donc $E$ est un $G_\delta$-absolu d'après le théorème 9.6. La réciproque est immédiate.

c. q. f. d.

9.9. **Corollaire.** - *Pour que l'espace $E$ soit un $G_\delta$-absolu, il faut et il suffit que l'espace $E^{\#}$ soit un $G_\delta$-absolu.*

Cela découle immédiatement du théorème 9.6, du corollaire précédent et du rappel 9.7 b).

La démonstration du résultat qui suit est analogue à celle du théorème 9.6.

**9.10. Théorème.** - *Les énoncés suivants sont équivalents.*

*a) L'espace E est un $G_\delta$-achevé.*

*b) L'espace E est un $G_\delta$ dans toutes ses extensions de type I.*

*c) Il existe une partie A qui est un $G_\delta$ dans $\Upsilon(E)$ et telle que $E^{\#} \subset A \subset E^{b}$.*

En effet : a) $\Rightarrow$ b) est immédiat puisque toute extension de type I est une extension de type II.

b) $\Rightarrow$ c). On désigne par $\mathcal{O}$ l'ensemble des ouverts de $E$ et par $\mathfrak{B}$ l'ensemble des parties de $\mathcal{O}$ qui sont des bases de filtres sur $E$. L'ensemble $\mathfrak{B}$, ordonné par inclusion, est inductif. On désignera par $\mathfrak{M}$ l'ensemble des éléments maximaux de $\mathfrak{B}$. Pour tout $\mathfrak{b} \in \mathfrak{M}$, on choisit un ultrafiltre $\mathfrak{a}_{\mathfrak{b}}$ tel que $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}_{\mathfrak{b}} \in \Upsilon(E)$. On pose $M = \left\{ \mathfrak{a}_{\mathfrak{b}} \mid \mathfrak{b} \in \mathfrak{M} \text{ et } \mathfrak{b} \text{ n'a pas de point adhérent} \right\}$ et $F = \widetilde{E} \cup M$. On munit $F$ de la topologie ayant pour base d'ouverts l'ensemble $\{F \cap \Upsilon(X) \mid X \in \mathcal{O}\}$. Alors l'application $\varphi : E \to F$ définie par $\varphi(x) = \widetilde{x}$ est un homéomorphisme de $E$ sur le sous-espace $\widetilde{E}$ de $F$. De plus $F$ est une extension de type $I$ de $\widetilde{E}$, comme on peut le vérifier. Comme $\widetilde{E}$ est homéomorphe à $E$, si l'espace $E$ satisfait à l'énoncé b), alors $\widetilde{E}$ est un $G_\delta$ dans $F$. Il existe ainsi une suite $(U_n)$ d'ouverts de $F$ telle que $\widetilde{E} = \cap U_n$. Pour tout $n$, il existe un recouvrement ouvert $\mathfrak{R}_n$ de $E$ pour lequel $U_n = F \cap V_n$ où $V_n = \bigcup_{X \in \mathfrak{R}_n} \Upsilon(X)$. Il suffit alors de remarquer que $V_n$ est un ouvert de $\Upsilon(E)$ tel que $E^{\#} \subset V_n$ pour voir que $A = \cap V_n$ est un $G_\delta$ dans $\Upsilon(E)$ et que $E^{\#} \subset A \subset E^{b}$ (la dernière inclusion découle de la construction de $M$).

c) $\Rightarrow$ a). Soit $F$ une extension de type II de $E$. Si la condition c) est remplie, il existe une suite $(U_n)$ d'ouverts de $\Upsilon(E)$ telle que $E^{\#} \subset A \subset E^{b}$ où $A = \cap U_n$. Pour tout $n$, l'ensemble $A_n = \Upsilon(E) - U_n$ est un fermé de $\Upsilon(E)$. Il existe donc un filtre $\mathfrak{a}_n$ sur $E$ tel que $\Upsilon\langle \mathfrak{a}_n \rangle = A_n$. Soit $F_n$ l'adhérence du filtre $\mathfrak{a}_n$ *dans* $F$. Comme $E^{\#} \cap \Upsilon\langle \mathfrak{a}_n \rangle = \emptyset$, il n'existe aucun ultrafiltre convergent sur $E$ qui soit plus fin que $\mathfrak{a}_n$. Donc le fermé $F_n$ ne coupe pas $E$. Ainsi $V_n = F - F_n$ est un ouvert de $F$ qui contient $E$, de sorte que $V = \cap V_n$ est un $G_\delta$ de $F$

qui contient $E$. Or, si un ultrafiltre $\mathfrak{a}$ sur $E$ converge dans $F$ vers un point $x \in V_n$, alors $\mathfrak{a} \in U_n$. Donc, si un ultrafiltre $\mathfrak{a}$ sur $E$ converge dans $F$ vers un point $x \in V$, alors $\mathfrak{a} \in A \subset E^b$, donc $\omega(\mathfrak{a})$ possède un point adhérent dans $E$, donc le filtre des voisinages de $x$ *dans* $F$ possède un point adhérent *dans* $E$ ; mais puisque $F$ est une extension de type II de $E$, on a $x \in E$. Donc $E = V$ est un $G_\delta$ dans $F$.

c. q. f. d.

**9.11. Corollaire.** - *Pour qu'un espace séparé soit un $G_\delta$-achevé, il faut et il suffit qu'il soit un $G_\delta$ dans toutes ses extensions séparées.*

**En effet** : On se sert de l'équivalence a) $\Leftrightarrow$ b) du théorème précédent et du fait que toute extension de type I d'un espace séparé est séparée.

c. q. f. d.

**9.12. Corollaire.** - *Pour qu'un espace régulier soit un $G_\delta$-absolu, il faut et il suffit qu'il soit un $G_\delta$ dans toutes ses extensions séparées.*

Cela découle du corollaire précédent et de la proposition 9.5.

**9.13. Proposition.** - *Tout sous-espace fermé d'un $G_\delta$-absolu est un $G_\delta$-absolu.*

**En effet** : On suppose que $E$ est un $G_\delta$-absolu. Soit $F$ un sous-espace fermé de $E$. Alors $F^\#$ s'identifie au sous-espace $E^\# \cap \Upsilon(F)$ de $\Upsilon(E)$. D'après le théorème 9.6, $E^\#$ est un $G_\delta$ dans $\Upsilon(E)$, donc $E^\# \cap \Upsilon(F)$ est un $G_\delta$ dans le sous-espace compact $\Upsilon(F)$ identifié à l'espace des ultrafiltres sur $F$. D'après le théorème 9.6, $F$ est donc un $G_\delta$-absolu.

c. q. f. d.

**9.14. Contre-exemples.** - Soit $I = [0,1]$ l'intervalle unité de la droite réelle. Soit $A$ l'ensemble des nombres rationnels appartenant à $I$ et $B = I - A$ l'ensemble des nombres irrationnels appartenant à $I$. Le sous-espace $B$ est complet au sens de Čech (voir rappel 9.7 b)). Ainsi $B$ est un $G_\delta$-absolu. Mais $A$ est dense dans $I$ et n'est pas un $G_\delta$ dans $I$ (car $I$ est un espace de Baire tandis que $A$ n'est pas un espace de Baire). Ainsi $A$ n'est pas un $G_\delta$-achevé.

a) En adjoignant $B$ aux parties ouvertes de $I$, on engendre une nouvelle topologie sur l'ensemble $I$. Désignons par $E$ le nouvel espace ainsi obtenu. Tout ultrafiltre sur $B$ converge encore dans $E$ et $B$ est partout dense dans $E$. Donc l'espace $E$ est absolument fermé, voir Bourbaki [1, I, 9, exerc. 23 a), p. 168]. Ainsi *l'espace $E$ est un $G_\delta$-achevé, alors que son sous-espace* fermé *$A$ n'est pas un $G_\delta$-achevé.*

b) Il est clair ainsi, d'après la proposition 9.13, que *l'espace $E$ n'est pas un $G_\delta$-absolu, alors que c'est un $G_\delta$-achevé.*

c) On peut retopologiser l'ensemble $I$ en adjoignant cette fois $A$ aux parties ouvertes de l'espace $I$. Désignons par $F$ l'espace ainsi obtenu. En identifiant l'espace des ultrafiltres sur $B$ au sous-espace $\Upsilon(B)$ de $\Upsilon(F)$, on identifie l'espace $B^{\#}$ à la partie $D = F^{\#} \cap \Upsilon(B)$. Ainsi $D$ est un $G_\delta$ dans $\Upsilon(B)$ car $B$ est un $G_\delta$-absolu. Comme $F^{\#} = \Upsilon(A) \cup D$, on voit alors que $F^{\#}$ est un $G_\delta$ dans $\Upsilon(F)$. Donc *l'espace $F$ est un $G_\delta$-absolu, alors que son sous-espace* ouvert *$A$ n'est pas un $G_\delta$-absolu ni même un $G_\delta$-achevé.*

9.15. **Remarque.** - En rapprochant le lemme 5.1 des théorèmes 5.2 et 9.6, on voit qu'un espace $E$, dans lequel tout point possède un voisinage $V$ tel que tout ultrafiltre sur $V$ converge dans $E$, est un $G_\delta$-absolu puisqu'alors $E^{\#}$ est un ouvert de $\Upsilon(E)$.

En particulier, tout espace localement compact est un $G_\delta$-absolu.

On sait que tout $G_\delta$ dans un espace complet au sens de Čech est aussi complet au sens de Čech. On peut le voir facilement à l'aide du rappel 9.7 b). On ajoutera, pour terminer, le résultat suivant qui contraste avec le contre-exemple 9.14 c).

9.16. **Proposition.** - *Tout $G_\delta$ dans un $G_\delta$-absolu* quasi régulier *est aussi un $G_\delta$-absolu.*

Cela découle du lemme suivant et des corollaires 9.8 et 9.9.

9.17. **Lemme.** - *Si l'espace $E$ est quasi régulier et si $F$ est un $G_\delta$ dans $E$, alors $F^{\#}$ s'identifie à un $G_\delta$ de $E^{\#}$.*

**En effet** : Si l'on identifie l'espace des ultrafiltres sur $F$ au sous-espace $\Upsilon(F)$ de $\Upsilon(E)$, alors $F^{\#}$ s'identifie au sous-espace $A = \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \in \Upsilon(F)$ et $\mathfrak{a}$ converge vers un point de $F\}$ de $\Upsilon(E)$. Soit alors $(G_n)$ une suite d'ouverts de $E$ telle que $F = \bigcap G_n$. Pour tout entier $n$ et tout $x \in F$, soit $U_{x,n}$ un voisinage ouvert de $x$ dans $F$ tel que *dans* $E$ on ait $\overline{U}_{x,n} \subset G_n$. On pose $U_n = \bigcup_{x \in F} \Upsilon(U_{x,n})$ et $B = E^{\#} \cap (\bigcap U_n)$. Alors $B$ est un $G_\delta$ de $E$ et $B \subset \Upsilon(F)$. On va voir que $A = B$. Soit $\mathfrak{a} \in A$, alors $F \in \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}$ converge vers un point $x \in F$. Pour tout $n$, on a ainsi $U_{x,n} \in \mathfrak{a}$, donc $\mathfrak{a} \in U_n$. De sorte que $\mathfrak{a} \in B$. Réciproquement, soit $\mathfrak{a} \in B$. Pour tout $n$, comme $\mathfrak{a} \in U_n$, il existe $x$ tel que $\mathfrak{a} \in U_{x,n} \subset \overline{U}_{x,n} \subset G_n$. Donc l'adhérence de $\mathfrak{a}$ est contenue dans $G_n$, pour tout $n$, donc elle est contenue dans $F$. Comme, d'autre part, $\mathfrak{a}$ converge dans $E$ par hypothèse et que $F \in \mathfrak{a}$, on a bien $\mathfrak{a} \in A$.

c. q. f. d.

## BIBLIOGRAPHIE

1. N. BOURBAKI, Eléments de mathématiques, *Act. Sci. Ind.*, Hermann, Paris, Livre III, *Topologie générale*, chap. I, II, 3ème éd., 1961.

2. E. ČECH, On bicompact spaces, *Ann. Math.*, 38 (1937) 823-844.

3. L. HADDAD, Sur quelques points de topologie générale, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 266 (1968) 613-615.

4. L. HADDAD, Sur quelques points de topologie générale. Théorie des nasses et des tramails, *Ann. Fac. Sci. Univ. Clermont*, n° 44, 1970, fasc. 7, p. 3-80.

5. L. HADDAD, Sur la topologie générale, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 272 (1971) 217-220.

(Manuscrit reçu en octobre 1972)